

# Analiza faznih prijelaza u kompleksnim mrežama

---

**Medvidović, Matija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:443018>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-08**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ivo Duvnjak

ZAKONI OČUVANJA U MEĐUDJELUJUĆIM  
MREŽAMA

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Ivo Duvnjak**

Diplomski rad

**ZAKONI OČUVANJA U  
MEĐUDJELUJUĆIM MREŽAMA**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2017.

Zahvaljujem se mentoru, izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na savjetima, strpljenju i vodstvu pri odabiru i izradi rada, a također na razgovorima i savjetima koji su me ohrabрили u odabiru karijere.

Zahvaljujem se izv. prof. dr. sc. Petru Hrženjaku, na stručnim savjetima i moralnoj podršci.

Hvala mojim roditeljima na bezuvjetnoj potpori, ulaganju i vjeri u mene i moj uspjeh, a posebno hvala mojoj supruzi Miji, za svu radost i snagu koju mi je pružila, te bila neprestana podrška svih ovih godina.

## Sažetak

U diplomskom radu proučavat će se međudjelujuće kompetitivne mreže. Primjer takvih mreža možemo naći u biološkim sustavima (kompetitivnost malignog i zdravog tkiva kod organa), odnos predator-lovina, države pod sankcijama te napadi na računalno mrežnu infrastrukturu. Osnovni model izradit će se na međudjelovanju dvije mreže, jedne više, a druge manje otporne na napade. Definirat ćemo zakon očuvanja koji povezuje mehanizam povratne sprege napada i preuzimanja čvorova među mrežama. Tako definirani zakon odredit će dužinu trajanja napada i njegov trošak, što se koristi kao inicijalna procjena rizika.

Ključne riječi: kompleksni sustavi, međudjelujuće mreže, zakoni očuvanja, fazni prijelazi, robusnost, statistička fizika

# Conservation laws in interacting networks

## Abstract

The graduate thesis will explore the interaction of competing networks. An example of such networks we can find in biological systems (the competitiveness of malignant and healthy tissue of organs), predator-prey relationship, economic sanctions and attacks on computer network infrastructure. The basic model will be constructed on the interaction of two networks. One network is more resilient, and the other less resistant to attacks. We will define the law of conservation that links the feedback mechanism of the attack and takeover of the nodes between networks. The law so defined will determine the duration of the attack and its cost, which is used as an initial risk assessment.

Keywords: complex systems, interacting networks, conservation laws, phase transitions, robustness, statistical physics

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kompleksni sustavi</b>	<b>3</b>
2.1	Kompleksne mreže . . . . .	3
2.2	Matrica vezanja . . . . .	5
2.3	Težinske mreže . . . . .	7
2.4	Udaljenost čvorova . . . . .	7
2.5	Povezanost unutar mreže . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Erdos-Renyi mreža</b>	<b>13</b>
3.1	Raspodjela stupnja vezanja . . . . .	13
3.2	Evolucija nasumičnih mreža . . . . .	15
3.3	Nasumične mreže u modeliranju problema . . . . .	17
3.4	”Scale-free” mreže . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Barabasi-Albert mreža</b>	<b>20</b>
4.1	Dinamika stupnja vezanja . . . . .	21
4.2	Raspodjela stupnja vezanja . . . . .	23
4.3	Evolucijske mreže . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Međudjelujuće mreže</b>	<b>28</b>
<b>6</b>	<b>Teorijski model</b>	<b>31</b>
6.1	Rezultati . . . . .	31
6.1.1	Fazni dijagrami . . . . .	35
6.2	Preuzimanje i zakon očuvanja . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>40</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Model međudjelujućih mreža u Julia programskom jeziku</b>	<b>41</b>
A.1	Parametri mreže . . . . .	41
A.2	Funkcije . . . . .	41
A.2.1	Funkcija za generiranje Mreže1 i Mreže2 . . . . .	41

A.2.2	Funkcija za međusobno spajanje Mreže1 i Mreže2 . . . . .	42
A.2.3	Funkcija "External Failure" . . . . .	42
A.2.4	Funkcija "Internal Failure" . . . . .	43
A.2.5	Funkcija "Active/Inactive Nodes" . . . . .	43
A.2.6	Funkcija za inicijalizaciju spina, Dead(0) OR Alive(1) . . . . .	44
A.2.7	Funkcija za dinamiku sustava . . . . .	44

<b>Literatura</b>		<b>45</b>
-------------------	--	-----------



# 1 Uvod

Društveni sustavi formirani su (djelomično) od ljudi, a mozak je formiran od neurona, molekule su formirane od atoma, a sve su to primjeri kompleksnih sustava. Proučavanje kompleksnih sustava se prožima kroz cijelu znanost, kao i kroz inženjering, i medicinu, a također je bitna za umjetnost, povijest, književnost i druge humanističke znanosti. Novi pristupi su važni kako bi unaprijedili naše razumijevanje i mogućnosti koje pruža proučavanje kompleksnih sustava [1, 2].

Često u znanosti kada želimo znati što i kako nešto radi, prvo krenemo od zapažanja da je sve izgrađeno od dijelova. Dakle ako promotrimo sustav i prepoznamo kako djeluju njegovi dijelovi, to nam može pomoći da saznamo kako taj sustav funkcionira. Kada pogledamo jedan od dijelova, shvaćamo da je i on sastavljen od dijelova, pa je sljedeći korak pogledati dijelove koji čine dio. To napreduje sve dok nismo često zaboravili što je ono što smo pokušali učiniti na prvom mjestu.

Znanost je postigla veliki napredak razdvajanjem stvari, no ono što je izostavljeno iz ovog pristupa je problem razumijevanja odnosa između dijelova, te je sve jasnije da se mnoga važna pitanja mogu riješiti samo pažljivijim razmišljanjem o odnosima [3, 4]. Kao disciplina, kompleksni sustavi su novo područje znanosti koje proučava kako dijelovi sustava i njihovi odnosi utječu na kolektivno ponašanje sustava i kako se sustav međusobno povezuje sa svojom okolinom.

Uzbuđenje znanstvenika i javnosti o ovom novom polju odražava njegov potencijalni utjecaj na našu sposobnost da razumijemo pitanja koja utječu na svakodnevni život, perspektive na svijet oko nas, temeljne filozofske rasprave, uključujući i mnoga društvena pitanja, dinamiku društvenih mreža, Internet i World Wide Web, biomedicinska pitanja, psihologija, ekologija i globalni razvoj.

Međudjelujući kompleksni sustavi su tema koju ćemo u ovom radu detaljnije proučavati, a također ćemo napraviti reprezentativni model međudjelujućih sustava kako bi opisali proces kompetitivnog međudjelovanja između dva sustava. Sve to radimo u cilju boljeg razumijevanja realnih kompleksnih sustava kao što su međunarodna politika i ekonomija, zatim interakcije zaraženog i zdravog tkiva kod organa, te odnos lovca-lovina u ekosustavu.

U drugom poglavlju smo definirali bitne pojmove i matematičke alate koji se koriste kako bi uspješno izgradili, opisali i proučavali kompleksne sustave.

U trećem poglavlju smo proučili prvi relevantni model kompleksnih mreža, nasumične mreže. Usporedili smo nasumične mreže sa realnim kompleksnim mrežama, te uveli pojam "scale-free" mreže.

U četvrtom poglavlju smo ispitali Barabasi-Albert model za generiranje "scale-free" mreža, te smo dali pregled značajnih svojstava modela.

U petom poglavlju smo opisali izazove i dali pregled aktualnih radova na temu međudjelujućih mreža.

U šestom poglavlju smo predstavili vlastiti teorijski model međudjelujućih mreža. Numeričkim simulacijama smo dobili rezultate koje smo kasnije prikazali u faznim dijagramima. Zatim smo definirali mehanizam preuzimanja i zakon očuvanja u međudjelujućim mrežama. Rezultate smo komentirali i izvukli zaključke.

Dodatak sadrži Julia programski kod koji smo koristili u numeričkim simulacijama.

## 2 Kompleksni sustavi

U ovom poglavlju ćemo dati metode opisivanja kompleksnih sustava preko kompleksnih mreža, te ćemo dati pregled nekih važnijih pojmova koji su jako bitni u proučavanju i razumijevanju općenitih kompleksnih sustava [3, 5–7].

U kontekstu teorije kompleksnih mreža, netrivialnu topološku strukturu velikih mreža često ćemo istraživati i opisivati pomoću različitih statističkih distribucija.

### 2.1 Kompleksne mreže

Kako bi mogli proučavati kompleksni sustav, prvo je potrebno skicirati sustav. To postićemo tako da kreiramo kompleksnu mrežu, koja se sastoji od komponenata sustava i njihovih međusobnih interakcija.

Komponente mreže nazivamo čvorovima ili vrhovima, a njihove izravne interakcije nazivamo vezama ili rubovima. Repräsentacija mreže nam nudi zajednički jezik za proučavanje sustava koji se uvelike razlikuju po prirodi, izgledu, ili opsegu.

Broj čvorova ćemo označiti sa  $N$ , što predstavlja broj komponenti u sustavu. Često ćemo za  $N$  govoriti da je veličina mreže.

Broj veza ćemo označiti sa  $L$ , koji predstavlja ukupan broj interakcija između čvorova.

Veze mreže se mogu razlikovati, pa mogu biti usmjerene ili neusmjerene. Neki sustavi imaju usmjerene veze, poput WWW-a, čiji su jedinstveni resursni lokatori (URL) usmjereni s jednog internet dokumenta na drugi ili telefonski pozivi, gdje jedna osoba zove drugu.

Drugi sustavi prikazuju neusmjerene veze, poput dalekovoda na mreži na kojima električna struja može proći u oba smjera ili trgovačkih veza gdje razmjena dobara ide u oba smjera.

Mreža se naziva usmjerenom ako su sve njezine veze usmjerene ili neusmjerenom ako su sve njezine veze neusmjerene. Neke mreže mogu istodobno imati i usmjerene i neusmjerene veze.

Ključno svojstvo svakog čvora je njegov stupanj vezanja, koji predstavlja broj veza koje ima sa drugim čvorovima. Stupanj može predstavljati broj mobilnih telefonskih kontakata koje pojedinac ima u imeniku (tj. broj različitih osoba s kojima je razgovarala) ili broj citata istraživačkog rada.

S  $k_i$  označavamo stupanj vezanja  $i$ -tog čvora u mreži.

U neusmjerenom mreži ukupan broj veza,  $L$ , može biti izražen kao zbroj stupnjeva vezanja svakog čvora:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \quad (2.1)$$

Ovdje faktor  $1/2$  korigira činjenicu da se u zbroju (2.1) svaka veza broji dva puta. Važno svojstvo mreže je njezin prosječni stupanj vezanja, što je za neusmjerenu mrežu

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N} \quad (2.2)$$

Dok u neusmjerenim vezama imamo samo jedan stupanj vezanja, u usmjerenim mrežama razlikujemo ulazni stupanj vezanja  $k_i^{in}$ , čvor koji predstavlja broj veza koji usmjeravaju u  $i$ -ti čvor, i izlazni stupanj vezanja,  $k_i^{out}$ , koji predstavlja broj veza koje upućuju s  $i$ -tog čvora na druge čvorove. Ukupni stupanj vezanja,  $k_i$ , dan je jednadžbom

$$k_i = k_i^{in} + k_i^{out} \quad (2.3)$$

Na primjer, na WWW-u broj stranica na koje dani dokument upućuje je izlazni stupanj vezanja,  $k_i^{out}$ , a broj drugih dokumenata koji upućuju na njega predstavlja njezin ulazni stupanj vezanja,  $k_i^{in}$ . Ukupan broj veza u usmjerenom mreži je

$$L = \sum_{i=1}^N k_i^{in} = \sum_{i=1}^N k_i^{out} \quad (2.4)$$

Za usmjerenu mrežu odvojeno se računaju izlazni i ulazni stupnjevi vezanja pa je faktor  $1/2$  odsutan u jednadžbi (2.4). Prosječni stupnjevi vezanja za usmjerenu mrežu su

$$\langle k_i^{in} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{in} = \langle k_i^{out} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{out} = \frac{L}{N} \quad (2.5)$$

Dalje ćemo uvesti statističku distribuciju stupnja vezanja  $p_k$  koja će nam dati vjerojatnost da nasumično odabran čvor u mreži ima stupanj vezanja  $k$ . Za  $p_k$  vrijedi

$$\sum_{k=1}^N p_k = 1 \quad (2.6)$$

jer je vjerojatnost  $p_k$  potrebno normirati. Za fiksnu mrežu s  $N$  čvorova raspodjela stupnja vezanja je normalizirani histogram

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (2.7)$$

Gdje je  $N_k$  je broj čvorova stupnja  $k$ . Stoga broj čvorova stupnja  $k$  može se dobiti iz stupnja distribuciju kao  $N_k = Np_k$ . Distribucija stupnja odigrala je središnju ulogu u teoriji mreže nakon otkrića "scale-free" mreža [6]. Još jedan razlog za njegovu važnost je da izračun većine mrežnih svojstava zahtijeva da znamo  $p_k$ . Na primjer, prosječni stupanj vezanja mreže može biti napisan kao

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^N kp_k \quad (2.8)$$

Precizni funkcionalni oblik  $p_k$  određuje mnoge mrežne pojave vezane uz njenu topologiju.

## 2.2 Matrica vezanja

Kako bi dobili potpuni opis kompleksnog sustava i njegove mreže, moramo točno zapisati sve njegove veze. Matematički je to jednostavno ako veze zapišemo preko matrice. Takvu matricu zovemo matrica vezanja kompleksne mreže. Matrica vezanja usmjerene mreže sa  $N$  čvorova ima  $N$  redaka i  $N$  stupaca, a elementi su:

- $A_{ij} = 1$ , ako postoji veza između čvora  $i$  i čvora  $j$ ,
- $A_{ij} = 0$ , ako ne postoji veza između čvora  $i$  i čvora  $j$ ,

Matrica vezanja neusmjerene mreže ima dva unosa za svaku vezu, npr. veza čvorova  $(1, 2)$  je predstavljena preko članova matrice  $A_{12} = 1$  i  $A_{21} = 1$ . Možemo vidjeti da je matrica vezanja neusmjerene mreže simetrična, tj.  $A_{ij} = A_{ji}$ .

Stupanj vezanja  $k_i$   $i$ -tog čvora može se izravno dobiti iz elemenata susjedne matrice. Za neusmjerene mreže stupanj čvora je zbroj preko redaka ili stupaca matrice,

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} = \sum_{i=1}^N A_{ij} \quad (2.9)$$

Za usmjerene mreže, sume redaka i stupaca matrice vezanja nam daju broj ulaznih

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (2.10)$$

i izlaznih stupnjeva vezanja pojedinog čvora

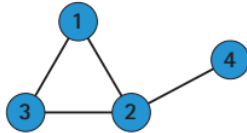
$$k_i^{out} = \sum_{i=1}^N A_{ij} \quad (2.11)$$

Na slici (2.1) su prikazani primjeri matrice vezanja, računanja stupnja vezanja čvora i prosječnog stupnja vezanja mreže za neusmjerene i usmjerene mreže.

### Matrica vezanja

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

#### Neusmjerena mreža



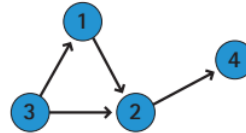
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \sum_{j=1}^4 A_{2j} = \sum_{i=1}^4 A_{i2} = 3$$

$$A_{ij} = A_{ji} \quad A_{ii} = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

#### Usmjerena mreža



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_2^{in} = \sum_{j=1}^4 A_{2j} = 2$$

$$k_2^{out} = \sum_{i=1}^4 A_{i2} = 1$$

$$A_{ij} \neq A_{ji} \quad A_{ii} = 0$$

$$L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle = \frac{L}{N}$$

Slika 2.1: Matrica vezanja i primjeri za neusmjerenu i usmjerenu mrežu. Također su prikazani primjeri izračuna stupnja vezanja za pojedini čvor, skupa sa formulama za ukupni broj veza i prosječnim stupnjem vezanja za svaku vrstu mrežu

## 2.3 Težinske mreže

Često možemo naići na sustave u kojima je i jakost veze bitan faktor. Primjer jednog takvog sustava je mozak, gdje svaki pojedini neuron može oblikovati tisuće veza s drugim neuronima, a što je više signala poslano između dva neurona, to je i veza između ta dva neurona jača. Funkcionalno povezani neuroni međusobno se povezuju kako bi formirali neuronske mreže a veze između neurona nisu statične, i mijenjaju se tijekom vremena. Zbog toga jakost veze između pojedinih neurona može varirati i predstavlja bitan faktor u opisivanju sustava. Takve sustave opisujemo težinskim mrežama gdje se radi o mrežama za koje sve veze nisu iste težine, tj.  $A_{ij} \neq 1$ . U težinskim mrežama svaka veza  $(i, j)$  ima jedinstveni težinski faktor  $w_{ij}$ . Za težinske mreže elementi matrice vezanja nose težinu veze

$$A_{ij} = w_{ij}. \quad (2.12)$$

U mrežama mobilnih poziva težina može predstavljati ukupan broj minuta koji dva korisnika mobilnih telefona međusobno razgovaraju na telefonu. Na mreži napajanja težina je količina struje koja prolazi kroz prijenosnu liniju. Većina mreža znanstvenog interesa su težinske, ali mi ne možemo uvijek mjeriti odgovarajuće težinske faktore. Stoga je često praksa da se u aproksimacijama zanemaruje potreba za opisom preko težinskih faktora.

## 2.4 Udaljenost čvorova

U fizikalnim sustavima udaljenost između komponenti je važan pojam, a mnoga svojstva sustava ovise o njihovim međusobnim udaljenostima. Stoga komponente sustava su karakterizirane udaljenostima, kao što je udaljenost između dva atoma u kristalu, ili između dvije galaksije u svemiru.

Pojam udaljenosti u kompleksnim mrežama je zanimljiv koncept, jer nije skroz jasno što bi predstavljalo udaljenost između dvije web stranice na WWW-u ili dva pojedinaca koji se možda poznaju ili ne poznaju.

Fizička udaljenost nije relevantna ovdje, jer dvije web stranice povezane međusobno bi mogle biti na računalima na suprotnim stranama svijeta, a dvije osobe, koje žive u istoj zgradi, mogu biti stranci jedan drugome.

Stoga smo u kompleksnim mrežama fizičku udaljenost zamijenili sa dužinom

puta. Put je putanja koja teče duž veza mreže, a njezina duljina predstavlja broj veza koje put sadrži. Put može presijecati i prolaziti kroz istu vezu više puta.

Najkraći put (ili geodetska staza) između  $i$ -tog čvora i  $j$ -tog čvora je put s najmanjim brojem veza. Najkraći put se često naziva udaljenost između čvorova  $i$  i  $j$ , i označen je  $d_{ij}$ , ili jednostavno  $d$ .

Često možemo pronaći više kratkih putova iste duljine  $d$  između para čvorova. Najkraći put nikada ne sadrži petlje ili se presijeca.

U neusmjerenoj mreži  $d_{ij} = d_{ji}$ , tj. Udaljenost između čvorova  $i$  i  $j$  jednak je udaljenost između čvora  $j$  i  $i$ , dok u usmjerenoj mreži često vrijedi  $d_{ij} \neq d_{ji}$  jer putanja dodatno ovisi o prirodi veze (ulazna ili izlazna).

Nadalje, u usmjerenoj mreži postojanje puta od  $i$ -tog čvora do  $j$ -tog čvora ne jamči postojanje puta od  $j$  do  $i$ . U stvarnim mrežama često trebamo utvrditi udaljenost između dva čvora.

Za male mreže ovo je jednostavan zadatak, dok za mrežu sa milijunima čvorova traženje najkraćeg puta između dva čvora može potrajati.

Duljina najkraćeg puta i broj takvih staza mogu se formalno dobiti iz matrice vezanja:

- $d_{ij} = 1$  ako postoji veza između  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora, onda je  $A_{ij} = 1$ .
- $d_{ij} = 2$  ako postoji put duljine dva između  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora, onda je produkt elemenata  $A_{ik}A_{kj} = 1$ . Broj putova udaljenosti dva između čvorova  $i$  i  $j$  je

$$N_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N A_{ik}A_{kj} \quad (2.13)$$

- $d_{ij} = d$  ako postoji put duljine  $d$  između  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora, onda je produkt elemenata  $A_{ik...l}A_{lj} = 1$ . Broj putova udaljenosti dva između čvorova  $i$  i  $j$  je

$$N_{ij}^{(d)} = \sum_{k,\dots,l=1}^N A_{ik...l}A_{lj} \quad (2.14)$$

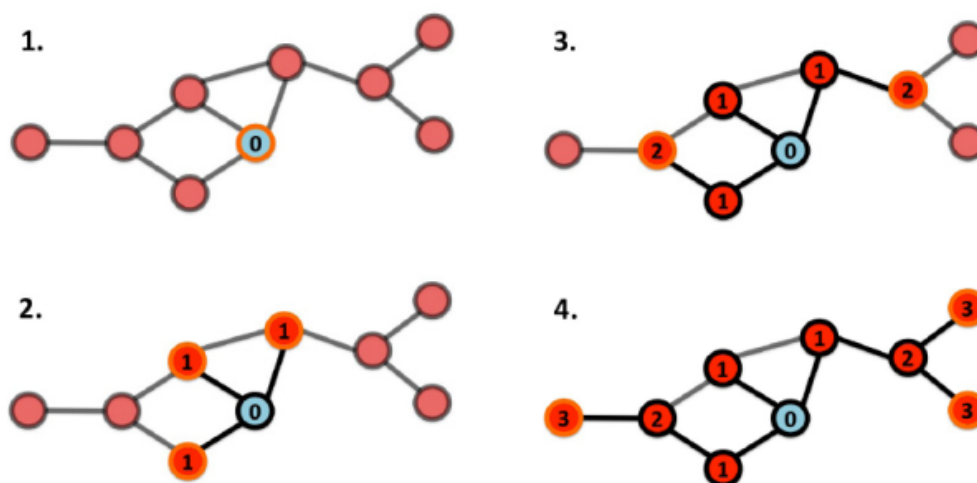
Promjer mreže, označen  $d_{max}$ , je maksimalni najkraći put u mreži. Drugim riječima, to je najveća udaljenost zabilježena između bilo kojeg para čvorova. Prosječna dužina puta, označena s  $\langle d \rangle$ , je prosječna udaljenost između svih parova čvorova u mreži. Za neusmjerenu mrežu sa  $N$  čvorova, vrijedi



$$\langle d \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N d_{i,j}, \quad (2.15)$$

dok za usmjerenu mrežu treba jednadžbu (2.15) podijeliti sa dva. Bitno je napomenuti da se u realnim slučajevima češće koristi BFS algoritam za ispitivanje udaljenosti čvorova u mrežama, dapače BFS je jedan od najčešće korištenih algoritama u kompleksnim mrežama. Slično bacanju kamena u vodu i promatranju valova koji se šire od središta, krećemo od središnjeg čvora i označimo njegove susjedne čvorove, zatim susjedi susjeda, dok ne susretnemo ciljani čvor. Broj "valova" potreban za postizanje cilja nam daje udaljenost. Najkraći put između čvora  $i$  i  $j$  slijedi sljedeće korake:

1. Krenemo od  $i$ -tog čvora
2. Pronađemo čvorove izravno povezane s  $i$ -tim čvorom. Označimo ih udaljenošću "1" i prijedemo na čvorove izravno povezane na njih te njih označimo sa "2" i tako dalje.
3. Postupak ponavljamo dok ne dođemo do  $j$ -tog čvora ili dok nam ne ponestane povezanih čvorova

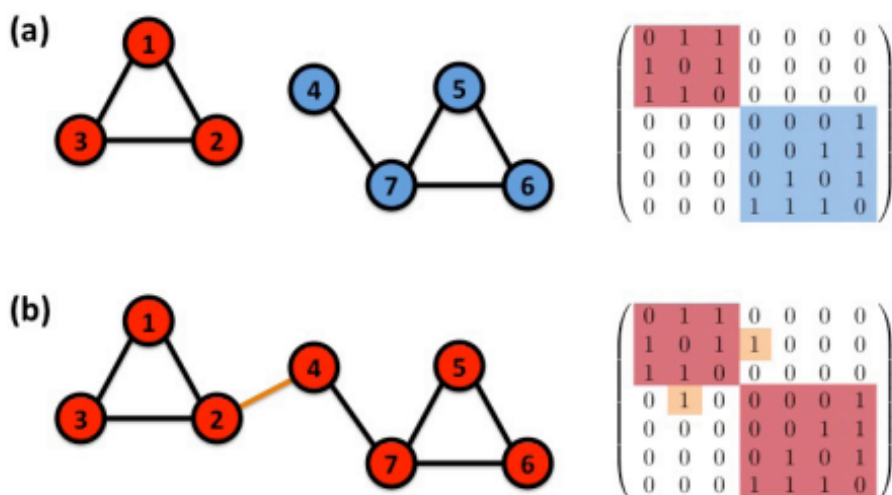


Slika 2.2: Skica BFS algoritma i karakteristične korake pri računanju najkraćeg puta između čvorova. Preuzeto iz [5]

## 2.5 Povezanost unutar mreže

Jako bitno svojstvo mreže je povezanost između njegovih komponenti, što ovisno o izgledu mreže može jako utjecati na mnoga svojstva sustava. Kao što bi telefon bio ograničeno sredstvo komunikacije ako ne bismo mogli nazvati bilo koji telefonski broj, ili e-pošta ako bismo mogli slati poruke e-pošte samo na određene adrese e-pošte. To znači da tehnologija iza telefona ili interneta mora biti u stanju uspostaviti put između bilo koja dva uređaja ili klijenta, poput naše i e-adresa naših poznanika.

To je zapravo ključ korisnosti većine mreža: one su izgrađeni kako bi se osigurala povezanost. Također u nekom drugom slučaju bismo imali širenje utjecaja, epidemija ili stanica raka u organizmu koje je isto tako jako ovisno o povezanosti čvorova unutar sustava, a cilj bi nam bio prepoznati puteve širenja kako bismo zaustavili problem.



Slika 2.3: (a) Mreža se sastoji od dvije odvojene komponente, tj. postoji put između bilo kojeg para čvorova u (1,2,3) komponenti, kao i u (4,5,6,7). (b) Dodavanje jedne veze, koju nazivamo mostom, može povezati mrežu u jednu komponentu. Sada postoji put između svakog para čvorova u mreži. Posljedica toga je da se nova matrica ne može napisati u blok dijagonalnom obliku. Preuzeto iz [5]

Stoga je bitno dati pojmove i račune koji će nam biti u stanju dati bolji opis mreže i povezanosti u mrežama. U neusmjerenoj mreži dva čvora  $i$  i  $j$  su povezani ako između njih postoji put na mreži, a oni su nepovezani ako takav put ne postoji i onda u tom slučaju imamo  $d_{ij} = \infty$ . Mreža je povezana ako su svi parovi čvorova u mreži povezani. Nepovezana je ako postoji barem jedan par s  $d_{ij} = \infty$ .

Jasno je da je mreža prikazana na slici (2.3a) odvojena, a mi nazivamo njezine dvije komponente podmrežama ili klasterima. Ako se mreža sastoji od dvije komponente, pravilno postavljene pojedinačne veze mogu ih povezati, čineći mrežu pove-

zanom, slika (2.3b). Takva se veza naziva mostom. Općenito je most bilo koja veza koja, ako je prekinemo, prekidamo graf. Dok za male mreže samim pogledom na njih možemo odlučiti je li povezana ili nepovezana, za mrežu koja se sastoji od milijun povezanih čvorova to predstavlja izazov. Nekoliko matematičkih alata pomaže nam identificirati povezane komponente grafikona:

- Za nepovezanu mrežu matrica vezanja može biti preuređena u blok dijagonalni oblik, tako da svi elementi različiti od nula u matrici su sadržani u kvadratnim blokovima duž dijagonale matrice i sve ostali elementi su nula, slika (2.3).
- Svaki kvadratni blok će odgovarati komponenti. Možemo koristiti alate linearne algebre kako bi se odlučilo je li susjedna matrica blok dijagonalna, pomažući nam da prepoznamo povezane komponente.
- U praksi, za velike mreže komponente su učinkovitije identificirane pomoću BFS algoritma pretraživanja.

U cilju ispitivanja koliko dobro su povezani susjedni čvorovi i na taj način dobivanje boljeg uvida u lokalna svojstva mreže definiramo koeficijent lokalnog klasteriranja. Pomoću njega mjerimo lokalnu gustoću mreže. Za čvor  $i$  sa stupnjem vezanja  $k_i$  lokalni koeficijent klastera definiran je kao

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.16)$$

gdje je  $L_i$  broj veza između  $k_i$  susjeda  $i$ -tog čvora. Lokalni koeficijent klastera  $C_i$  ima vrijednosti između 0 i 1:

- $C_i = 0$  ako ni jedan par susjeda  $i$ -tog čvora nije međusobno povezan
- $C_i = 1$  ako su svi susjedi  $i$ -tog čvora međusobno povezani, tj. ako formiraju kompletni graf
- Općenito  $C_i$  nam daje vjerojatnost da su dva susjeda  $i$ -tog čvora međusobno povezana

Također imamo stupanj klasteriranja cijele mreže, koji je zapravo prosječni koeficijent lokalnog klasteriranja. Imamo

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.17)$$

On nam daje vjerojatnost da će dva susjeda nasumično izabranog čvora biti međusobno povezani. Sada imamo skup pojmova i računa koji će nam pomoći u ispitivanju i opisanju kompleksnih mreža.

### 3 Erdos-Renyi mreža

Iz perspektive modeliranja mreža je relativno jednostavan objekt, koji se sastoji od samo čvorova i veza, međutim staviti veze između čvorova na način da reproducira složenost i prividnu slučajnost stvarnih sustava je izazov. Na prvi pogled većina mreža iz prirode izgledaju kao da su nasumično napravljene, a teorija nasumičnih grafova obuhvaća ovu vidljivu slučajnost izgradnjom mreža koje su doista slučajne [3, 7]. U tom kontekstu filozofija iza slučajne mreže je jednostavna: pretpostavlja da se taj cilj najbolje postiže postavljanjem veza nasumično između čvorova. Time dolazimo do definicije nasumične mreže: Nasumična mreža sastoji se od  $N$  označenih čvorova gdje je svaki par čvorova povezan s istom vjerojatnosti  $p$ .

Za izgradnju nasumične mreže, označene s  $G(N, p)$ , prvo je potrebno početi od  $N$  izoliranih čvorova. Zatim uzimamo parove čvorova te generiramo nasumični broj, a ako je nasumični broj veći od vjerojatnosti  $p$  odabrani par ćemo međusobno povezati, dok ćemo ih u protivnom ostaviti međusobno nepovezanimi. Proces ćemo ponavljati sve dok nismo prošli svih  $\frac{N(N-1)}{2}$  parova mreže, a mrežu dobivenu ovom procedurom zovemo nasumična mreža. Dva matematičara, Pául Erdős i Alfréd Rényi, igrali su važnu ulogu u razumijevanju svojstava nasumičnih mreža, pa se stoga njima u čast nasumična mreža često zove Erdős-Rényi mreža.

#### 3.1 Raspodjela stupnja vezanja

U određenoj realizaciji nasumičnih mreža neki čvorovi su jako povezani, dok drugi imaju samo nekoliko veza ili čak nemaju veza. Distribucija stupnja vezanja  $p_k$  koja daje vjerojatnost da slučajno odabrani čvor ima stupanj  $k$  je odgovorna za to. U nasumičnoj mreži vjerojatnost da čvor ima točno  $k$  veza je produkt od tri pojma:

- Vjerojatnost da čvor ima  $k$  veza, ili  $p^k$
- Vjerojatnost da preostale  $(N - k - 1)$  veze nepostoje, ili  $(1 - p)^{N-k-1}$
- Broj načina na koji možemo odabrati  $k$  veza od  $N - 1$  potencijalnih veza koje čvor može imati, to jest  $\binom{N-1}{k}$

Stoga distribucija stupnja vezanja nasumične mreže slijedi binomnu distribuciju

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k-1} \quad (3.1)$$

Oblik ove distribucije ovisi o veličini sustava  $N$  i vjerojatnosti  $p$ . Upotrebom svojstava binomne distribucije možemo izračunati prosječni stupanj vezanja

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^N k p_k = Np, \quad (3.2)$$

isto tako i prosječni kvadrat stupnja vezanja mreže

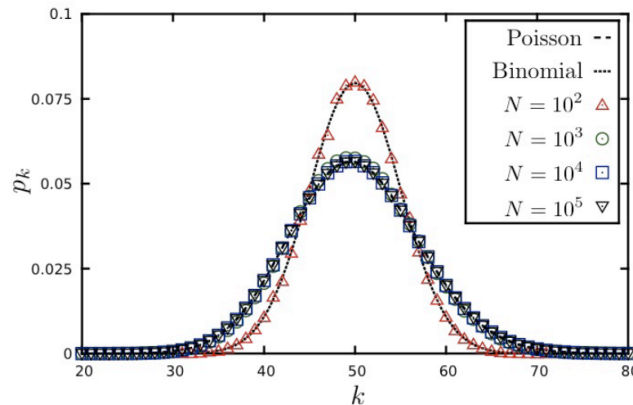
$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=1}^N k^2 p_k = p(1-p)N + p^2 N^2 \quad (3.3)$$

i varijancu distribucije

$$\sigma_k = (\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2)^{\frac{1}{2}} = [p(1-p)N]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Većina stvarnih mreža je rijetka, stoga  $\langle k \rangle \ll N$ . U ovoj granici stupanj distribucije možemo aproksimirati Poissonovom distribucijom

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (3.5)$$



Slika 3.1: Usporedba Poissonove i Binomne distribucije. Distribucija stupnja slučajne mreže s prosječnim stupnjem  $\langle k \rangle = 50$  i veličine  $N = 10^2, 10^3, 10^4$ . Za  $N = 10^2$  Binomna distribucija značajno odstupa od Poissonove. Stoga za male mreže treba koristiti točan binomni oblik. Za  $N = 10^3$  i veće mreže, Binomna distribucija stupnja postaje nerazlučiva od Poissonove distribucije, ilustrirajući da je za velike  $N$  distribucija stupnja neovisna o veličini mreže.

Binomna i Poissonova distribucija se često nazivaju distribucijama nasumičnih

mreža. Binomna i Poissonova distribucija imaju više zajedničkih svojstava:

- Obje razdiobe imaju vrh oko  $\langle k \rangle$ . Ako zadržimo broj čvorova  $N$  konstantnim i povećamo  $p$ , mreža postaje gušća i također povećava  $\langle k \rangle$  i pomiče vrh distribucije desno.
- Širina raspodjele također se kontrolira sa  $p$  ili  $\langle k \rangle$ . Što je mreža gušća, to je šira distribucija, stoga su veće razlike u stupnjevima vezanja.

### 3.2 Evolucija nasumičnih mreža

Počevši od jako velikog broja  $N$  izoliranih čvorova, veze ćemo postupno dodavati slučajnim redoslijedom (to odgovara postupnom povećanju  $p$ ) i gledati ćemo koje su posljedice na topologiju mreže [8]. Proces i promjenu topologije mreže ćemo pratiti preko veličina divovske komponente  $N_G$ , koja odgovara najvećem klasteru unutar mreže, i kako ona varira sa  $\langle k \rangle$ . Imamo dva granična slučaja koja je lako razumjeti:

1. Za  $p = 0$  imamo  $\langle k \rangle = 0$ , što znači da imamo samo izolirane čvorove. Stoga za divovsku komponentu imamo  $N_G = 1$ , tj.  $\frac{N_G}{N} = 0$  za dovoljno veliki broj čvorova  $N$
2. Za  $p = 1$  imamo  $\langle k \rangle = N - 1$ , što znači da imamo kompletni graf te da su svi čvorovi povezani. Stoga za divovsku komponentu imamo  $N_G = N$ , tj.  $\frac{N_G}{N} = 1$

Očekuje se da će divovski sastav rasti postupno od  $N_G = 1$  do  $N_G = N$  ako povećamo  $\langle k \rangle$  od 0 do  $N - 1$ . Ipak to nije slučaj:  $\frac{N_G}{N}$  ostaje nula za mali  $\langle k \rangle$ , što ukazuje na nedostatak divovske komponente za niz vrijednosti  $\langle k \rangle$ . Kada  $\langle k \rangle$  prijeđe kritičnu vrijednost  $\frac{N_G}{N}$  se brzo povećava, signalizirajući pojava divovske komponente. Erdős i Rényi rad [8] predviđa da je uvjet za pojavu divovske komponente

$$\langle k \rangle = 1 \tag{3.6}$$

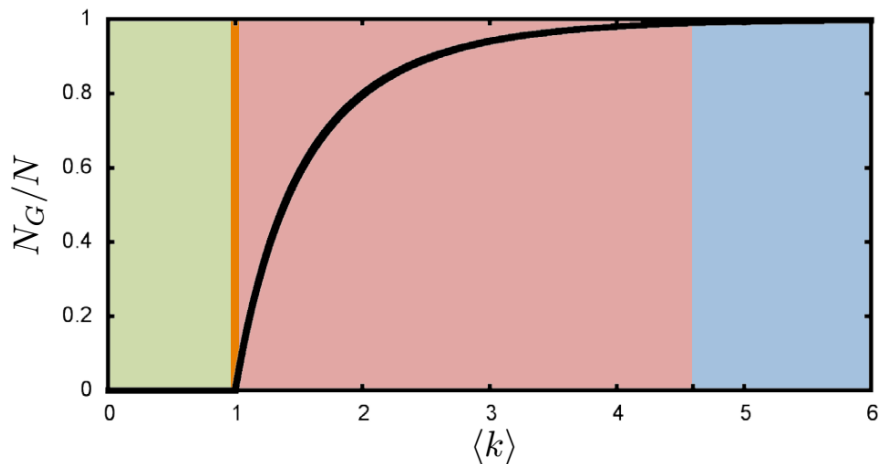
Drugim riječima, imamo pojavu divovske komponente ako i samo ako svaki čvor ima prosječno jednu vezu. Pojava divovske komponente je samo jedan od važnih prijelaza prikazana u nasumičnim mrežama. Ako želimo izraziti ovaj uvjet preko  $p$

$$\langle k \rangle = Np = 1, \tag{3.7}$$

dobijemo izraz za kritičnu vjerojatnost

$$p_C = \frac{1}{N}, \quad (3.8)$$

a možemo primjetiti da što je veća mreža to je manja vjerojatnost potrebna za postizanje uvjeta kritične točke.



Slika 3.2: Pojava divovske komponente u ovisnosti o prosječnom stupnju vezanja mreže [8]. Na slici su prikazana četiri različita režima, a savki je označen sa raličitom bojom u pozadini grafa. Preuzeto iz [5]

Promjene u  $\langle k \rangle$  omogućuju razlikovanje četiri različita režima mreže, svaki sa svojim jedinstvenim karakteristikama:

1. Podkritični režim:  $0 < \langle k \rangle < 1$

Za  $\langle k \rangle = 0$  mreža se sastoji od  $N$  izoliranih čvorova. S obzirom na mali broj veza u mreži u ovom režimu, dodavanjem veza uglavnom će nastati klasteri veličine dva. Nakon povećanja  $\langle k \rangle$ , neke od novih veza pridružit će se tim parovima, formiranjem sitnih nakupina. Dok možemo odrediti u bilo kojem trenutku najveći takav skup kao ogromnu komponenta, u tom režimu relativna veličina najvećeg klastera ostaje  $N_G/N = 0$ , što ukazuje da je najveća komponenta sitna u usporedbi s veličinom mreže.

2. Kritična točka:  $\langle k \rangle = 1$

Kritična točka razdvaja režim u kojem nema divovske komponente ( $\langle k \rangle < 1$ ) i režima gdje postoji divovska komponenta ( $\langle k \rangle > 1$ ). Dok kritična točka signa-



lizira nastanak divovske komponenta, ipak relativna veličina najveće komponente u toj točki je još uvijek nula.

### 3. Nadkritični režim: $\langle k \rangle > 1$

Ovaj režim ima najveću važnost za stvarne sustave, kao i to da prvi put imamo divovsku komponentu unutar mreže. U blizini kritične točke veličina divovska komponenta varira kao

$$N_G \sim (p - p_c) N \quad (3.9)$$

gdje je  $p_c$  dano s jednadžbom (3.8). Drugim riječima, divovska komponenta sadrži konačni dio svih čvorova mreže. Jednadžba (3.9) vrijedi samo u blizini  $\langle k \rangle = 1$ , a za velike  $\langle k \rangle$  ovisnost  $N_G$  o  $\langle k \rangle$  je nelinearna. U nadkritičnom režimu još uvijek postoje brojne izolirane komponente koje postoje zajedno s divovskom komponentom. No to ne znači da komponente različitih veličina ne koegzistiraju.

### 4. Povezani režim: $\langle k \rangle > \ln N$

Za dovoljno veliku  $p$  divovska komponenta će apsorbirati sve čvorove i komponente, dakle  $N_G = N$ , a cijela mreža postaje povezana. Vidimo da pojava divovske komponente unutar modela nasumičnih mreža nije glatki proces. Izolirani čvorovi i sitne komponente koje se promatraju za male  $\langle k \rangle$  organiziraju se u ogromnu komponentu, kroz proces faznog prijelaza.

## 3.3 Nasumične mreže u modeliranju problema

U stvarnosti postoji sumnja da ipak red i nekakva pravila stoje iza najsloženijih sustava, da proces nije nasumičan, što je rezultiralo u sustavnim odstupanjima od čiste nasumične konfiguracije. Obično pretpostavljamo da je topologija povezivanja ili potpuno pravilna ili sasvim slučajna, no mnogi biološke, tehnološke i društvene mreže leže negdje između ove dvije krajnosti [9, 10].

Stupanj do kojeg slučajne mreže opisuju stvarne sustave ne mora biti odlučeno epistemološkim argumentima, nego sustavnim kvantitativnim usporedbama koja mogu biti testirana na stvarnim mrežama. Na primjer, u stvarnim sustavima imamo malu

koncentraciju čvorišta sa znatno većim stupnjem vezanja od drugih čvorova, a to model nasumičnih mreža ne predviđa. Od distribucije stupnja vezanja do koeficijenta klasteriranja, mnoge značajke su različite u stvarnim i slučajnim mrežama. Iako stvarne mreže nisu slučajne, model nasumičnih mreža služi kao temeljna referenca dok pokušavamo razumjeti svojstva stvarnih mreža.

Svaki put kad promatramo neku mrežu morati ćemo se pitati je li mreža možda nastala nasumično. Model nasumičnih mreža može biti pogrešan model za većinu pravih sustava, no ipak ostaje vrlo relevantan za mrežnu znanost.

### 3.4 "Scale-free" mreže

Različiti sustavi kao što su genetske mreže ili World Wide Web najbolje se opisuju kao mreže sa složenom topologijom, a njihovo zajedničko svojstvo je da se mogu prikazati preko mreža koje nemaju unutarnju skalu očekivanja stupnja vezanja [3,6,8]. Mreže čija distribucija stupnja vezanja slijedi zakon potencija i koje nemaju unutarnju skalu očekivanja stupnja vezanja nazivaju se "scale-free" mrežama.

$$p_k \sim k^{-\gamma} \quad (3.10)$$

Da bismo istražili posljedice "scale-free" formalizma, moramo definirati distribuciju zakona potencija preciznije.

$$p_k = Ck^{-\gamma} \quad (3.11)$$

gdje vrijednost konstante C nalazimo iz uvjeta normalizacije

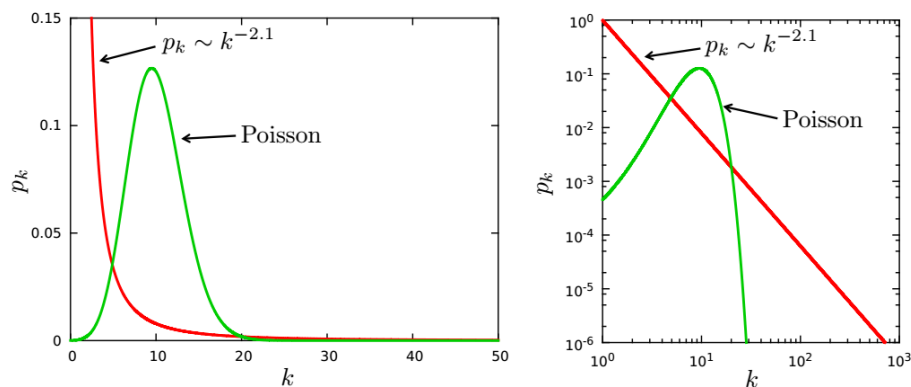
$$\sum_{k=1}^N p_k = 1 \quad (3.12)$$

Zbog toga što za vrijednost stupnja vezanja  $k = 0$ ,  $p_k = Ck^{-\gamma}$  izraz divergira, moramo zasebno odrediti  $p_0$ , što predstavlja djelić čvorova koji nemaju veze s drugim čvorovima (izolirani čvorovi). Glavna razlika između slučajne i mreže bez razmjera dolazi u repu raspodjele stupnja vezanja. Na slici (\*) je dana usporedba distribucije zakona potencije s Poissonovom funkcijom, a iz usporedbe vidimo dvije bitne razlike:

- Za male vrijednosti k, zakon potencija je iznad Poissonove funkcije, stoga "scale-free" mreža ima veliki broj manjih čvorova koji su praktički odsutni u slučajnoj

mreži

- Za  $k$  vrijednosti koje su relativno blizu prosječnog stupnja vezanja  $\langle k \rangle$  Poissonova raspodjela je iznad distribucije zakona potencije, što ukazuje da u većini slučajnih mreža većina čvorova imaju stupanj  $k \simeq \langle k \rangle$ .
- Za velike  $k$ , distribucija zakona potencije je iznad Poissonove krivulje. Razlika je osobito vidljiva ako  $p_k$  prikažemo na log-log grafu, što ukazuje da je vjerojatnost promatranja visokog stupnja vezanja čvora ili čvorišta nekoliko redova veličine veće nego u nasumičnoj mreži.



Slika 3.3: Poissonova funkcija i funkcija zakona potencija za  $\gamma = 2.1$ . Obje distribucije imaju  $\langle k \rangle = 10$ . Desno su distribucije prikazane u log-log grafu, kako bi bolje vidjeli razliku između distribucija u režimu visokih  $k$  vrijednosti.

Ukratko, ključna razlika između nasumičnih mreža i "scale-free" mreža je što u slučajnoj mreži većina čvorova ima usporedive stupnjeve i stoga su čvorišta zabranjena. U "scale-free" mrežama čvorišta ne samo da se toleriraju, nego ih se i očekuje. Ukratko, da bi razumjeli svojstva stvarnih mreža, često je dovoljno zapamtiti da u "scale-free" mrežama su neki čvorovi vrlo povezani i koegzistiraju s velikim brojem malih čvorova, dok u nasumičnim mrežama većina čvorova ima usporedive stupnjeve vezanja, pa je pojava čvorišta odsutna. Prisutnost ili odsutnost čvorišta igra važnu ulogu u ponašanju sustava.

## 4 Barabasi-Albert mreža

Godine 1999. Albert Laszlo Barabasi i Albert Reka su predvidjeli dva svojstva koja nisu zadovoljena u nasumičnim mrežama, a koja su se pokazala kao bitna u pokušaju rekreacije realnih sustava i mreža [6, 11].

- MREŽA SE POVEĆAVA KROZ DODAVANJE NOVIH ČVOROVA.

Nasumični mrežni model pretpostavlja da imamo fiksni broj čvorova,  $N$ . Uloga modela je povezivanje tih čvorova, uz održavanje  $N$  nepromijenjenim. Ipak, u većini pravih mreža broj čvorova nije fiksni, te kontinuirano raste zahvaljujući dodavanju novih čvorova.

- ČVOROVIM PREFERIRAJU POVEZIVANJE NA ČVOROVE KOJI IMAJU VIŠE VEZA.

Nasumični mrežni model pretpostavlja da nasumce povezujemo čvorove. Međutim, u većini pravih mreža novi čvorovi preferiraju povezivanje s više povezanim čvorovima, proces koji se zove preferencijalno vezanje.

Prepoznavanje rasta i preferencijalnog vezanja i njihova koegzistencija u stvarnim mrežama dovele su do uvođenja minimalnog modela sposobnog za generiranje mreža s distribucijom zakona potencije. Barabasi-Albert model je definiran na sljedeći način:

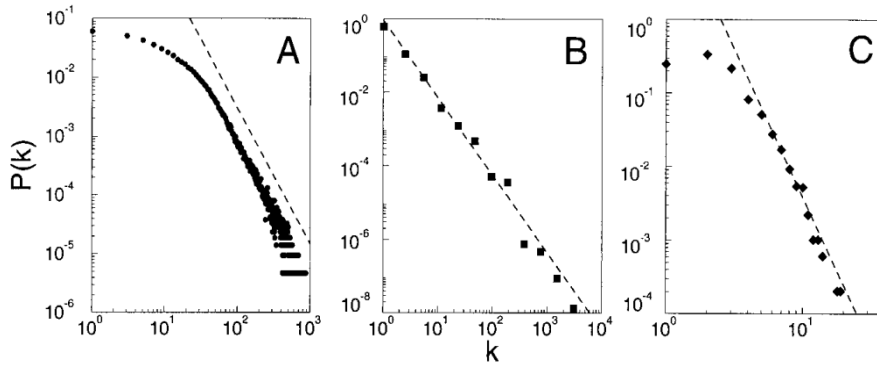
Počnemo s  $m_0$  čvorova, čije su veze proizvoljno odabrane, sve dok svaki čvor ima najmanje jednu vezu. Mreža se razvija slijedeći dva koraka:

1. Rast - U svakom vremenu dodajemo novi čvor s  $m$  ( $\leq m_0$ ) veza koje povezuju novi čvor sa  $m$  čvorova već u mreži
2. Preferencijalno vezanje - Vjerojatnost  $\pi(k)$  da se jedna od veza novog čvora poveže sa  $i$ -tim čvorom ovisi o stupnju  $k_i$  čvora  $i$  kao

$$\pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (4.1)$$

Preferencijalno vezanje je vjerojatnosno pravilo: novi čvor je slobodan povezati se s bilo kojim čvorom u mreži. Ako novi čvor ima izbor između čvora s dvije veze i čvora s četiri veze, dvaput je vjerojatnije da se poveže s čvorom s četiri veze. Također

se može susresti u literaturi kao BA model ili "scale-free" mreža. Nakon  $t$  vremenskih koraka Barabási-Albert model generira mrežu s  $N = t + m_0$  čvorova i  $m_0 + mt$  veza. Kao što je prikazano na slici (4.1), mreža koju generira model ima distribuciju zakona potencije.



Slika 4.1: Funkcija distribucije stupnja vezanja za različite velike mreže. (A) Graf mreže suradnje glumaca s  $N = 212250$  vrhova i prosječnom povezanosti  $\langle k \rangle = 28,78$ . (B) World Wide Web,  $N = 325729$ ,  $\langle k \rangle = 5,46$  (6). (C) Električna mreža,  $N = 4941$ ,  $\langle k \rangle = 2,67$ . Iscrtkane linije imaju nagibe (A)  $\gamma_A = 2,3$  (B)  $\gamma_A = 2,1$  i (C)  $\gamma_A = 4$ . Preuzeto iz [6]

Slika (4.1) također pokazuje da dok većina čvorova u mreži ima samo nekoliko veza, nekoliko čvorova se ipak postupno pretvara u čvorišta. Čvorišta su rezultat bogati-postaje-bogatiji fenomena, jer novi čvorovi se preferiraju povezati s čvorovima koji imaju više veze. Dakle, više povezani čvorovi će dobiti veze na štetu manje povezanih čvorova, eventualno pretvarajući se u čvorišta. Ukratko, model Barabási-Albert pokazuje da su dva jednostavna mehanizma, rast i preferencijalno vezanje, odgovorni za pojavljivanje mreža s distribucijom zakona potencije. Treba napomenuti da je nužno da su oba uvjeta prisutna u mreži jer u protivnom nećemo dobiti topologiju mreže bez razmjera [6, 11]. Ipak, kako bi razumjeli ponašanje modela i kvantificirali pojavu svojstava mreže bez razmjera, potrebno je opisati matematička svojstva modela.

#### 4.1 Dinamika stupnja vezanja

Da bismo razumjeli vremensku evoluciju Barabási-Albert modela, prvo se moramo usredotočiti na vremensku ovisnost stupnja vezanja. U modelu, čvor ima priliku da poveća svoj stupanj vezanja svaki put kada novi čvor ulazi u mrežu. Kada se novi čvor pridruži mreži, povezat će se s  $m$  od  $N(t)$  čvorova prisutnih u sustavu. Vjerojatnost

da odabere i-ti čvor dana je s

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (4.2)$$

Pretpostavljajući da je  $k_i$  kontinuirana stvarna varijabla ovisna o vremenu, stopa kojom i-ti čvor dobiva veze slijedi jednadžbu

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_j^{N-1} k_j} \quad (4.3)$$

Koeficijent  $m$  opisuje da svaki novi čvor dolazi s  $m$  veza. Dakle, čvor ima  $m$  načina za odabir. Zbroj u nazivniku jednadžbi prelazi sve čvorove u mreži osim novog čvora, stoga imamo

$$\sum_j^{N-1} k_j = 2mt \quad (4.4)$$

Pa dobijemo

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (4.5)$$

to jest

$$\frac{\partial k_i}{k} = \frac{1}{2} \frac{\partial t}{t} \quad (4.6)$$

Integriranjem i koristeći činjenicu da  $k_i(t_i) = m$ , što znači da i-ti čvor ulazi u mrežu u vrijeme  $t_i$  s  $m$  vezama, dobijemo

$$k_i(t) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad (4.7)$$

Eksponent  $\beta$  je dinamički eksponent mreže i ima vrijednost  $1/2$ , a jednadžba poviše nudi niz predviđanja:

- Stupanj svakog čvora povećava se prateći distribuciju zakona potencija s istim dinamičkim eksponentom  $\beta = 1/2$ , što znači da svi čvorovi slijede isti zakon o rastu.
- Što je ranije čvor dodan, viši je njegov stupanj  $k_i(t)$ . Stoga, čvorišta su velika, ne zato što rastu brže, već zbog toga što su došla ranije, fenomen koji se u

marketingu i poslovanju zove prednost prvog poteza.

- Stopa rasta čvora (tj. brzina kojom čvor dobiva novu vezu) dana je derivacijom jednadžbe poviše za  $k_i(t)$ , što ukazuje da stari čvorovi stječu više veza u jedinici vremena (zato što oni imaju manje  $t_i$ ), kao i da se brzina kojom čvor dobiva veze smanjuje s vremenom kao  $t^{-1/2}$ . Stoga sve manje i manje veza ide na čvor.

Uzevši zajedno, model Barabási-Albert nudi dinamički opis evolucije mreže, zahvaljujući činjenici da u stvarnim mrežama čvorovi dolaze jedan za drugim, povezujući se s ranijim čvorovima. Ovo postavlja natjecaj za veze tijekom kojih stariji čvorovi imaju prednost nad mlađim čvorovima, pretvarajući se u čvorišta.

## 4.2 Raspodjela stupnja vezanja

Izvesti ćemo točan oblik distribucije stupnja vezanja Barabási-Albert modela. Označit ćemo s  $N(k, t)$  broj čvorova sa stupnjem vezanja  $k$  u vrijeme  $t$ . Distribucija stupnja  $p_k(t)$  odnosi se na tu količinu preko  $p_k(t) = N(k, t)/N$ . Budući da u svakom koraku dodajemo novi čvor na mrežu ukupni broj čvorova jednak je broju vremenskih zapisa, imamo  $N = t$ . Preferencijalno vezanje pišemo kao

$$\Pi(k) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} = \frac{k}{2mt} \quad (4.8)$$

Gdje pojam  $2m$  obuhvaća činjenicu da je neusmjerenoj mreži svaka veza doprinosi dva puta stupnju vezanja čvora. Naš cilj je izračunati promjene broja čvorova sa stupnjem vezanja  $k$  nakon što je dodan novi čvor u mrežu. Zbog toga pregledavamo dva događaja koji mijenjaju  $N(k, t)$  (i stoga  $p_k(t)$ ) nakon dolaska novog čvora:

1. Novi čvor se može povezati s čvorom stupnja vezanja  $k$ , pretvarajući ga u stupanj  $(k + 1)$  čvor, čime se smanjuje  $N(k, t)$
2. Novi čvor se može povezati s čvorom stupnja  $(k - 1)$ , pretvarajući ga u stupanj  $k$  čvor, stoga se povećava  $N(k, t)$

Broj veza za koje se očekuje da će se povezati s čvorovima stupnja  $k$  nakon dolaska novog čvora je

$$\frac{k}{2mt} \times N p_k(t) \times m = \frac{k}{2} p_k(t) \quad (4.9)$$

Gdje je prvi član vjerojatnost da će se novi čvor povezati sa čvorom stupnja  $k$  (preferencijalno vezanje), a drugi član je ukupan broj čvorova sa stupnjem  $k$ , budući da se više čvorova nalazi u ovoj kategoriji, vjerojatnije je da će se novi čvor pridružiti jednom od njih, dok treći član je jednostavno stupanj dolaznog čvora i što je veći  $m$  to je veća vjerojatnost da će se novi čvor spojiti na čvor stupnja  $k$ . Zatim ćemo primijeniti jednadžbu (4.9) na slučajeve (1) i (2):

- Broj čvorova stupnja  $k$  koji stječu novu vezu i postaju čvorovi stupnja  $(k + 1)$ , je  $\frac{k}{2}p_k(t)$
- Broj čvorova stupnja  $(k - 1)$  koji stječu novu vezu i postaju čvorovi stupnja  $k$ , je  $\frac{k-1}{2}p_{k-1}(t)$

Koristeći obje jednadžbe, dobivamo očekivani broj čvorova stupnja  $k$  nakon davanja novog čvora

$$(N + 1)p_k(t + 1) = Np_k(t) + \frac{k - 1}{2}p_{k-1}(t) - \frac{k}{2}p_k(t) \quad (4.10)$$

Ova se jednadžba odnosi na sve čvorove sa stupnjem vezanja  $k > m$ , zato što nam nedostaje čvorova sa stupnjem  $k = 0, 1, \dots, m - 1$  u mreži (svaki novi čvor dolazi sa stupnjem  $m$ ). Trebamo zasebnu jednadžbu za stupanj  $m$  modova. Slijedeći argumente koje smo koristili za dobivanje jednadžbe(4.10), dobivamo

$$(N + 1)p_m(t + 1) = Np_m(t) + 1 - \frac{m}{2}p_m(t) \quad (4.11)$$

Jednadžbe (4.10) i (4.11) su početna točka rekurzivnog procesa koji daje  $p_k$ . Koristimo činjenicu da smo u potrazi za stacionarnom raspodjelom stupnja vezanja, a to znači da u granici  $N = t \rightarrow \infty, p_k(\infty) = p_k$ . Pomoću toga možemo napisati lijevu stranu jednadžbi (4.10) i (4.11) kao

$$(N + 1)p_k(t + 1) - Np_k(t) = (N + 1)p_k(\infty) - Np_k(\infty) = p_k(\infty) = p_k \quad (4.12)$$

$$(N + 1)p_m(t + 1) - Np_m(t) = (N + 1)p_m(\infty) - Np_m(\infty) = p_m(\infty) = p_m \quad (4.13)$$



Stoga jednadžbe stope promjene imaju oblik:

$$p_k = \frac{k-1}{k-2} p_{k-1}, k > m \quad (4.14)$$

$$p_m = \frac{2}{m+2} \quad (4.15)$$

Jednadžbu (4.14) možemo napisati i kao

$$p_{k+1} = \frac{k}{k+3} p_k \quad (4.16)$$

preko  $k \rightarrow k+1$  promjene varijable. Da bismo dobili distribuciju stupnja vezanja, koristili smo rekurzivni pristup. Pišemo distribuciju stupnja vezanja za najmanji stupanj,  $k = m$ , koristeći jednadžbu (4.15) i zatim upotrijebljavajući jednadžbu (4.16) za izračunavanje  $p_k$  za više stupnjeve vezanja:

$$p_{m+1} = \frac{m}{m+3} p_m = \frac{2m}{(m+2)(m+3)} \quad (4.17)$$

$$p_{m+2} = \frac{m+1}{m+4} p_{m+1} = \frac{2m(m+1)}{(m+2)(m+3)(m+4)} \quad (4.18)$$

$$p_{m+3} = \frac{m+2}{m+5} p_{m+2} = \frac{2m(m+1)}{(m+3)(m+4)(m+5)} \quad (4.19)$$

Zamjenom  $m+3$  s  $k$  dobivamo vjerojatnost da promatramo čvor sa stupnjem vezanja  $k$

$$p_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \quad (4.20)$$

što predstavlja točan oblik distribucije stupnja vezanja za Barabási-Albert model. Za velike  $k$  to postaje  $p_k \sim k^{-3}$ .

Ukratko, analitički izračuni potvrđuju da model Barabási-Albert generira power-law distribuciju i predviđa vrijednost eksponenta stupnja kao  $\gamma = 3$ . Eksponent je neovisan o parametrima  $m$  i  $m_0$ . Izračuni predviđaju da je distribucija stupnja vezanja stacionarna (tj. vremenski nepromjenjiva), objašnjavajući zašto mreže s različitom povijesti, veličinom i dobi razvijaju sličnu distribuciju stupnja vezanja.

### 4.3 Evolucijske mreže

Kako bi razumjeli topologiju složenog sustava, najprije moramo opisati kako je nastao, a upravo to nam je omogućio Barabasi-Albert model. Ovdje smo se susreli sa pojmom rasta i preferencijalnog vezanja koji su se pokazali kao bitan faktor u formiranju mnogih realnih sustava [12, 13].

Također distribucija zakona potencija i mnoga druga svojstva realnih sustava smo uspjeli objasniti pomoću ovog modela. Mnogi su raspravljali o prirodi preferencijalnog vezanja i razlogu njegovog pojavljivanja u realnim mrežama, te da li je ono nasumičan proces ili je proces dobiven optimizacijom [14, 15]. No koja god priroda preferencijalnog vezanja bila, činjenica je da je ono odgovorno za nastanak velikog broja kompleksnih sustava koje danas proučavamo. Bitno je napomenuti da nasumične mreže će i dalje igrati važnu ulogu dok pokušavamo shvatiti kako određena mrežna svojstva odstupaju od našeg očekivanja, no ako želimo objasniti podrijetlo određene mreže morati ćemo koristiti modele koji hvataju stvaranje sustava. Ono što Barabasi-Albert modela ne može opisati je evolucija mreže u vremenu, a time i širok spektar mrežnih značajki promatranih u stvarnim sustavima. Mnoge mreže, poput WWW ili mreže citata, usmjerene su, dok Barabasi-Albert model generira neusmjerene mreže i predviđa vrijednost  $\gamma = 3$ , a eksponent stupnja realnih mreža varira između 2 i 5. Model ne dopušta razlikovanje čvorova na temelju nekih intrinzičnih svojstva, poput novosti istraživačkog rada ili korisnosti web stranice. Barabasi-Albert model je dokaz osnovnog modela čija je glavna svrha hvatanje osnovnih mehanizama koji su odgovorni za nastanak "scale-free" mreža. Stoga, ako želimo razumjeti evoluciju sustava kao što je Internet ili WWW, potrebno je uključiti važne detalje koji pridonose vremenskom razvoju tih sustava, poput usmjerene prirode WWW-a, mogućnosti unutarnjih veza i uklanjanje veza. Jedan primjer modela koji pokušava reproducirati opažanje kako neki čvorovi koji se pojave kasnije u vremenu su u stanju preuzeti ulogu glavnog čvorišta u sustavu, je Bianconi-Barabasi model. Radi se o tome da smo preferencijalnom vezanju dodali još jedan faktor o kojem ovisi vjerojatnost vezanja na  $i$ -ti čvor

$$\Pi(k_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j} \quad (4.21)$$

Faktor  $\eta_i$  zovemo sposobnost  $i$ -tog čvora, te smo na taj način dodali novo svojstvo

čvorovima kompleksnog sustava koji proučavamo.

Završno s ovim poglavljem smo proučili nastajanje nasumičnih mreža i "scale-free" mreža, te smo naučili da se realni sustavi nalaze negdje između ova dva modela. Sve opisano će nam poslužiti u analizi našeg modela međudjelujućih mreža, gdje ćemo pravila vremenske evolucije sustava kreirati uz pomoć drugih relevantnih istraživanja. Cilj nam je stvoriti sustav koji će biti reprezentativan model realnih međudjelujućih mreža.

## 5 Međudjelujuće mreže

Kompleksni sustavi uglavnom su modelirani i analizirani kao pojedinačne mreže koje ne stupaju u interakciju s drugim mrežama niti su ovisne o njima. Međutim, većina stvarnih mreža nisu izolirane strukture, već interagiraju s drugim mrežnim strukturama. Sustavi sastavljeni od mnogih interaktivnih dinamičkih mreža - poput ljudskog tijela s biološkim mrežama ili globalne ekonomske mreže koja se sastoji od regionalnih klastera - često pokazuju kompliciranu kolektivnu dinamiku.

Tri temeljna procesa koji su tipično prisutni su neuspjeh, širenje neuspjeha i oporavak [16]. Kardiovaskularni i živčani sustavi u ljudskom tijelu su primjeri dviju dinamički povezanih fizioloških mreža. Bolesti često proizlaze iz složenih patoloških stanja koja uključuju dinamičku interakciju s pozitivnom ili negativnom povratnom vezom između različitih funkcionalnih podsustava u tijelu. Slično tome, u globalnom gospodarstvu postoji hijerarhija grupiranih i čvrsto povezanih zemalja, često grupiranih zemljopisno, koje su dalje međusobno povezane s jednom velikom globalnom interaktivnom gospodarskom i financijskom mrežom.

Kod međusobno povezanih mreža, neuspjeh čvorova u jednoj mreži općenito dovodi do neuspjeha ovisnih čvorova u drugim mrežama, što zauzvrat može uzrokovati daljnje oštećenje prve mreže i dovesti do kaskadnih neuspjeha i katastrofalnih posljedica [17]. Poznato je, na primjer, da su neuspjesi u različitim zemljama rezultat kaskadnih neuspjeha između međusobno ovisnih sustava poput komunikacijskih i mrežnih sustava.

Nadalje, povezane su i različite vrste kritične infrastrukture, kao što su sustavi vode i opskrbe hranom, komunikacija, goriva, financijske transakcije i proizvodnja i prijenos energije. Suvremena tehnologija je stvorila infrastrukturu koja postaje sve više međusobno ovisna, a razumijevanje o tome kako robusnost utječe na ove međuzavisnosti jedan je od izazova s kojima se suočavamo.

Također važno mjesto zauzima i procjena kritičnih točaka u kojima složeni sustavi naglo prelaze iz jednog stanja u drugo [18]. Zbog nedostatka znanja o temeljnim stohastičkim procesima koji kontroliraju kritične prijelaze, teško je predvidjeti kritične točke za sustave u stvarnom svijetu, a još je teže predvidjeti vrijeme u kojem će se pojaviti potencijalno katastrofalni kvarovi. Kada je udio aktivnih susjeda smanjen te prilazi kritičnom pragu, kaskadni kvarovi mogu pokrenuti neuspjeh cijele mreže.

Ovi uvjeti pružaju novi metodološki uvid u dinamiku sustava i osobito na dinamičke procese mreža.

Mnogi kompleksni sustavi uglavnom su otporni na vanjske napade i spontane fluktuacije koje uzrokuju privremene ili trajne lokalizirane kvarove. Međutim, većina njih u konačnici propada i time ima konačni životni vijek. Primjeri složenih sustava u stvarnom svijetu koji doživljavaju iznenadni kolaps su brojni, npr. širenje bolesti u živim organizmima ili širenje prodajnog obrasca proizvoda u ekonomiji.

Mnogo je istraživanja provedena kako bi se istražila strukturna svojstva i ranjivost složenih mreža. Od posebnog interesa su naglo dinamični događaji koji uzrokuju nepovratnost mreža. Međutim, u mnogim fenomenima realnog svijeta, kao što su moždane konvulzije u neuroznanosti ili iznenadni pad tržišta u financijama, nakon neaktivnog vremenskog razdoblja značajan dio oštećene mreže može spontano ponovno aktivirati [19]. Proces se često ponavlja.

Iako su se neka istraživanja usredotočila na pojedinosti takve prijelazne dinamike kao širenja neuspjeha, postoji čitava klasa dinamičkih kompleksnih sustava u stvarnom svijetu u kojima se mreže mogu spontano oporaviti nakon njihovog urušavanja, a mehanizam za ovaj globalni oporavak mreže još nije adekvatno razumljiv. Internet se može nakon ozbiljnog napada deaktivirati, a zatim se nakon nekog vremena oporavi. Ljudski mozak se može spontano oporaviti nakon epileptičkog napada. Financijska se mreža može nakon nekog vremenskog razdoblja oporaviti nakon što veliki udio njegovih sastavnica ne uspije.

Kako bismo modelirali nestabilno ponašanje mrežnog sustava u stvarnom svijetu, analiziramo dinamičku "scale-free" mrežu, u kojoj čvorovi i veze propadaju i oporavljaju se.

Preko širokog raspona ljudskih aktivnosti - od medicine, meteorologije i upravljanja prometom do obavještajnih službi i vojnih operacija - teorije predviđanja pomažu nam procijeniti vjerojatnost budućih ishoda [20]. Općenito, što je veća nesigurnost ishoda, to je ključnije imati mogućnost predviđanja budućeg ponašanja. Budući da čvorovi mnogih dinamičkih sustava, kao što su uzorci prometa i fiziološke mreže, povremeno propadnu i zatim se oporavljaju - bolest se širi kroz organizam, a zatim nakon konačnog vremena organizam se oporavi.

Da bismo razumjeli ponašanje tih sustava pomoću znanosti o kompleksnim mrežama, razvijamo model međusobno povezanih mreža s čvorovima koji se mogu oporaviti od

neuspjeha i pregledavamo dobiveni fazni dijagram. Naš model generičkog sustava koji se sastoji od međusobno povezanih dinamičkih mreža obuhvaća važne događaje koji se nalaze u mrežama u interakciji s stvarnim svijetom, tj. čvorovi neuspjeha, sustavno širenje neuspjeha i oporavak čvora. Usredotočimo se na mreže u kojima čvorovi dolaze između dva intrinzična stanja i također imaju sposobnost utjecaja na stanja svojih susjeda.

## 6 Teorijski model

U ovom radu razmatramo model koji se može primijeniti na mreže bilo koje veličine i strukture. Model se sastoji od dvije kompleksne mreže sa svojim unutarnjim i međusobnim vezama. U razmatranom slučaju povezali smo ih koristeći pravilo preferencijalnog vezanja. Počevši u svakoj mreži sa  $n_0$  čvorova, dodavali smo nove čvorove koje smo spajali s  $m_s$  postojećih čvorova u mreži S i s  $m_{w,s}$  postojećih čvorova u mreži W. Na isti način smo dodavali nove članove koje smo spajali s  $m_w$  čvorova u mreži W i  $m_{w,s}$  čvorova u mreži S. Vjerojatnost međusobnog spajanja čvorova ovisi o stupnju vezanja svakog čvora.

Zatim smo željeli vidjeti kako svaki čvor i njegovo stanje utječe na ponašanje susjednih čvorova, stoga smo im dodijelili dva moguća stanja, aktivno (1) i neaktivno (0), te mogućnost prenošenja svoga stanja na susjedne čvorove. Kako bi što bolje simulirali dinamičke uvjete stvarnih mreža u model smo ubacili vjerojatnost neaktivnosti čvora, koja može biti zbog unutarnjih razloga s vjerojatnošću  $p_1$  i zbog vanjskih utjecaja (neaktivne veze) s vjerojatnošću  $p_2$ . Čvor će biti neaktivan s vjerojatnošću  $p_2$  zbog vanjskih utjecaja ako je udio u ukupnom broju njegovih susjeda manji ili jednak pragu  $T$  koji je jednak za sve čvorove u istoj mreži.

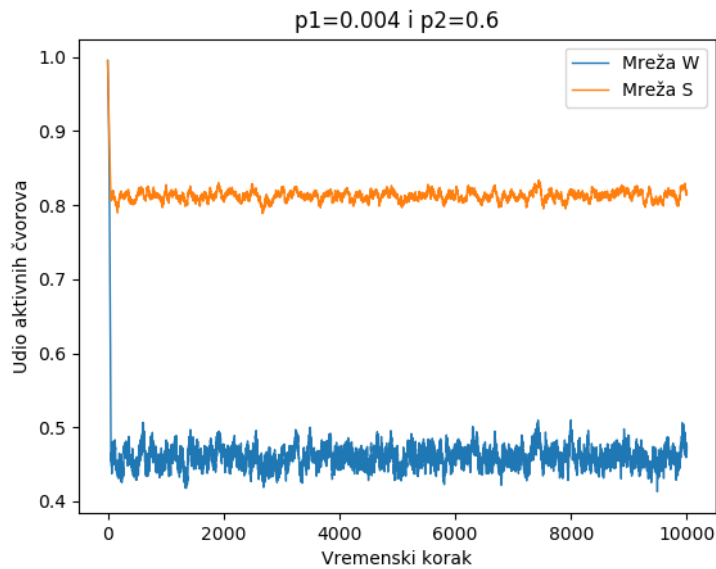
Kako bi napravili razliku između dviju mreža, pretpostavili smo da je jedna mreža otpornija na vanjski negativni utjecaj. To smo napravili tako da mreže nemaju isti prag  $T$ , već je prag  $T_s$  mreže S manji od praga  $T_w$  mreže W,  $T_s < T_w$ , i stoga je mreža S otpornija od mreže W. Za čvorove koji postaju neaktivni zbog unutarnjih razloga stavili smo mogućnost reaktivacije nakon vremena  $\tau$ .

Napravili smo i simulaciju koja uključuje i mehanizam preuzimanja gdje otpornija mreža S preuzima čvor koji je zbog unutarnjih razloga ukupno neaktivan  $n\tau$  vremena, gdje je  $n$  konstanta, a sve to sukladno interakcijama realnih kompetitivnih kompleksnih mreža. Model smo gradili uz pomoć rada [21], a u simulacijama i računima smo koristili programski jezik Julia. Rezultate smo prikazivali preko udjela aktivnih čvorova u mrežama.

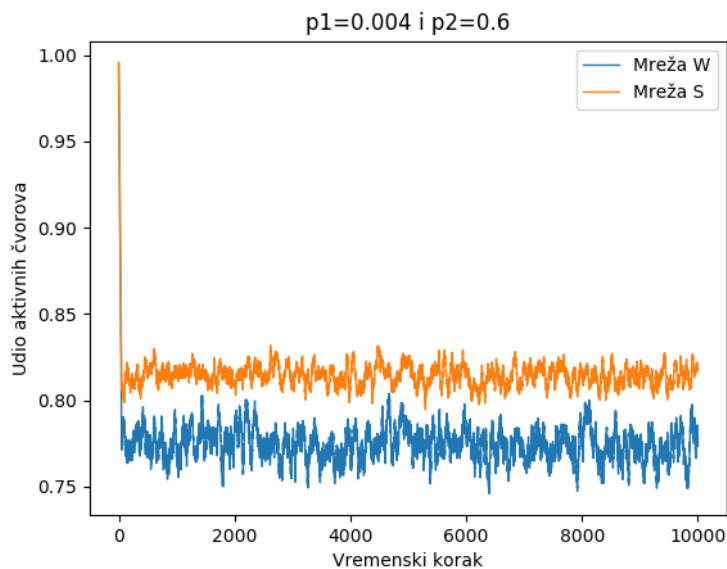
### 6.1 Rezultati

Mreže W i S koje smo koristili kroz cijeli rad smo generirali sa 5000 čvorova u svakoj mreži i stupnjevim vezanja  $m_s = m_w = 3$  i  $m_{w,s} = m_{w,s} = 2$ , a vremenom

reaktivacije čvorova neaktivnih zbog unutarnjih razloga  $\tau = 50$ .



Slika 6.1: Simulacija udjela aktivnih čvorova u vremenu za vjerojatnosti neuspjeha  $p_1 = 0.004$  i  $p_2 = 0.6$ . Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje. Pragovi su stavljeni na  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ . Otpornija mreža S je označena narančastom bojom, dok je mreža W označena plavom bojom



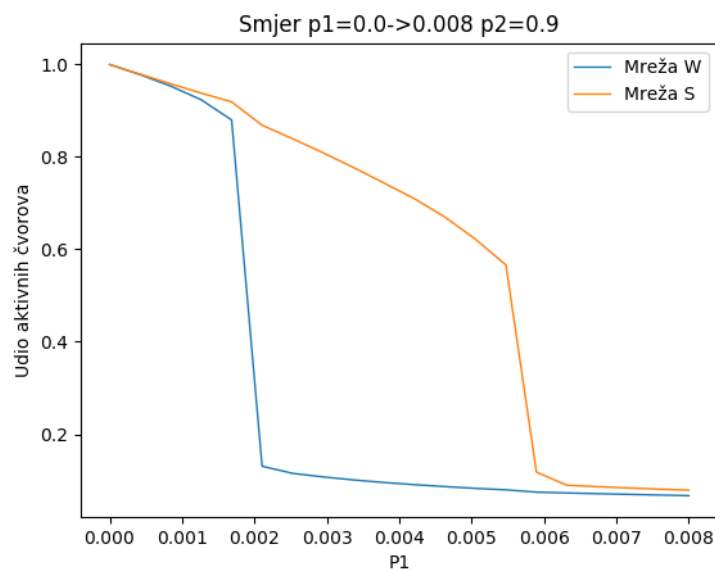
Slika 6.2: Simulacija koja pokazuje smanjenu razliku u udjela aktivnih čvorova mreža W i S u vremenu za vjerojatnosti neaktivnosti  $p_1 = 0.004$  i  $p_2 = 0.6$ . Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje. Pragovi su stavljeni na  $T_s = 0.4$  i  $T_w = 0.6$ . Razlika u udjelu aktivnih čvorova se smanjila s obzirom na slučaj kada smo za pragove imali iznose  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$

Prvo smo proveli simulaciju u vremenu za vrijednosti vjerojatnosti neaktivnosti  $p_1 = 0.004$  i  $p_2 = 0.6$ , a rezultati se nalaze na slikama (6.1) i (6.2). Možemo pri-



mijetiti kako je udio aktivnih čvorova u mreži W manji nego u mreži S, a razlike u aktivnosti mreža možemo smanjiti prilagođavanjem vrijednosti praga  $T_s$  i praga  $T_w$ . Vjerojatnost unutarnjeg neuspjeha  $p_1$  uvodi nasumičnost i fluktuacije u sustav. Sustav vrlo brzo dođe u ravnotežno stanje, te nastavlja fluktuirati oko njega.

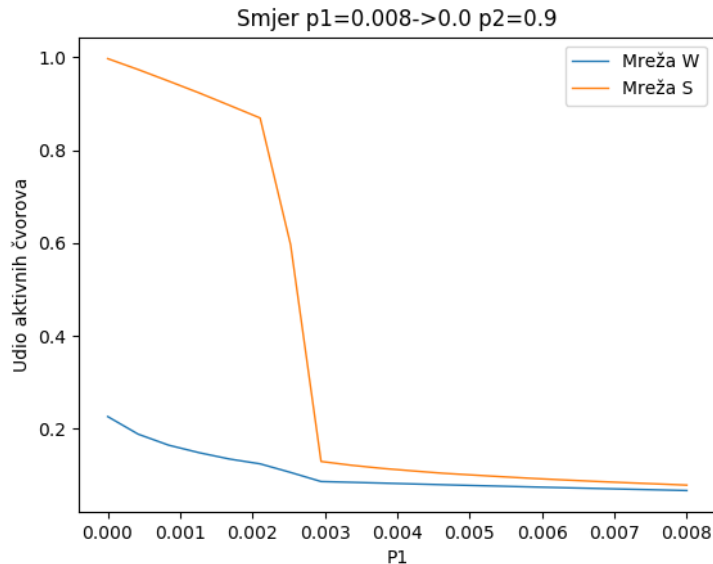
Sljedeće smo ispitali kako sustav reagira na promjenu vjerojatnosti unutarnje neaktivnosti  $p_1$ . Za vjerojatnost neaktivnosti zbog vanjskog utjecaja  $p_2$  smo uzeli da je ista i konstantna za obje mreže. Prvo smo mijenjali vrijednost  $p_1$  od 0.0 do 0.008, a zatim smo mijenjali vrijednost  $p_1$  u suprotnom smjeru, od 0.008 do 0.0 te smo u oba slučaja mjerili prosjek udjela aktivnih čvorova. Primjetili smo pojavu histereze, jer rezultati ovise o prijašnjem stanju sustava. Rezultati simulacija se nalaze na slikama (6.3) i (6.4). Kako polako mijenjamo  $p_1$  od 0.0 prema 0.008 vidimo iznenadni pad u aktivnosti mreže W pri vrijednosti 0.002, dok mreža S i dalje zadržava znatan udio aktivnih čvorova.



Slika 6.3: Prosjek udjela aktivnih čvorova u ovisnosti o vjerojatnosti unutarnjeg neuspjeha  $p_1$  za mreže W i S u smjeru  $p_1 = 0.0 \rightarrow 0.008$ . Vjerojatnost neaktivnosti  $p_2 = 0.9$  je konstantna. Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje, a pragovi su  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ . Narančasta linija prikazuje prosjek udjela aktivnih čvorova mreže S, a plava linija mreže W.

Daljnijim povećavanjem vrijednosti  $p_1$  u mreži S sve veći broj čvorova postaje neaktivno sve dok se nakon jakog pada u aktivnosti malo prije vrijednosti 0.006 približno ne izjednači sa aktivnosti mreže W. U tom trenutku možemo reći da smo nanijeli veliku štetu našem sustavu međudjelujućih mreža, a zanimljivo pitanje je što se događa

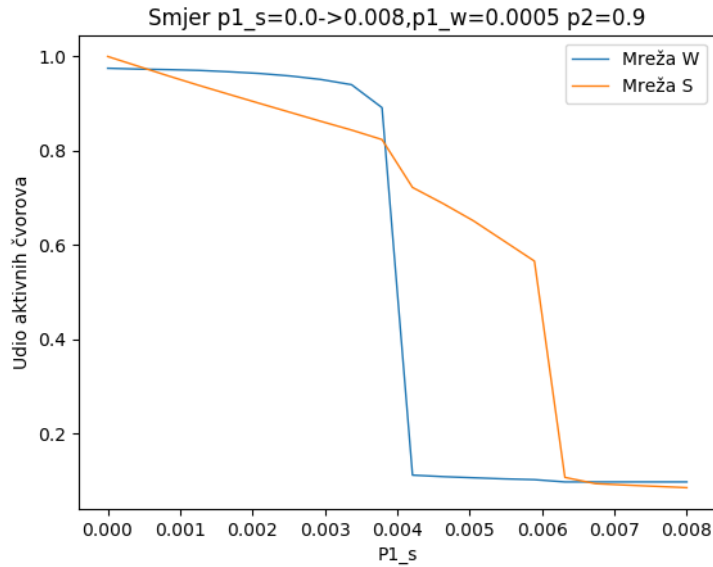
kada pokušavamo vratiti sustav iz tog stanja. Vidljivo je da ako krenemo u suprotnom smjeru, od 0.008 prema 0.0, otpornija mreža S se uspije potpuno oporaviti, dok mreža W to ne uspijeva i ostaje na relativno malom udjelu aktivnih čvorova.



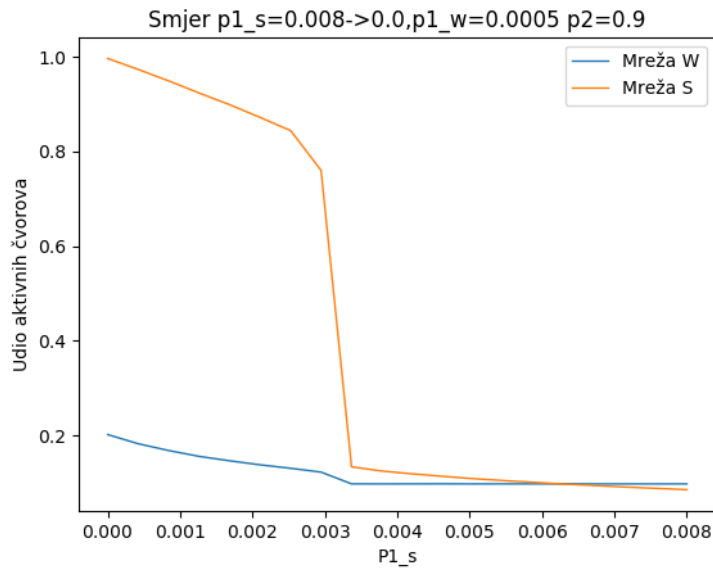
Slika 6.4: Prosjek udjela aktivnih čvorova u ovisnosti o vjerojatnosti unutarnje neaktivnosti  $p_1$  za mreže W i S u smjeru  $p_1 = 0.008 \rightarrow 0.0$ . Vjerojatnost neaktivnosti  $p_2 = 0.9$  je konstantna. Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje, a pragovi su  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ . Narančasta linija prikazuje prosjek udjela aktivnih čvorova mreže S, a plava linija mreže W.

Pojavu histereze te potpun oporavak mreže S i nemogućnost oporavka slabije mreže W možemo opaziti i na primjeru realnih sustava gdje micanjem ekonomskih sankcija u financijskim sustavima ili nakon ekonomskih kriza, male ekonomije se ne uspijevaju oporaviti, dok se velike ekonomije uspijevaju oporaviti uz malenu štetu [21, 22]. Još jedan slučaj histereze koji je dijelom zanimljiv je što ako se mreža W usred velikih ekonomskih kriza odupire promjeni, te pokušava sačuvati integritet mreže održavanjem vjerojatnosti neaktivnosti  $p_{w,1}$  prihvatljivom konstantom, a otpornija mreža ne uspijeva reagirati na pravi način i vjerojatnost neaktivnosti  $p_{s,1}$  njenog čvora zbog unutarnjih razloga postepeno raste.

Slučaj je prikazan na slikama (6.5) i (6.6). Simulacija nas upućuje na to da se slabija mreža W uspijeva bolje oduprijeti propadanju od otpornije mreže S. Ipak sama povezanost sa mrežom S koja propada i širi neuspjeh i na mrežu W na kraju je dovodi u stanje velike neaktivnosti čvorova, te kada ekonomska kriza završi, onemogućava njen potpun oporavak, dok se mreža S uspijeva potpuno oporaviti.



Slika 6.5: Prosjek udjela aktivnih čvorova o vjerojatnosti unutarnjeg neuspjeha  $p_{s,1}$  za mreže W i S u smjeru  $p_1 = 0.0 \rightarrow 0.008$ . Vjerojatnost  $p_{w,1} = 0.0005$  mreže W je konstanta. Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje, a pragovi su  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ .

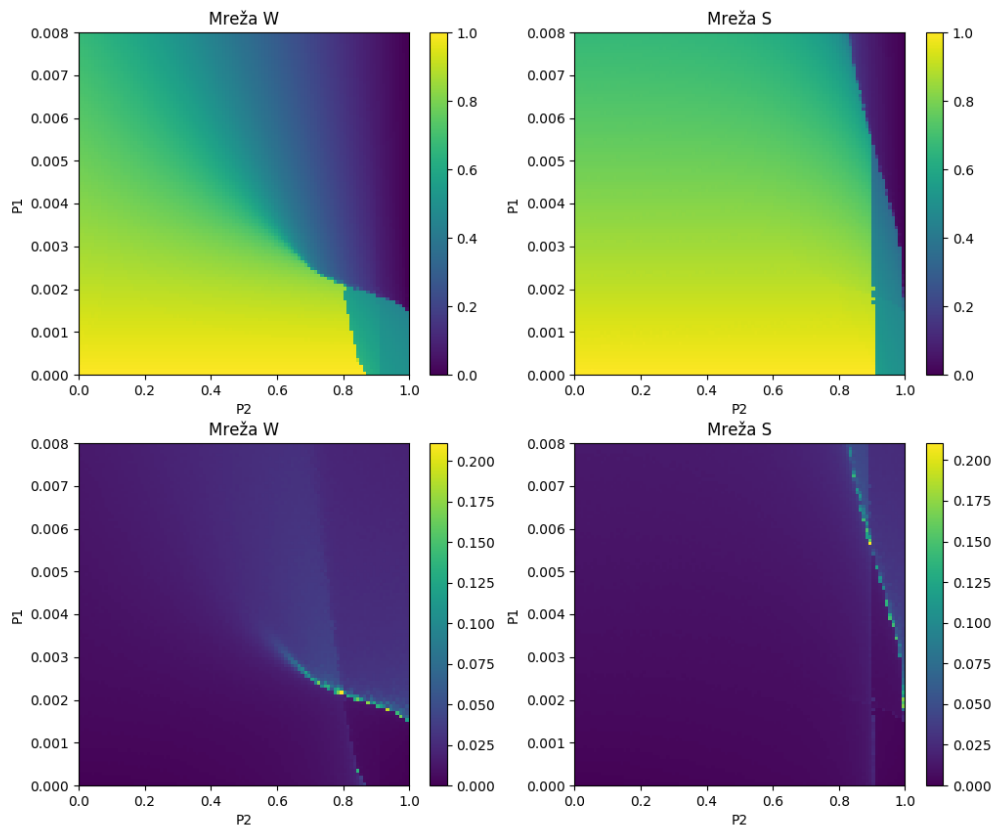


Slika 6.6: Prosjek udjela aktivnih čvorova o vjerojatnosti unutarnjeg neuspjeha  $p_{s,1}$  za mreže W i S u smjeru  $p_1 = 0.008 \rightarrow 0.0$ . Vjerojatnost  $p_{w,1} = 0.0005$  mreže W je konstanta. Mreže S i W su u početnom trenutku stavljene u potpuno aktivno stanje, a pragovi su  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ .

### 6.1.1 Fazni dijagrami

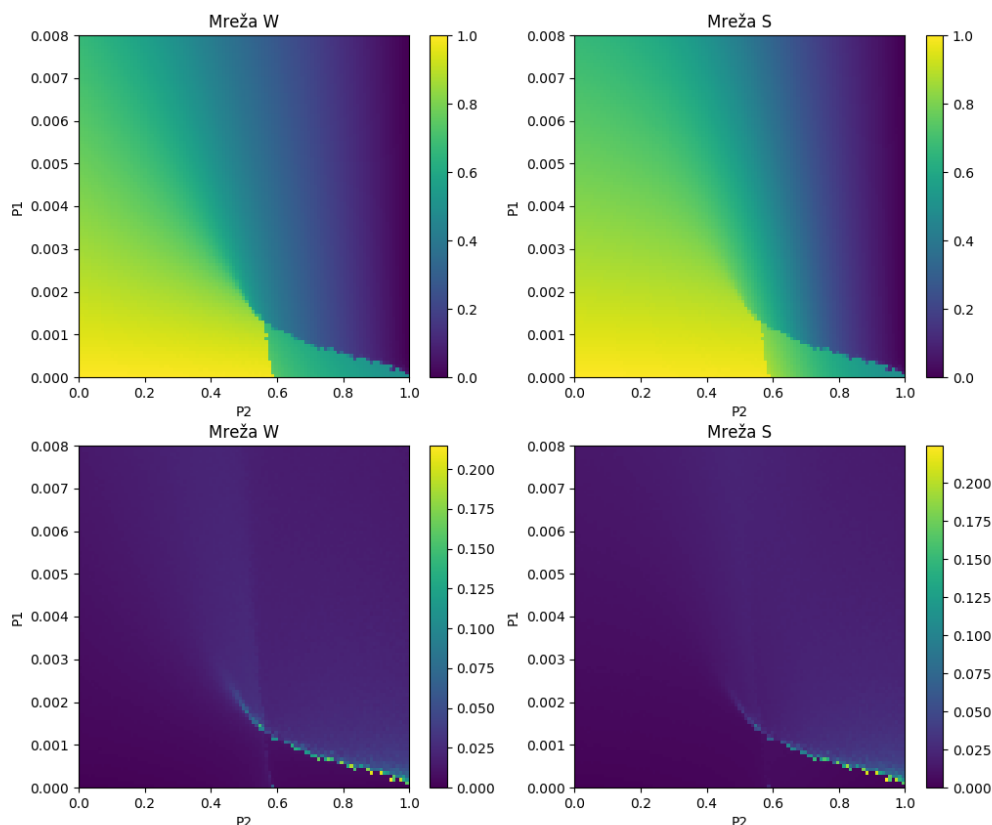
Mreža W i mreža S skupa čine sustav. Promjene u mreži W također utječe na mrežu S i obrnuto. Uočili smo i nagle promjene u udjelu aktivnih čvorova mreže što nas je

navelo da napravimo fazni dijagram cjelokupne mreže kako bi vidjeli kako promjene vjerojatnosti neaktivnosti  $p_1$  i  $p_2$  utječu na cijelu mrežu. Na slici (6.7) vidimo da mreža W i mreža S imaju različite područja aktivnosti, a upravo to dozvoljava mreži S da napadne mrežu W i potencijalno je nepovratno oštetiti.



Slika 6.7: Fazni dijagram koji prikazuje prosjek udjela aktivnih čvorova i standardnu devijaciju udjela aktivnih čvorova u mrežama W i S u ovisnosti o parametrima vjerojatnosti neuspjeha  $p_1$  i  $p_2$ . Pragovi su stavljeni na  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ .

Do sada smo proučavali ponašanje međudjelujućih mreža gdje smo dodijelili samo jedan prag po mreži,  $T_s$  i  $T_w$ . No iskustveno znamo da u realnim mrežama funkcija čvora nije jednako osjetljiva na promjene unutar svoje mreže i na promjene u susjednim mrežama. Stoga smo proširili naš model dodavajući i zasebne pragove za vanjski utjecaj, pa tako čvor u mreži S može doživjeti stanje neaktivnosti zbog vanjskog utjecaja s vjerojatnošću  $p_2$  ako je udio aktivnih susjednih čvorova u mreži S manji ili jednak nekom pragu  $T_s$  ili ako je udio aktivnih susjednih čvorova u mreži W manji ili jednak nekom pragu  $T_{w,s}$ . Na sličan način definiramo neaktivnost zbog vanjskih utjecaja u manje otpornoj mreži W, dodavajući pragove  $T_w$  i  $T_{s,w}$ .



Slika 6.8: Fazni dijagram koji prikazuje prosjek udjela aktivnih čvorova i standardnu devijaciju udjela aktivnih čvorova u mrežama W i S u ovisnosti o parametrima vjerojatnosti neaktivnosti  $p_1$  i  $p_2$ , uz dodatne pragove  $T_{s,w} = T_{w,s} = 0.4$ . Pragovi utjecaja čvorova unutar iste mreže su stavljeni na  $T_s = 0.3$  i  $T_w = 0.7$ .

Aktivnost svakog čvora je ovisna o njegovim susjedima u mreži S i u mreži W, ali sa različitim osjetljivostima na vanjske utjecaje. Slika (6.8) prikazuje fazni dijagram međudjelujućih mreža kojima smo dodijelili dodatne pragove vanjskog utjecaja. Vidimo da se povećao utjecaj mreže W u aktivnosti mreže S, te su obje mreže postale jače korelirane. Mreža W je dobila veću ulogu u aktivnosti cijelog sustava, a područje neaktivnosti mreže S se znatno povećalo u odnosu na prethodni slučaj koji je prikazan na slici (6.7).

## 6.2 Preuzimanje i zakon očuvanja

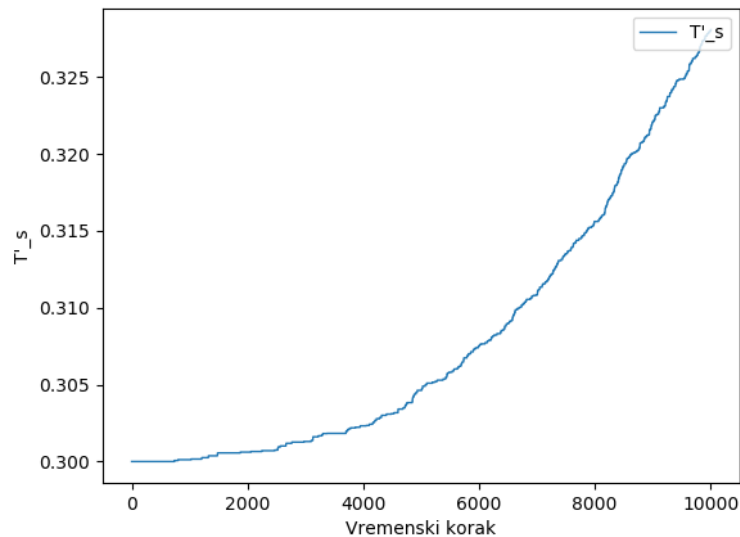
Kako bismo procijenili troškove preuzimanja u obje mreže, definiramo bogatstvo mreže (kapital) proporcionalno dvjema varijablama: ukupnom broju veza u mreži

i otpornosti mreže. Ako dvije mreže imaju isti broj veza, ali različitu otpornost, njihovo bogatstva nije jednako. Kad mreža S preuzme čvor stupnja vezanja  $k_w$  iz mreže W, ukupna otpornost mreže S se smanji jer je preuzela slabiji čvor. Tako mreža S plaća trenutni, kolektivni trošak putem povratne informacije. Definirali smo zakon očuvanja u međudjelujućim mrežama kao

$$N \langle k_s \rangle (T'_s - T_s) = k_{w,i} (T_w - T'_s) \quad (6.1)$$

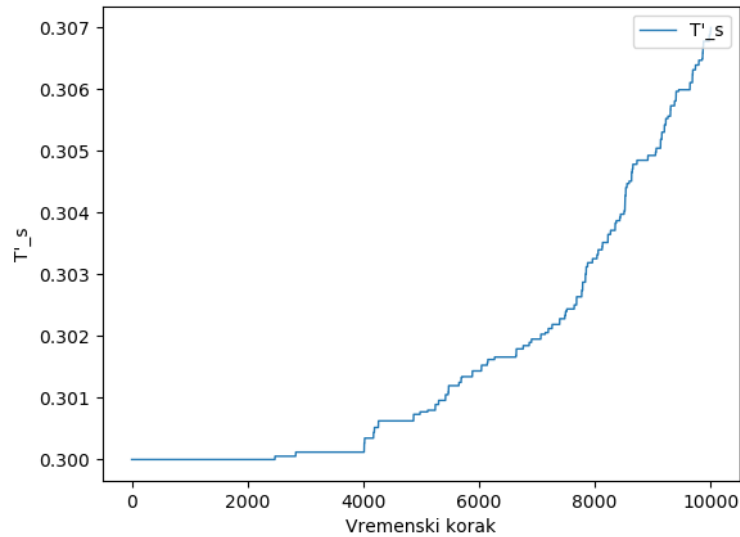
Ovdje je  $N$  veličina jake mreže,  $\langle k_s \rangle$  je prosjek stupanj vezanja mreže S, a  $k_{w,i}$  stupanj vezanja preuzetog čvora. Dakle, pretpostavljamo da što je preuzeti čvor važniji (tj. veći njegov stupanj  $k_{w,i}$ ), to je veći trošak za otpornost mreže S, čineći ju podložnijom u budućim napadima. Ovdje kvantificiramo kako se prag  $T'_s$  snažnije mreže mijenja u konkurentnim mrežama gdje pretpostavljamo da se prag  $T_w$  slabije mreže ne mijenja, jer svaki čvor ima isti prag. Jača mreža S ima početni broj čvorova  $N_s$ , i u prosjeku stupanj  $\langle k_s \rangle$ , a nakon višestrukih preuzimanja, gdje je S preuzeo čvorove  $n_{w,1}, n_{w,2}, \dots, n_{w,n}$  s stupnjevima  $k_{w,1}, k_{w,2}, \dots, k_{w,n}$ , dobivamo

$$T'_s = \frac{(k_{w,1} + k_{w,2} + \dots + k_{w,n})T_w + N_s \langle k_s \rangle T_s}{N_s \langle k_s \rangle + k_{w,1} + k_{w,2} + \dots + k_{w,n}} \quad (6.2)$$



Slika 6.9: Promjena prag  $T'_s$  kroz vrijeme, uz uključen mehanizam preuzimanja, a preuzimanje smo dozvolili ako je neki čvor mreže W ukupno neaktivan dulje od  $n\tau = 125$ . Simulacija smo radili za parametre  $p_1 = 0.0001$ ,  $p_2 = 0.9$ ,  $T_w = 0.7$ , a početna vrijednost praga mreže S je bila  $T_s = 0.3$ .

Razlike u slikama (6.9) i (6.10) se javljaju zato što smo promijenili vrijeme potrebno za preuzimanje neaktivnih čvora, te vidimo da na slici (6.10) preuzimanje i promjena praga  $T'_s$  idu sporije.



Slika 6.10: Promjena prag  $T'_s$  kroz vrijeme, uz uključen mehanizam preuzimanja, a preuzimanje smo dozvolili ako je neki čvor mreže W ukupno neaktivan dulje od  $n\tau = 175$ . Simulacija smo radili za parametre  $p_1 = 0.0001$ ,  $p_2 = 0.9$ ,  $T_w = 0.7$ , a početna vrijednost praga mreže S je bila  $T_s = 0.3$ .

## 7 Zaključak

Predstavili smo teorijski okvir koji se temelji na otpornosti, međudjelovanju i faznim prijelazima, te smo uveli koncept troška i definirali zakon očuvanja u međudjelujućim mrežama. Naš model za konkurentske mreže može biti primijenjen u širokom rasponu ljudskih aktivnosti, od medicine i financija u međunarodnim odnosima, pa do vojnih operacija. Usredotočili smo se na specifičan kontekst gdje otpornija mreža napada manje fleksibilnu konkurentsku mrežu.

Pretpostavke modela o strukturi i dinamici za dvije interaktivne mreže s konkurentskim interakcijama i različitim razinama otpornosti moraju se prilagoditi u skladu sa različitim scenarijima u stvarnom svijetu. Sposobnost mjerenja otpornosti napadača i trošak napada je presudan jer svako slabljenje otpornosti smanjuje vjerojatnost preživljavanja mreže pod budućim napadima [21, 23]. Na primjer, u političkom socio-ekonomskom sustavu, mrežni pristup za prevladavanje konkurentskih zemalja mogao bi biti učinkovitiji primjenom ekonomske sankcije nego izvršavanjem vojnih akcija. Međusobno veze uspostavljene između zemalja tijekom prosperitetna vremena mogu prouzrokovati namjerne fluktuacije koje se koriste kao oružje kada otpornije zemlje pokušavaju prevladati manje otporne zemlje. Tijekom dugih gospodarskih kriza, ova međuovisnost može postati kobna za manje robusne zemlje [24–26], čija slabost se pojačava time što su podcijenjeni u globalnoj mreži te istodobno, čije resurse mogu zarobiti moćnije zemlje.

Pored intenzivnih fluktuacija karakterističnih za ljudska društva, naša se metodologija također može primijeniti na široku klasu složenih sustava u kojima nastaju spontane fluktuacije, od funkcioniranja mozga do ekoloških staništa i klimatskih fluktuacija. Metodologija se temelji na specifičnosti strukture, dinamike i mehanizama modela mreža s konkurentskim interakcijama i različitim razinama otpornosti, koje se moraju prilagoditi različitim sustavima i kontekstima primjene.



# Dodaci

## Dodatak A Model međudjelujućih mreža u Julia programskom jeziku

### A.1 Parametri mreže

```
1 const NMAX1=5000
2 const NMAX2=5000
3 const NLINKS1=6
4 const NLINKS2 = NLINKS1
5 const NLINKS12=4
6 const NLINKS21=NLINKS12
7 const NNODE=50
8 const STEP=10000
9 const TAU=50
10 const Tw=(0.6::Float64)
11 const Ts=(0.4::Float64)
12 const KK_1=round(Int64,NMAX1*NLINKS1/2)
13 const KK_2=round(Int64,NMAX2*NLINKS2/2)
14 const KK_12=round(Int64,NMAX1*NLINKS12)
15 const dead=(0::Int64)
16 const alive=(1::Int64)
17 P1=(0.004::Float64)
18 P2=(0.6::Float64)
```

### A.2 Funkcije

#### A.2.1 Funkcija za generiranje Mreže1 i Mreže2

```
1 function NewNetwork(KK::Int64,NMAX::Int64)
2     CLASS=round(Int64,zeros(NMAX))
3     ILINKS=round(Int64,zeros(NMAX,NNODE))
4     for ijk=1:KK
5         @label OPET
6         i=round(Int64,rand()*NMAX+0.500000001)
7         j=round(Int64,rand()*NMAX+0.500000001)
8         CLASS[i]=CLASS[i]+1
9         CLASS[j]=CLASS[j]+1
10        for jki=1:CLASS[i]
11            if ILINKS[i,jki]==j || i==j
12                CLASS[i]=CLASS[i]-1
13                CLASS[j]=CLASS[j]-1
14                @goto OPET
15            end
16        end
17        ILINKS[i,CLASS[i]]=j
18        ILINKS[j,CLASS[j]]=i
```

```

19     end
20     return CLASS,ILINKS
21 end

```

### A.2.2 Funkcija za međusobno spajanje Mreže1 i Mreže2

```

1 function ConnectingNetworks(KK::Int64,CLASS_1::Array{Int64,1},CLASS_2::
  Array{Int64,1})
2     ILINKS_12=round(Int64,zeros(NMAX1,NNODE))
3     ILINKS_21=round(Int64,zeros(NMAX2,NNODE))
4     CLASS_12=round(Int64,zeros(NMAX1))
5     CLASS_21=round(Int64,zeros(NMAX2))
6     PROB12=zeros(NMAX1+6)
7     for ijk=1:KK
8         i=round(Int64,rand()*NMAX1+0.500000001)
9         CLASS_12[i]= CLASS_12[i] + 1
10        TOTCLASS12=0.0
11        for j=1:NMAX1
12            TOTCLASS12=TOTCLASS12+1.0/(abs(CLASS_1[i]-CLASS_2[j])+1)
13        end
14        PROB12[1] = 0.0
15        for j=1:NMAX1
16            PROB12[j+1]=PROB12[j]+1.0/(abs(CLASS_1[i]-CLASS_2[j])+1)/
              TOTCLASS12
17        end
18        x=rand()
19        for j=1:NMAX1
20            if x>=PROB12[j] && x<=PROB12[j+1]
21                CLASS_21[j]=CLASS_21[j]+1
22                ILINKS_12[i,CLASS_12[i]] = j
23                ILINKS_21[j,CLASS_21[j]] = i
24            end
25        end
26    end
27    return CLASS_12,CLASS_21,ILINKS_12,ILINKS_21
28 end

```

### A.2.3 Funkcija "External Failure"

```

1 function External(CLASS_1::Array{Int64,1},CLASS_12::Array{Int64,1},
  ILINKS_1::Array{Int64,2},ILINKS_12::Array{Int64,2},NODE_1::Array{Int64
  ,2},NODE_2::Array{Int64,2},NMAX_1::Int64,T::Float64,P_2::Float64)
2     for j=1:NMAX_1
3         NO_LIVING1=0
4         for i=1:CLASS_1[j]
5             INEIGH=ILINKS_1[j,i]
6             NO_LIVING1=NO_LIVING1+NODE_1[INEIGH,1]*NODE_1[INEIGH,3]
7         end
8         for i=1:CLASS_12[j]
9             INEIGH=ILINKS_12[j,i]
10            NO_LIVING1=NO_LIVING1+NODE_2[INEIGH,1]*NODE_2[INEIGH,3]
11        end
12        THRESH1=1.0*(CLASS_1[j]+CLASS_12[j])*T

```

```

13     x=rand()
14     if NO_LIVING1<=THRESH1 && x<P_2
15         NODE_1[j,2]=0
16     else
17         NODE_1[j,2]=1
18     end
19 end
20 end

```

#### A.2.4 Funkcija "Internal Failure"

```

1 function Internal(NODE::Array{Int64,2},NMAX::Int64,P_1::Float64)
2     for j=1:NMAX
3         x=rand()
4         if x<P_1
5             NODE[j,1]=0
6             NODE[j,4]=0
7         end
8         if NODE[j,4]==TAU
9             NODE[j,1]=1
10            NODE[j,4]=0
11        end
12        if NODE[j,1]==0
13            NODE[j,4]=NODE[j,4]+1
14        end
15    end
16    return NODE
17 end

```

#### A.2.5 Funkcija "Active/Inactive Nodes"

```

1 function LivingNet(NODE_1::Array{Int64,2},NODE_2::Array{Int64,2})
2     GLOBAL_1=0.0
3     for j=1:NMAX1
4         GLOBAL_1=GLOBAL_1+NODE_1[j,1]*NODE_1[j,2]
5     end
6     GLOBAL_1=GLOBAL_1/(1.0*NMAX1)
7     GLOBAL_2=0.0
8     for j=1:NMAX2
9         GLOBAL_2=GLOBAL_2+NODE_2[j,1]*NODE_2[j,2]
10    end
11    GLOBAL_2=GLOBAL_2/(1.0*NMAX2)
12    for j=1:NMAX1
13        NODE_1[j,3]=NODE_1[j,2]
14    end
15    for j=1:NMAX2
16        NODE_2[j,3]=NODE_2[j,2]
17    end
18    return GLOBAL_1,GLOBAL_2
19 end

```

### A.2.6 Funkcija za inicijalizaciju spina, Dead(0) OR Alive(1)

```
1 function NodeInitialization(NODE::Array(Int64,2),deadORalive::Int64)
2     for j=1:NMAX1
3         NODE[j,1]=1
4         NODE[j,2]=deadORalive
5         NODE[j,3]=deadORalive
6         NODE[j,4]=0
7     end
8     return NODE
9 end
```

### A.2.7 Funkcija za dinamiku sustava

```
1 function Dynamics(P_1::Float64,P_2::Float64,deadORalive1::Int64,
2     deadORalive2::Int64)
3     GLOBAL1=zeros(STEP)
4     GLOBAL2=zeros(STEP)
5     CLASS1,ILINKS1=NewNetwork(KK_1,NMAX1)
6     CLASS2,ILINKS2=NewNetwork(KK_2,NMAX2)
7     CLASS12,CLASS21,ILINKS12,ILINKS21=ConnectingNetworks(KK_12,CLASS1,
8         CLASS2)
9     NODE1=round(Int64,zeros(NMAX1,4))
10    NODE2=round(Int64,zeros(NMAX2,4))
11    NodeInitialization(NODE1,deadORalive1::Int64)
12    NodeInitialization(NODE2,deadORalive2::Int64)
13    for ij=1:STEP
14        External(CLASS1,CLASS12,ILINKS1,ILINKS12,NODE1,NODE2,NMAX1,Tw,P_2)
15        External(CLASS2,CLASS21,ILINKS2,ILINKS21,NODE2,NODE1,NMAX2,Ts,P_2)
16        Internal(NODE1,NMAX1,P_1)
17        Internal(NODE2,NMAX2,P_1)
18        GLOBAL1[ij],GLOBAL2[ij]=LivingNet(NODE1,NODE2)
19    end
20    MEAN_1=round(mean(GLOBAL1),4)
21    STD_1=round(std(GLOBAL1),4)
22    MEAN_2=round(mean(GLOBAL2),4)
23    STD_2=round(std(GLOBAL2),4)
24    return MEAN_1,STD_1,MEAN_2,STD_2,GLOBAL1,GLOBAL2
25 end
```

## Bibliografija

- [1] General features of complex systems, UNESCO-EOLSS, <https://www.eolss.net/sample-chapters/c15/e1-29-01-00.pdf>, 30.4.2017
- [2] The physics of complex networks, Delft University of Technology, [https://www.nas.ewi.tudelft.nl/people/Piet/papers/robustness\\_complex\\_nets.pdf](https://www.nas.ewi.tudelft.nl/people/Piet/papers/robustness_complex_nets.pdf), 30.4.2017
- [3] Caldarelli, G. Scale-Free Networks. 1st ed. New York: Oxford University Press, 2007.
- [4] Barabási, A. L. Linked: The new science of networks. 1st ed. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing, 2002.
- [5] Network science by Albert-László Barabási, <http://barabasi.com/networksciencebook/>, 20.11.2016
- [6] Barabási, A. L.; Albert, R. Emergence of scaling in random networks // Science, vol. 286, 5439(1999), str. 509-512.
- [7] Erdős, P.; Rényi, A. On random graphs I. // Publications Mathematicae, vol. 6, (1959), str. 290-297.
- [8] Erdős, P.; Rényi, A. On the evolution of random graphs // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, vol. 5, (1960), str. 17-61.
- [9] Albert, R.; Jeong, H.; Barabási, A. L. Internet: Diameter of the World-Wide Web // Nature, vol. 401, (1999), str. 130-131.
- [10] Watts, D. J.; Strogatz, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks // Nature, vol. 393, (1998), str. 440-442.
- [11] Barabási, A. L.; Albert, R.; Jeong, H. Mean-field theory for scale-free random networks // Physics A, vol. 272, (1999), str. 173-187.
- [12] Newman, M. E. J. Clustering and preferential attachment in growing networks // Physical review E, vol. 64, 2(2001), str. 1-3.

- [13] Merton, R. K. The Matthew effect in science // *Science*, vol. 159, 3810(1968), str. 56-63.
- [14] Barabási, A. L. Luck or reason // *Nature*, vol. 489, (2012), str. 507-508.
- [15] Perc, M. The Matthew effect in empirical data // *J.R.Soc. Interface*, vol. 11, 98(2014)
- [16] Majdandzic, A., Braunstein, L. A.; Curme, C.; Vodenska, I.; Levy-Carciente, S.; Stanley, H. E.; Havlin, S. Multiple tipping points and optimal repairing in interacting networks // *Nature Communications*, vol. 7, 10850(2016)
- [17] Gao, J.; Buldyrev, S. V.; Stanley, H. E.; Havlin, S. Networks formed from interdependent networks // *Nature Physics*, vol. 8, (2012). str. 40-48.
- [18] Podobnik, B.; Lipic, T.; Horvatic, D.; Majdandzic, A.; Bishop, S. R.; Stanley, H. E. Predicting the lifetime of dynamics networks experiencing persistent random attacks // *Scientific Reports*, vol 5., (2015)
- [19] Majdandzic, A.; Podobnik, B.; Buldyrev, S. V.; Kenett, D. Y.; Havlin, S.; Stanley, H. E. Spontaneous recovery in dynamical networks // *Nature Physics*, vol. 10, (2014), str. 34-38.
- [20] Podobnik, B.; Majdandzic, A.; Curme, C.; Qiao, Z.; Zhou, W.-Z.; Stanley, H. E.; Li, B. Network risk and forecasting power in phase-flipping dynamical networks // *Physical Review E*, vol. 89, 042807(2014)
- [21] Podobnik, B.; Horvatic, D.; Lipic, T.; Perc, M.; Buldú, J. M.; Stanley, H. E. The cost of attack in competing networks // *J. R. Soc. Interface*, vol. 12, 112(2015)
- [22] May, R. M. Networks and webs in ecosystems and financial systems // *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 371, 1987(2013)
- [23] Albert, R.; Jeong, H.; Barabási, A. L. Error and attack tolerance of complex networks // *Nature*, vol. 406, (2000), str. 378-382.
- [24] Reis, S. D. S.; Hu, Y.; Babino, A.; Andrade, J. S.; Canals, S.; Sigman, M.; Makse, H. A. Avoiding catastrophic failure in correlated networks of networks // *Nature Physics*, vol. 10, (2014), str 762-767.

- [25] Buldyrev, S. V.; Parshani, R.; Paul, G.; Stanley, H. E.; Havlin, S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks // Nature, vol. 464, (2010) str. 1025-1028.
- [26] D'Souza, R. M. Complex networks: A winning strategy // Nature Physics, vol. 9, (2013), str. 212-213.