Modeliranje eksponencijalnom funkcijom u srednjoškolskoj nastavi matematike

Baček, Brigita

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:253143

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Brigita Baček

MODELIRANJE EKSPONENCIJALNOM FUNKCIJOM U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ___________________________, predsjednik

2. ___________________________, član

3. ___________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom **______________________** .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ___________________________

2. ___________________________

3. ___________________________

Poštovana mentorice, prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš, hvala Vam na razumijevanju, pomoći i ukazanom povjerenju tijekom pisanja ovog diplomskog rada.

Hvala mojoj obitelji što su mi omogućili studiranje na ovom fakultetu te što su bili uz mene sve godine mog obrazovanja.

I na kraju, hvala mom dragom suprugu na bezuvjetnoj podršci i ljubavi koju mi je pružio tijekom mog visokoškolskog obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je prikazati i razviti primjere učeničkih aktivnosti i nastavnih materijala za matematičko modeliranje eksponencijalnom funkcijom u srednjoškolskoj nastavi matematike.

U prvom poglavlju govorit ćemo o uvođenju pojma funkcija tijekom školovanja te o izgradnji eksponencijalne funkcije te samoj definiciji eksponencijalne funkcije. Također, u poglavlju smo naveli i matematičku definiciju eksponencijalne funkcije i matematički dokaz.

U drugom poglavlju riječ o suvremenoj nastavi matematike. Suvremena nastave matematike u središte stavlja učenika koji sam istražuje matematike, a ne prima samo gotove formule i činjenice. Nadalje, govorimo o pitanjima i načinima na koja bi nastavnici trebali postavljati svojim učenicima kako bi ih potaknuli na razmišljanje i učenje s razumijevanjem.

U idućem poglavlju spominjemo suradničko- timski rad te njegove prednosti u nastavi matematike te općenito u nastavi. U ovom diplomskom radu bazirali smo se na aktivnosti koje bi nastavnici mogli provoditi u nastavi. Kroz aktivnosti učenici modeliraju probleme iz svakodnevnog života eksponencijalnom funkcijom te smo u trećem poglavlju opisali što je modeliranje, odnosno matematičko modeliranje dok u četvrtom poglavlju opisujemo niz aktivnosti koje se mogu provoditi na satu.

U posljednjem poglavlju, petom, spomenuli smo definiciju logističke funkcije te navodimo nekoliko primjera opisanih logističkom funkcijom.

Poglavlje 1

Funkcije

1.1 Povijesni razvoj pojma eksponencijalne funkcije

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih matematičkih pojmova, koji se uvodi već krajem osnovne i tijekom cijele srednje škole. U sedmom razredu osnovne škole učenici se susreću s pojmom linearne funkcije, dok strogu definiciju linearne funkcije uče u prvom razredu srednje škole. U drugom razredu srednje škole uči se o kvadratnoj funkciji te eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji.

Definicija: Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu skupa D pridružen jedan element skupa K, onda kažemo da je skup D preslikan u skup K, a sam taj postupak pridruživanja nazivamo funkcijom ili preslikavanjem s D u K.

Označimo li funkciju s D u K simbolom f, onda pišemo $f : D \rightarrow K$ i čitamo: *f je funkcija s D u K*. Za skup D kažemo da je domena ili područje definicije funkcije f i često ga označavamo s $D(f)$, a skup K nazivamo kodomena od f. Jedinstveni element skupa K pridružen elementu $x \in D$ označavamo s $f(x)$ i zovemo slika elementa x u odnosu na funkciju f ili vrijednost funkcije f u točki x. Podskup $Imf = \{f(x) \mid x \in D\}$ skupa K nazivamo slikom funkcije f. Sliku Imf funkcije $f : D \rightarrow K$ označavamo još i s $f(D)$. Simbol x koji označava proizvoljni element iz D nazivamo nezavisnom varijablom, a $f(x)$ zavisnom varijablom. ([4])

Riječ *funkcija* prvi spominje Descartes 1637. godine i to za označavanje cjelobrojne potencije nezavisne varijable. Euler pod funkcijom podrazumijeva bilo koju formulu u kojoj se javljaju varijable i konstante. Današnji pojam funkcije potječe od Dirichleta.

U petom stoljeću prije Krista Pitagorejci su poznavali nizove, među njima i geometrijski niz: kvocijent dva uzastopna člana uvijek je jednak: $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$ Zapis eksponenta kao gornjeg eksponenta prvi je koristio Nicolas Chuquet (oko 1445.–1500.), no njemu 123 znači $12x^3$. Chuquet je i prvi matematičar koji koristi nulu kao eksponent (zna da je $x^0 = 1$, piše 12^0 za 12) i negativne eksponente (12^{1m} mu predstavlja $12x^{-1}$). Chuquet je za život zarađivao kao prepisivač, a njegova *Triparty en la science des nombres* je prva francuska knjiga o algebri (1484.) i u tom su djelu korištene spomenute oznake. Ipak, ta je knjiga imala mali utjecaj jer je štampana tek 1880. godine. ([3])

Već 1256. godine bila je poznata eksponencijalna funkcija. Šah je jedna od najstarijih igara, igra se već stoljećima, a o njemu postoje mnoge predaje i legende. Jedna od tih legendi je iz 1256. godine (dovoljno je znati da se šahovska ploča sastoji od 64 polja - crnih i bijelih). Iznosimo priču u cijelosti:

„Šah je pronađen u Indiji. Kada je indijski car Šeram upoznao i naučio igrati šah, bio je ushićen ljepotom te igre. Saznavši da je tu igru izmislio jedan od njegovih podanika, naredio je da ga pronađu i dovedu kako bi ga osobno nagradio. Pronalazač, kojeg su zvali Seta, došao je pred cara. Bio je to skromno odjeven učenjak koji je dobivao sredstva za život od svojih učenika. "Želim te dostojno nagraditi, Seta, za prekrasnu igru koju si pronašao" - rekao je car. Mudrac se poklonio. "Dovoljno sam bogat i mogu ispuniti svaku tvoju želju" - nastavio je car - "kaži koju bi nagradu najviše volio i dobit ćeš je." Seta je šutio. "Ne ustručavaj se" - bodrio ga je car - "kaži svoju želju! Ničeg neću žaliti da bih ti je ispunio." "Velika je dobrota vaša, gospodaru. Ali dajte mi vremena za odgovor. Sutra, kada dobro razmislim, reći ću vam želju" - rekao je Seta. Drugog dana Seta je ponovno došao pred cara i iznenadio ga vrlo skromnom molbom. "Gospodaru" - rekao je Seta - "naredite da mi se za prvo polje šahovske ploče da jedno pšenično zrno…"; "Obično pšenično zrno?!" - iznenadio se car. "Da, gospodaru. Za drugo polje naredite da mi se daju 2 zrna, za treće 4, za četvrto 8, za peto 16, za šesto 32…"; "Dosta!" - ljutito ga je prekinuo car - "dobit ćeš zrna na svih 64 polja šahovske ploče prema svojoj želji: za svako polje dvaput više nego za prethodno. Ali znaj da tvoja molba nije dostojna moje darežljivosti, jer moleći takvu ništavu nagradu omalovažavaš moju milostivost. Kao učitelj zaista bi mogao pokazati više pažnje i poštovanja prema dobroti svog gospodara. Odlazi! Moje sluge će ti donijeti vreću s pšenicom."

Seta se osmjehnuo, napustio dvoranu i u carskom vrtu čekao nagradu. Za vrijeme ručka car se interesirao da li je Seta dobio željenu nagradu. "Gospodaru" - odgovorili su mu - "vaše se naređenje izvršava. Dvorski matematičari izračunavaju broj zrna koja pripadaju Seti." Car se već počeo polako ljutiti, jer nije navikao na čekanje. Navečer, prije spavanja, car se još jednom interesirao je li Seta dobio obećanu nagradu. "Gospodaru" - odgovorili su mu - "vaši matematičari rade bez odmora i nadaju se da će do zore završiti račun." Ujutro su caru podnijeli izvještaj. "Savjesno smo izračunali količinu zrna koje želi Seta. Taj broj je toliko velik da nije u vašoj moći, gospodaru, isporučiti obećanu nagradu. U svim vašim hangarima nema toliko zrna koliko treba isporučiti Seti. Nema ga dovoljno ni u žitnicama cijelog carstva. Nema ga toliko ni na svim prostranstvima zemlje. Ako želite isporučiti obećanu nagradu, tada naredite da se sva zemaljska pretvore u oranice; naredite da se isuše sva mora i oceani; naredite da se otopi sav led i snijeg koji pokriva daleke južne i sjeverne krajeve. Neka sva ta prostranstva budu zasijana pšenicom. I sve to, što rodi na tim poljima, naredite da daju Seti, tek tada bi on dobio svoju nagradu." Car je zapanjeno pratio riječi glavnog matematičara. "Kaži mi taj čudovišni broj" - na kraju je izustio car. "Osamnaest kvadrilijuna četiri stotine četrdeset šest trilijuna sedam stotina četrdeset četiri bilijuna sedamdeset tri milijarde sedam stotina devet milijuna pet stotina pedeset jedna tisuća šest stotina petnaest" - rekao je matematičar. Car se zamislio, jer su mu matematičari rekli kako njegove zalihe pšenice nisu dostatne, pa da ih ima i sto puta više jer tom bi se količinom mogli napuniti vagoni koji 1.000 puta „obavijaju“ Zemlju. No, car je car i mora ispuniti obećanje. Pozvao je Setu i rekao mu: “Izvolite u kraljevsku riznicu i sami prebrojite koliko zrna pšenice sam vam obećao. Ne želim te prevariti niti za jedno zrno, pa ćeš svoju nagradu brojati zajedno s mojim slugama.” Čuvši to, Seti je postalo neugodno. Počeo se ispričavati da ima hitnoga posla jer mu je sestra na drugom kraju zemlje pred porodom, a muž joj je umro. Car se nasmijao i dao mu bogatu popputbinu, da širi glas svijetom o milostivosti cara Šerama.“

Tako kaže legenda. Je li se to, o čemu se u njoj govori, zaista i dogodilo - ostalo je nepoznato, ali da je nagrada o kojoj se govori u predaji bila izražena takvim brojem, u to se možete sami uvjeriti računanjem počevši od jedinice: 1, 2, 4, 8, 16, 32… ([17])

Učenici tijekom svog školovanja upoznaju se s funkcijama. Već u sedmom razredu upoznaju pojam linearne funkcije, dok u prvom razredu srednje škole detaljno uče o linearnoj funkciji. U sedmom razredu se linearna funkcija definira na sljedeći način ([2]):

Linearna funkcija je funkcija zadana formulom $f(x) = a \cdot x + b$ ili $y = a \cdot x + b$.

Brojeve a i b nazivamo koeficijenti linearne funkcije, *x* nazivamo argument funkcije, a *f(x)* vrijednost funkcije. *x* je nezavisna, a *y* zavisna varijabla.

U prvom razredu srednje škole linearna funkcija definira se ovako ([5])

Linearna funkcija je pridruživanje kojim nekom realnom broju *x* pridružujemo realni broj *f(x)* pri čemu je $f(x) = a \cdot x + b$, $a \neq 0$.

Zatim u drugom razredu srednje škole uče o kvadratnoj funkciji te o eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji. Kvadratna funkcija je u drugom razredu srednje škole ovako definirana ([6]):

Kvadratna funkcija ili polinom drugog stupnja je funkcija zadana formulom:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Koeficijenti a, b i c su realni brojevi. Broj $a \neq 0$ je vodeći koeficijent polinoma *f*, b je linearni koeficijent, a *c* je slobodni član.

Za svaki realni broj *x* možemo odrediti vrijednost funkcije *f* pa kažemo da je ova funkcija definirana za svaki realni broj.

Jednadžbe kao što su linearna, kvadratna ili jednadžba 3. stupnja, čiji su koeficijenti racionalni brojevi, nazivaju se algebarske jednadžbe.

Realni brojevi, koji su rješenja takvih jednadžbi, nazivaju se algebarski brojevi.

No, postoje realni brojevi koji nisu rješenja niti jedne algebarske jednadžbe. Njih nazivamo transcedentni brojevi. Broj π je transcedentan broj. Tada postoje i transcedentne jednadžbe i transcedentne funkcije.

Primjer jedne od takvih funkcija je eksponencijalna funkcija.

1.2 Izgradnja eksponencijalne funkcije

Prisjetimo se najprije kako se uvode potencije u osmom razredu osnovne škole. Učenici najprije uče potencirati brojeve te zapisuju:

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{n faktora}}$$

Na taj način se uvodi potencija bilo kojeg (realnog) broja. Motivacija za definiranje cjelobrojne potencije broja dolazi iz sljedeće aktivnosti:

10^4=10 000

10^3=1 000

10^2= 100

10^1=10

Učenici uočavaju da se eksponenti smanjuju za 1, a brojevi desno se dijele s 10.

Nastavljamo niz dalje. Smanjimo eksponent za 1:

10^0 = 1 (prethodnik dijelimo s 10).

Smanjimo eksponent za još 1:

10^{-1} = 0.1

10^{-2} = 0.01

10^{-3} =0.001 = $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = (\frac{1}{10})^3$

Kroz diskusiju s nastavnikom, učenici uočavaju da pravilnost i uvode da je $10^0 = 1$ i $(\frac{1}{10})^n = 10^{-n}$ pri čemu je *n* prirodan broj.

Nadalje, učenici otkrivaju pravila za množenje, dijeljenje i potenciranje potencija. U prvom razredu srednje škole baza potencije više nije samo broj 10 već skup realnih brojeva. Iz formule za dijeljenje potencija proizlazi sljedeće: ako su eksponenti potencija jednakih baza jednaki, m=n, tada je $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$. No, znamo da se u tom slučaju potencije koje dijelimo sastoje od jednakog broja jednakih faktora, pa za svaku bazu a$\neq$ 0 prirodno proizlazi

$$a^0 = 1.$$

Ako je baze potencije 0, onda za svaki prirodan broj *n* vrijedi $0^n = 0$, no 0^0 i 0^{-n} nije definirano za prirodni broj n.

Izgradnja eksponencijalne funkcije u srednjoj školi radi se korak po korak, izgradnjom pojma potencije pri čemu se postupno širi skup kojem pripadaju eksponenti. U nastavku će biti prikazan primjer aktivnosti kroz koju se može izgraditi pojam eksponencijalne funkcije. Učenicima zadamo sljedeći zadatak: Svaki dan broj bakterija na nekom području poveća se tri puta. Koliko će bakterija biti nakon 7 dana, nakon 10 dana, nakon *n* dana? Kako vrijeme odmiče, broj bakterija se povećava, i to sljedećim pravilom:

$f(n) = 3^n$, pri čemu je *n* broj dana.

Smisleno je pitati se koliko će bakterija biti nakon pola dana, nakon $\frac{7}{3}$ dana i slično. Također, možemo se i pitati koliko je bakterija bilo 2 dana prije početka mjerenja. Zatim crtamo sljedeće grafove u nekom od programa kao što je GeoGebra:

1.korak: potencije s prirodnim eksponentom

2.korak: potencije s pozitivnim racionalnim eksponentom

3.korak: potencije s 0 u eksponentu i negativnim cjelobrojnim eksponentom

4.korak: potencije s negativnim racionalnim eksponentom.

Iduća dva koraka trebala bi se prikazati pomoću unaprijed pripremljenih materijala, primjerice u Excelu:

5.korak: potencije s pozitivnim iracionalnim eksponentom

6.korak: potencije s negativnim iracionalnim eksponentom

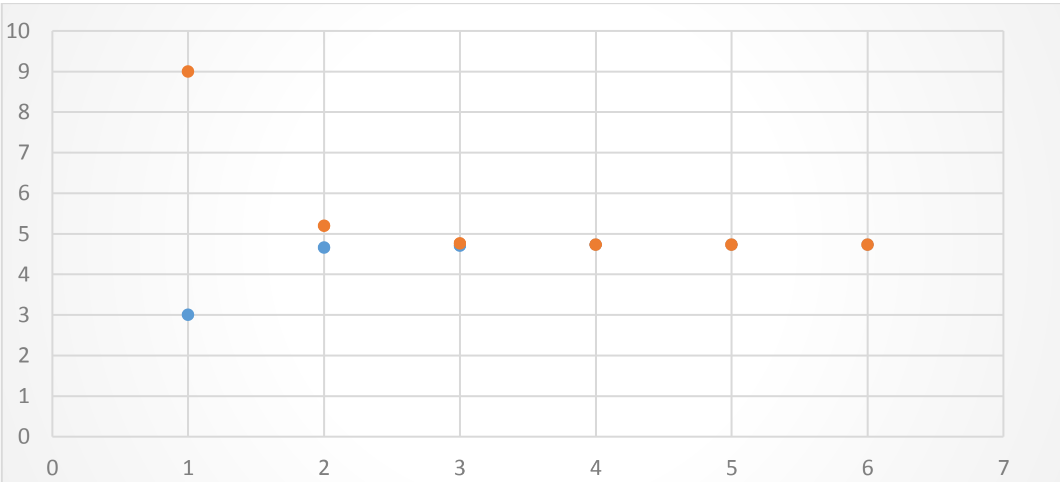
Kako bi učenici otkrili približne vrijednosti brojeva $3^{\sqrt{2}}$ i $3^{-\pi}$, provest ćemo aktivnost te o prikazati u Excelu tražene brojeve sljedećim aproksimacijama:

$1 \ < \ \sqrt{2} < 2 \quad \rightarrow \quad 3^1 \ < \ 3^{\sqrt{2}} \ < \ 3^2$

$1.4 < \sqrt{2} \ < 1.5 \quad \rightarrow \quad 3^{1.4} \ < \ 3^{\sqrt{2}} \ < \ 3^{1.5}$

A		B	3^A		3^B
1		2	3		9
1,4	$< \sqrt{2}$ <	1,5	4,655536722	$< \ 3^{\sqrt{2}}$	5,196152423
1,41		1,42	4,706965002		4,758961394
1,414		1,415	4,727695035		4,732891793
1,4142		1,4143	4,72873393		4,729253463
1,41421		1,41422	4,728785881	4,7288044	4,728837832

Istodobno prethodne nizove prikazujemo grafom.



Analogno aproksimiramo $3^{-\pi}$:

$-4 \ < \ -\pi \ < \ -3 \quad \rightarrow \quad 3^{-4} \ < \ 3^{-\pi} \ < \ 3^{-3}$

$-3.142 \ < \ -\pi \ < \ -3.11 \quad \rightarrow \quad 3^{-3.142} \ < \ 3^{-\pi} \ < \ 3^{-3.11}$

Također, nizove prikažemo grafički. Niz 3^{-4}, $3^{-3.142}$ je rastući, a niz 3^{-3}, $3^{-3.11}$ je padajući i oba teže broju $3^{-\pi}$.

Iste korake potrebno je ponoviti s nekom drugom bazom.

Uočava se da eksponente možemo uzeti iz skupa realnih brojeva, a brojevi koje dobivamo su iz skupa pozitivnih realnih brojeva. Preostaje rasprava o bazi, što kada je baza jednaka 1 i kada je jednaka nuli te može li baza biti manja od nule?

Neka je baza a=0. Sada imamo primjer $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$, a to je nemoguće. Za a$< 0$ uzmimo sljedeći primjer: $-2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$, a to nije realan broj. Kada bi baza bila 1, imali bismo konstantnu funkciju. Dakle, baza mora biti strogo veća od nule i različita od 1. Time dolazimo do definicije eksponencijalne funkcije.

1.3 Definicija eksponencijalne funkcije

U srednjoškolskim udžbenicima, eksponencijalna funkcija definira se na sljedeći način ([7]):

Definicija 1: Neka je $a > 0$ i a≠1 realan broj. Funkcija

$$f(x) = a^x$$

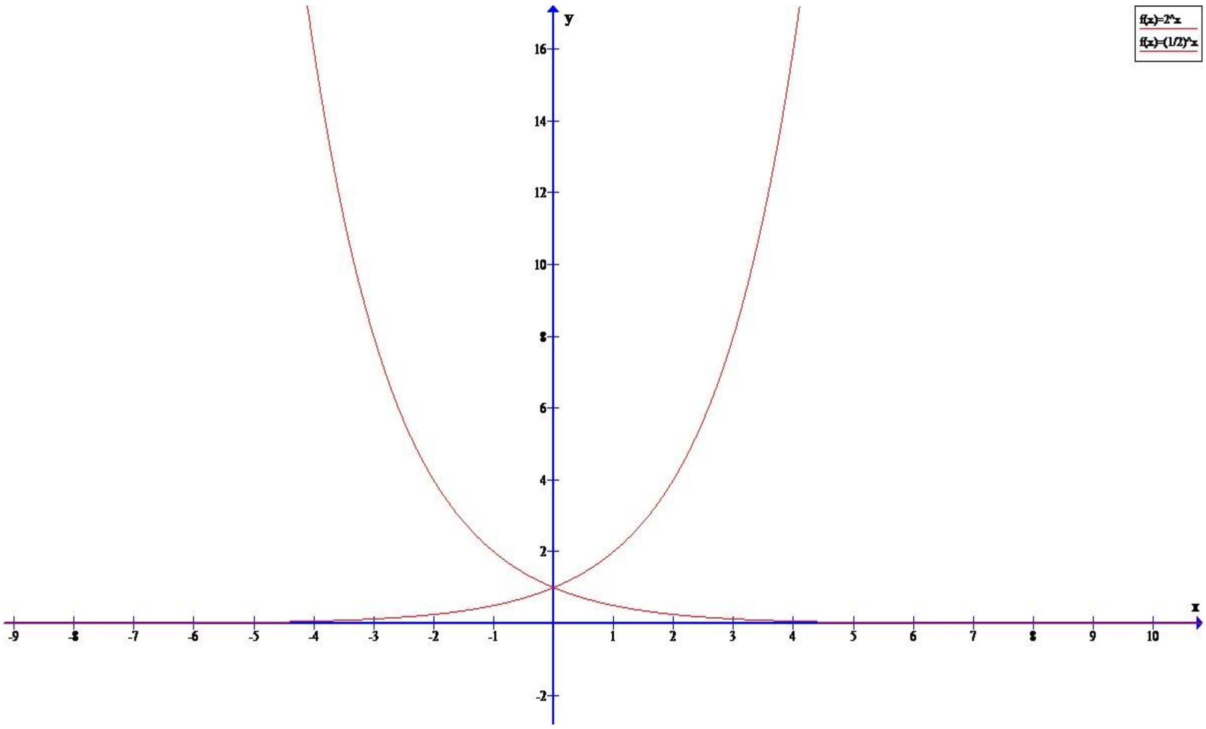
definirana za svaki realan broj x zove se eksponencijalna funkcija.

Definicija 2: Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika $f(x) = b^x$, gdje je b pozitivan realan broj različit od 1. Domena funkcije *f* je skup realnih brojeva, a slika funkcije *f* je skup pozitivnih realnih brojeva. ([8])

U udžbeniku za prirodoslovno-matematičke gimnazije eksponencijalna funkcija definira se i simbolima ([8]):

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ , f(x) = b^x , b > 0, b \neq 1.$$

Domena eksponencijalne funkcije je skup svih realnih brojeva. Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija je rastuća, dok je za $0 < a < 1$ ona padajuća (Slika 1).



Slika 1

Matematička definicija eksponencijalne funkcije ([9]):

Funkcija $x \mapsto a^x$ sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ zove se ***opća eksponencijalna funkcija*** baze a. Funkcija $x \mapsto a^x$ ima ova svojstva:

E-1. $a^x > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$

E-2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$

E-3. funkcija $x \mapsto a^x$ strogo raste ako je $a > 1$, odnosno strogo pada ako je $0 < a < 1$;

dakle $x < y \implies a^x < a^y$ ako je $a > 1$, odnosno

$a^x > a^y$ ako je $0 < a < 1$

E-4. za svaki realan broj $y_0 > 0$ postoji jedinstven realan broj x_0 takav da je $a^{x_0} = y_0$, tj., funkcija $x \mapsto a^x$ preslikava skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ na skup strogo pozitivnih realnih brojeva

E-5. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorem: Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Postoji jedna i samo jedna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s ovim svojstvima:

1. $f(1) = a$

2. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

3. ako je $a > 1$ *f* strogo raste, a ako je $0 < a < 1$ *f* strogo pada na $\mathbb{R}$

4. *f* preslikava $\mathbb{R}$ na $\langle 0, +\infty \rangle$

Dokaz ([9]):

Funkcija $E_a(x), x \in \mathbb{R}$ zadovoljava sve uvjete teorema pa je time egzistencija funkcije *f* dokazana.

Jednoznačnost. Pretpostavimo da funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstva 1. do 4. navedena u teoremu. Iz 1. i 2. imamo: $a = f(1) = f(1 + 0) = f(1) \cdot f(0) = a \cdot f(0)$,
tj. $a = a \cdot f(0)$. Odavde i iz $a \neq 0$ slijedi $f(0) = 1$.

Za $x \in \mathbb{R}$ imamo: $1 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) \cdot f(x)$ pa je

$f(x) \neq 0, f(-x) = \frac{1}{f(x)}, x \in \mathbb{R}$.

Nadalje je

$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0$ pa je $f(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

Iz 2. dobivamo

$f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = [f(x)]^2$

$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) \cdot f(x) = [f(x)]^3$ i općenito $f(nx) = [f(x)]^n, n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, $f(-nx) = \frac{1}{f(nx)} = \frac{1}{[f(x)]^n} \Rightarrow f(mx) = [f(x)]^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

Posebno (x=1) je $f(m) = a^m$ za svako $m \in \mathbb{Z}$, a to pokazuje da je *f* proširenje funkcije $m \mapsto a^m$ sa $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$.

Uzmemo li $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ nalazimo $a = f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^n$ što zajedno s $f(\frac{1}{n}) > 0$ daje

$$f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}.$$

No, tada je $f(\frac{k}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^k = (a^{\frac{1}{n}})^k = a^{\frac{k}{n}}$ $(k \in \mathbb{N})$, dakle $f(r) = a^r$ za $r \epsilon \mathbb{Q}$, r≥ 0.

Ako je $r < 0$ onda je $f(r) = \frac{1}{f(-r)} = \frac{1}{a^{-r}} = a^r$ pa je $f(r) = a^r$ $, r \epsilon \mathbb{Q}$.

To pokazuje da se funkcije f i E_a podudaraju na skupu racionalnih brojeva.

Uzmimo da je $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ postoji $r_n \in \mathbb{Q}$ takav da je $r_n < x < r_n + \frac{1}{n}$. Budući da funkcije f i E_a strogo rastu to je

$f(r_n) < f(x) < f(r_n + \frac{1}{n})$, $E_a(r_n) < E_a(x) < E_a(r_n + \frac{1}{n})$ $\Rightarrow$

$a^{r_n} < f(x) < a^{r_n + \frac{1}{n}}$, $a^{r_n} < a^x < a^{r_n + \frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$

$|f(x) - a^x| < a^{r_n + \frac{1}{n}} - a^{r_n} = a^{r_n} \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < a^x \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) \Rightarrow$

$|f(x) - a^x| < \frac{1}{n} \cdot (a-1) \cdot a^x$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ $\Rightarrow$ $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Ako je $0 < a < 1$, onda funkcije f i $E_a$strogo padaju, pa $r_n < x < r_n + \frac{1}{n}$ povlači
$f(r_n) > f(x) > f(r_n + \frac{1}{n})$, $E_a(r_n) > E_a(x) > E_a(r_n + \frac{1}{n})$ $\Rightarrow$

$|f(x) - a^x| < a^{r_n + \frac{1}{n}} - a^{r_n} = a^{r_n} \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < a^x \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) \Rightarrow$

$f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Stoga je $f = E_a$.

Q.E.D.

Poglavlje 2

Suvremena nastava matematike

2.1 Istraživački usmjerena nastava matematike

Suvremena nastava matematike usmjerena je na učenika. Teži obrazovanju temeljenom na istraživanju, te zahtijeva poučavanje u razredu koje se razlikuje od poučavanja u obliku „tradicionalne nastave". Obrazovanje temeljeno na istraživanju zahtijeva od učenika veću samostalnost. Time nastavnici s učenicima razvijaju uzajamno povjerenje i samim time potiču učenike da kreiraju i predstavljaju vlastite ideje. Dakako, takve promjene u nastavi ovise o razumijevanju nastavnika o istraživanju u nastavi. Osnovne škole obično zapošljavaju nastavnike koji poučavaju sve predmete te je zbog toga lakše provoditi istraživačku nastavu. Učiteljima razredne nastave u osnovnoj školi lakše je povezati ostale predmete s matematikom, primjerice likovna kultura može povezati s geometrijom u matematici (otkrivanjem prirodnih oblika i simetrija). Također se mogu razviti i logičke metode pohranjivanja informacija, kao što su grafikoni, sheme i dijagrami, crteži i slično. Takvu povezanost teže je provoditi predmetnim profesorima u srednjoj školi, iako bi rezultati bili mnogo bolji zbog dubljeg znanja profesora o vlastitom predmetu. *„Da bi se iskoristili bogati potencijali interdisciplinarnosti u srednjoj školi, čini se da je potrebno više napora."* Tijekom posljednjih pedeset godina jedna od glavnih inovacija na području matematike bilo je promicanje matematičkog učenja s razumijevanjem. Nastava ne smije biti ograničena na nastavnika koji predstavlja metodu izračuna, a učenici potom istu metodu ponavljaju deset puta bez razmišljanja. Učenje matematike mora biti aktivan i konstruktivan proces. Umjesto da nastavnik prikazuje učenicima činjenice i daje rješenje, on učenike vodi do otkrića rješenja problema kroz dobro osmišljene probleme. Učenici ne smiju biti *„pasivni primatelji gotove matematike"* već moraju sami strukturirati, obrađivati i prezentirati vlastite ideje. Učenici moraju dakle raditi sami, dok je uloga nastavnika da bude savjetnik koji pomaže učenicima, a pritom nastavnik bilježi ideje i rješenja učenika. ([16])

2.2 „Postavljanje pitanja“

Matematičko istraživanje započinje od pitanja ili problema, a odgovori se traže kroz promatranje i istraživanje. Tako bi i učeničko znanje trebalo krenuti od razmišljanja i pitanja. Zbog toga je potrebno učenike poticati da postavljaju pitanja. Isto tako, i nastavnici moraju učenicima postavljati pitanja. Zašto postavljati pitanja? Učenici mogu naučiti nešto bez prethodnog znanja i razumijevanja. Učenike je potrebno potaknuti da koriste postojeće znanje kako bi stvorili novo znanje i razumijevanje. Pitanjima učenike treba potaknuti da se koncentriraju na ključne koncepte. Učenicima treba pomoći da produbljuju svoje mišljenje od činjeničkog do analitičkog. No, pitanja koja postavljamo učenicima moraju imati svoj cilj i svrhu te svaki nastavnik mora znati postaviti pitanje ovisno o tome kakav se odgovor od učenika očekuje. Pitanja možemo podijeliti u dvije skupine: učinkovita i neučinkovita pitanja. Pitanja koje nastavnici pitaju moraju biti unaprijed planirana tako da se odnose na ciljeve nastavne cjeline koja je obrađena. Pitanja ne smiju imati samo jedan točan odgovor, već moraju dopuštati više mogućih odgovora. Prilikom postavljanja pitanja, nastavnik mora dati dovoljno vremena učeniku da odgovori na pitanje te nastavnik ne bi trebao sam odgovarati na svoje pitanje. Ukoliko učenik pogrešno odgovori na postavljeno pitanje, nastavnik taj odgovor treba prihvatiti i kasnije raspraviti s ostalim učenicima o točnosti tog odgovora. Također, kad učenik pogrešno odgovori na pitanje, nastavnik treba prihvatiti odgovor te ostale učenike u razredu pitati slažu li se s tom tvrdnjom. Ukoliko učenik točno odgovori na pitanje, možemo učenike pitat da objasni zašto da bi bili sigurni da je učenik razumio to što je rekao. Pitanja koja nastavnici postavljaju učenicima moraju biti otvorenog tipa, npr. možeš li mi dati primjer.., kako bismo to mogli promijeniti.., je li ta tvrdnja uvijek točna.., objasni zašto…, navedi razlog… i slično. Pitanjima moramo učenike poticati na učenje s razumijevanjem. ([22])

Poglavlje 3

Modeliranje

3.1 Suradničko- timski rad

Kako postati dobar učitelj, pitanje je koje muči svakog učitelja. Učitelji moraju uzeti u obzir razvojne mogućnosti i sposobnosti svakog učenika. Moraju poticati učenike na izražavanje vlastitog mišljenja, postavljanje pitanja i raspravljanje. Pri tome se promiču vrijednosti međusobnog poštovanja te poštovanja tuđeg mišljenja, odgovornosti, brižnosti, marljivosti i ljubavi u cijelom kolektivu. Uz to, učitelj mora voditi računa da potiče učenikovu samostalnost i inicijativu.

Dobar će učitelj svakom učeničkom odgovoru pridodati pitanje: *„Zašto?"* da bi se upoznao s načinom učenikova mišljenja i s izvorom mogućih pogrješaka. Jednako tako naučit će učenike da neprekidno postavljaju pitanje: *„Zašto?"*. Time može spriječiti najčešće pogrješke u dječjem zaključivanju i podržavati njihovu radoznalost. Također, svaki se učitelj pita što učiniti da bude još djelotvorniji i uspješniji u radu. Kako postići da učitelj bude zadovoljan svojim radom i učincima, ali istodobno da i njegovi učenici budu zadovoljni i uspješni?

Model uspješnog rada u školama koji zadovoljava navedene postavke je timsko-suradničko učenje. Učitelj će organizirati učeničke aktivnosti čije će ostvarivanje pridonijeti razumijevanju i trajnom zapamćivanju nastavnog gradiva. Takav pristup je posljedica spoznaje psihologije učenja koja nas upućuje da pojedinac nauči 10% od onoga što čuje, 30% od onoga što vidi, 50% od onoga što čuje, vidi i ponovi svojim riječima, a čak 90% od onoga što vidi, čuje i učini. ([11])

Djeca već u osnovnoškolskom obrazovanju uče matematiku kroz razne didaktičke igre. Kroz igru ponavljaju i utvrđuju naučeno te u igri razvijaju koncentraciju i suradnju s drugima. ([12])

„Igrajući se, dijete uči voljeti; voleći, ono radi što voli." (E. Fromm)

Učitelj didaktičke igre provodi kroz aktivnosti. Takve aktivnosti kod djece razvijaju stvaralačke sposobnosti i mišljenje. Najčešći oblik rada aktivnosti je grupni, a tek ponekad individualni. Na taj način učitelj aktivira introvertne i slabije učenike. Introvertni učenici se bolje snalaze, a slabiji učenici postižu bolje rezultate. Bolji učenici pomažu slabijima. Aktivnost svih učenika je maksimalna. Osnovni motiv aktivnosti je osjećanje vlastite kompetentnosti. Istraživanje i učenje sudjelovanjem u aktivnosti snažno pokreće učenikove emocije što je uzrok trajnoga pamćenja znanja i njegovoga prisjećanja po potrebi. Ako je timski rad dobro organiziran, učenici rade u prijateljskom ozračju sigurni u sebe i pomoć svojih prijatelja, ne boje se pogrješaka, ne osjećaju prisilu, preuzimaju odgovornost za vlastiti rad i učinke te za rad i učinke cjelokupnog tima. Bez obzira na specifične obrazovne zadaće radi kojih je tim osnovan, uspješan timski rad pridonosi ostvarivanju mnogih odgojnih zadaća, ponajprije međusobnom povezivanju i uspostavljanju dobrih odnosa među učenicima, razvoju socijalnih vještina i odgovornosti za vlastiti izbor i radne navike. Raspravljajući o učincima svakog tima, informacije se razmjenjuju i uspoređuju pa učenici djelotvorno nauče ono o čemu su sami istraživali. Važno je naglasiti da je učenje radosno i ne naporno, što dodatno pridonosi pozitivnim učincima. ([14])

3.2 Matematičko modeliranje

Matematičko modeliranje u školi je primjer integriranog učenja. Integracija znači spajanje nekih dijelova u cjelinu, povezivanje, ujedinjavanje (B. Klaić: Rječnik stranih riječi). Integracija u nastavi je povezivanje i istodobno ostvarivanje zajedničkoga u različitim odgojno- obrazovnim područjima, a podrazumijeva povezivanje dijelova sa zajedničkim ciljevima u harmoničku cjelinu. To je učenje u kojem učenik može jednu temu provesti kroz više područja ili predmeta. Svrha integracije je stjecanje, širenje i produbljivanje cjelovitog pogleda na znanost ili uopće na svijet. Uloge takvog učenja su: razvijanje sposobnosti zapažanja i otkrivanja raznolikoga stvaralačkog pristupa temi, razvijanje stvaralačke mašte učenike, razvijanje sposobnosti uspoređivanja, kritičkog mišljenja i logičkog zaključivanja. Važno obilježje takvog rada je aktivno učenje. Ono osigurava visok stupanj samostalnosti i nadzora nad organizacijom tijekom aktivnosti.

Matematičko modeliranje je pronalaženje i provjera matematičkog modela za neki realan objekt ili proces. ([13]) U svakodnevnom jeziku, model ima mnoga značenja: model automobila, (modni) model, dječja igračka i dr. U odabrane situacije unosimo načela i principe matematike i tako prevodimo realnost u matematičku okolinu. Neka sniženja vrijednosti robe na tržištu možemo prikazati eksponencijalnim padom, a razmnožavanje bakterija modeliramo eksponencijalnim rastom. Kod modeliranja oblikujemo pretpostavke, generaliziramo, interpretiramo i razvijamo kritički odnos prema vrednovanju rezultata. Interpretacija rješenja je često zahtjevnija s gledišta realne situacije od gledišta matematike. Modeliranjem u nastavi želi se postići da učenik sam formulira hipoteze, mijenja ih, pojednostavi pretpostavke. Svaki učenik trebao bi moći prepoznati i imenovati varijable, parametre i konstante te koristiti razne prikaze (tablični, grafički i dr.). Matematičkim modelima opisujemo matematičke objekte ili pojave iz stvarnog svijeta, primjerice: geometrijski modeli tijela, model hiperboličke ravnine: Poincareov, Kleinov, geografske karte, fizikalni zakoni, modeli kojima predočujemo matematičke pojmove: brojevni pravac, model površine, model kruga (za interpretaciju razlomaka), model novca. Matematički modeli mogu biti:

1) Linearni i nelinearni
2) Deterministički i stohastički
3) Statički i dinamički
4) Diskretni/diskontinuirani i kontinuirani
   Kontinuirani modeli prikazuju se kao funkcija vremena, f(t) i varijable se mijenjaju tijekom vremena
5) Deduktivni, induktivni i tzv. 'plivajući'

Problemi matematičkog modeliranja često se svrstavaju u modele crne kutije i modele bijele kutije. Kada su veze među varijablama nepoznate govorimo o modelu crne kutije. ([21])

Nacionalni okvirni kurikulum predviđa da se tijekom matematičkog obrazovanja učenici bave matematičkim problemima koji proizlaze iz svakodnevnih, stvarnih i smislenih situacija i time uspostavljaju poveznice između matematike i svakodnevnoga života. Time će imati prilike primijeniti matematiku u proširivanju i primjeni vlastitih znanja, vještina i sposobnosti. Primjerene matematičke aktivnosti i istraživanja izvodit će samostalno i suradnički što će ih osposobiti za pristup i rješavanje matematičkih problema. Matematičko obrazovanje učenicima omogućuje postavljanje i rješavanje matematičkih problema, potičući ih pritom na istraživanje, sustavnost i kreativnost. Učitelj mora dati dobre primjere i probleme za modeliranje te prilagoditi zadatke mogućnostima svakog učenika. Problemski zadatak je svaki zadatak ili aktivnost koji nema propisanu, poznatu ili zapamćenu metodu rješavanja, odnosno, onaj kojeg učenik takvim ne doživljava. Problemski zadaci u nastavi odnose se na matematički sadržaj koji učenik uči, zahtijevaju od učenika objašnjenje i argumentiranje svojeg odgovora i metode. Postoje razne metode rješavanja problemskih zadataka. George Polya (1887- 1985) u svome djelu „How to solve it?“ dao je četiri koraka rješavanja problema:

1. Razumjeti zadatak

2. Napraviti plan

3. Provesti plan

4. “Pogledati unazad” / Osvrnuti se unazad

Poglavlje 4

Modeliranje eksponencijalnom funkcijom

U ovom poglavlju cilj nam je dati primjere zadataka kroz aktivnosti za učenike drugog razreda srednje škole u kojima učenici primjenjuju znanje o eksponencijalnoj funkciji te potičemo njihovu kreativnost.

Prema nastavnom planu i programu, učenici se u drugom razredu srednje škole susreću s pojmom eksponencijalne funkcije. Prema *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* drugi razred srednje škole pripada 4. odgojno- obrazovnom ciklusu. NOK određuje svrhu učenja i poučavanja matematike u osnovnoj i srednjoj školi, ulogu matematike u sustavu odgoja i obrazovanja, opće ciljeve matematičkog obrazovanja, očekivana učenička postignuća na kraju svakog od četiri odgojno-obrazovna ciklusa.

Prema *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*, iz područja *Algebra i funkcije*, od učenika se očekuje da će:

• opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti iz jednoga od navedena četiri oblika u drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)

• prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva

• primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu

Uz to, unutar matematičkih procesa, područje *Rješavanje problema i matematičko modeliranje*, od učenika se očekuje da će:

• postaviti i analizirati problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, riješiti ga, te protumačiti i vrjednovati rješenje i postupak

• modelirati situacije i procese iz drugih odgojno-obrazovnih područja te svakodnevnog osobnog, profesionalnog i društvenog života.

Cilj modeliranja eksponencijalnom funkcijom jest povezivanje sa sadržajima iz svakodnevnog života, ali i ostalim nastavnim predmetima kao što su fizika i biologija.

Eksponencijalne funkcije su vrlo prisutne u realnim situacijama.

Modeliranje se očituje u, primjerice: prirastu stanovništva, kamatnom računu, radioaktivnosti. Također, još neki primjeri iz svakodnevnog života koji se modeliraju eksponencijalnom funkcijom su: pad vrijednosti automobila, kojom se brzinom širi neka zarazna bolest, rast neke populacije na određenom području, trajanje zaliha resursa (vode, hrane, energenata).

Primjer 1.a: Motivacija

Mladica drveta visoka je 40 cm. Nakon toga:

a) Mjesečno naraste 6 cm
b) Mjesečno naraste 15 %

Koliko drvo naraste od kraja 4. do kraja 5. mjeseca?

Nakon koliko se mjeseci visina drveta utrostruči?

Rješenje:

1. Podatke o visini drveta unesemo u tablicu

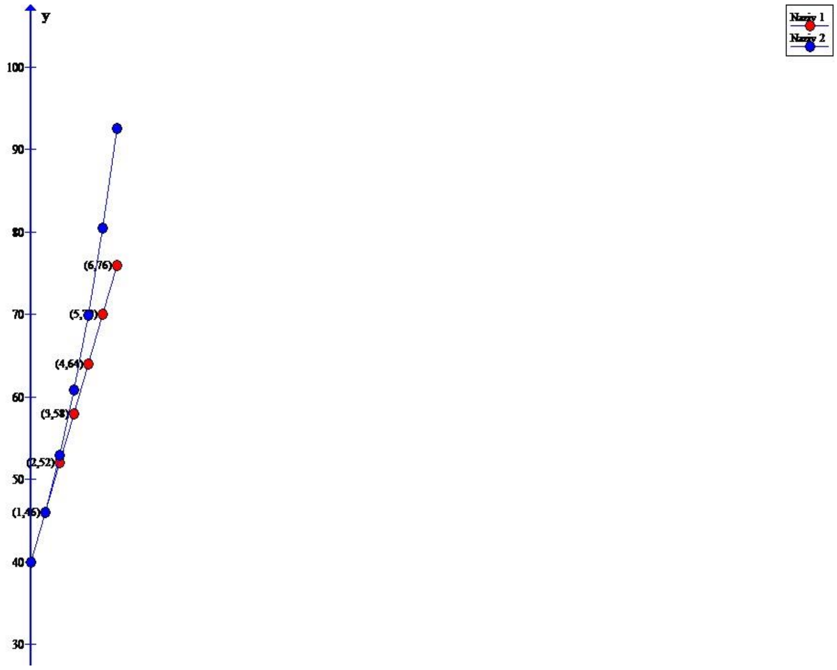
na početku	nakon 1 mjeseca	nakon 2 mjeseca	nakon 3 mjeseca	nakon 4 mjeseca	nakon 5 mjeseci	nakon 6 mjeseci

40 cm	46	52	58	64	70	76
40 cm	46	52.9	60.835	69.96025	80.45429	92.52243

2. Prikažimo grafički povećanje visine biljke s povećanjem broja mjeseci

x - os: broj mjeseci

y - os: visina drveta



3. Usporedimo dobivene grafove. U čemu je razlika?

• funkcija koja opisuje povećanje visine drveta za 6 cm je linearna funkcija – u jednakim razmacima, uvećanje je jednako; broj mjeseci se uveća za 1, visina biljke se uveća za 6 cm

• funkcija koja opisuje povećanje visine drveta 15 % je eksponencijalna funkcija - u jednakim razmacima, faktor je jednak, broj tjedana se uveća za 1, visina se uveća 1.15 puta

4. Pretpostavimo da je početna visina drveta a. Svaki mjesec visina se poveća 15 %. Popunimo tablicu.

početak	1.mjesec	2.mjesec	3.mjesec	4.mjesec
a	a·1.15	a·1.15·1.15	a·1.15·1.15·1.15	a·1.15·1.15·1.15·1.15

5. Funkcija koja prikazuje ovisnost povećanja visine s povećanjem broja mjeseci

Funkcija prikazuje vezu između visine drveta u ovisnosti o broju mjeseci.

Napišimo funkciju $B(x)$ koja opisuje visinu drveta.

Dakle,

$$B(x) \;=\; 40 \;\cdot\; (1.15)^{x}$$

Tražena funkcija je **EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA**.

Provjerimo vrijedi li ova formula za svaki x, $x\epsilon\mathbb{R}$, odnosno odredimo čemu je jednako $B(x+1)$. Imamo:

$B(x+1) = \; 40 \;\cdot\; (1.15)^{x+1} = 40 \cdot (1.15)^{x} \cdot 1.15^{1} = B(x) \cdot 1.15$.

Dakle, dobivena formula vrijedi za svaki $x\epsilon\mathbb{R}$.

Isti primjer mogli smo učenicima zadati tablicom:

na početku	nakon 1 mjeseca	nakon 2 mjeseca	nakon 3 mjeseca	nakon 4 mjeseca	nakon 5 mjeseci	nakon 6 mjeseci
40 cm	46	52	58	64	70	76
40 cm	46	52.9	60.835	69.96025	80.45429	92.52243

pri čemu bi učenici trebali odrediti pravilo po kojem se mijenja visina drveta u oba slučaja.

4.1 Problem promjene broja stanovnika

Broj stanovnika svijeta predstavlja ukupan broj živih ljudi na Zemlji u određenom trenutku. Prema procjenama koje je objavio Ured SAD za popis stanovništva, stanovništvo Zemlje je doseglo broj od 7,49 milijardi. Svjetska populacija bilježi stalan rast od završetka perioda Kuge i Velike gladi. Stopa rasta svoj vrhunac je imala 1963. godine, godišnje povećanje je iznosilo čak 2.2%. Od 80-ih godina prošlog stoljeća taj broj raste vrlo brzo. Godišnji prirast stanovništva Zemlje iznosi 1.7%. Pitamo se što se događa s brojem stanovnika Hrvatske? No, prije nego se osvrnemo na stanovništvo Hrvatske, pogledajmo što se događa sa zemljama koje su površinom približno slične Hrvatskoj, kao što su npr. Austrija i Togo, pri čemu smo uzeli dvije države različite razvijenosti. ([20])

AKTIVNOST 1: „**Stanovništvo Austrije**“

Cilj aktivnosti: učenici će grupirajući podatke otkriti model promjene broja stanovništva u Austriji

Oblik rada: suradničko- timski rad u tročlanim skupinama

Potrebni materijal: nastavni listić za svakog učenika (Prilog 1), kalkulator

Tijek aktivnosti: Učenike rasporedimo u tročlane skupine te svakoj skupini podijelimo nastavne listiće. Svaki učenik dobije nastavni listić te ga rješava zajedno sa članovima svoje skupine. Dajemo uputu učenicima da mogu „raspodijeliti posao“ tamo gdje je to potrebno. Dok učenici rješavaju nastavne listiće, nastavnik obilazi svaku skupinu provjeravajući kako se snalaze i pomaže ukoliko je to potrebno. Nakon što svi učenici riješe nastavni listić, s učenicima provjeravamo do kojih zaključaka su došli.

PRILOG 1:

U tablici je prikazan broj stanovnika (u tisućama) Austrije tijekom 20-ak godina ([19]):

godina	1990.	1991.	1992.	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.	1998.	1999.
broj st.	7 678	7 755	7 841	7 919	7 936	7 948	7 959	7 968	7 977	7 992
godina	2000.	2001.	2002.	2003.	2004.	2005.	2006.	2007.	2008.	2009.
broj st.	8 012	8 042	8 082	8 118	8 169	8 225	8 268	8 295	8 322	8 341
godina	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.	2016.	2017.	2018.	2019.
broj st.	8 361	8 389	8 426	8 477	8 544	8 630	8 740			

1. Što uočavate u tablici? Što se događa s brojem stanovnika?

2. Mijenja li se broj stanovnika po nekom pravilu? Pokušajte grupirati podatke po godinama, što se događa s brojem stanovnika svake godine, svakih 5 godina, svakih 10 godina?

3. Zapišite prethodno uočeno pravilo matematički.

4. Popunite prazna mjesta u tablici koristeći prethodno pravilo.
5. Koliko stanovnika će biti u Austriji 2030. godine?

Kako se ova aktivnosti provodi nakon što se obradi pojam eksponencijalne funkcije i svojstva eksponencijalne funkcije, učenici će uočiti da se podaci u tablici uočavaju te će pretpostaviti da se radi o eksponencijalnoj funkciji. Ukoliko učenici ne primijete odmah da se radi o eksponencijalnom funkciji, možemo dati uputu da izračunaju prve, odnosno druge podijeljene razlike, odnosno da provjeri radi li se o linearnoj, odnosno kvadratnoj funkciji. Nakon što učenici zaključe da se radi o eksponencijalnoj funkciji, tražit će zajednički faktor danih podataka. Pogledajmo što se događa prilikom rješavanja drugog zadatka. Krenemo li redom računati kvocijente brojeva, dobit ćemo konstantan omjer za prve tri godine:

$$\frac{broj\ stanovnika\ 1991.}{broj\ stanovnika\ 1990.} = \frac{7755}{7678} \approx 1.01$$

$$\frac{broj\ stanovnika\ 1992.}{broj\ stanovnika\ 1991.} = \frac{7841}{7755} \approx 1.01$$

$$\frac{broj\ stanovnika\ 1993.}{broj\ stanovnika\ 1992.} = \frac{7919}{7841} \approx 1.01$$

Ukoliko učenici nakon prva tri omjera stanu s računanjem i pretpostave da je i dalje isti omjer, zaključit će da se broj stanovnika Austrije godišnje poveća za približno 1%, odnosno da se broj stanovnika Austrije mijenja prema sljedećem pravilu:

$f(t) = 7678 \cdot 1.01^t$, pri čemu je *t* broj godina proteklih od početka mjerenja.

To pravilo ne daje precizne podatke jer već sljedeći omjer nije jednak 1.01 te bi već 2016. godine u Austriji bilo približno 9 944 000 stanovnika, što vidimo da nije ni približno jednako broju u tablici. Istim modelom, 2030. godine bi Austrija brojila 11 431 000 stanovnika. Analognom provjerom za podatke svakih 5 godina ne dobivamo isti kvocijent te učenici ne mogu zaključiti što se događa s brojem stanovnika svakih 5 godina. Ako uzmemo u obzir samo podatke svakih 10 godina, odnosno broj stanovnika 1990., 2000. i 2010. godine, dobivamo sljedeće:

$$\frac{broj\ stanovnika\ 2000.}{broj\ stanovnika\ 1990.} = \frac{8012}{7678} \approx 1.04$$

$$\frac{broj\ stanovnika\ 2010.}{broj\ stanovnika\ 2000.} = \frac{8361}{8012} \approx 1.04\ .$$

Dakle, svakih 10 godina broj stanovnika Austrije se poveća približno 4%, odnosno stanovništvo Austrije mijenja se po modelu danom sljedećim pravilom:

f(t)=7678$\cdot 1.04^{\frac{t}{10}}$, pri čemu je t broj godina proteklih od početka mjerenja.

Najviše poteškoća prilikom računanja očekujemo kod određivanja eksponenta $\frac{t}{10}$ jer bi učenici mogli zanemariti činjenicu da su koristili podatke u razmacima od 10 godina. Tom formulom učenici će dobiti da će Austrija 2030. godine imati približno 9 milijuna stanovnika.

Dakle, bitno je s učenicima provjeriti i usporediti rješenja te također diskutirati o dobivenim rješenjima. Da li je moguće da Austrija 2030.godina ima približno 11 milijuna stanovnika ili je ipak realniji broj od 9 milijuna stanovnika?

Uzevši u obzir dio Jadranskog mora koje pripada Republici Hrvatskoj, tada površini Republike Hrvatske otprilike odgovara površina Austrije. Današnja je Austrija mala savezna republika, no nekoć je ona bila jedno od najvećih carstava u Europi. Ubraja se među razvijene zemlje svijeta. Unazad 30 godina Austrija bilježi stalan porast broja stanovnika. Kad su se 1989. godine otvorile granice istočne Europe, Austrija je postala prvo pribježište tisućama bjegunaca. Uz to, danas sve više ljudi dolazi iz svojih država tražeći posao te tako Austrija ima i mnogo radnika- imigranata, što je također razlog porasta broja stanovnika. Između ostalog, Austrija je jedan od vodećih europskih proizvođača nafte te kombinirajući tržišna načela s visokim stupnjem državnoga nadzora, neprekidno se razvija ekonomija, održavajući inflaciju i nezaposlenost na niskoj razini. Prema procjenama, do 2030. godine u Austriji se očekuje oko 9 milijuna stanovnika. Kako je spomenuto, Austrija je razvijena zemlja u kojoj je osnovno obrazovanje besplatno i obvezno, a postoje i velike mogućnosti daljnjega višega obrazovanja i obrazovanja za odrasle te je razina pismenosti iznimno visoka.

S druge strane, Togo je nerazvijena zemlja zapadne Afrike, od zemalja svijeta površinom je najsličnija Hrvatskoj, u kojoj je osnovnoškolsko obrazovanje besplatno, ali je postotak upisanih u srednje škole vrlo mali, što se odražava i na razinu pismenosti. Za razliku od Austrije, zdravstveni i stambeni uvjeti su vrlo loši. Još uvijek postoji opasnost od bolesti kao što su žuta groznica, malarija te hepatitis A i B. No, stopa nataliteta i dalje je vrlo visoka. Najviše je zaposlenih u poljoprivredi te u industriji i rudarstvu. Stanovništvo Toga živi od izvoza fosfata i poljoprivrednih proizvoda. Od poljoprivrednih proizvoda izvoze kakao, kavu, pamuk, kukuruz, rižu i slatki krumpir. Pogledajmo što se događa s brojem stanovnika. ([1])

AKTIVNOST 2: **„Stanovništvo države Togo“**

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti model promjene broja stanovništva države Togo

Oblik rada: suradničko- timski rad u paru

Potrebni materijal: nastavni listić za svakog učenika (Prilog 2), kalkulator

Tijek aktivnosti: Podijelimo učenike u parove kako sjede u klupama. Svaki učenik dobije svoj nastavni listić. Nakon što svi učenici riješe nastavni listić, s učenicima provjeravamo rješenja.

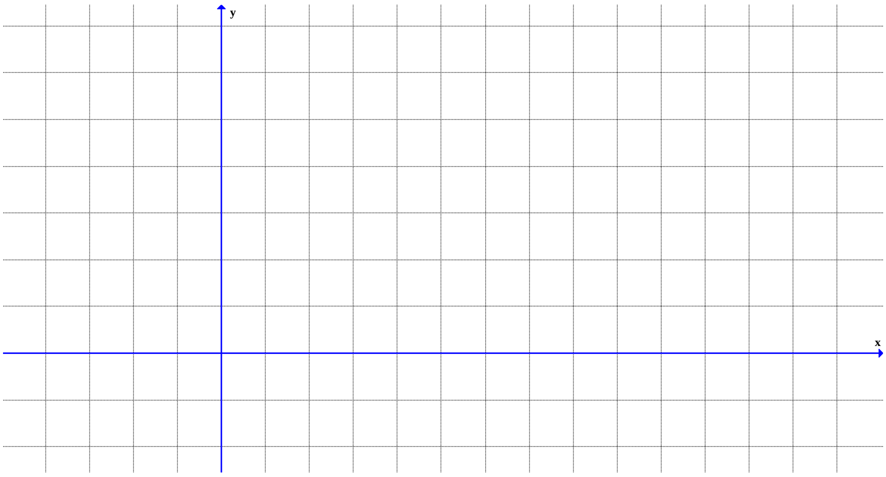
PRILOG 2:

U tablici je prikazana procjena broja stanovnika (u tisućama) države Togo od 2004. godine do 2016.:

godina	2004.	2005.	2006.	2007.	2008.	2009.	2010.
broj stanovnika	5 040	5 215	5 397	5 585	5 779	5 980	6 191
godina	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.	2016.	2017.
broj stanovnika	6 404	6 627	6 858	7 097	7 344	7 606	

1. Što uočavate u tablici? Što se događa s brojem stanovnika?

2. Dane podatke prikažite grafički u danom koordinatnom sustavu. Koju funkciju uočavate?



3. Opišite promjenu broja stanovnika riječima.

4. Zapišite prethodno uočeno pravilo matematički.

5. Popunite prazno mjesto u tablici koristeći prethodno pravilo.
6. Koliko stanovnika će biti u Togu 2030. godine?

Brojevi u tablici rastu. Ucrtavanjem odgovarajućih točaka koordinatni sustav, učenici uočavaju da promjenu broja stanovnika najbolje opisuje eksponencijalna funkcija. Analognim postupkom kao u prethodnom zadatku dolaze do zaključka da se broj stanovnika Toga povećava približno 3% godišnje, odnosno model promjene broja stanovnika Toga dan je pravilom:

$f(t) = 5040 \cdot 1.03^t$, gdje je *t* broj godina proteklih od početka mjerenja.

Dobivenim modelom Togo će 2030. godine imati približno 10 870 000 stanovnika.

Dakle, uočimo da imamo dvije države, jednu razvijenu, drugu nerazvijenu, kojima broj stanovnika stalno raste. Štoviše, matematičkim modelima smo opisali promjenu broja stanovnika u obje države. No, moramo se zapitati postoje li vanjski čimbenici koji utječu na promjenu broja stanovnika? Naravno, postoje, i matematički ne možemo opisati utjecaj vanjskih čimbenika kao što su stope nataliteta i mortaliteta, stopa nezaposlenosti, razne epidemije. Sve to utječe na ljudska kretanja. S druge strane matematičkim modelom možemo procijeniti broj stanovnika idućih godina, uz pretpostavku da će broj stanovnika i dalje rasti jednakim prirastom.

Broj stanovnika u ovim državama se mijenja eksponencijalno, a tako se mijenja i broj stanovnika na Zemlji. To znači da slijede pravilnost danu formulom:

$$a \cdot b^{k \cdot x},$$

gdje je k konstanta različita od 0. Brojnost raznih populacija također se ponaša slično. U prethodnim primjerima smo mogli odrediti bazu grupiranjem podataka te smo lako mogli zatim i odrediti konstantu *k*. Ako iz danih podataka ne možemo odrediti bazu, tada možemo izabrati bilo koju bazu. Za bazu se najčešće bira broj *e*.

Zakon promjene baze:

Ako vrijedi $b^x = a^{kx}\ \forall x,$ tada je $b = a^k$. Kako su a i b poznati, moramo odrediti konstantu *k*. Konstantu *k* odredit ćemo logaritmiranjem na sljedeći način: $\log b = k \cdot \log a$, odnosno $k = \frac{\log b}{\log a}$.

4.2 Baza eksponencijalne funkcije

Oznaku *e* uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine, vjerojatno inspiriran riječju „eksponent“. On je 1737. dokazao da je *e* iracionalan, a da je transcedentan dokazao je 1873. godine Charles Hermite. Taj broj, čija je približna vrijednost 2.7182818284590, kao baza eksponencijalne funkcije pojavljuje se u vrlo raznolikim prirodnim zakonima, kao što su razne vrste prirodnog prirasta. Nezaobilazne su takve funkcije i u optici, akustici, elektronici i dinamici. ([7])

Broj *e* se definira kao $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i jednak je:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Leonhard Euler (1707.–1783.) je prvi koji je pojam funkcije postavio kao temeljni matematički pojam. 1748. godine Euler je u svom radu „Introductio in Analysin infinitorum“ objavio sve ideje te je dokazao da je $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ i da je $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Euler je procijenio *e* na čak 18 decimalnih mjesta. Funkcije je razvrstao po raznim kriterijima, primjerice na algebarske i transcendentne. Euler je bio jedan od prvih matematičara koji su se bavili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a smatra se začetnikom opće teorije diferencijalnih jednadžbi. ([3])

Pogledajmo neke primjene u kojima je “matematički model” funkcija oblika

$$f(t) = f_0 \cdot e^{k \cdot t}.$$

U tome je zapisu f_0 početno stanje, stanje na početku mjerenja ($t = 0$), dok je $f(t)$ stanje nakon vremena t. Broj k, $k \neq 0$ je konstanta koja se uglavnom određuje eksperimentalno. Ako je $k > 0$, funkcija f opisuje (prirodni) rast, a ako je $k < 0$, (prirodni) pad u nekom procesu.

Upravo takvim modelom možemo opisati promjenu broja stanovnika u Hrvatskoj. Prema podacima *Državnog zavoda za statistiku* ([20]) imamo sljedeće popise stanovništva Republike Hrvatske:

godina	1991.	2004.	2015.
broj stanovnika	4 784 265	4 437 460	4 190 669

Nastavnik može primjer promjene broja stanovnika u Hrvatskoj prikazati uz pomoć ranije pripremljenih materijala, kao što je PowerPoint prezentacija i slično. Uočimo da razmak u godinama nije jednak te moramo pretpostaviti da se radi o eksponencijalnoj ovisnosti. Iz toga razloga se uzima baza *e*.

Uočavamo da broj stanovnika unazad 30-ak godina pada te ćemo pretpostaviti da će taj broj i dalje jednako padati. Kako broj stanovnika pada, znamo da konstanta *k* mora biti negativnog predznaka. Odredimo sada tu konstantu.

Početna vrijednost, f_0, je 4 784 265, pri čemu nam je godina 1991. početak mjerenja. Nakon t=10 godina imamo vrijednost od f(10)= 4 437 460 stanovnika. Iz toga nam slijedi sljedeća jednakost:

$$4\,437\,460 = 4\,784\,265 \cdot e^{-10\cdot k}$$

$$e^{-10\cdot k} = \frac{4\,437\,460}{4\,784\,265} \text{ te je}$$

$$-10\cdot k = \ln\frac{4\,437\,460}{4\,784\,265}, \text{ odnosno dobivamo da je}$$

$$k = -0.007525$$

Tako smo došli do zakonitosti po kojoj se tijekom vremena mijenja broj stanovnika u našoj zemlji:

$$f(t) = 4\,784\,265 \cdot e^{-0.007525\cdot t}.$$

Sada možemo odrediti kada će broj stanovnika biti upola manji od broja stanovnika koji je bio 1991. godine.

Iz $\frac{1}{2} \cdot 4\,784\,265 = 4\,784\,265 e^{-0.007525\cdot t}$ slijedi $\ln 0.5 = -0.007525t$ odnosno $t \approx 92$ godine. Dakle, ako prihvatimo pretpostavku da se broj stanovnika Republike Hrvatske smanjuje po eksponencijalnom zakonu, tada bi 2083.godine u Republici Hrvatskoj bilo nešto više od 2 milijuna stanovnika, točnije 2 392 132 stanovnika. Kod ovog primjera možemo učenike potaknuti na razmišljanje. Je li dobro to što broj stanovnika pada i koji je uzrok tome? Uglavnom ljudi odlaze kako bi radili izvan Hrvatske. Pitamo se ima li država dovoljno resursa da to promijeni? Mogu li naši učenici promijeniti to jednog dana? Uz velike tvrtke i korporacije, postoje i oni „mali ljudi". Jedan takav primjer su mladi ljudi koji izrađuju videoigre i razne aplikacije za mobitele. Također, učenici takav problem mogu povezati i s drugim predmetima, kao što je geografija. Isticanje korelacije učenicima znatno olakšava shvaćanje međusobne povezanosti svih nastavnih predmeta i olakšava njihovu primjenu u različitim područjima života i rada.

4.3 Problem potrošnje resursa

Uzmemo li u obzir činjenicu da se broj stanovnika Zemlje stalno povećava, to nas dovodi do toga da se i više troše resursi. Ljudi mnoge svoje resurse troše eksponencijalnom brzinom. Potrošnja tih resursa (vode, hrane, energenata) ima konstantnu ili rastuću godišnju stopu rasta. Krenimo od jedinične potrošnje i pretpostavimo da se ona u nekom vremenskom intervalu udvostručuje, tada imamo sljedeći niz:

1	2	4	8	16	32

Iz prethodnog niza možemo uočiti da je potrošnja u zadnjem intervalu veća od ukupne potrošnje u prethodnim intervalima (1+2+4+8+16=31 <32), što vrijedi i općenito:

$$2^n - 1 < 2^n.$$

Ako pretpostavimo da se potrošnja nekog resursa udvostručuje svakih 10 godina, tada imamo godišnje povećanje od 7%. S druge strane, ako potrošnja nekog resursa raste po stopi od 7% godišnje, tada ćemo ga u idućih 10 godina potrošiti više nego u cijeloj prethodnoj povijesti. To je posljedica eksponencijalnog rasta potrošnje, koju možemo uvidjeti iz niza 1, 2, 4, 8, 16, 32 za koji vrijedi 1+2+4+8+16=31 <32. ([15])

AKTIVNOST 3: „Potrošnja resursa"

Cilj aktivnosti: učenici će utvrditi smislenost i valjanost danih matematičkih tvrdnji

Oblik rada: individualni rad učenika

Potrebni materijal: PowerPoint prezentacija, računalo, projektor, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Nastavnik na prezentaciji prikaže prethodni tekst u dva dijela: a) Ako pretpostavimo da se potrošnja nekog resursa udvostručuje svakih 10 godina, tada imamo godišnje povećanje od 7%.

b) Ako potrošnja nekog resursa raste po stopi od 7% godišnje, tada ćemo ga u idućih 10 godina potrošiti više nego u cijeloj prethodnoj povijesti.

Zatim nastavnik postavlja pitanje učenicima imaju li smisla prethodne tvrdnje te daje uputu učenicima da pokušaju matematički dokazati istinitost prethodno navedenih tvrdnji. Tijekom rješavanja, nastavnik obilazi učenike i pomaže im ukoliko je to potrebno. Nakon što svi učenici riješe zadatak, nastavnik na prezentaciji pokazuje rješenja.

Mogući tijek aktivnosti učenika:

Imamo zadano da se potrošnja nekog resursa udvostručuje svakih godina. Dakle, radi se o eksponencijalnoj funkciji zadanoj formulom:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{10}}.$$

Pogledajmo što se događa iduće godine, odnosno čemu je jednako $N(t+1)$. Imamo:

$$N(t+1) = N_0 \cdot 2^{\frac{t+1}{10}} = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{10}+\frac{1}{10}} = \underbrace{N_0 \cdot 2^{\frac{t}{10}}}_{N(t)} \cdot 2^{\frac{1}{10}} = N(t) \cdot 2^{\frac{1}{10}}$$

Dakle, iz toga slijedi da je $\frac{N(t+1)}{N(t)} = 1.071$, odnosno

$$N(t+1) = N(t) \cdot 1.071 = N(t) \cdot (1 + 0.071) = N(t) + \underbrace{N(t) \cdot 0.07}_{7\% \text{ od } N(t)}$$

Time smo dokazali da godišnje povećanje iznosi 7%.

Uočimo da je b) dio zadatka malo složeniji i primjereniji je učenicima četvrtog razreda srednje škole.

Ukupna potrošnja u idućih 10 godina, ako je početna godina u kojoj mjerimo potrošnju *N(t)*: $N(t+1)+N(t+2)+\cdots+N(t+10)=\sum_{i=0}^{10} N(t+i)$=$\sum_{i=0}^{10} N_0 \cdot 1.07^i$. Uočimo da je $\sum_{i=0}^{10} N_0 \cdot 1.07^i$ =$N_0 \cdot \underbrace{(1+1.07+1.07^2+\cdots+1.07^{10})}$ gdje prepoznajemo sumu geometrijskog reda koja je jednaka: $\frac{1-1.07^{11}}{1-1.07}$ = 15.7836. Dakle, ukupna potrošnja u idućih 10 godina iznosit će 15.7836$\cdot N_0$.

Potrošnja u prethodnoj povijesti, označimo ju s P, od trenutka *t* je jednaka: $\sum_{k=1}^{\infty} N_0 \cdot 1.07^{-k}$, odnosno imamo da je ukupna potrošnja u prethodnoj povijesti jednaka $P=N_0 \cdot (1.07^{-1}+1.07^{-2}+\cdots)$. Kada *n* teži u beskonačnost, apsolutna vrijednost od *q* mora biti manja od jedan kako bi red konvergirao. Dakle, imamo:

P=$N_0 \cdot [\frac{1}{1.07}+\left(\frac{1}{1.07}\right)^2+\left(\frac{1}{1.07}\right)^3+\cdots = N_0 \cdot \frac{1}{1.07} \cdot (1+\frac{1}{1.07}+\cdots)$, odnosno

P=$N_0 \cdot \frac{1}{1.07} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1.07}} = N_0 \cdot \frac{1}{1.07} \cdot \frac{1.07}{1.07-1} = N_0 \cdot \frac{1}{0.07}$ =14.2857$\cdot N_0$ čime smo dokazali tvrdnju.

No, uz takvu potrošnju resursa, zalihe će trajati 1 000 000 godina. Međutim, kada bi rast potrošnje resursa iznosio 10% godišnje, tada bi nam zalihe trajale još samo 115 godina. Dakako, potrošnja s konstantnom godišnjom stopom rasta nije održiva. Međutim danas se sve više tehnologija unaprjeđuje te se teži korištenju obnovljivih izvora energije zbog svoje neškodljivosti prema okolišu. Obnovljivi izvori energije su izvori energije koji se dobivaju iz prirode te se mogu obnavljati; najčešće se koriste energije vjetra, sunca i vode. Biomasa je jedna od vrsta obnovljivih izvora energije koja nastaje od živih ili nedavno živih organizama. Kad se govori o biomasi najčešće se misli na drvo. Drvo se uspješno koristi još od početka ljudske vrste kao izvor energije za grijanje i pripremu hrane.

4.3.1 Šume

Šuma je životna zajednica drveća i šumskih životinja te se smatra idealnim staništem za brojni živi svijet. Šume se razlikuju s obzirom na klimu, vrstu tla i reljef. Ljudi su krčili šume da bi napravili prometnice, naselja i slično. Ljeti postoji rizik od pojave šumskog požara, nakon čega se treba obaviti pošumljavanje. Koristeći isključivo prirodne sirovine - ugljikov dioksid i vodu, kao izvor energije isključivo sunčevu energiju, u stanju je proizvesti znatne količine biomase (drva, lišća), uz proizvodnju kisika. Šuma zadržava znatne količine prašine iz zraka, povoljno utječe na kruženje vode u prirodi, kao i na atmosferske prilike (vremenske i klimatske). Ima i socijalno i estetsko značenje za čovjeka.

Šume u Hrvatskoj, osim onih u nacionalnim parkovima, su gospodarske šume i za njih se brine šumarstvo kao značajna gospodarska grana, ali i istoimena primijenjena znanstvena disciplina. Učenike kroz razgovor motiviramo na razmišljanje te im pritom spomenemo neke zanimljivosti vezane uz šume u Hrvatskoj.

U Hrvatskoj šume rastu na 2,5 milijuna hektara i u njima ima trenutno oko 300 milijuna tona drva. Svake godine hrvatske šume proizvedu novih 8 milijuna tona drva. Pri tome iz atmosfere povuku 2,5 milijuna tona ugljika (efekt staklenika), zadrže preko 17 milijuna tona prašine, a usput proizvedu i oko 5 milijuna tona kisika. Svi ti podaci odnose se na gospodarene šume. Šume prašumske strukture kojima se ne gospodari ne proizvode ništa od toga - one su dovoljne same sebi.

Iz zakona o šumama Republike Hrvatske:

- Šume i šumska zemljišta su specifično prirodno bogatstvo te s općekorisnim funkcijama šuma predstavljaju posebne prirodne i gospodarske uvjete rada.
- Općekorisne funkcije šuma odražavaju se osobito u zaštiti zemljišta, prometnica i drugih objekata od erozije, bujica i poplava, utjecaju na vodni režim i hidroenergetski sustav; u utjecaju na plodnost zemljišta i poljoprivrednu proizvodnju; u utjecaju na klimu; u zaštiti i unapređivanju čovjekove okoline; u stvaranju kisika i pročišćavanju atmosfere; te utjecaju na ljepotu krajolika te stvaranju povoljnih uvjeta za liječenje, oporavak, odmor i rekreaciju, za razvitak turizma i lovstva i za obranu Republike Hrvatske.
- Šumom se smatra zemljište obraslo šumskim drvećem u obliku sastojine na površini većoj od 10 ari. ([18])

AKTIVNOST 4**: „Količina drva u šumi“**

Cilj aktivnosti**:** učenici će utvrditi godišnji prirast šuma te će koristeći dobiveni podatak odrediti koliko će biti drva u šumi nakon proteklog vremena *t* ako znamo da se svake godišnje siječe drvo u šumi

Oblik rada: suradničko- timski rad u četveročlanim skupinama

Potrebni materijal: nastavni listić za svakog učenika (Prilog 3), kalkulator

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u četveročlane skupine te svakoj skupini podijelimo nastavne listiće. Svaki učenik u skupini dobije svoj listić koji rješava surađujući s ostalim članovima skupine. Nakon što svi učenici riješe svoj nastavni listić, provjeravaju se dobivena rješenja i zaključci. Tijekom rješavanja listića, nastavnik obilazi svaku skupinu i usmjerava ih ukoliko je to potrebno.

PRILOG 3:

Proteklo vrijeme	na početku	nakon 1 godine	nakon 2 godine	nakon 3 godine	nakon 4 godine	nakon 5 godina
količina drva (u m^3)	45 000	45 900	46 818	47 754.36	48 709.45	49 683.64

1. U tablici je dana promjena količine drva u nekoj šumi tijekom godina. Promotrite dane podatke. Kako se mijenjaju?

2. Opišite promjenu količine drva matematički.

3. Možete li iz danih podataka odrediti godišnji priraštaj? Koliko on iznosi?

4. Označite godišnji priraštaj iz prethodnog zadatka s p. Odredite koliko će drva biti u toj šumi nakon 15 godina, uz priraštaj p, ako se na kraju svake godine posiječe 1500 m^3?
   Uputa: prvo odredite koliko će biti drva u toj šumi nakon t godina.

Najprije učenici otkrivaju kako se mijenja količina drva u šumi. Uočava se da brojevi rastu te da se radi o eksponencijalnoj funkciji. Ukoliko učenici ne pretpostave da se radi o eksponencijalnom funkciji, nastavnik treba dati uputu učenicima da izračunaju kvocijente danih podataka. Krenimo redom:

$$\frac{nakon\ 1\ godine}{na\ početku} = \frac{45\ 900}{45\ 000} = 1.02$$

$$\frac{nakon\ 2\ godine}{nakon\ 1\ godine} = \frac{46\ 818}{45\ 900} = 1.02$$

$$\frac{nakon\ 3\ godine}{nakon\ 2\ godine} = \frac{47\ 754.36}{46\ 818} = 1.02$$

$$\frac{nakon\ 4\ godine}{nakon\ 3\ godine} = \frac{48\ 709.45}{47\ 754.36} = 1.02$$

$$\frac{nakon\ 5\ godina}{nakon\ 4\ godine} = \frac{49\ 683.64}{48\ 709.45} = 1.02$$

Dakle, uočavamo da je kvocijent jednak i iznosi 1.02. Iz toga učenici dolaze do zaključka da je godišnji priraštaj 2% (1.02= 1 + 0.02). Učenici bi mogli imati problem prilikom određivanja godišnjeg priraštaja pri čemu ih treba podsjetiti na određivanje postotka povećanja ako imamo početni i krajnji podatak. Što se događa s količinom drva ako na kraju svake godine posiječemo 1500 m^3 drva? Označimo s G_0 početnu količinu drva, a s G_1 količinu drva nakon 1 godine.

Nakon 1 godine: $G_1 = G_0 \cdot (1+\frac{p}{100}) - 1500 = G_0 \cdot 1.02 - 1500$

Nakon 2 godine: $G_2 = G_1 \cdot 1.02 - 1500 = (G_0 \cdot 1.02 - 1500) \cdot 1.02 - 1500 =$

$= G_0 \cdot 1.02^2 - 1500 \cdot (1.02 + 1)$

Nakon 3 godine: $G_3 = G_2 \cdot 1.02 - 1500 = [(G_0 \cdot 1.02 - 1500) \cdot 1.02 - 1500\ ] \cdot 1.02 - 1500$

$= G_0 \cdot 1.02^3 - 1500 \cdot (1.02^2 + 1.02 + 1)$

Nakon *t* godina: $G_t = G_0 \cdot 1.02^t - 1500 \cdot (1.02^{t-1} + 1.02^{t-2} + \cdots + 1.02 + 1)$

U izrazu u zagradi učenici bi trebali uočiti sumu prvih n članova geometrijskog reda te se prisjetiti formule ili otkriti formulu, ovisno o dobi učenika, za računanje sume geometrijskog reda: $\sum_0^{t-1} q^t = \frac{1-q^t}{1-q}$, pri čemu je q=1.02. U matematici, geometrijski red je red s konstantnim omjerom između susjednih članova.

Nas zanima kolika je količina drva nakon 15 godina, odnosno računamo:

$G_{15} = 45\,000 \cdot 1.02^{15} - 1500 \cdot \frac{1-1.02^{15}}{1-1.02} \approx 34\,623.$

Dakle, nakon 15 godina u šumi će biti približno 34 623 m^3 drva.

4.4 Problem potrošnje internetskog prometa

Ljudi su počeli koristiti tehnologiju s pretvaranjem bogatih prirodnih resursa u jednostavne alate. Tehnologija (grč. "*techne*" ,("vještina") i "*logia*", ("nauka")) je upotreba i znanje alata, tehnika i metoda organizacije. Tehnologija je posljedica razvoja znanosti inženjerstva. Prahistorijsko otkriće mogućnosti kontroliranja vatre je povećala količinu raspoloživih izvora hrane, a otkriće kotača pomoglo je ljudima u kretanju, kao i kontroliranju okoliša. Tehnološka otkrića, kao što su pisaći stroj i Internet, su srušila sve prepreke u komunikaciji, te su omogućila ljudima da komuniciraju jedan s drugim. Tehnologija je utjecala na društvo na mnoge načine, i pozitivno i negativno. U mnogim društvima, tehnologija je utjecala na razvitak naprednijih ekonomija te je omogućila izdvajanje razvijenih zemalja. Međutim, mnogi tehnološki procesi proizvode neželjene posljedice, koji uzrokuju zagađenje okoliša, crpljenje prirodnih resursa, kao i poremećaj Zemlje i njenog okoliša. Razne implementacije nove tehnologije utječu na vrijednost društva, te postavljaju nova etička pitanja. Započele su također razne filozofske diskusije o sadašnjoj i budućoj upotrebi tehnologije u društvu. Postavljaju se pitanja kako tehnologija utječe na čovjeka i njegov položaj u svijetu. Neki kritiziraju upotrebu tehnologije u modernom svijetu, tvrdeći da ona razdvaja ljude, dok drugi vide dobrobit za ljudsko društvo.

Internet je globalna mreža nastala međusobnim povezivanjem raznih računalnih mreža širom svijeta. Povezane mreže i računala podatke razmjenjuju koristeći se dogovorenim pravilima za prijenos podataka. Internet nema vlasništvo- vlasništvo postoji samo nad pojedinim mrežama, odnosno vezama između mreža. Internet je 1969. godine osnovalo američko Ministarstvo obrane. Zvao se ARPANet (Advanced Research Project Agency - Agencija za napredne istraživačke projekte). Cilj te mreže je bio da se poveže određeni broj računala u SAD-u. ARPANet je imao faktor koji je kasnije bio ključan za nastanak i popularizaciju interneta; tijekom šezdesetih godina vladao je Hladni rat, zbog čega je Ministarstvo obrane SAD-a strahovalo da bi se mogao dogoditi nuklearni napad. Inženjeri su morali projektirati ARPANet tako da on radi čak i ako se baci bomba na dio uspostavljene mreže te se uništi, dakle, čak i ako dio komunikacijskog dijela bude uništen, ostatak mreže treba nastaviti funkcionirati bez problema. Iste godine, 1969. ARPANet povezuje prva četiri sveučilišta (Los Angeles, Utah u Salt Lake Cityju, Stanford i Santa Barbara) i time se stvara početna jezgra današnje globalne mreže. 1972. godine poslana je prva elektronička pošiljka (prvi put je korišten znak @ u elektroničkoj adresi). Servis World Wide Web izmišljen je u CERN-u u Švicarskoj 1989. godine, a izmislio ga je Britanac Tim Berners-Lee. Za internetsko povezivanje se koriste telefonske mreže, ISDN, ADSL, optički kabeli, satelitske veze i drugi načini. 1982. godine Drew Major i Kyle Powell napravili su igru Snipes- prvu mrežnu igru za osobna računala. 1992. godine CARNet se povezuje s internetom. 1993. godine dobivena je vršna .hr domena za Hrvatsku.

Svako računalo spojeno na internet ima svoju IP adresu. Popularni su internetski preglednici Internet Explorer, Mozilla Firefox, Google Chrome, Opera i Safari.

ISP (*Internet service provider*) tvrtke korisnicima pružaju usluge za spajanje na internet. Kako bi se spojio na internet, korisnik treba potpisati ugovor s ISP-om. Poput drugih država, Hrvatska ima komercijalne i akademske. Svi hrvatski ISP-ovi, osim CARNeta, su komercijalni. CARnet omogućuje besplatno spajanje na internet u akademske, edukacijske i istraživačke svrhe učenicima, studentima i akademskim krugovima. Neki od hrvatskih ISP-ova su B.net, CARNet, T-Com, Iskon, Vipnet. ([10])

AKTIVNOST 5: **„Potrošnja internetskog prometa“**

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti model potrošnje internetskog prometa

Oblik rada: suradničko- timski rad u četveročlanim skupinama

Potrebni materijal: nastavni listić za svakog učenika (Prilog 4), kalkulator

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u četveročlane skupine. Svakoj skupini podijelimo nastavne listiće. Svaki učenik dobije nastavni listić te ga rješava zajedno sa članovima svoje skupine. Dok učenici rješavaju nastavne listiće, nastavnik obilazi svaku skupinu provjeravajući kako se snalaze i pomaže ukoliko je to potrebno. Nakon što svi učenici riješe nastavni listić, s učenicima provjeravamo do kojih zaključaka su došli.

PRILOG 4:

U tablici su dani podaci prosječne mjesečne potrošnje interneta na svjetskoj razini tijekom odgovarajuće godine:

godina	2005.	2006.	2007.	2008.	2009.	2010.
mjesečni internetski promet (u EB)	5.05	6.66	8.79	11.6	15.46	20.2
godina	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.	2020.
mjesečni internetski promet (u EB)	26.65	35.02	46.41	61.84	80.5	

1. Opišite promjenu potrošnje internetskog prometa riječima.

2. Opišite promjenu potrošnje internetskog prometa matematički.

3. Popunite prazno mjesto u tablici. Što mislite o dobivenom podatku, hoće li taj podatak uistinu biti takav?

Tijekom rješavanja učenici neće odmah uočiti da se svakih 5 godina potrošnja učetverostruči te bi nastavnik prilikom rješavanja trebao obilazi svaku skupinu i pritom uočiti koji učenici su na dobrome putu ili su i uočili rješenje, odnosno koji učenici su krenuli krivim putem kako se ne bi previše zapetljali u možda nepotrebnom računu. Neki učenici će krenuti redom te će doći do krivih zaključaka. Računajući kvocijente prvih nekoliko podataka, učenici bi mogli doći do zaključka da se svake godine potrošnja internetskog prometa poveća približno 31%, što nije najpreciznije rješenje jer bi tada prosječna mjesečna potrošnja internetskog prometa 2015. godine iznosila 75.16 EB, što je manje od danog podatka. Tada učenike treba usmjeriti da traže pravilnost svake dvije godine, svake tri godine, odnosno svakih 5 godina jer se tada odmah uočava četverostruko povećanje. Dakle, prosječna mjesečna potrošnja internetskog prometa mijenja se po pravilu danom formulom:

$P(t) = 5.05 \cdot 4^{\frac{t}{5}}$, gdje je t broj proteklih godina od početka mjerenja.

Zaključujemo da će 2020. godine prosječna mjesečnapotrošnja internetskog prometa iznositi približno 323.2 EB.

Diskusija: Hoće li potrošnja i dalje rasti ili možemo zaključiti da će u nekom trenutku doseći svoj vrhunac? Kroz diskusiju možemo učenike upozoriti da Internet ima pozitivne i negativne utjecaje. Većinom djeca danas Internet koriste radi društvenih mreža, kao što su Facebook, Twiter, Instagram i slično gdje objavljuju svoje osobne podatke, fotografije i slično te u tom slučaju Internet može biti opasan. S druge strane, Internet nam omogućuje informiranje o svemu što nas zanima, a bitno je za naše znanje i obrazovanje. Važno je djecu upozoriti da se Internet mora racionalno koristiti.

4.5 Koncentracija lijeka u krvi čovjeka

Koliki će stanovnika biti na Zemlji za npr. 100 godina? Kakva su očekivanja o duljini životnog vijeka neke osobe? Kojom se brzinom širi neka zarazna bolest? Koliko se komaraca može očekivati na nekom području tijekom ljeta? Koliko vremena treba proći kako bi alkoholizirani vozač bio spreman za vožnju? Kolika će biti drva u nekoj šumi za 20 godina? Eksponencijalna funkcija daje odgovore na ova, ali i mnoga druga pitanja. Pogledajmo kako se smanjuje koncentracija lijeka u krvi čovjeka te kako odrediti terapiju uzimanja lijeka da bi se u krvi održala potrebna koncentracija lijeka.

AKTIVNOST 6: **„Lijek“**

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti kako se mijenja koncentracija lijeka u krvi

Oblik rada: suradničko- timski rad u četveročlanim skupinama

Potrebni materijal: nastavni listić za svakog učenika (Prilog 5)

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u četveročlane skupine. Svakoj skupini podijelimo nastavne listiće. Svaki učenik dobije nastavni listić te ga rješava zajedno sa članovima svoje skupine. Tijekom rješavanja nastavnog listića, nastavnik nadgleda rad svake skupine te upućuje učenike kojim „putem“ krenuti kako bi došli do traženog rješenja. Nakon što svi učenici riješe nastavni listić, s učenicima provjeravamo do kojih zaključaka su došli.

PRILOG 5:

U tablici su naveden vrijednosti koncentracije lijeka u krvi (u mg/l) u ovisnosti o vremenu (u satima), nakon što je pacijent uzeo lijek.

Vrijeme (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Koncentracija (mg/l))	12	8.4	6	4.24	3	2.12	1.5	1.1	0.8	0.5

1) Koju količinu lijeka je pacijent primio u početnom trenutku?
2) Opišite smanjenje koncentracije lijeka riječima.

3) Opišite smanjenje koncentracije lijeka matematički.

4) Kako bi liječenje bilo uspješno, koncentracija lijeka u krvi treba iznositi između 5 i 15 mg/l. Predložite terapiju tako da pacijent uzima konstantnu dozu D u vremenskim razmacima od T sati tako da se održi potrebna koncentracija lijeka u krvi te da se izbjegne buđenje po noći. Razmislite treba li početna doza D_0 biti različita od ostalih doza D? Razmislite, spavamo li svi jednako dugo? Prilagodite vrijeme buđenja svatko sebi.

5) Prikažite svoje rješenje grafički.

Najprije uočavamo da se koncentracija lijeka u krvi smanjuje. Prvi zaključak učenika bi mogao biti da se svaka dva sata koncentracija lijeka smanji za približno 30% jer je kvocijent danih podataka približno 0.7. Odnosno, tada bi naša tražena ovisnost koncentracije lijeka u krvi u ovisnosti o vremenu *t* bila:

$$t(x) = 12 \cdot 0.7^{\frac{x}{2}}.$$

Tada se učenici trebaju zapitati je li nam to dovoljno dobro za računanje. Možemo li odrediti što se događa svaka 4 sata? Pri tome će učenici uočiti da se svaka 4 sata koncentracija lijeka u krvi približno dvostruko smanji, odnosno da se koncentracija lijeka u krvi mijenja po pravilu danom sljedećom formulom:

$$t(x) = D_0 \cdot 0.5^{\frac{x}{4}}, \text{ gdje nam je } D_0=12.$$

Nakon što svi učenici dođu do tražene formule, kreću s određivanjem modela terapije kako bi se održala potrebna koncentracija lijeka u krvi. Većina učenika će vjerojatno krenuti od početne doze D_0 koja će biti najveća dopuštena, odnosno D_0=15 mg/l. Kako znamo da koncentracija lijeka u krvi ne smije biti manja od 5 mg/l, zanima nas nakon koliko sati moramo uzeti sljedeću dozu. Pogledajmo smanjenje koncentracije lijeka:

Vrijeme (h)	0	2	4	6	7	8
Koncentracija (u mg/l)	15	10.6	7.5	5.3	4.46	3.75

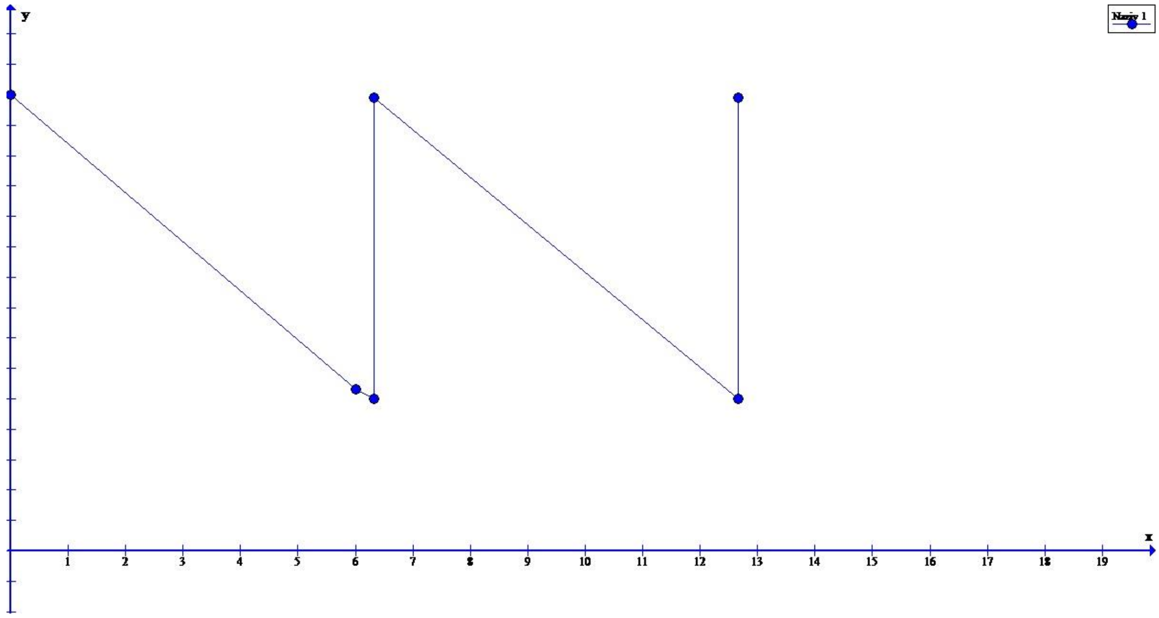
Sada iz tablice uočavamo da nakon 6 sati moramo uzeti novu dozu jer već nakon 7 sati koncentracija lijeka u krvi pada ispod 5 mg/l. Najveća doza koju možemo uzeti nakon 6 sati iznosi 9.7 mg/l. Tada ponovno imamo 15 mg/l. Dakle, početna doza D_0 iznosi 15 mg/l, a ostale doze D iznosi 9.7 mg/l i uzimamo ih svakih 6 sati. Možemo se pitati nakon koliko sati ćemo imati točno 5 mg/l? Imamo dakle:

$$t(x)=5 \text{ mg/l}$$

$$t(x)=15 \cdot 0.5^{\frac{x}{4}}$$

Izjednačavanjem prethodne dvije jednakosti dobivamo:

$5=15\cdot 0.5^{\frac{x}{4}}$ odnosno $0.5^{\frac{x}{4}}=\frac{5}{15}$ iz čega slijeda $\frac{x}{4}=1.58$, odnosno t=6.33. Dakle, nakon 6 sati i 20 minuta ćemo imati približno 5 mg/l, što znači da bi svakih 6 sati i 20 minuta trebali uzimati novu dozu. Grafički prikaz dobivene terapije izgleda ovako:



Slika 2

Na kraju treba razmisliti je li uputa „uzimanje lijeka svakih 6 sati i 20 minuta“ pogodna uputa? Spavamo li svi jednako? Možemo li naći prikladniju terapiju? Učenicima možemo zadati za domaću zadaću da nađu još neki model uzimanja terapije.

Poglavlje 5

Logistička funkcija

5.1 Definicija logističke funkcije

Neki prirodni procesi ograničenog su rasta, oni u početku rastu (ili padaju) eksponencijalno, približavaju se nekoj najvišoj (ili najnižoj) vrijednosti i potom stagniraju. Primjeri za to su epidemije zaraznih bolesti, razni fenomeni vezani uz proces učenja, povećanje tjelesne mase. Takve procese opisuje tzv. logistička funkcija.

Veličina populacije P koja se mijenja s vremenom t ne može rasti konstantnom stopom rasta. Eksponencijalni model je prikladan kada u sustavu nema nikakvog ograničenja. Pri razmatranju populacije u zatvorenoj sredini uzima se u obzir postojanje određenog limita. Stopa rađanja populacije s vremenom počinje opadati, a stopa umiranja rasti. Najjednostavniji model smanjenja stope rađanja i povećanja stope umiranja predložio je 1838. godine Pierre-Francois Verhulst koji uključuje stopu rađanja te stopu umiranja. Stopa rađanja pada proporcionalno napučenosti, a stopa umiranja raste proporcionalno napučenosti. ([7])

U srednjoškolskim udžbenicima definira se logistička funkcija promjene ([8]):

Neka su a, b, c i k pozitivni realni brojevi. Logistička funkcija promjene oblika je

$$f(x) = \frac{c}{1+a\cdot b^x} \text{ ili } f(x) = \frac{c}{1+a\cdot e^{-kx}}, \text{ gdje je } c \text{ granica promjene.}$$

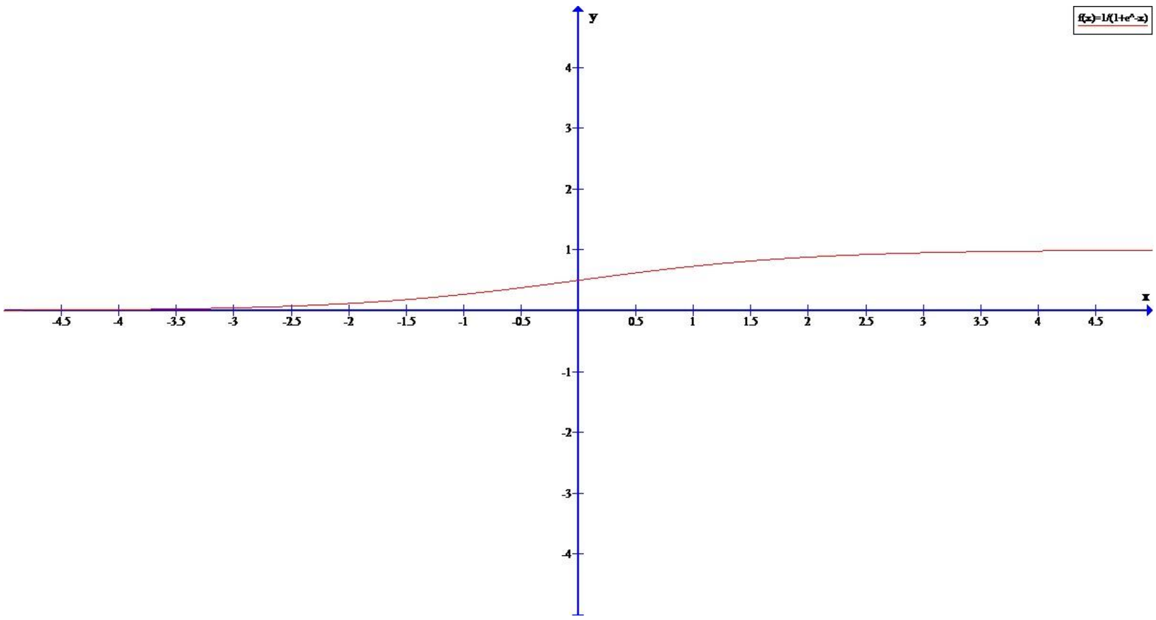
Horizontalne asimptote su pravci $y = 0$ i $y = c$.

Jednostavna logistička funkcija opisana je formulom: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Svaka logistička funkcija ima točno jednu točku infleksije, koja dijeli njezin graf na dva jednaka područja suprotne konkavnosti. Lako je odrediti točne vrijednosti za točku infleksije: mora se dogoditi na pola visine krivulje, tj. za $y = \frac{c}{2}$. Za $k > 0$ funkcija raste i povećanjem varijable x vrijednosti funkcije približavaju se granici $f(x) = c$. Za $k < 0$ funkcija pada i povećanjem varijable x vrijednosti funkcije se približavaju nuli.

Logistička funkcija nalazi primjenu u raznim područjima kao što su neuronske mreže, biologija, biomatematika, demografija, ekonomija, kemija, medicina, matematička psihologija, vjerojatnost, sociologija, političke znanosti i statistika. Logističke funkcije se koriste u statistici za logističku regresiju u cilju prikazivanja kako vjerojatnost nekog događaja P može biti pod utjecajem jedne ili više ulazne varijable. U medicini se logistička funkcija koristi pri modeliranju rasta tumora po sličnom principu kao modeliranje rasta u ekologiji.

Primjer grafa logističke funkcije:



Slika 3

5.2 Primjeri logističke funkcije

Sljedeće primjere logističkih funkcija navest ćemo iz udžbenika. Matematičko modeliranje podrazumijeva veću ideju od uvrštavanja vrijednosti u funkcijski model, a primjeri iz srednjoškolskih udžbenika se bave određivanjem određenih vrijednosti u modelu (argumenata ili funkcijske vrijednosti za funkciju zadanu pravilom). Međutim, ne proučavaju se neka druga svojstva te funkcije, kao što je ponašanje u beskonačnosti, područje rasta, uspoređivanje brzine rasta i slično.

Primjer 1: Na temelju praćenja tijeka širenja ebole, teške zarazne bolesti, u jednom dijelu Ugande postavljen je matematički model koji opisuje povećanje oboljelih u t dana nakon promatranja: $n(t) = \frac{396}{1+2.75\cdot 1.1^{-t}}$. Koliko se oboljelih može očekivati nakon 60 dana? ([7])

Primjer 2: U jednom je gradu broj ljudi zaraženih gripom nakon t dana trajanja epidemije približno jednak: Q(x)=$\frac{5\,000}{1+1250\cdot e^{-kx}}$. Ako je nakon sedam dana bilo zaraženo 40 ljudi, koliko će ljudi biti bolesno nakon petnaest dana? ([7])

Primjer 3: Broj stanovnika New Yorka se mijenjao prema funkciji f(t)=$\frac{19875}{1+57.993\cdot e^{-0.035005t}}$, gdje je broj stanovnika u milijunima, a t broj godina poslije 1800. godine. ([8])

Primjer 4: Populacija vjeverica u parku prirode slijedi logistički zakon, tako da je $N(0) = 1500$ i $N(2) = 2500$. Koliki je najveći broj vjeverica u tom parku? ([8])

Bibliografija

[1] G. Bateman, V. Egan, *Enciklopedijski atlas svijeta*, Extrade d.o.o., Rijeka, 1999.

[2] A. Bogner Boroš, P. Brkić, L. Havranek Bijuković, M. Karlo, M. Kuliš, *Matematika 7 udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu osnovne škole 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2015.

[3] F.M. Brůckler, *Povijest matematike II*, Osijek, 2009.

[4] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Osijek, 1994.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1. udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola 2.dio*, Element, Zagreb, 2013.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2. udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola 1.dio*, Element, Zagreb, 2013.

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2. udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola 2.dio*, Element, Zagreb, 2013.

[8] J. Gusić, P. Mladinić, B. Pavković, *Matematika 2/1. udžbenik za 2. polugodište 2. razreda prirodoslovno- matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[9] S. Kurepa, *Matematička analiza 1. Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[10] J. Lindarić, D. Sudarević, D. Šokac, *WWW Informatika udžbenik informatike s cd- om za gimnazije*, Profil, Zagreb, 2012.

[11] L. Puljak, *Metodička bilježnica priručnik za rad po HNOS- u*, Servis obrazovnog standarda d.o.o., Split, 2006.

[12] A. Salopek, *Korelacija i integracija u razrednoj nastavi, priručnik za učitelje*, Školska knjiga, Zagreb, 2012.

[13] A. Žakelj, *Modeliranje u nastavi matematike*, MIŠ 78, (2015.), 105. – 110

[14] *Časopis za pedagoška i kulturno prosvjetna pitanja*, Život i škola 2, (1984.), 203. – 204.

[15] Z. Šikić, *Eksponencijalni i logistički rast*, Pučak 13, (2003.), 14. – 31.

[16] dostupno na www.fibonacci-project.eu , (rujan 2017.)

[17] dostupno na http://cudaprirode.com/portal/csvijeta/6330-legenda-o-ahovskoj-ploi, (lipanj 2017)

[18] dostupno na https://www.zakon.hr/z/294/Zakon-o-%C5%A1umama, (srpanj 2017.)

[19] dostupno na http://www.statistik.at/web_de/statistiken/index.html, (srpanj 2017.)

[20] dostupno na https://www.dzs.hr/ (srpanj 2017.)

[21] dostupno na http://www.ptfos.unios.hr/joomla/modeli/images/files/prezentacije/Uvod%20u%20matematicko%20modeliranje.pdf (srpanj 2017.)

[22] Effective and ineffective questions, dostupno na http://www.primas-project.eu/artikel/en/1061/developing-questioning/view.do (rujan 2017.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu naglasak je na aktivnostima primjerenima učenicima srednje škole. Aktivnosti se odnose na probleme iz stvarnog svijeta koje matematički možemo modelirati eksponencijalnom funkcijom. Rad je podijeljen na 5 poglavlja, a svako poglavlje je podijeljeno na nekoliko potpoglavlja. U prvom poglavlju govorimo o razvoju pojma funkcije i eksponencijalne funkcije, o definicijama funkcija kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje učenika te o izgradnji eksponencijalne funkcije. U drugom poglavlju govori se o suvremenoj nastavi matematike, a u trećem poglavlju o modeliranju i matematičkom modeliranju u nastavi. U četvrtom poglavlju su izloženi problemi iz realnog svijeta te su dani primjerni aktivnosti za učenike koje se mogu provesti na satu matematike. U zadnjem poglavlju dani su neki primjeri logističkih funkcija iz srednjoškolskih udžbenika.

Summary

In this thesis, emphasis is on activities for high school students. The activites relate to real-world problems that we can model mathematically with exponential function. The work is divided into 5 chapters, and each chapter consists of several sections. In the first chapter, we are talking about the development of the concept of function and exponential function, the definitions of functions through elementary and secondary school education, and about building of the notion of the exponential function. The second chapter deals with modern approaches in teaching of mathematics, and in the third chapter about modeling and mathematical modeling in teaching. In Chapter 4, problems of the real world are exposed, and examples of activites for students that can be carried out in math classroom. In the last chapter, some examples of logistical functions from secondary school textbooks are given.

Životopis

Zovem se Brigita Baček. Rođena sam 23.06.1992. godine u Zagrebu. Svoje djetinjstvo provodim u selu Repinec, u kojem i sad živim, gdje 1999. godine upisujem osnovnu školu u „Područnoj školi Repinec", a zatim osnovnoškolsko obrazovanje završavam u Osnovnoj školi Gradec, u Gradecu. Po završetku osnovne škole, dobivam nagradu za najbolju učenicu svoje generacije. Nakon osnovne škole, 2007. godine upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Vrbovec, u Vrbovcu. Matematika postaje područje mojeg najvećeg interesa. Stoga, 2011. godine upisujem preddiplomski studij Matematike, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2015. godine stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike. Nakon toga, na istom fakultetu, nastavljam diplomski studij Matematike, smjer: nastavnički.