Islamski matematičari mongolskoga doba

Antolek, Renata

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Renata Antolek

ISLAMSKI MATEMATIČARI MONGOLSKOGA DOBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brüeckler

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici, doc. dr. sc. Franki Miriam Brüeckler na ukazanom povjerenju, pruženoj pomoći i brojnim savjetima tijekom izrade diplomskog rada. Od srca zahvaljujem obitelji, dečku i prijateljima na bezuvjetnoj potpori tijekom studija.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Početci trigonometrije

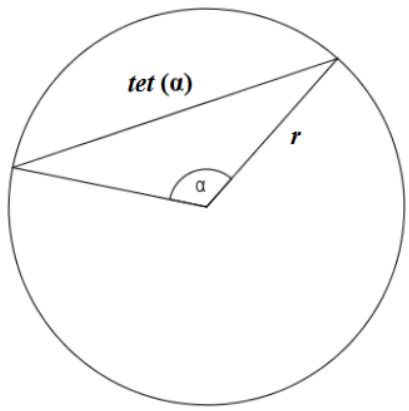
Kako je glavnina bitnih doprinosa matematičara mongolskog doba vezana za trigonometriju, osvrnut ćemo se na njezinu povijest prije toga. Trigonometrija je matematička disciplina koja se bavi odnosima stranica u trokutima, iz njih izvedenim funkcijama i njihovim primjenama. To je posebna grana matematike i njen je naziv sastavljen od grčkih riječi *trigonon* (trokut) i *metron* (mjera). Korijeni trigonometrije pronađeni su još u starom Babilonu i u Egiptu. Tada su određene omjere stranica koristili u astronomiji, za računanje elemenata trokuta. Začetnicima „prave“ trigonometrije smatraju se antički Grci. Trigonometrijske se funkcije pojavljuju u postklasičnom grčkom razdoblju (2.st.pr.Kr.–5.st.n.e.) i to zbog potreba astronomije.

Utemeljiteljem trigonometrije smatra se Hiparh iz Niceje (oko 180.–125.pr.Kr.). Izradio je prvu poznatu tablicu središnjih kutova i pripadnih tetiva. Na slici 1.1 uočimo da su tetive u osnovi dvostruki sinusi polukuta pa se Hiparhova tablica može smatrati prvom tablicom sinusa. Osnova zapadne astronomije sve do renesanse bio je Ptolemejev (2. st.) *Almagest*[1]. U tom je djelu Ptolemej dao matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela, kao i tablicu tetiva za kutove od 0.5° do 180° s točnošću na otprilike pet decimala. Njegov teorem govori da je u tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dvaju parova nasuprotnih stranica. Uočimo sa slike 1.2 da je Ptolemejev teorem zapravo adicioni teorem za sinuse:

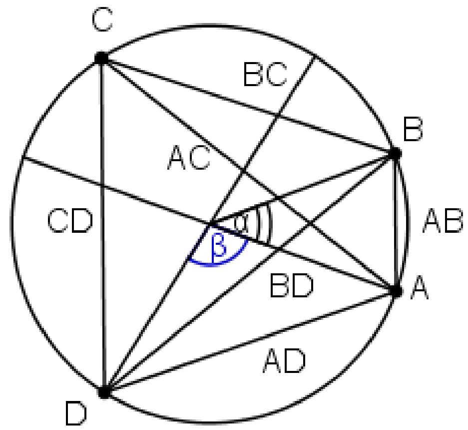
$$\mathrm{tet}(\alpha+\beta)\cdot d = \mathrm{tet}(\alpha)\mathrm{tet}(180^\circ-\beta) + \mathrm{tet}(\beta)\mathrm{tet}(180^\circ-\alpha).$$

Sve do kraja razdoblja antičke grčke matematike, grčki matematičari su kao jedini oblik trigonometrije koristili račun tetiva te ga primjenjivali na izračunavanje raznih astronomskih podataka.

[1] arapski prijevod nestalog originala naziva, prevedeno, „Matematička kompilacija“



Slika 1.1: Tetive kao prva verzija sinusa



Slika 1.2: Ptolemejev teorem

Polutetive, tj. sinusi, se prvi puta pojavljuju u Indiji oko 5. st. n. e. Tada je prvi veliki indijski matematičar, Aryabhata stariji (476.–550.) napisao raspravu *Aryabhatiya* u kojoj je spojio poznate rezultate indijske matematike do tog vremena. U toj je raspravi objavljena prva poznata tablica sinusa (polutetiva). Naime, indijski su astronomi i matematičari, pod utjecajem babilonske i grčke tradicije, prvi primijetili da je umjesto odnosa tetive i polumjera, zgodnije gledati odnos polutetive i polumjera. Vrhunac indijske matematike predstavlja Bhaskara II (1114.–1185.), koji je dao metodu za konstrukciju tablice sinusa kao i adicione formule za sinus. Nakon nastanka arapskog kalifata, islamski matematičari preuzeli su indijsko znanje trigonometrije i nastavili njezin razvoj, o čemu će biti riječ u nastavku.

Zanimljivo je i da je naziv sinus i kosinus stigao u europske jezike greškom u prijevodu. Naime, prve nazive za sinus i kosinus dali su stari Indijci, a bili su to *jyā* (*jivā*) i *koti-jyā*. Najprije se rabio naziv *ardha-jyas* (polovica tetive), jer *jyā* na sanskrtu znači tetiva. Zatim Arapi krivo prenose tu riječ, umjesto *jyā* imaju *džiba*, što u arapskom jeziku nema značenje. Tada je oni zamjenjuju s istozvučnicom (i jednako pisanom: u arapskom se samoglasnici ne pišu) *džaib* (zaljev; prsa) te je europski srednjovjekovni prevoditelj Robert iz Chestera doslovno prevodi na latinski i dobiva naziv sinus. [6, 13, 15]

1.2 Matematika srednjovjekovnog muslimanskog svijeta

Neki smatraju da doprinos arapskog svijeta matematici nije bio ništa više od prevođenja grčkih tekstova na arapski jezik, te kao takav posredovanje u očuvanju antičke grčke tradicije. No, današnja je matematika zapadnog stila mnogo sličnija onoj koju susrećemo u arapskim doprinosima, nego onoj u starogrčkim. Arapska je moć počela jačati pojavom islama, koji je temeljen na učenjima proroka Muhameda. Njegovi nasljednici (kalifi) tijekom 7.–11. stoljeća osvajili su velike teritorije. Za državni jezik tog teritorija proglašen je arapski te su znanstvenici raznih naroda i vjera morali pisati arapski; stoga se matematika tog prostora i razdoblja često zove arapskom. Osim grčkog utjecaja, važan je i indijski (dekadski pozicijski sustav, računske tehnike, trigonometrija, ...). Godine 786. na vlast je stupio kalif Hārūn ar-Rašīd koji je poticao znanost. Osnovao je *Kuću mudrosti (Bayt al-Ḥikma)*, kombinaciju knjižnice, akademije i centra za prijevode. Matematičke tekstove s grčkog jezika prevodili su matematičari, a ne nestručni prevoditelji te su zbog tog prijevodi bili kvalitetni. Još prije toga, u 7. stoljeću, Arapi su razvili alfabetski brojevni sustav, *abdžad*, koji koristi slova arapskog alfabeta slično kao ranije grčki alfabetski sustav. Do 10. stoljeća postepeno ga je zamijenila arapska inačica indijskog pozicijskog sustava. Razvile su se zapravo dvije inačice: istočna (koriste ju i danas na Bliskom Istoku) i zapadna (iz koje se razvio naš današnji zapadnjački brojevni sustav).

Matematičari srednjovjekovnog muslimanskog svijeta najpoznatiji su po svojim dostignućima u algebri, ali su bitno doprinjeli i teoriji brojeva, geometriji, trigonometriji i matematičkoj astronomiji. Sama riječ algebra izvedena je iz djela *Hisab al-džabr wa-'l-muqābala* arapskog matematičara Al-Hvārizmīja oko (780.–850.). U algebri su se matematičari tog doba bavili linearnim, kvadratnim i kubnim jednadžbama. Mnoge geometrijske probleme svodili su na algebarske, većinom na kvadratne i kubne jednadžbe. Tek je Al-Karadžī (oko 953.–1029.) oslobodio algebru od geometrijskih operacija i zamijenio ih aritmetičkim, što je osnova moderne algebre. Također se kod njega mogu naći i začetci matematičke indukcije, koju koristi u binomnom teoremu, Pascalovom trokutu te zbroju prvih

n prirodnih brojeva. Omar Khayyam (oko 1048.–1131.) je, kao što je to s linearnim i kvadratnim jednadžbama ranije učinio Al-Hvārizmī, klasificirao kubne jednadžbe s pozitivnim koeficijentima i osmislio metodu za njihovo rješavanje koristeći presjeke konika.

U teoriji brojeva poznat je teorem o prijateljskim brojevima T̠ābita ibn Qurre (836.–901.). Također je u teoriji brojeva matematičar poznat pod latiniziranim imenom Alhazen (965.–1040.) dao veliki doprinos. Uočio je, iako nije znao dokazati, da su svi parni savršeni brojevi oblika $2^{p-1}(2^p - 1)$, gdje je $(2^p - 1)$ prost broj. Koristio je i znameniti Wilsonov teorem: *Broj p prost je ako i samo ako je* $1 + (p - 1)!$ *djeljivo s p.*

Trigonometriji su u to „ranije“ arapsko doba najviše pridonijeli Al-Battānī oko (850.–929.) i Abū l-Wafā (940.–998.). Obojica su izradili tablice sinusa, Abū l-Wafā čak s točnošću od osam decimala. Al-Battānī je pokazao da u pravokutnom trokutu vrijedi $b \sin\alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$. Abū l-Wafā je navodno prvi koristio tangens, sekans i kosekans te je dokazao sinusov poučak za sferne trokute (omjer sinusa kuta i sinusa stranice nasuprot njega jednak je za sva tri kuta). Dao je značajan doprinos i u geometriji. Napisao je *Knjigu o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku* u kojoj se nalaze konstrukcije parabola, približne trisekcije kuta, upisane i opisane pravilne kružnice, ... Geometriji je pridonio i Al-Hajt̠ham (oko 965.–1040.), koji je dao poopćenje prvog Hipokratovog mjeseca na jednakost površine pravokutnog trokuta i mjeseca omeđenih polukružnicama nad katetama i kružnicom nad hipotenuzom. Daljnji razvoj matematike srednjovjekovnog muslimanskog doba desio se u doba Mongolskog carstva, što će, kao tema ovog rada, biti podrobnije opisano u nastavku. Prije toga ćemo ukratko podsjetiti na povijest Mongolskog carstva. [6, 7]

1.3 Mongolsko carstvo kroz povijest

Pretci Mongola nastanjivali su područje Mandžurije, Mongolije, Xinjanga i živjeli su nomadskim životom. Kako nisu imali središnju vlast, povremeno su se različiti klanovi udruživali u plemena, a plemena u saveze (uluse), čiji su odnosi bili prilično nestabilni te je često dolazilo do međusobnih sukoba unutar saveza. Osim međusobnih sukoba, Mongoli su se sukobljavali i sa susjednim državama. Činjenica da je zbog njih podignut Kineski zid govori koliko su bili opasni. Već u 7. stoljeću pr. Kr. Kinezi su počeli graditi utvrde da se zaštite od tih nomada, dok su u 3. stoljeću pr. Kr. sve spojili u jedan zid. No, ni to im nije pomoglo protiv Mongola. Mongolsko je carstvo na vrhuncu svoje moći obuhvaćalo između 33 i 35 milijuna kvadratnih kilometara te je na tom području živjelo oko 100 milijuna ljudi. Utemeljitelj tog carstva bio je Temudžin, nama poznatiji kao Džingis kan.

Njegov put ka vrhuncu nije bio lak. Nakon očeve smrti, njegova obitelj bila je ponižavana od klana obitelji Taichuit i živjeli su u uvjetima krajnjeg siromaštva, izolirani od ostatka plemena. No, Džingis kan je uspio pobjeći, okupio grupu sljedbenika te krenuo u osvajačke pohode. Nakon niza pobjeda, proglasio se vladarom plemena koja žive u šatorima i sam si nadjenuo ime Džingis kan, što znači „sveopći vladar". Prvi poraz doživio je od svog prijatelja Jamuqa, s kojim se sukobio oko načina napredovanja u mongolskoj hijerarhiji. Naime, Jamuqa je smatrao kako treba poštivati tradiciju, prema kojoj samo plemići mogu dobivati najviše položaje, dok je Džingis kan smatrao da visoki položaj može dobiti svatko tko to zasluži. Nakon nekoliko godina došlo je do novog sukoba te je ovaj put Džingis kan pobjedio i time se riješio jedine oporbe. Zatim je krenuo sa osvajanjem susjednih naroda, od kojih je preuzeo razna znanja. Mongoli su od Ujgura[2] preuzeli pismo te stvorili prvi zakonik (Yassa), u kojem su bila propisana prava i obveze svakog podanika. Također, uveli su meritokraciju: svatko je mogao obnašati i najviše državničke dužnosti ukoliko bi se pokazao sposobnim za to bez obzira na vjersku, nacionalnu ili rasnu pripadnost.

Već je spomenuto da su Mongoli ratovali sa susjedima pa tako i s Kinezima. Džingis kan je odlučio napasti prvi te je njegov pohod trajao 6 godina. Problem Kineskog zida riješio je jednostavno, zaobišao ga je i na taj način došao pred prijestolnicu sjeverne Kine, Peking. Budući da je Džingis kan onemogućio opskrbu hrane u gradu, iako je kineska vojska bila nadmoćnija, morali su popustiti. Mongolsku vojsku činili su dobro opremljeni i pripremljeni ratnici. Njezin ustroj i način ratovanja bio je strogo definiran kao i svako kretanje prema neprijatelju. Jedina država s kojom Džingis kan ispočetka nije želio ulaziti u sukob bila je Horezmijska država. Obuhvaćala je područje današnje srednje Azije, Irana i Afganistana te se smatrala moćnom i snažnom državom. Džingis kan je u više navrata slao svoje izaslanike horezmijskom šahu kako bi uspostavili savez, no ovaj nije bio zainteresiran. Godine 1219. Džingis kan je s 200 000 vojnika krenuo u pohod koji će trajati dvije godine. Nakon osvojene Horezmijske države, mongolska je vojska nastavila osvajanja prema jugu današnje Rusije. Uskoro su Mongoli vladali središnjom Azijom, Afganistanom, Pakistanom, Kašmirom, Iranom, Kavkazom, Ukrajinom, Krimom, južnom Rusijom i Sibirom.

Džingis kan se nakon niza osvajanja vratio u Mongoliju 1223. godine. Na svoj posljednji pohod krenuo je dvije godine kasnije, kada je narod Tanguta[3] na sjeveru Kine odbio plaćati porez. Postoje razne verzije njegove smrti, no najčešća je da se ozlijedio pri padu s konja te je ozljeda bila takva da je od nje preminuo u ljeto 1227. godine.

Nakon njegove smrti mongolsko carstvo je podijeljeno na ranije određenih pet dijelova, a Ogotaj postaje vrhovnim kanom. Njemu je bio cilj dovršiti ono što njegov otac nije uspio za svog života. Završio je gradnju Karakoruma, mongolske prijestolnice, sagradivši oko grada ogromne zidine, te je pobijedio u ratu s Tangutima. Uskoro je došlo do nesuglasica s Batu kanom koji je želio proširiti vlast na Europu. On je odlučio napasti Rusiju i Poljsku koje je s lakoćom pobjedio. U svojim pohodima na Europu Mongoli su došli do Poljske, Ugarske i Hrvatske te opustošili sve na što su naišli. Tek je smrt Ogotaja prekinula daljnja pustošenja Europe. Naime, nakon smrti Ogotaja, postrojbe Batu kana su se

[2]turkijski narod, pretežno žive u Kini

[3]narod koji je vladao vazalskim carstvom Hsi Hsia

preko Bugarske povlačile prema Aziji. Ogotajev nasljednik Güyük nije zapamćen ni po čem posebnom osim po pijankama te je uskoro umro od posljedica alkoholizma. Njega je naslijedio Mönke, za čije se vrijeme carstvo nije značajno širilo, već je pokušao stabilizirati carstvo iznutra. Najveću potporu imao je od svoje braće Hulegua i Kublaja, koji su ujedno bili i njegove glavne vojskovođe. Hulegu je ratovao protiv abasidskog kalifata, dok je Kublaj ratovao na jugoistoku carstva, krećući se prema Indiji. U tim su pohodima Mongoli zauzeli Alamut, glavnu utvrdu asasina i time označili njihov kraj.

Asasini su bili ismailitska vjerska sekta, koja je stoljećima terorizirala islamski svijet koji joj se nije uspijevao suprostaviti. Nakon Möngkeove smrti 1259. godine došlo je do borbe oko prijestolja između Hulegua, Kublaja, njihovog najmlađeg brata Ariqa Borkea, kana Zlatne horde[4] Berke te Alegu kana koji je vladao u Čagatajevu kaganatu[5]. Za Kublaja sretnim spletom okolnosti, 1264. godine umiru Hulegu, Borke i Alegu kan te je iskoristio situaciju i postavio na njihova mjesta sebi odane ljude. Tako je zavladao većim dijelom mongolskog carstva, koje je za vrijeme njegove vladavine doživjelo svoj vrhunac. Kublaj kan je baš poput svog pretka Džingis kana bio voljan saslušati tuđe savjete i učiti od drugih za napredak carstva. To je pridonijelo pozitivnim rezultatima te je usavršio porezni sustav, doveo vjersku toleranciju do najviše razine, unaprijedio sustav pošte, obnovio puteve, te je uveo papirnati novac kao jedino legalno sredstvo plaćanja. Potkraj svog života Kublaj kan je želio proširiti svoje carstvo na Japan. U par navrata slao je izaslanstvo, ali se Car odbijao pokoriti. Mongoli su napadali Japan dva puta i svaki put im je vrijeme uništilo šanse za pobjedu. Kublaj kan je bio bijesan nakon poraza te je htio napasti Japan i treći put, ali su njegovi vojnici odbili ratovati. Bio je to kraj mongolskih pokušaja osvajanja Japana jer je Kublaj kan umro, a s njime i želja za osvajanjem Japana.

Nakon njegove smrti mongolsko carstvo je utonulo u bezvlađe. Tek su deset godina kasnije ponovo imali vrhovnog kana. To je bio Timur koji je umro tri godine kasnije te je carstvo opet zapalo u novi val anarhije. Posljednji veliki mongolski vođa bij je Timur Lenk ili Tamerlan. Došao je iz plemena Barlas koji su živjeli na mjestu današnjeg Uzbekistana. Ujedinio je nekoliko mongolskih plemena te krenuo u osvajanja Irana, Iraka i Turske. Svoj uspjeh Timur Lenk je gradio na priči da je on izravan potomak Džingis kana, što je vrlo malo vjerojatno. Njegovu uspjehu je pomoglo i to što je prešao na islam, koji je u to vrijeme bio rastuća religija. No, to mu nije smetalo da se sukobi sa sultanom Osmanlijskog carstva Bajazitom. Obojica su smatrali da polažu pravo na dijelove turkmenskog teritorija i dijelove Anatolije. U tom su ratu Bajazitove trupe redovito gubile te je on završio kao Timurov zarobljenik. Godine 1394. kineski car poslao je svoje izaslanstvo te tražio Timura da mu iskaže svoju podložnost. Nakon nekoliko odbijanja, Timur je krenuo u pohod na Kinu u prosincu 1404. godine. Bila je to vrlo oštra i hladna zima te se Timur

[4]Zlatna horda je srednjovjekovna mongolska država koja je postojala od 13. do 15. stoljeća i prostirala se na području rijeke Volge, poluotoka Krima, sjevernog Kavkaza i rijeke Sir Darje u Aziji

[5]Čagatajev kaganat prostirao na području današnjeg Kazahstana, Kirgistana, Tadžikistana i Uzbekistana

razbolio i umro u veljači sljedeće godine. Nakon njegove smrti, carstvo je raspodijeljeno među njegovim sinovima, a kontrolu nad većinom carstva stekao je Šah Rukh. Timur je iza sebe ostavio carstvo koje se protezalo od jugozapadne Turske, preko Sirije, Irana i Iraka te obuhvaćalo dijelom ili u cijelosti teritorije Kazahstana, Armenije, Azerbajdžana, Gruzije, Turkmenistana, Uzbekistana, Afganistana, Pakistana, sjeverozapadnu Indiju i dijelove Kašgara u današnjoj Kini. Smatra se da je tijekom njegovih osvajanja ubijeno oko 17 milijuna ljudi. No, iako je bio okrutan u osvajanjima, bio je veliki ljubitelj umjetnosti. Tijekom svojih osvajanja na životu je ostavljao najdarovitije umjetnike te ih slao u svoju prijestolnicu u Samarkandu. Nakon njegove smrti mongolsko carstvo je polako gubilo svoju moć sve dok u potpunosti nije nestalo. [14]

Poglavlje 2

Životopisi islamskih matematičara u Mongolskom carstvu

2.1 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

Rođen je 18. veljače 1201. godine u Tusu (sjeverni Iran). Pohađao je školu u kojoj je predavao njegov otac, koji je bio pravnik, ali je njegov ujak uvelike utjecao na njegov intelektualni razvoj. S njim je učio logiku, fiziku i metafiziku, dok je od drugih učitelja učio matematiku, posebno algebru i geometriju. S 13 godina otišao je u nedaleki Nišapur, koji je tada bio važan centar za učenje. Aṭ-Ṭūsī je tamo učio psihologiju, medicinu i matematiku. Matematiku je učio s Kamal al-Din inb Yunusom, koji je bio učenik Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsīja[1]. U Nišapuru je aṭ-Ṭūsī počeo stjecati reputaciju izvanrednog učenjaka i postao poznat na širem području. Kada su oko 1220. godine Mongoli pod vodstvom Džingis-Kana osvojili područje Tusa, aṭ-Ṭūsī je bio pozvan od strane ismailskog vladara Nasira, ad-Din′Abd ar-Rahima, da se pridruži asasinima. Nije jasno je li bio prisiljen na to ili je to želio, ali je postao visokim članom ismailskog suda. Tijekom tog razdoblja kretanja kroz različita uporišta napisao je važne radove iz logike, psihologije, matematike i astronomije. Prvi od tih radova bio je o etici i napisao ga je 1232. godine pod naslovom *Akhlaq-i nasiri* te ga je posvetio vladaru Nasira.

Neki smatraju da je aṭ-Ṭūsī izdao obranu Alamuta Mongolima. Godine 1256. aṭ-Ṭūsī je bio otet iz dvorca Alamut po naredbi vođe Mongola Huleguhana, koji je bio zainteresiran za znanost te je aṭ-Ṭūsīja tretirao s velikim poštovanjem. Hulegu ga je postavio na mjesto savjetnika za znanost te ga zadužio za vjerske poslove. Sa velikom sigurnošću možemo reći da je aṭ-Ṭūsī bio sretan pridruživši se Mongolima. Zajedno su krenuli u osvajanje Bagdada te tamo doživjeli veliki otpor. No, ipak su ga osvojili te je Hulegu spalio grad, opljačkao ga

[1] 1135.–1213., arapski matematičar i astronom, poznat kao učitelj različitih matematičkih tema, uključujući teoriju brojeva, astronomske tablice i astrologiju

i ubio većinu stanovnika. Nakon osvajanja Bagdada, aṭ-Ṭūsī je pokazao Huleguu planove za konstrukciju opservatorija, na što je ovaj rado pristao. Hulegu je grad Maragu (sjeverozapadni Iran) proglasio svojom prijestolnicom te je tamo započeo gradnju opservatorija 1259. godine. Opservatorij je počeo s radom 1262. godine. Aṭ-Ṭūsī je osmislio mnoge instrumente za opservatorij. Uz centar za astronomiju, tamo se nalazila i knjižnica sa velikim brojem knjiga o znanosti, u kojoj se aktivno pisalo o matematici i psihologiji. Aṭ-Ṭūsī je iskoristio opservatorij kako bi napisao rad koji sadrži točne tablice za računanje položaja planeta i katalog zvijezda. Postigao je i najznačajniji napredak Ptolemejevih modela o sustavu planeta prije razvoja heliocentričnog sustava u vrijeme Kopernika. Aṭ-Ṭūsī je napisao mnoge komentare grčkih tekstova, a posebno komentare na Menelajevu *Spahericu* i Arhimedov *O kugli i valjku*. Ptolemejev *Almagest* je bio jedan od radova koje su arapski znanstvenici preveli i pažljivo proučili. Aṭ-Ṭūsī je pišući komentare uveo raznovrsne trigonometrijske tehnike računanja tablica sinusa. Također je proučavao Euklidove *Elemente* te napisao *Tahrir al-Usul al-Handasiya li-Uqlidis (Komentare na Euklidove Elemente)*. Aṭ-Ṭūsī je u tom procesu dao i dokaze različite od onih koje je zapisao Euklid. Pokušao je dokazati da peti Euklidov postulat nije postulat već teorem koji zahtjeva dokaz.

Jedan od najvažnijih aṭ-Ṭūsījevih matematičkih doprinosa je stvaranje trigonometrije kao neovisne matematičke discipline, a ne više kao dio astronomije. U knjizi *O kvadrilaterali* dao je prvo postojeće izlaganje cijelog sustava ravninske i sferne trigonometrije. U tom radu spominje se i poučak o sinusu, tj. formula za sinus u ravninskom trokutu, o čemu ćemo više reći u odjeljku 3.3. Drugi važan matematički doprinos aṭ-Ṭūsīja je metoda izračunavanja n-tog korijena cijelog broja (vidi i 3.4.). Napisao je poznati rad o mineralima, koji sadrži zanimljivu teoriju o boji baziranoj na mješavini bijele i crne i uključuje poglavlje o parfemima i draguljima. Pisao je i o medicini, ali njegov medicinski rad je među manje važnima. Mnogo važniji je aṭ-Ṭūsījev doprinos psihologiji i etici. Njegov utjecaj u islamu je neizmjeran te se smatra odgovornim za oživljenje islamske znanosti. Njegovo okupljanje mnogih sposobnih znanstvenika u Maragu rezultiralo je ne samo buđenjem u matematici i astronomiji, već i obnovom islamske psihologije pa čak i teologije. Aṭ-Ṭūsī je umro 26. lipnja 1274. godine. [6, 4, 10]

2.2 Muḥyi al-Dīn al-Maghrībī

Al-Maghrībī je bio astronom rođen oko 1220. godine u Španjolskoj. Na njegov život uvelike je utjecao rat i čini se da je na kraju pronašao naklonost na strani pobjednika, Mongola. Radio je s aṭ-Ṭūsījem u spomenutom opservatoriju u Maragi u Iranu, kamo je stigao kao Hulegu hanov gost. Zajedno s aṭ-Ṭūsījem je al-Maghrībī sudjelovao u gradnji opservatorija. Svoja zapažanja zapisao je u Maragi između 1262. i 1274. godine.

Najpoznatiji je po svom radu u geometriji. Napisao je *Knjigu o Menelajevu teoremu* i *Raspravu o računanju sinusa*, gdje je koristio interpolaciju za računanje aproksimativne vrijednosti za sinus od 1 stupnja. Riješio je taj problem na dva različita načina pa je usporedio vrijednosti koje je dobio i tako postigao točnost od četiri decimale. Radeći taj rad, pronašao je i aproksimativnu vrijednost za π koju je usporedio s Arhimedovom. Također, al-Maghrībī je pokušao riješiti problem duplikacije kocke. Rješenju se približio pomoću Hipokratove metode, tražeći dvije srednje proporcionale između dva zadana pravca. Drugi važan aspekt al-Maghrībījeva rada su kritički komentari na klasične grčke radove, kao što su Euklidovi *Elementi*, Apolonijeve *Konike* i Menelajevu *Sfernu geometriju*. Posebno važan je komentar na 15. knjigu *Elemenata*, koju nije napisao Euklid. Prva arapska verzija te knjige je izgubljena, ali su pronađena četiri rukopisa koja sadrže al-Maghrībījeve komentare na nju. Al-Maghrībī je umro 1283. godine u Maragi u Iranu. [6, 10]

2.3 Šams al-Dīn al-Samarkandī

Al-Samarkandī je rođen oko 1250. godine u Samarkandu u Uzbekistanu. O njegovom životu se malo zna. Pisao je važne radove o teologiji, logici, psihologiji, matematici i astronomiji te je davao informacije o radovima drugih znanstvenika. U matematici je al-Samarkandī poznat po kratkom radu od samo 20 stranica u kojem piše o 35 Euklidovih propozicija. Za pisanje toga rada al-Samarkandī se savjetovao s mnogo arapskih matematičara, ali su se i kasnije matematičari referirali na njegov rad. Umro je oko 1310. godine. [6, 10]

2.4 Ibn al-Bannā' al-Marrākušī

Rođen je u Maroku 29. prosinca 1256. godine. Ne zna se točno u kojem mjestu je rođen, u gradu Marrakeš ili na području Marrakeš koje je dobilo ime Maroko od Europljana. Naime, plemena Marinidi, koja su osvojila to područje od plemena Almohads, pomagala su Granadi kako bi se spriječio kršćanski napredak kroz njihovu državu, te je postojala jaka veza između Granade i Maroka. Postoji i teorija da je rođen u Španjolskoj te je otišao u Afriku zbog obrazovanja. Sigurno je da je većinu života proveo u Maroku. U Maroku je učio glavne matematičke vještine tog razdoblja, geometriju općenito te posebno Euklidove *Elemente*. Učio je o svim doprinosima Arapa matematici zadnjih 400 godina. Na sveučilištu u Fezu poučavao je sve grane matematike. Al-Bannā' je napisao velik broj radova, uključivo tekstova o matematici i astronomiji. Problem s matematičkim tekstovima je da se ne zna koliko je radova al-Bannā' predstavio kao original, a koliko je radova njegova verzija radova izgubljenih prijašnjih arapskih matematičara. Njegov stil pisanja upućuje da je sakupljao ideje koje je naučio od drugih matematičara. Prvi je koristio izraz *almanak* (u prijevodu znači vrijeme) u radu koji sadrži astronomske i meteorološke zapise. Njegovi najpoznatiji radovi su *Talkhis amal al-hisab (Sažetak aritmetičkih operacija)* te komentari na taj rad, *Rab al-Hijab*. U tom radu uvodi neke matematičke notacije, što je navodilo neke autore da vjeruju da je al-Bannā' prvi uveo algebarske simbole u islamu. Koristio je verižne razlomke da bi izračunao približnu vrijednost korijena te opisivao binomne koeficijente. Umro je 1321. godine u Maroku. [6, 10]

2.5 Kamāl al-Dīn al-Fārisī

Rođen je oko 1260. godine. Napravio je dva značajna doprinosa u matematici, u teoriji brojeva i matematičkoj optici. Bio je učenik astronoma i matematičara Qutb al-Din al-Širazija, koji mu je savjetovao da prouči *Optiku* od ibn-Haythama. Al-Fārisī je otišao puno dalje i proučio njegov čitav optički rad te napisao svoj glavni rad *Tangih (Revizija).* Taj rad je daleko više od komentara, jer u njemu al-Fārisī sugerira da neke teorije nisu točne i predlaže alternativne teorije. Najvažniji dio toga rada je teorija o dugi, koja se smatra prvim matematičko zadovoljavajućim objašnjenjem duge. Al-Fārisī je predložio model za dvostruki lom zrake sunčeve svjetlosti u kapljici vode. Za ovaj je model eksperiment bilo moguće izvesti te ga je al-Fārisī želio provesti s prozirnom kuglom ispunjenom vodom. Time je uveo dodatno lomljenje svjetlosti, između staklene površine i vode. No, on je bio spreman dokazati da je aproksimacija koju dobije dovoljno dobra da se zanemari efekt staklene kugle. U moderno se vrijeme raspravljalo je li al-Fārisīova teorija duge njegova ili od njegovog učitelja al-Širazija.

U teoriji brojeva al-Fārisī je napravio niz važnih doprinosa. Naveo je nemogućnost da jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ ima cjelobrojna rješenja. Al-Fārisījev najvažniji rad u teoriji brojeva su rezultati o prijateljskim brojevima. Iznova je dokazao je sljedeći teorem Thabita ibn Qurre za prijateljske brojeve: *Za n>1, neka je* $p_n = 3.2^n - 1$ *i* $q_n = 9.2^{2n-1} - 1$. *Ako su* p_{n-1}, p_n *i* q_n *prosti brojevi onda su* $a = 2^n p_{n-1} p_n$ *i* $b = 2^n q_n$ *prijateljski brojevi*. Vezano za to su njegovi doprinosi koji su prethodili osnovnom teoremu aritmetike, o čemu ćemo govoriti u odjeljku 4.2.

Al-Fārisī je na nov način pristupio cijelom području teorije brojeva, uvodeći ideje o faktorizaciji i kombinatorici. Na kraju svog rada al-Fārisī je dao parove prijateljskih brojeva 220 i 284 te 17296 i 18416, kojeg danas zovemo Eulerovim prijateljskim parom, ali ga je al-Fārisī našao puno prije Eulera. Također je uočio vezu između poligonalnih brojeva i binomnih koeficijenata te koristio raniji oblik matematičke indukcije. Umro je oko 1320. godine u Tabrizu u Iranu. [6, 10]

2.6 Šams al-Dīn al-Khalīlī

Rođen je oko 1320. godine u Damasku u Siriji. Bio je astronom koji je izradio tablice za računanje vremena prema Suncu i reguliranja vremena muslimanske molitve. Za izradu tih tablica morao je temeljito razumjeti geometriju sfere te se njegov rad smatra vrhuncem rada islamskih matematičara na tu matematičku temu. Sve do Davida Kinga 1970-ih godina, nijedan povjesničar matematičar nije proučavao te tablice, a one su sva ova stoljeća korištena u Damasku, Kairu i Istanbulu. Sastoje se od tablica za računanje vremena prema Suncu za geografsku širinu Damaska, tablice za reguliranje vremena muslimanske molitve za geografsku širinu Damaska, tablice pomoćnih matematičkih funkcija za računanje vremena za sve geografske širine, tablice za određivanje smjera Meke kao funkcije zemljopisne širine i dužine i tablice za preračunavanje koordinata ekliptike Mjeseca u ekvatorijalne koordinate. Naravno, al-Khalīlī nije napravio sve to bez temelja radova ranijih matematičara. Prve dvije tablice al-Khalīlī je izradio tako da je poboljšao verziju egipatskog astronoma al-Mizzia. Al-Khalīlī je uzeo točnije vrijednosti zemaljskih koordinata Damaska. Za rješavanje problema sferne astronomije koristio metodu sličnu današnjem poučku o kosinusu. Računanje smjera Meke kao funkcije zemljopisne širine i dužine bio je jedan od najtežih problema sferne trigonometrije tog doba. Al-Khalīlī je koristio svoje tablice kako bi izračunao smjer i njegovi rezultati su izvanredni. Rezultati imaju grešku od oko 0,1°. Postoji mogućnost da je napravio tablice i s većom točnošću, ali su one izgubljene. Umro je oko 1380. godine u Damasku u Siriji. [6, 10]

2.7 Ulug Beg

Rođen je 1393. godine u Perziji, današnjem Iranu. Bio je unuk osvajača Timura. Nakon smrti njegovog djeda, njegov otac Šah Rukh je stekao kontrolu nad većinom carstva. Samarkand je bio glavni grad Timurovog carstva, ali iako je Ulug Beg živio u dvoru, rijetko je bio u gradu, jer je putovao s djedovom vojskom u njihovim pohodima. Šah Rukh odlučio je da glavni grad postane Herat u današnjem Afganistanu te počinje gradnju trgovačkog i kulturnog centra. Osnovao je knjižnicu i postao je zaštitnik umjetnosti. Ulug Begu je dao kontrolu nad Samarkandom, gdje je on želio uspostaviti kulturni centar. Ulug Beg je bio znanstvenik, posebno matematičar i astronom, no nije zanemario ni umjetnost. Najmanje su ga zanimala osvajanja i vojska. Godine 1420. Ulug Beg završava gradnju škole i počinje imenovati najbolje znanstvenike tog vremena za učitelje u njoj. Pozvao je al-Kāšīja, Kāḍī Zādu i 60 drugih znanstvenika. Al-Kāšī je uz Ulug Bega učio astronomiju i matematiku. Kao dodatak školi, Ulug Beg je dao sagraditi opservatorij, koji je vodio muslimanski astronom al-Kudšhi. Dostignuća svih znanstvenika pod vodstvom Ulug Bega detaljno su opisana u knjizi *Ulug Begova škola astronomije* (1967.), autora Kary-Nijazova. Knjiga sadrži metode za davanje približnih rješenja kubnih jednadžbi, rad s binomnim teoremom, Ulug Begove tablice sinusa i tangensa na točnost od 8 decimalnih mjesta, formule za sfernu trigonometriju, te prvi sveobuhvatni zvjezdani katalog, *Zij-i Sultani*, nakon Ptolemeja. Ulug Beg je izračunao sin 1° s velikom točnošću. Dobio je sin 1° = 0,017452406437283571, a točnija aproksimacija je sin 1° = 0,017452406437283512820. U opservatoriju su otkrivene brojne greške u izračunima Ptolemeja. Pomoću podataka iz opservatorija, Ulug Beg je izračunao da godina traje 365 dana, 5 sati, 49 minuta i 15 sekundi. Također je napisao podatke o kretanju planeta koji su vrlo točni te se od današnjih rezultata razlikuju tek za 2 do 5 sekundi. Nakon smrti oca, Ulug Begu nije bilo do politike te nije mogao ostati na vlasti. Na kraju je bio pogubljen u Samarkandu 1449. godine, na zapovijed svog sina, ′Abd al-Latifa. Njegov grob je otkriven 1941. godine te je otkriveno da je pokopan u svojoj odjeći, što je značilo da ga se smatralo mučenikom. [6, 10]

2.8 Kāḍī Zāda al-Rūmī

Rođen je 1364. godine u Turskoj. Kāḍī Zāda znači „sin suca“ pa se pretpostavlja da mu je otac bio sudac. Odrastao je u rodnom gradu Bursi, gdje je i završio osnovno obrazovanje. Njegov učitelj al-Fanari uvidio je njegov potencijal u matematici i astronomiji te mu savjetovao da ode u kulturni centar carstva, Khorasan ili Transoxania, gdje je učio s najboljim matematičarima tog vremena. Godine 1407. Kāḍī Zāda je onamo otišao. Nije poznato zašto je toliko čekao. Tada je već imao reputaciju kao matematičar koju je stekao radom o aritmetici, u kojem je obuhvatio aritmetiku, algebru i mjerenje. Kāḍī Zāda je u Samarkand, u centar za visoko obrazovanje Ulug Bega, stigao 1410. godine. Upoznavanje Ulug Bega za Kāḍī Zādu je bila prekretnica i ostatak života je proveo u Samarkandu. Napisao je komentare na radove o matematici i astronomiji, koje je posvećivao Ulug Begu. Al-Kāšīi, pišući svom ocu, pohvalio je matematičke sposobnosti Kāḍī Zāde. Kāḍī Zāda je napisao rad o računanju sin 1° s, tada, nevjerojatnom preciznošću. U isto vrijeme napisao ga je i al-Kāšī, ali su se njihove metode bitno razlikovale. Napravio je i prvi sveobuhvatni zvjezdani katalog u kojem daje poziciju 992 zvijezde. Katalog je bio rezultat zajedničkog napora brojnih znanstvenika koji su radli u zvjezdarnici, ali su glavni suradnici bili Kāḍī Zāda, al-Kāšī i Ulug Beg. Taj katalog objavljen je 1437. godine, u godini u kojoj je Kāḍī Zāda umro. [6, 10]

2.9 Ǵamšīd ibn Masᶜūd al-Kāšī

Rođen je oko 1380. godine u Kašanu u Iranu. Detalji njegova života su poznatiji nego za većinu suvremenika. Naime, sačuvana su pisma koja je slao svom ocu i u kojima opisuje svoj život, a na svoje radove je pisao datum kada ih je završio. Al-Kāšī je živio u velikom siromaštvu kao i većina drugih u doba Timura. Šah Rokh, Timurov sin, snažno je podupirao umjetnički i intelektualni život te su se njegovim dolaskom na vlast uvjeti života poboljšali. Al-Kāšī je ostao u gradu Kašanu, što možemo potvrditi iz njegovih radova o astronomiji. Prvi događaj koji je datirao bila je pomrčina Mjeseca 2. lipnja 1406. godine. U to vrijeme bilo je potrebno dobiti pokroviteljstvo od kraljeva, prinčeva ili vladara za znanost te je zbog toga al-Kāšī svoj rad *Kompendij znanosti astronomije* posvetio jednom od potomaka dinastije Timura. Al-Kāšī je vrlo važnu knjigu o astronomskim tablicama, *Khagani Zij*, posvetio Ulug Begu. Smatra se da je al-Kāšī u Samarkandu bio vodeći astronom i matematičar. U spomenutim pismima ocu opisao je znanstveni život u Samarkandu. Jedno od tih pisama prevedeno je na engleski, ruski, arapski, turski i uzbečki jezik. Drugo je pronađeno u knjižnici Majlis u Teheranu i smatra se da je to kopija jednog od pisama za koje se vjerovalo da je izgubljeno. To je pismo al-Kāšī napisao dvije godine nakon dolaska u Samarkand, oko 1423. godine. Pismo ima oko 80 redaka. Posljednji se retci pisma (od 64. do 79.) odnose na poeziju te je sadržaj prekompliciran za prijevod. Na početku pisma, al-Kāšī spominje Ulug Bega i da je on donirao novce za studente i da je njih 500 počelo učiti matematiku. U ostatku pisma piše o matematičkim problemima koje je rješavao za Ulug Bega. Naime, kada je stigao u Samarkand, drugi su znanstvenici propitkivali njegovo znanje, ali je on riješio sve probleme koje oni nisu znali riješiti te su se danima mučili s njima. Al-Kāšī piše ocu kako je riješio problem dok mu još prtljaga nije stigla te je morao posuditi pero i tintu. Problem je glasio: *Pretpostavimo da netko stoji na savršeno kružnom tlu ili na površini mora, a vizualna zraka koja izlazi iz njegovih očiju je tangenta na to tlo ili morsku površinu, koja onda dolazi do sfere ekliptike (najudaljenije sfere svemira). Na kojoj će udaljenosti presijecati horizont? Kada dosegne sferu ekliptike, koliko će biti odmaknuta od pravog horizonta?* Nakon toga mu je Ulug Beg, al-Kāšī ga u pismu naziva „Njegovo Veličanstvo“, zadavao sve teže matematičke probleme. Prvi problem koji mu je zadao je bio da napravi rukama sunčani sat na površini zida za proizvoljni azimut. U pismu iskazuje posebno divljenje prema Ulug Begu kao znanstveniku te Kāḍī Zāda.

Na sastancima za slobodnu raspravu o problemima u astronomiji, koje je organizirao Ulug Beg, jedino su al-Kāšī i Kāḍī Zāda uspješno rješavali probleme. Al-Kāšī je napisao rad *O opsegu kruga* (1424.), u kojem je računao 2π na 17 decimala. Njegov najimpresivniji matematički rad je *Ključ aritmetike* (1427.), u kojem al-Kāšī daje mnoge aritmetičke i algebarske metode za rješavanje raznovrsnih problema. To je opsežan udžbenik koji služi za učenje onima koji poučavaju astronomiju, mjerenje, arhitekturu, trgovinu i računovodstvo. U toj knjizi al-Kāšī koristi i decimalne razlomke, zbog kojih je stekao veliki ugled, no, često se krivo smatra da je on začetnik decimalnih razlomaka. To nije istina jer se oni pojavljuju u radovima nekoliko matematičara al-Karajijeve škole, posebno al-Samawala. Iako nije začetnik, al-Kāšī je otišao korak dalje od običnog prevođenja te je predstavio važno poglavlje u povijesti decimalnih razlomaka. Svoj posljednji rad nije uspio završiti jer je umro te ga je završio Kāḍī Zāda. U tom radu al-Kāšī računa $\sin 1^\circ$ na istu točnost kao i π ranije. Također izriče da su kubične jednadžbe povezane s problemom trisekcije kuta. Još je važno napomenuti da je Ulug Beg uz pomoć al-Kāšīja izradio astronomske tablice i tablicu sinusa. Al-Kāšī je umro 22. lipnja 1429. godine u Samarkandu u Uzbekistanu. Nakon njegove smrti Ulug Beg je napisao: „*...izvanredan znanstvenik, jedan od najpoznatijih na svijetu, koji je imao savršeno poznavanje znanosti pradjedova koja su doprinjela* *njegovom razvoju, i koji je mogao riješiti najteži problem*.“[6, 5, 9, 10]

Poglavlje 3

Trigonometrija

3.1 Al-Kāšījevi izračuni trigonometrijskih tablica

U ovom poglavlju obradit ćemo al-Kāšījeve trigonometrijske tablice. Budući da su u to doba kao i ranije od babilonskih vremena, iznosi navođeni u bazi 60, najprije objasnimo zapis brojeva u seksagezimalnom brojevnom sustavu. U nastavku ćemo koristiti uobičajeni suvremeni način takvog zapisa. Točkom-zarezom odvaja se cijeli dio od razlomljenog dijela, dok se zarezom međusobno odvajaju znamenke. Na primjer, brojka $(10; 48, 7, 30)_{60}$ predstavlja broj $10 + \frac{48}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{30}{60^3} = 10,8020832$.

U radu *Zij-i Khaqani*, al-Kāšī je dao svoje trigonometrijske tablice te je definirao trigonometrijske funkcije koje danas nazivamo sinus, kosinus, arkus sinus, tangens i kotangens. Sinusi su kutova u tablicama određeni na točnost od četiri seksagezimalna mjesta, za svaku minutu kuta od $0°$ do $90°$. Tablica tangensa je prvo napravljena za svaku minutu od $0°$ do $45°$, zatim za svaku petu minutu od $0°$ do $(89;55)^{\circ}_{60}$. Posljednja tablica s vrijednostima tangensa nije dovršena te je način popunjava jednak onom u tablicama sa sinusima.

Al-Kāšī za polumjer kruga uzima vrijednost 60 ($R = 60$), što je bilo uobičajeno za to vrijeme (točnije rečeno, sinus se izražava u jedinici $R/60$, gdje je R polumjer kruga, umjesto, kako mi to činimo, u jedinici R). Dakle, veza između al-Kāšījeve verzije sinusa (označimo ju sa Sin) i modernog sinusa je

$$\mathrm{Sin}\, x = 60 \sin x,$$

i pritom se iznosi $\mathrm{Sin}\, x$ zapisuju seksagezimalno. Primjerice, znamo da je $\sin 30° = 0{,}5$ (polumjera kruga), dakle je $\mathrm{Sin}\, 30° = (30)_{60}$. Vidimo dakle da u prvom kvadrantu vrijednosti funkcije Sin variraju ne od 0 do 1, nego od 0 do 60.

Budući da u njegovo doba uporaba negativnih brojeva još nije bila uobičajena[1], al-Kāšī uzima u obzir samo pozitivne iznose trigonometrijskih funkcija. U tablicu se upisuju kutovi

[1]Iako su stari Indijci uveli negativne brojeve najkasnije u 7. st., te iako su mnoga matematička znanja

	’	”	”’	’v
48	0;44,	35,	19,	17
6		4,	12,	1
43			29,	55
30				21
	0;44,	40,	1,	34

Tablica 3.1: Lakša metoda

	’	”	”’	’v
48	0;44,	35,	19,	17
6		4,	12,	1
43			30,	4
30				21
	0;44,	40,	1,	43

Tablica 3.2: Teža metoda

veličina od 0° do 90°, dok se ostali svode na te veličine. Ako imamo kut veličine x, gdje je $90° < x < 180°$, tada oduzimamo veličinu kuta od polovine kruga, tj. računamo $180° - x$ te taj kut zapisujemo u tablicu. Isto radimo i s minutama i sekundama.

Kao primjer al-Kāšījevih izračuna trigonometrijskih tablica opisat ćemo kako je dobio procjenu iznosa $\mathrm{Sin}\,48°6'43''30'''$. Koristio je dvije metode, ilustrirane tablicama 3.1 i 3.2., „lakšu“i „težu“.

Za objašnjenje metoda potrebna nam je tablica 3.3, čiju izradu nećemo opisivati već ćemo opisati njeno profinjenje. Prvo ćemo opisati lakšu metodu. Najprije iz tablice 3.3 očitamo iznos sinusa kuta 48°. Iznos je $(0; 44, 35, 19, 17)_{60}$. Zatim u stupcu u kojemu su napisane minute pronađemo broj 6 (jer tražimo sinus kuta iznosa $(48; 6, 43, 30)_{60}$) te za njega pronađemo iznos u stupcu sa zaglavljem 48°, dakle je $\mathrm{Sin}\,48°6' = (0; 44, 35, 19, 17)_{60} + (0; 0, 4, 12, 1)_{60}$.

Za svoju lakšu metodu, al-Kāšī procjenjuje porast vrijednosti Sin ako se kut poveća za određeni iznos sekundi (u našem primjeru 43) tako da iz tablice očita koliki je prirast za isto toliko minuta (u odgovarajućem stupcu) i podijeli ga sa 60, što u seksagezimalnom sustavu odgovara pomaku ; za jedno mjesto ulijevo. Kako je u stupcu od 48° iznos za 43′ dan kao $(0; 0, 29, 55, 15)_{60}$, procjena prirasta za 43″ je $(0; 0, 0, 29, 55, 15)_{60}$, odnosno zaokruženo na četiri seksagezimalne znamenke $(0; 0, 0, 29, 55)_{60}$. Analogno, procjena prirasta za šezdesetinke sekundi (kod nas 30) dobije se očitavanjem odgovarajućeg prirasta

arapskog svijeta utemeljena na ranijim indijskim, negativni brojevi se u srednjevjekovno muslimansko doba mogu naći u samo jednom tekstu (Abū L-Wafā, 10. st.).

$0;44,35,19,17$		$0;44,35,19,17$	
48°	minute	48°	minute
0;0,0,42,2	1	00;0,21,36,46	31
0;0,1,24,3	2	0;0,22,18,22	32
0;0,2,6,4	3	0;0,22,59,56	33
0;0,2,48,4	4	0;0,23,41,33	34
0;0,3,30,3	5	0;0,24,23,7	35
0;0,4,12,1	6	0;0,25,4,41	36
0;0,4,53,58	7	0;0,25,46,14	37
0;0,5,35,54	8	0;0,26,27,46	38
0;0,6,17,50	9	0;0,27,9,17	39
0;0,6,59,45	10	0;0,27,50,48	40
0;0,7,41,39	11	0;0,28,32,18	41
0;0,8,23,32	12	0;0,29,13,47	42
0;0,9,5,24	13	0;0,29,55,15	43
0;0,9,47,16	14	0;0,30,36,42	44
0;0,10,29,7	15	0;0,31,18,8	45
0;0,11,10,57	16	0;0,31,59,33	46
0;0,11,52,46	17	0;0,32,40,57	47
0;0,17,34,34	18	0;0,33,22,20	48
0;0,13,16,21	19	0;0,34,1,41	49
0;0,13,50,0	20	0;0,34,45,5	50
0;0,14,39,54	21	0;0,35,26,26	51
0;0,15,21,39	22	0;0,36,7,46	52
0;0,16,3,23	23	0;0,36,49,6	53
0;0,16,45,6	24	0;0,37,30,25	54
0;0,17,26,49	25	0;0,38,11,43	55
0;0,18,8,31	26	0;0,38,53,0	56
0;0,18,50,12	27	0;0,39,34,16	57
0;0,19,31,52	28	0;0,40,15,31	58
0;0,20,13,31	29	0;0,40,56,46	59
0;0,20,55,9	30	0;0,41,38,0	60

Tablica 3.3: Al-Kāšījeva tablica sinusa

za minute i dijeljenjem s 60^2, tj. pomakom ; za dva mjesta ulijevo. U tablici je prirast (k vrijednosti $\mathrm{Sin}\,48^\circ$) za $30'$ unesen kao $(0; 0, 20, 55, 9)_{60}$, dakle je zaokružena procjena prirasta za $30'''$ jednaka $(0; 0, 0, 0, 21)_{60}$. Sve skupa onda kao u tablici 3.1 daje procjenu

$$\mathrm{Sin}\,48^\circ 6' 43'' 30''' = (0; 44, 35, 19, 17)_{60} + (0; 0, 4, 12, 1)_{60} + (0; 0, 0, 29, 55)_{60} + (0; 0, 0, 0, 21)_{60}$$

$$= (0; 44, 40, 1, 34)_{60}.$$

U težoj metodi je al-Kāšī koristio linearnu interpolaciju. Točnije rečeno, on provodi dva koraka, prvo linearnu interpolaciju za sekunde, a zatim za njihove šezdesetinke slično kao u lakšoj metodi iz izračunatog rezultata dobiva konačnu procjenu. Iz tablica znamo (vidi gore) da je $y_1 = \mathrm{Sin}\,48^\circ 6' = (0; 44, 39, 31, 18)_{60}$ i na isti način dobijemo $y_2 = \mathrm{Sin}\,48^\circ 7' = (0; 44, 40, 13, 15)_{60}$. U linearnoj interpolaciji međuvrijednosti procjenjujemo afinom funkcijom

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Kod nas je $x_1 = 48^\circ 7'$ te gornja formula postaje

$$y = (0; 44, 39, 31, 18)_{60} + \frac{(0; 0, 0, 41, 57)_{60}}{1'}(x - 48^\circ 6').$$

Kako je naš kut x između x_1 i x_2, al-Kaši prvo procjenjuje vrijednost y za $x = 48^\circ 6' 43'' = x_1 + 43''$, što uvršteno u gornju formulu daje

$$y' = \mathrm{Sin}\,48^\circ 6' 43'' = (0; 44, 40, 1, 22)_{60}.$$

Porast vrijednosti uslijed $30'''$ al-Kāšī dobiva tako da ga procjenjuje kao šezdesetinu prirasta kojeg bi dobio linearnom interpolacijom za $30'$, odnosno računa

$$\mathrm{Sin}\,48^\circ 6' 43'' 30''' = \mathrm{Sin}\,48^\circ 6' 43'' + \frac{y_2 - y_1}{60^2} \cdot 30 = (0; 44, 40, 1, 43)_{60}.$$

Vidimo dakle da se iznosi dobiveni lakšom i težom („preciznijom") metodom razlikuju se samo u posljednjoj znamenci.

Znanstvenici su u [9] proučavali al-Kāšījeve tablice te su utvrdili kako su iznosi sinus kuta točni do šest seksagezimalnih mjesta. U radu *Zij-i Khaqani* opisuje i tada standardnu metodu za određivanje $\mathrm{Sin}1^\circ$, kojom dobiva konačni rezultat $\mathrm{Sin}1^\circ = (1; 2, 49, 43, 13, 5)_{60}$. No, al-Kāšī je napisao i poseban rad o iterativnoj metodi za određivanje znamenki, jedne po jedne, od $\mathrm{Sin}1^\circ$. Njegovu je metodu opisao Miriam Chelebi, unuk ar-Rumia, koji je naslijedio al-Kāšīja na mjestu voditelja opservatorija u Samarkandu. U nastavku slijedi objašnjenje metode prema [1]. Metoda proizlazi iz identiteta:

$$\sin 3A = 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A.$$

Odnosno za Sin:

$$\text{Sin } 3\text{A} = 3 \cdot \text{Sin A} - (0;0,4)_{60} \cdot \text{Sin}^3 \text{ A}.$$

Specijalno je:

$$\text{Sin } 3^\circ = 3 \cdot \text{Sin } 1^\circ - (0;0,4)_{60} \cdot \text{Sin}^3 1^\circ$$

gdje se Sin $3^\circ = \text{Sin}\,(18^\circ - 15^\circ)$ može odrediti na proizvoljnu točnost operacijama od kojih je najkompliciranija vađenje drugog korijena. Uzrok tome je što se Sin 3° može konstruirati ravnalom i šestarom. Vrijedi: $\text{Sin}3^\circ = \text{Sin}(18^\circ - 15^\circ) = \text{Sin}18^\circ \cos 15^\circ - \text{Sin}15^\circ \cos 18^\circ$ $= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{2(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}{16}$. Stoga problem nalaženja Sin1° svodimo na rješavanje kubne jednadžbe:

$$\text{Sin } 3^\circ = 3x - (0;0,4)_{60} \cdot x^3.$$

Al-Kāšī za vrijednost sin 3° uvrštava aproksimaciju koju je sam izračunao, a to je sin 3° = $(3;8,24,33,59,34,28,15)_{60}$ (sin 3° = 0,05233595624294). Tada dobivamo jednadžbu:

$$(3;8,24,33,59,34,28,15)_{60} = 3x - (0;0,4)_{60} \cdot x^3,$$

odnosno:

$$(3;8,24,33,59,34,28,15)_{60} = 3x - 4x^3.$$

Temeljem te jednadžbe, al-Kāšī određuje vrijednost Sin 1° iterativno, jednu po jednu znamenku. Slijedi da je:

$$x = \frac{x^3 + (15)_{60}\text{Sin } 3^\circ}{(45)_{60}} = \frac{x^3 + (47,6;8,29,53,37,3,45)_{60}}{(45)_{60}}.$$

Znamo da je x manji od $(1,0)_{60}$ (približna vrijednost dobivena je starijom metodom) pa možemo zapisati x=a_1;a_{-1},$a_{-2}\ldots$. Budući da a_1 mora biti prirodan broj, između 1 i 59, možemo zanemariti dio $x^3/(45)_{60}$ jer je

$$a_1 = \left\lfloor \frac{(47,6;8,29,53,37,3,45)_{60}}{(45)_{60}} \right\rfloor = 1$$

te je ostatak kod dijeljenja jednak: $r_1 = (2,6;8,29,\ldots)_{60}$. Sada imamo $x = (1;a_{-1}a_{-2}\ldots)_{60}$ pa slijedi:

$$(1;a_{-1}\ldots)_{60} = \frac{(1;a_{-1}\ldots)_{60}^3 + (47,6;8,29,53,37,3,45)_{60}}{(45)_{60}}$$

ili

$$(0;a_{-1}\ldots)_{60} = \frac{(1;a_{-1}\ldots)_{60}^3 + (2,6;8,29,\ldots)_{60}}{(45)_{60}}.$$

Budući da nas sada zanima koliko je a_{-1}, možemo $(1; a_{-1}\ldots)_{60}^3$ zamijeniti s 1. Dakle,

$$(0; a_{-1}\ldots)_{60} = \frac{(2, 7; 8, 29, \ldots)_{60}}{(45)_{60}} = (0; 2\ldots)_{60},$$

pa je $a_{-1} = 2$ i $x = (1; 2\ldots)_{60}$. Analogno, al-Kāšī računa dalje i dobiva

$$x = (1; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 19, 16)_{60},$$

što odgovara $\sin 1^\circ = 0{,}01745240643728$ (točnost od 14 decimalnih mjesta).

Rad u kojem je opisana iterativna metoda za određivanje $\sin 1^\circ$ nije dovršen, ali se spominje u predgovoru al-Kāšījevog *Ključa za aritmetiku*. Ovu je metodu al-Kāšī koristio i kako bi odredio vrijednost broja π.

3.2 Al-Kāšījev fundamentalni teorem

U djelu *Al-Risala al-muhitiyya* (1424.), al-Kāšī je primjenjujući osnovne računske operacije dobio fascinantne rezultate. Ti dugi i zamorni izračuni zahtijevali su visoki stupanj preciznosti i upornosti. U prvom dijelu, al-Kāšī određuje duljinu tetive luka koji je zbroj luka poznate tetive i polovice njegovog suplementa s kojim tvori polukrug. To je bio temelj i glavni motiv svih njegovih izračuna u toj raspravi, ali ga on nije iskazao kao teorem.

On je iskazao i dokazao teorem kojeg nazivamo al-Kāšījevim fundamentalnim teoremom:

Teorem 3.2.1. *Na polukrugu promjera* $|AB| = 2r$ *sa središtem E uzmemo proizvoljni luk* $\widehat{AG}$*. Neka je točka D polovište luka* $\widehat{GB}$*. Tada vrijedi* $r(2r + |AG|) = |AD|^2$ *(vidi sliku 3.1).*

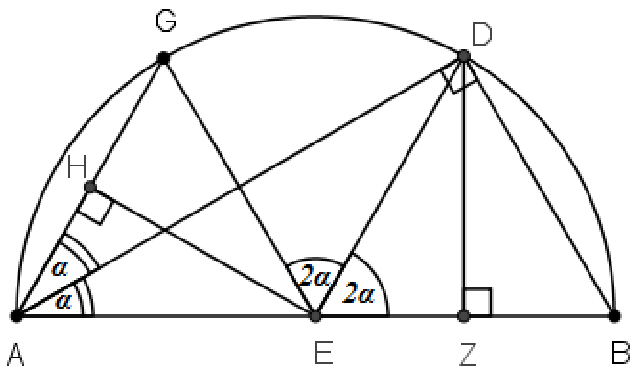
Dokaz. Tvrdimo da je umnožak polumjera i zbroja duljina promjera i tetive $\overline{AG}$ jednak kvadratu duljine tetive $\overline{AD}$. Kako bismo dokazali tvrdnju, najprije spojimo točke B i D te je $\measuredangle ADB$ pravi kut, po Propoziciji 31. iz 3. knjige *Elemenata* (tj. Talesov poučak). Zatim iz točke D povučemo okomicu $\overline{DZ}$ na dužinu $\overline{AB}$. Uočimo $\triangle ADB$ koji je sličan trokutima $\triangle DBZ$ i $\triangle DAZ$. Stoga je omjer promjera i duljine tetive $\overline{AD}$ jednak je omjeru duljina tetive $\overline{AD}$ i dužine $\overline{AZ}$:

$$|AB| : |AD| = |AD| : |AZ|.$$

Po 9. propoziciji 7. knjige *Elemenata* slijedi da je umnožak $|AB|$ i $|AZ|$ jednak površini kvadrata nad tetivom $\overline{AD}$:

$$|AB| \cdot |AZ| = |AD|^2.$$

Sada iz točke E povučemo okomicu na tetivu $\overline{AG}$ te dobivamo nožište H, koje je ujedno, prema 3. propoziciji 3. knjige *Elemenata*, polovište tetive $\overline{AG}$. Sada primijetimo da je



Slika 3.1: Ilustracija uz al-Kāšījev fundamentalni teorem

$\angle BED = \angle DEG$, jer D raspolavlja luk nad tetivom $\overline{BG}$. S druge strane je, prema propoziciji 20 iz 3. knjige *Elemenata*, $\angle BED = 2\angle BAD$. Slijedi da je

$$\angle AEG = 180^\circ - \angle BEG = 180^\circ - 2\angle BED = 180^\circ - 4\angle BAD.$$

Posljedično je $\angle AEH = \frac{1}{2}\angle AEG = 90^\circ - 2\angle BAD$.

S druge strane, iz činjenice da je zbroj kutova u trokutu $\triangle AEH$ jednak 180°, slijedi da je

$$\angle AEH = 180^\circ - 90^\circ - \angle HAE = 90^\circ - \angle BAG,$$

te slijedi $\angle BAG = 2\angle BAD = \angle BED$, opet prema 20. propoziciji 3. knjige *Elemenata*.

Konačno, iz prvog dijela dokaza znamo $|AB| \cdot |AZ| = |AD|^2$, a iz drugog slijedi $\triangle AHE \cong \triangle EZD$, što pak povlači $|AZ| = r + |EZ| = r + |AH| = r + \frac{1}{2}|AG|$. Sveukupno dobivamo

$$|AD|^2 = |AB| \cdot |AZ| = 2r\left(r + \frac{1}{2}|AG|\right) = r(2r + |AG|),$$

što je i trebalo dokazati. □

Al-Kāšī je svoj fundamentalni teorem primijenio kako bi dobio neke od vrhunskih rezultata tog doba. Iskazao je i dokazao identitet koji je danas poznat kao Lambertov identitet,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi}{2}}.$$

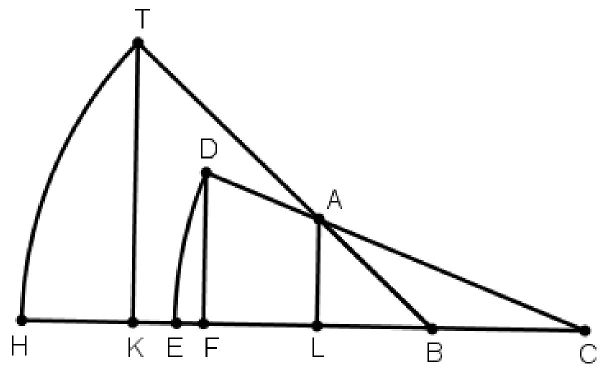
Taj se identitet pojavio u radu Johanna Heinricha Lamberta 1770. godine, dok ga je al-Kāšī dokazao oko 1424. godine. Također je primijenio svoj teorem za računavanje vrijednosti broja π i to na točnost od 16 decimalnih mjesta. Ta aproksimacija, 1424. godine, bila je izvanredno postignuće i nadmašivala je sve aproksimacije broja π svih prethodnih matematičara diljem svijeta, poput Arhimeda, Ptolemeja i Hwārizmīja. Europski su znanstvenici trebali 186 godina da poboljšaju al-Kāšījevu aproksimaciju: Ludolf van Ceulen tek 1610. godine dobiva vrijednost broja π na točnost od 35 decimalnih mjesta. [3]

3.3 Poučak o sinusu

Aṭ-Ṭūsījev najvažniji doprinos trigonometriji, uz njeno osamostaljenje kao čisto matematičke discipline, bio je iskaz i dokaz poučka o sinusima te njegova primjena za određivanje nepoznatih veličina trokuta pomoću poznatih.

Teorem 3.3.1 (Poučak o sinusima)**.** *Uz standardne oznake, u svakom trokutu $\triangle ABC$ vrijedi*

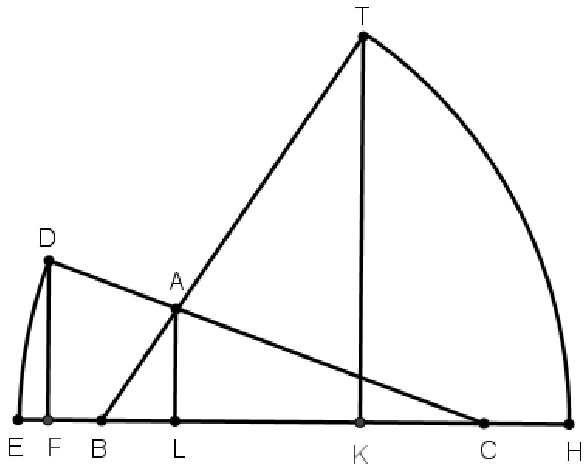
$$\frac{\mathrm{a}}{\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{\mathrm{b}}{\operatorname{Sin}\beta} = \frac{\mathrm{c}}{\operatorname{Sin}\gamma}.$$



Slika 3.2: Poučak o sinusima-tupokutan trokut

Dokaz. Promotrimo prvo slučaj kada u trokutu postoji tup kut. Neka je to kut β. Dužinu $\overline{CA}$ produžimo do D i dužinu $\overline{BA}$ do T tako da duljine obje nove dužine iznose po 60 jediničnih duljina (polumjer kružnice u kojoj gledamo Sin, vidi poglavlje 3.1).[2] Zatim konstruiramo luk $\widehat{TH}$ sa središtem u B te luk $\widehat{DE}$ sa središtem u C (slika 3.2). Nacrtajmo okomice na osnovicu $\overline{BC}$ iz točaka T i D. Dobivamo dužine $\overline{TK}$ i $\overline{DF}$. Primijetimo da

[2]Iz nastavka dokaza bit će očito da nije bitan iznos, već jednakost tih duljina, dakle bi potpuno analogan bio dokaz suvremene varijante poučka o sinusima u jediničnoj kružnici.



Slika 3.3: Poučak o sinusima-šiljastokutan trokut

su njihove duljine točno Sinusi kutova $180° - \beta$ odnosno γ: $\text{Sin}(180° - \beta) = \text{Sin}\,\beta = |\text{TK}|$ i $\text{Sin}\,\gamma = |DF|$. Sada nacrtamo okomicu iz točke A na $\overline{BC}$ te dobivamo $\overline{AL}$. Uočimo da su trokuti $\triangle ABL$ i $\triangle TBK$ slični pa vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|AL|} = \frac{|TB|}{|TK|}.$$

Također, trokuti $\triangle ACL$ i $\triangle DCF$ su slični pa je

$$\frac{|AL|}{|AC|} = \frac{|DF|}{|DC|}.$$

Ako pomnožimo lijeve odnosno desne strane posljednjih dviju formula, dobivamo

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DF|}{|TK|},$$

gdje smo koristili činjenicu $|DC| = |TB|$. Slijedi da vrijedi

$$\frac{\text{b}}{\text{Sin}\,\beta} = \frac{\text{c}}{\text{Sin}\,\gamma}.$$

Kako su u ovom slučaju γ i α šiljasti, zamjenom uloga oznaka slijedi tvrdnja teorema za slučaj tupokutnog trokuta.

Za slučaj šiljastokutnog trokuta tvrdnja se dokazuje analogno, koristeći skicu na slici 3.3. Vidimo da je u tom slučaju direktno $|\mathrm{TK}| = \mathrm{Sin}\,\beta$.

□

Aṭ-Ṭūsī je najvjerojatnije prvi matematičar dokazao poučak o sinusima. Suvremeni dokaz može se naći primjerice u literaturi kolegija *Elementarna matematika* na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. [11]

Poglavlje 4

Algebarski rezultati

4.1 Binomni koeficijenti

U staroj indijskoj kulturi se brojevi koje danas nazivamo binomnim koeficijentima prvo pojavljuju vezano za brojanje kombinacija, dakle u svom kombinatornom značenju . Iako se tako pojavljuje još pokoje stoljeće pr. Kr., prvi detaljniji opis računanja (za konkretne brojeve) dao je u 12. st. Bhāskara II. U arapskom svijetu nema zabilježenih bitnijih razmatranja u svom kombinatornom smjeru.

S druge strane u starih Kineza i u starih Indijaca isti se brojevi pojavljuju i vezano za razvoj binoma, dugo stoljeća isključivo 2. i 3. stupnja, a vezano za primjenu tog razvoja na numeričko određivanje 2. i 3. korijena. Brahmagupta je u 7. stoljeću eksplicitno naveo pravila za razvoj binoma 2. i 3. stupnja. Prema [8], smatra se da su mnogi matematičari srednjeg istoka bili inspirirani radom Brahmagupte. U svakom slučaju, matematičari srednjevjekovnog muslimanskog svijeta, primjerice al-Samaw'al, koristili su ista ta dva razvoja za računanje kvadratnih i kubnih korijena.

U knjizi *Al-Bāhir fī Al-Hisāb*, al-Samaw'al al-Maghribi dao je sljedeće razvoje zajedno sa svojim geometrijskim dokazima:

$$(a+b)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab),$$

$$(a-b)^2 = (a^2 + b^2 - 2ab),$$

$$(a+b)^3 = (a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b),$$

$$(a+b)^4 = (a^4 + b^4 + 4ab^3 + 4a^3b + 6a^2b^2),$$

$$(a+b^5) = (a^5 + b^5 + 5ab^4 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2).$$

Također, u toj raspravi koristio je način određivanja koeficijenata razvoja binoma koji se prvi put spominje kod al-Karkhīja (1016.), kako se mogu odrediti koeficijenti binomnog

Eksponent n	Koeficijenti									
	(1)	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
	Red n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	(1)	2	(1)							
3	(1)	3	3	(1)						
4	(1)	4	6	4	(1)					
5	(1)	5	10	10	5	(1)				
6	(1)	6	15	20	15	6	(1)			
7	(1)	7	21	35	35	21	7	(1)		
8	(1)	8	28	56	70	56	28	8	(1)	
9	(1)	9	36	84	126	126	84	36	9	(1)

Tablica 4.1: Koeficijenti binomnog razvoja $(1 + a)^n$

razvoja $(a + b)^n$, gdje je n cijeli broj. Al-Karkhīju treba pripisati ono što je uobičajeno poznato kao Pascalov trokut [12]. On se smatra prethodnikom Blaise Pascala (1623.–1662.) u tom području matematike, učio je o tome oko 6. st. prije Pascala.

Omar al-Khayyāmi (1048.–1131.) je napisao raspravu u kojoj se nalazi poglavlje *Binomni teorem*. Tamo tvrdi da je izračunao koeficijente binomnog razvoja proizvoljnog stupnja, što nitko ranije nije napravio. To jedino može značiti upotrebu binomnog razvoja za proizvoljni eksponent, stoga bi se al-Khayyāmi mogao smatrati tvorcem binomnog teorema za cjelobrojne eksponente, no njegov tekst na tu temu nije sačuvan.

Aṭ-Ṭūsī piše o binomnom razvoju $(a+1)^n$ i koeficijente naziva *usūl a-Imunāzil* (osnove položaja). Detaljni račun binomnog teorema pojavljuje se u prvom članku u al-Kāšījevoj raspravi *Miftah Al-Hisāb* (1429.). Al-Kāšī je dao sljedeće binomne razvoje: $(a + 1)^2$, $(a+1)^3$ i $(a+1)^5$, u kojima ukazuje kako je broj koeficijenata povezan s eksponentom (broj koeficijenata jednak je $n+1$, gdje je n eksponent). Također je dao koeficijente u razvojima do stupnja $n = 9$ (Tablica 4.1) te kako pronaći razliku $(a+1)^n - a^n$, iz koje proizlaze pravila za aproksimaciju n-tog korijena cijelog broja. Al-Kāšī je ilustrirao tu metodu na primjeru $(7^5 - 4^5) = (4+3)^5 - 4^5$ (Tablica 4.2). Iz tablice 4.2 vidimo da je al-Kāšī izračunao sljedeće:

$$(4 + 3)^5 - 4^5 = (4^5 + 5 \cdot 4^4 \cdot 3 + 10 \cdot 4^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot 4^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 4 \cdot 3^4 + 3^5) - 4^5.$$

Stoga, možemo zaključiti da je al-Kāšī sigurno znao za binomni razvoj:

$$(a + b^5) = a^5 + b^5 + 5ab^4 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2,$$

kao i binomne razvoje s većim eksponentom.

Podrijetlo binomnog teorema s pravom pripisuju muslimanskim učenicima, najkasnije od doba al-Kāšīja, ako ne i ranijih matematičara kao što su aṭ-Ṭūsī, Omar al-Khayyāmi

n	Stupac 1	Stupac 2	Stupac 3	Produkt stupaca 1, 2, 3
	Koeficijenti 5-og stupnja	4^n	$3^{(5-n)}$	
5	1	$4^5 = 1024$	1	4^5
4	5	$4^4 = 256$	$3^{(5-4)} = 3$	$5 \cdot 4^4 \cdot 3$
3	10	$4^3 = 64$	$3^2 = 9$	$10 \cdot 4^3 \cdot 3^2$
2	10	$4^2 = 16$	$3^3 = 27$	$10 \cdot 4^2 \cdot 3^3$
1	5	4	$3^4 = 81$	$5 \cdot 4 \cdot 3^4$
0	1	1	$3^5 = 243$	3^5

Tablica 4.2: Al-Kāšījeva metoda za računanje $(4 + 3)^5 - 4^5$

ili al-Karkhī. Postoji dovoljno dokaza za zasluge muslimanskih učenika koje su pripisane Blaise Pascalu i Isaac Newtonu u pogledu binomnih koeficijenata i binomnog razvoja, no svakako njima pripadaju zasluge za prvu sveobuhvatnu analizu binomnih koeficijenata (Pascal) i generalizaciju binomnog teorema (Newton).

4.2 Faktorizacija prirodnih brojeva na proste faktore

U ovom ćemo poglavlju razmatrati al-Fārisījev doprinos dokazu osnovnog teorema aritmetike. On se zapravo bavio prijateljskim brojevima,[1] a cilj mu je bio iznova dokazati teorem Thabita ibn Qurre. Međutim, da bi ostvario taj cilj morao je prvo postaviti određene teoreme elementarne teorije brojeva. S obzirom na to da su prijateljski brojevi definirani preko djelitelja, al-Fārisī je u tu svrhu dokazao propozicije vezane za faktoriziranje prirodnih brojeva. Konačna njegova propozicija, propozicija 9 u radu *Tadhkirat al-Aḣbān fī bayān al-Taḣābb*, u biti je osnovni teorem aritmetike bez jedinstvenosti. Dokazao je točno ono što mu je trebalo, a to je da se svi djelitelji prirodnog broja mogu generirati iz njegovih prostih faktora. U svojim dokazima se pozivao na Euklidove *Elemente*, u kojima je, kako je dobro poznato, dokazano da je svaki prirodan broj ili prost ili sadrži prost faktor (propozicija 32 u 7. knjizi *Elemenata*). U nastavku ćemo navesti al-Fārīsijeve propozicije i ukratko prokomentirati al-Fārisījev način dokazivanja tih propozicija. Za nas je najzanimljivija prva al-Fārisījeva propozicija, jer je ona najstariji poznati iskaz i dokaz egzistencijskog dijela osnovnog teorema aritmetike. Podsjećamo da pod „brojem “, kao i antički Grci, al-Fārisī podrazumijeva prirodan broj.

Propozicija 4.2.1 (Propozicija 1)**.** *Svaki složen broj je moguće rastaviti na konačno mnogo prostih faktora.*

[1] Par prirodnih brojeva zovemo prijateljskim ako je zbroj svih pravih djelitelja jednog jednak drugom i obrnuto.

Dokaz. Neka je a složen broj. Budući da je složen, iz 7. knjige *Elemenata* slijedi da nužno sadrži prost faktor. Neka je $a = b \cdot c$, gdje je b prost. Ako je c prost broj, tada je $a = b \cdot c$ rastav na proste faktore, što smo i htjeli dokazati. U suprotnom c je složen broj i tada neka je $c = d \cdot e$, gdje je d prost. Ako je e prost broj tada je očito a dobiven množenjem prostih brojeva b, d i e. Inače, ako je e složen broj onda tražimo dalje njegov rastav i tako nastavljamo sve dok svaki složen faktor ne rastavimo na dva prosta faktora. Ukoliko nikad ne možemo rastaviti složen broj na dva prosta faktora, tada nužno slijedi da je taj broj dobiven od beskonačnog produkta brojeva, što je nemoguće. Time smo dokazali propoziciju. □

Propozicija 4.2.2 (Propozicija 2)**.** *Ako imamo tri broja a, b, c, omjer prvog i trećeg sastavljen je od omjera prvog i drugog te omjera drugog i trećeg.*

Ova je propozicija ponešto nejasna jer nigdje nije definirao „sastavljanje "omjera, no očigledno je da ova propozicija tvrdi $(a : b)(b : c) = a : c$.

Propozicija 4.2.3 (Propozicija 3)**.** *Omjer jedinice i bilo kojeg složenog broja je sastavljen od omjera jedinice i svakog prostog faktora tog složenog broja.*

Al-Fārīsi ovdje „obrnutom indukcijom" (zapravo, kroz prva dva koraka indukcije) i koristeći svoju prvu propoziciju dokazuje da za svaki složen broj a i njegove faktore b, c,... vrijedi $1 : a = (1 : b)(1 : c) \dots$. Koristeći tu propoziciju, al-Fārīsi dokazuje da vrijedi:

Propozicija 4.2.4 (Propozicija 4)**.** *Dva složena broja koji imaju isti rastav na faktore su jednaki.*

Ekvivalentna toj propoziciji je njezina kontrapozicija

Propozicija 4.2.5 (Propozicija 5)**.** *Dva različita složena broja nemaju isti rastav na proste faktore.*

S druge strane, koristeći svoju prvu propoziciju, al-Fārīsi je dokazao i propoziciju

Propozicija 4.2.6 (Propozicija 6)**.** *Za svaki složeni broj koji je rastavljen na proste faktore, brojevi sastavljeni od tih faktora, po dva, po tri, itd., su svi redom djelitelji danog broja.*

Ovo je lakši dio al-Fārisījevog rezultata o djeliteljima složenog broja. Naime, ovime je dokazano da množenjem prostih faktora dobivamo djelitelje, no ostaje teži dio dokaza, a to je dokazati da ne postoje djelitelji zadanog broja koji nisu umnošci njegovih prostih faktora. Da bi taj dokaz mogao završiti, al-Fārīsi dokazuje još dvije propozicije.

Propozicija 4.2.7 (Propozicija 7)**.** *Ako neki broj a ne dijeli drugi broj b, tada ni kvadrat ni kub ni nikoja viša potencija tog broja a ne dijeli njegov umnožak s b.*

Koristeći tu propoziciju dobije se dokaz propozicije:

Propozicija 4.2.8 (Propozicija 8)**.** *Ako je složen broj rastavljen na proste faktore i jedan od tih faktora se ne ponavlja, tada taj složen broj nije djeljiv s kvadratom tog prostog faktora kao niti s ijednom njegovom višom potencijom. A ako se prosti faktor ponavlja jednom, onda je složen broj djeljiv s kvadratom tog prostog faktora, ali s višim potencijama nije. Slično ako se prosti faktor ponavlja dvaput vrijedi za njegov kub itd.*

Na kraju ćemo iskazati i dokazati al-Fārisījevu *Propoziciju 9* o popisu svih djelitelja prirodnog broja.

Propozicija 4.2.9 (Propozicija 9)**.** *Svaki složen broj rastavljen na proste faktore, nema drugih dijelitelja osim jedinice i tih prostih faktora, i također umnožaka od po dva, tri itd. tih prostih faktora.*

Dokaz. Neka je a složen broj i neka su njegovi prosti faktori b, c, d, e. Al-Fārisī tvrdi da a nema drugih djelitelja osim jedinice i b, c, d, e te umnožaka bc, cd, be, cd, ce, de, bcd, bce, bde.

Ako postoji još neki djelitelj, osim ovih, tada ga označimo sa z. On može biti prost ili složen. Ako je z prost, tada (prema 30. propoziciji 7. knjige *Elemenata*) dijeli $(bcd)e$, gdje je e prost faktor te z nije njegov djelitelj. Zato z mora biti djeljitelj broja $bcd = bc(d)$, gdje je d prost broj. Analogno kao i prije, zaključujemo da z mora dijeliti produkt bc. Kako je to produkt dva prosta broja, tada je z djelitelj jednog od ta dva broja ili je pak jedan od njih, što je nemoguće.

Ako je z složen, različit od svih navedenih umnožaka, tada nužno njegovi prosti faktori ne mogu biti jednaki faktorima tih umnožaka. Razlikujemo tri slučaja.

Prvi slučaj je kada je prost faktor h (djelitelj broja z) različit od svih prostih faktora broja a. Kako je h prost broj, dolazimo do gore spomenute kontradikcije koja slijedi kada pretpostavimo da je z prost broj.

U drugom slučaju, prost faktor b broja z ponavlja se jedanput u rastavu na faktore, dok se u rastavu broja a broj b ne ponavlja. Dakle, $a = bcde$ i $z = b^2cde$. Broj b^2cde mora biti djelitelj broja a, što je nemoguće. Analogno bismo dokazali svaki slučaj u kojem je potencija jednog faktora u rastavu broja z za jedan veća od potencije tog istog faktora u rastavu broja a.

Treći slučaj je kada prost faktor u rastavu broja a ima za jedan veću potenciju nego u rastavu broja z. Dokaz je analogan drugom slučaju, stoga je teorem dokazan. □

Al-Fārisī nigdje nije naveo ni dokazao dio o jedinstvenosti u osnovnom teoremu aritmetike i nije pokazao namjeru da to napravi. Propozicija 4 i 5 uklapaju se u osnovnu formu cjelokupnih argumenata i ako je al-Fārisī pokušao dokazati jedinstvenost u njima, očito se zbunio. Prema [2] te se propozicije smatraju neuspješnim dokazom jedinstvenosti.

Ipak, iskaz i dokaz propozicije 9 ukazuje na to da je bio svjestan jedinstvenosti rastava na proste faktore. Došao je bliže jedinstvenosti nego itko prije njega. Da je htio dokazati jedinstvenost, sigurno je imao sposobnosti za to, ali je krenuo u krivom smjeru i zaboravio spomenuti da faktori moraju biti prosti. [2]

Poglavlje 5

Zaključak

Diplomskim radom *Islamski matematičari mongolskoga doba*, željela sam otkriti djelić povijesti matematike koji je meni, a mislim i većini, skoro pa nepoznat. U osnovnoj i srednjoj školi jako se malo uči o povijesti matematike, a i to malo što se uči su uglavnom „poznata" imena kao što su Euklid, Pascal, Pitagora i slični. Dostignuća islamskih matematičara su većinom pripisana nekim drugim matematičarima, jer se dosta njihovih radova izgubilo ili kasno pronašlo.

U ovom diplomskom radu upoznali smo mnogo „novih" imena matematičara koji su napravili iznimna dostignuća u mnogim područjima. Vidjeli smo al-Kāšījeve trigonometrijske tablice te njegov fundamentalni teorem, kojeg je primijenio za računanje broja π. Njegovu aproksimaciju broja π skoro 2 stoljeća nitko nije nadmašio, no nažalost nismo našli izvor s opisom kako je do nje došao. Također smo vidjeli i najvjerojatnije prvi dokaz poučka o sinusu, kojeg je dao aṭ-Ṭūsī. Dokazi ta dva teorema su nešto teži nego suvremeni dokazi, ali mogu se naći podudarnosti.

Osim trigonometrije, važno je spomenuti i algebarske rezultate. Mnogi binomne koeficijente povezuju s Blaise Pascalom i ne razmišljajući da su islamski matematičari 600 godina prije njega pisali o njima. Binomni se teorem s pravom pripisuje islamskim učenicima, iako su mnoge njihove zasluge pripisane Pascalu i Newtonu. Bitan doprinos matematici i algebri dao je i al-Fārisī dokazom osnovnog teorema o aritmetici. Iako nije dokazao jedinstvenost, već samo egzistenciju, to je bitan doprinos matematici, nadmašen tek konačnim Gaussovim dokazom osnovnog teorema aritmetike (1801.).

Pisanjem ovog diplomskog rada mnogo sam naučila o islamskim matematičarima, ali još više sam naučila o povijesti matematike. Mnogi su me rezultati iznenadili, kao i načini dokazivanja. Na početku se dokazi čine teški i neshvatljivi, ali kada ih se duže proučava, možemo vidjeti sličnosti sa suvremenim dokazima.

Bibliografija

[1] A. Aaboe, *Al-Kāšī's iteration method for the determination of* $\sin{}^\circ$, <http://www.jphogendijk.nl/arabsci/Kashi-Aaboe.pdf>. Pristupljeno 13.4.2017.

[2] A.G. Agargün, C. R. Fletcher, *al-Fārisī and the fundamental theorem of arithmetic*, Historia Mathematica (1994.), br. 2, 162.–173.

[3] M. K. Azarian, *Al-Kāšī's fundamental theorem*, International Journal of Pure and Applied Mathematics (2004.), br. 4, 493.–503.

[4] A. Babayev, V. F. Medzlumbeyova, *New Results In The Research On Some Mathematical Works Of Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī*, Muslim Heritage, <http://www.muslimheritage.com/article/new-results-research-some-mathematical-works-nasir-al-din-al-tusi>. Pristupljeno 2.5.2017.

[5] M. Bagheri, *A Newly Found Letter of Al-Kāšī on Scientific Life in Samarkand*, Historia Mathematica (1997.), br. 3, 241.–256.

[6] F. M. Brüeckler, *Povijest matematike*, Sveučilište Josipa Jurja Strosmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2007

[7] G. Divic, *Povijest matematike*, eTwinning projekt History of Math, 2014., <https://www.slideshare.net/gordanadivic/povijest-matematike-history-of-math>. Pristupljeno 16.1.2017.

[8] O. Echi, *Binomial coefficients and Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī*, Scientific Research and Essay (2006.), <http://www.academicjournals.org/article/article1380188236_Echi.pdf>. Pristupljeno 2.5.2017.

[9] J. Hamadanizadeh, *The trigonometric tables of Al-Kāšī in his Zij-i Khaqani*, Historia Mathematica (1980.), br. 1, 38.–45.

[10] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive*, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Pristupljeno 11.10.2017.

[11] D. Purwanti, *The Thinking Of Muhammad Ibn Muhammad Ibn Al-Hasan (aṭ-Ṭūsī) In Trigonometri*, Internacional Journal of Scietific i Tehnology research (2017.), <http://www.ijstr.org/final-print/mar2017/The-Thinking-Of-Muhammad-Ibn-Muhammad-Ibn-Al-hasan-al-tusi-In-Trigonometri-.pdf>. Pristupljeno 2.5.2017.

[12] Galal S. A. Shawki, Gulal S. A. Shawki, *Formulation and Development of Algebra by Muslim Scholars*, Islamic Studies (1984.), br. 4 , 337.–352., <http://www.jstor.org/stable/20847279>. Pristupljeno 22.8.2017.

[13] G. Van Burummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press, 2009.

[14] _, *Mongolsko carstvo*, Povijest svijeta, (2012.) , <http://povijest-svijeta.orgfree.com/mongolsko_carstvo.htm>. Pristupljeno 16.1.2017.

[15] _, *Istorija trigonometrije*, <http://alas.matf.bg.ac.rs/ brankica/sadrzaj/istorija.html>. Pristupljeno 16.1.2017.

Sažetak

U diplomskom radu *Islamski matematičari mongolskoga doba* cilj je upoznati se s doprinosima islamskih matematičara u razoblju 13.–15. stoljeća. Na početku rada prisjećamo se povijesti trigonometrije i mongolskog carstva te matematike srednjovjekovnog muslimanskog svijeta kako bismo lakše u nastavku pratili daljnji razvoj.

Islamski su matematičari mongolskog doba pisali radove u mnogim područjima, kao što su matematika, etika, filozofija, astronomija,... U poglavlju sa životopisima su ukratko opisana njihova glavna postignuća.

Važni matematički doprinosi posebno su istaknuti u trećem i četvrtom poglavlju. Najviše radova tog doba bilo je o trigonometriji, a posebno su važni radovi al-Kāšīja i aṭ-Ṭūsīja. Al-Kāšījeve trigonometrijske tablice i metoda iteracije veliki su doprinos matematici, kao i aṭ-Ṭūsījev dokaz poučka o sinusu. Njihovi su radovi također bitni i u algebri, posebno radovi o binomnim koeficijentima. U algebri bitan doprinos dao je i al-Fārisī koji je djelom dokazao osnovni teorem aritmetike.

U zadnjem poglavlju dan je zaključak diplomskog rada u kojem je izneseno mišljenje autora.

Summary

The aim of the master's thesis *Islamic Mathematicians during Mongol Rule* is to get a better insight into contributions of Islamic Mathematicians from the 13th to the 15th centuries. This text begins with short reviews of the history of trigonometry and the Mongol Empire. The introductory chapter also reviews the history of mathematics in the medieval Islamic world, in order to be able to follow further developments more easily.

Islamic mathematicians during the Mongol time wrote papers about various areas such as mathematics, ethics, physics, philosophy, astronomy,... Their achivements are briefly described in the chapter which contains their biographies.

Important contributions in mathematics are highlighted in the third and fourth chapters. During this period the majority of papers dealt with trigonometry. Papers written by al-Kāšī and aṭ-Ṭūsī were especially important. Al-Kāšī's trigonometric tables and iterative method, as well as aṭ-Ṭūsī's proof of the law of sines, are great contributions to mathematics. Their work is also important for algebra, especially their papers on binomial coefficient. Al-Fārisī, who also made an important contribution to algebra, partly proved the fundamental theorem of arithmetic.

The last chapter contains a conclusion in which the author gives her opinion.

Životopis

Renata Antolek rođena je 26. rujna 1991. godine. Svoje obrazovanje započela je u Osnovnoj školi Prelog te ga nastavila u općoj gimnaziji u Srednjoj školi Prelog. Godine 2010. upisala je Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek. Godine 2014. završila je preddiplomski studij i stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Svoj studij nastavila je na diplomskom studiju matematičkog odsjeka, smjer nastavnički.