

LQR i LQG kontrola - teorija i primjene

Banušić, Gregor Boris

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:975484>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Gregor Boris Banušić

**LQR I LQG KONTROLA: TEORIJA I
PRIMJENE**

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zlatko Drmač

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji i kumu koji su uvijek bili uz mene.

*Posebno zahvaljujem prof. dr. sc. Zlatku Drmaču na vodstvu i savjetima.
Također bih se zahvalio Domagoju Lacmanoviću na pomoći te svim prijateljima i rodbini
koji su mi pomogli da ovaj rad bude ostvaren.*

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Linearni vremenski invarijantni dinamički sustavi	2
1.1 Matematički alati	3
1.2 Linearni vremenski invarijantni neprekidni dinamički sustavi	8
1.3 Matrica prijelaznih funkcija	11
1.4 Primjeri	12
2 Upravlјivost i osmotrivost sustava	19
2.1 Upravlјivost	19
2.2 Osmotrivost	24
2.3 Udaljenost do neupravlјivog sustava	26
3 Stabilnost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti	27
3.1 Stabilnost	27
3.2 Lyapunovljeva teorija stabilnosti	31
3.3 Osmotrivost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti	33
3.4 Upravlјivost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti	35
3.5 Lyapunovljeve jednadžbe i Gramiani upravlјivosti i osmotrivosti	36
4 Povratna veza i podešavanje svojstvenih vrijednosti	37
4.1 Stabilnost i upravlјivost	38
4.2 Stabilizacija i Lyapunovljeve jednadžbe	40
4.3 Detektabilnost	45
5 Linearno kvadratni optimizacijski regulator	47
5.1 Definicija LQR regulatora	47
5.2 Algoritam vremenski neprekidnog LQR-a	50

6	Aproksimacija stanja	56
6.1	Aproksimacija stanja pomoću svojstvenih vrijednosti	56
6.2	Kalmanov filter	59
6.3	Linearni kvadratni Gaussov regulator	61
6.4	Algoritam vremenski neprekidnog LQG-a	61
7	Algebarska Riccatijeva jednadžba	64
7.1	Egzistencija i jedinstvenost rješenja CARE	64
A	Inverzno klatno	68
A.1	Problem inverznog klatna	68
A.2	Sustav jednadžbi inverznog klatna	69
B	Matlab kod za inverzno klatno	71
	Bibliografija	76

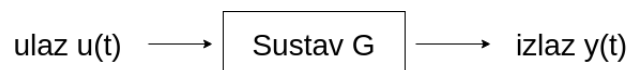
Uvod

Automatsko upravljanje sustavima je generički pojam u inženjerstvu i tehnologiji koja se primjenjuje u mehanizmima za regulaciju procesa bez stalnog utjecaja čovjeka. U današnjem svijetu, automatsko upravljanje je sastavni dio suvremenih tehnoloških rješenja. Ovisno o području znanosti i tehnologije, pojam sustava ima različit smisao. Sustav se može smatrati kao uređena cjelina koja se mijenja tijekom vremena, dok je kontrola utjecaj na neku promjenu. Kontrola sustava daje nam utjecaj na promjenu sustava kroz vrijeme. Ovaj rad se bavi teorijom i primjenama optimalne kontrole sustava, tj. operativnim dinamičkim sustavima s minimalnim troškovima. Slučaj gdje je dinamika sustava opisana skupom linearnih diferencijalnih jednadžbi, a trošak dan s kvadratnom funkcijom naziva se linearno kvadratni optimizacijski problem. Taj problem rješavaju linearno kvadratni regulator LQR (engl. Linear Quadratic Regulator) te linerno kvadratni Gaussov regulator LQG (engl. Linear Quadratic Gaussian). Kroz ovaj rad će se predstaviti LQR i LQG regulatori, uz niz definicija i koncepata automatskog upravljanja. Konkretna primjena će se demonstrirati na problemu inverznog klatna. Programski kod za inverzno klatno je implementiran u Matlabu te su sve funkcije i datoteke priložene na kraju ovog rada, u dodatku (B).

Poglavlje 1

Linearni vremenski invarijantni dinamički sustavi

Sustav ili sistem (grč. *συστήμα*, sistema) je uređena cjelina pojedinih dijelova koji se sa okolinom povezuje preko ulaza i izlaza. Za opis ponašanja takvog jednog sustava u tehničkom pogledu, potrebno je razviti matematički model uz primjenu fizičkih zakonitosti i principa usvojenih u inženjerskom pristupu rješavanja zahtjeva i problema. Tako npr. za modeliranje električnih krugova koriste se Ohmov i Kirchhoffovi zakoni. Na sličan način, za modeliranje mehaničkih sustava koriste se Newtonovi zakoni, zakoni o održanju energije te drugi fizički zakoni, ovisno o sustavu koji se promatra. Dakle, cilj matematičkog modeliranja je dobiti relacije između ulaza i izlaza sustava primjenom poznatih fizičkih zakonitosti, tako da pojedine komponente sustava budu razdvojene kao na sljedećem blok dijagramu.



Slika 1.1: Blok dijagram

Za opisivanje fizičkih sustava koriste se sljedeća dva matematička modela:

- **transfer funkcija** (engl. *Transfer function*) - prikazana u frekvencijskoj domeni,
- **stanja sustava** (engl. *State space*) - prikazano u vremenskoj domeni.

Ovaj rad će se uglavnom baviti matematičkim modelima prikazanim pomoću stanja sustava. Uspostavljanje uzročne veze između ulaza i izlaza je lako ako je sustav **linearno vremenski invarijantan** (takozvani LTI sustav, engl. *Linear time invariant*). Sustav G je

linearan, s obzirom na ulaz i izlaz, ako i samo ako vrijedi:

$$G(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 G(u_1) + \alpha_2 G(u_2),$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ te u_1, u_2 iz odgovarajućeg prostora funkcija. Za sustav kažemo da je vremenski invarijantan ako veza između ulaza i izlaza ne ovisi o vremenu.

Primjer 1.0.1. *Primjer linearnog vremenski invarijantnog sustava:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 3x(t) + u(t), \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

te primjer linearnog vremenski varijabilnog sustava:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 3tx(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t).\end{aligned}$$

Ovaj rad se bavi isključivo **linearnim vremenski invarijantnim neprekidnim dinamičkim sustavima**, koji su dani formom:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t).\end{aligned}$$

Definicije i teoremi na kojima se temelji ovaj rad mogu se naći u knjizi [2].

1.1 Matematički alati

Prije uvođenja definicija i teorema vezanih uz dinamičke modele linearnih multivarijabilnih sustava uvest ćemo nekoliko matematičkih pojmova i opisati njihova svojstva.

Teoremi i definicije iz linearne algebre

U ovom radu koristit će se nekoliko teorema i definicija iz linearne algebre, a u nastavku će biti prikazani samo oni najvažniji.

Teorem 1.1.1. *Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dan s:*

$$\begin{aligned}p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.\end{aligned}$$

Po Hamilton-Cayley teoremu vrijedi da matrica \mathbf{A} poništava svoj karakteristični polinom, tj.:

$$p_A(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Definicija 1.1.2. Za matricu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sa stupcima $(b_1, \dots, b_m) = \mathbf{B}$, operacija vektorizacije matrice je definirana sa:

$$\text{vec}(\mathbf{B}) := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}$$

Definicija 1.1.3. Za dvije matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{j \times k}$, Kroneckerov produkt (\otimes) je definiran sa:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \dots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nj \times mk}$$

Teorem 1.1.4. Neka su dane matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{X} tako da je umnožak \mathbf{AXB} dobro definiran. Tada vrijedi:

$$\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}).$$

Jordanova forma matrice

Matrica oblika

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k},$$

naziva se **elementarna Jordanova klijetka** (ili blok) dimenzije k . Pomoću elementarnih Jordanovih klijetki građena je **Jordanova klijetka** (ili blok):

$$\mathbf{J}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda) & & & 0 \\ & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}_{k_r}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{l \times l},$$

pri čemu je $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq 1$ i $k_1 + k_2 + \dots + k_r = l \leq n$.

Teorem 1.1.5. (Jordan) Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ različite svojstvene vrijednosti od \mathbf{A} , s algebarskim kratnostima n_1, \dots, n_p , redom. Tada postoji regularna matrica \mathbf{S} , takva da je

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \mathbf{J}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}(\lambda_p) \end{bmatrix}.$$

Pritom je $n_1 + \dots + n_p = n$.

Schurova forma matrice

Teorem 1.1.6. (Schur) Za proizvoljnu matricu \mathbf{A} postoji unitarna matrica \mathbf{U} , tako da je

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U}$$

gornjetrokutasta matrica. Matrica \mathbf{U} može biti izabrana tako da se na dijagonali matrice \mathbf{T} pojave svojstvene vrijednosti od \mathbf{A} u bilo kojem zadanom poretku.

Teorem 1.1.7. (Realna Schurova forma) Za proizvoljnu \mathbf{A} realnu matricu postoji ortogonalna matrica \mathbf{V} tako da je:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{T}$$

gdje je \mathbf{T} realna blok-gornjetrokutasta s dijagonalnim blokovima 1×1 ili 2×2 . Njezine svojstvene vrijednosti su svojstvene vrijednosti dijagonalnih blokova, s time da realne svojstvene vrijednosti odgovaraju 1×1 , a konjugirano-kompleksni parovi odgovaraju 2×2 blokovima.

Više o Jordanovoj i Schurovoj formi može se naći u knjizi [6].

Matrična eksponencijalna funkcija

Kako eksponencijalna matrica igra ključnu ulogu u rješavanju linearnog sustava, u nastavku ćemo je definirati i pokazati nekoliko njenih svojstava.

Definicija 1.1.8. Za $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ i $t \in \mathbb{R}$, matrica $e^{\mathbf{A}t}$ koja ima formu oblika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}, \quad (1.1)$$

naziva se **matrična eksponencijalna funkcija**.

Pomoću matrične norme koja je usuglašena sa množenjem matrica, lako je uočiti da se gornji red svodi na konvergenciju reda eksponencijalne funkcije.

Propozicija 1.1.9. *Za eksponencijalnu matricu vrijedi:*

1. $e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}s}$
2. $\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$
3. $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$ ako i samo ako $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
4. $e^{\mathbf{A}t}$ nije singularna, vrijedi $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$
5. $(e^{\mathbf{A}/m})^m = e^{\mathbf{A}}$
6. $e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t} = \mathbf{P}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P}$

Dokaz. U nastavku ćemo dokazati samo posljednju tvrdnju (6.).

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i \mathbf{P} regularna (invertibilna) matrica. Vidimo da za svaki $m \geq 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^m &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \dots \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}\mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Iz definicije eksponencijalne matrične funkcije (1.1) dobivamo traženu jednakost:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t + \frac{(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t)^2}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t + \mathbf{P}^{-1}\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots \\ &= (\text{neprekidnost množenja matrica}) \\ &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots)\mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P}. \end{aligned}$$

□

Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija je matematički alat pomoću kojeg, između ostalog, možemo rješavati linearne diferencijalne jednačbe te predstavlja iznimno važan alat u teoriji sustava.

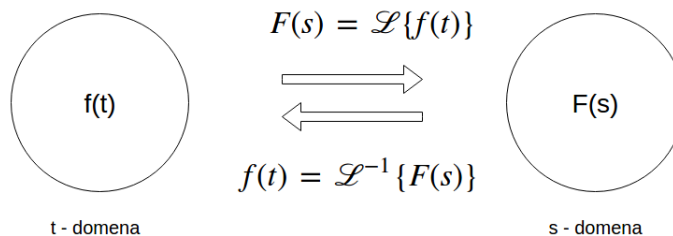
Definicija 1.1.10. *Laplaceova transformacija je definirana s:*

$$(\mathcal{L}\{f(t)\})(s) = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.2)$$

gdje je $s = \sigma + i\omega$ kompleksna varijabla.

Ukoliko gornji integral postoji, funkcija $F(s)$ je dobro definirana te ju nazivamo Laplaceovom transformacijom od $f(t)$.

Pomoću Laplaceove transformacije preslikavamo funkcije vremena t u funkcije kompleksne varijable s . Na taj način danoj funkciji $f(t)$ pridružuje se odgovarajuća funkcija $F(s)$ kao njena slika. Problem se iz realnog područja (vremenska t domena) prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje (frekvencijska s domena) kao što prikazuje slika (1.2).



Slika 1.2: Laplaceova transformacija

Dovoljan uvjet za egzistenciju Laplaceove transformacije je dan u narednom teoremu.

Definicija 1.1.11. *Neka za $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Realan broj σ zove se eksponencijalna međa funkcije f , ako postoji realan broj $M > 0$ takav da vrijedi:*

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

Funkcija f zove se funkcija eksponencijalnog rasta, ako ona ima bar jednu eksponencijalnu među. Infimum skupa svih eksponencijalnih međa funkcije f označava se s $\omega(f)$ i zove se red rasta eksponencijalne funkcije f .

Teorem 1.1.12. *Neka je $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ lokalno integrabilna funkcija eksponencijalnog rasta. Tada postoji Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\{f\}$ na području:*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \omega(f)\}$$

Sljedeći rezultat osnova je za primjenu Laplaceove transformacije na obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Teorem 1.1.13. *Neka je $f \in C^1([0, \infty))$ takva da postoje $\mathcal{L}(f)$ i $\mathcal{L}(f')$. Tada vrijedi:*

$$\left(\mathcal{L}\{f'(t)\}\right)(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (1.3)$$

Ostala važnija svojstva Laplaceove transformacije su:

- Svojstvo linearnosti:

$$\left(\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}\right)(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

gdje su α_1 i α_2 proizvoljne konstante.

- Teorem sličnosti:

$$\left(\mathcal{L}\{f(at)\}\right)(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Više o Laplaceovim transformacijama može se naći u knjizi [5].

1.2 Linearni vremenski invarijantni neprekidni dinamički sustavi

Konačno dimenzionalan, vremenski invarijantan, neprekidan i linearan dinamički sustav može se opisati pomoću sljedećih diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t), \quad (1.5)$$

gdje su vektori:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja,
- $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ derivacija vektora stanja,

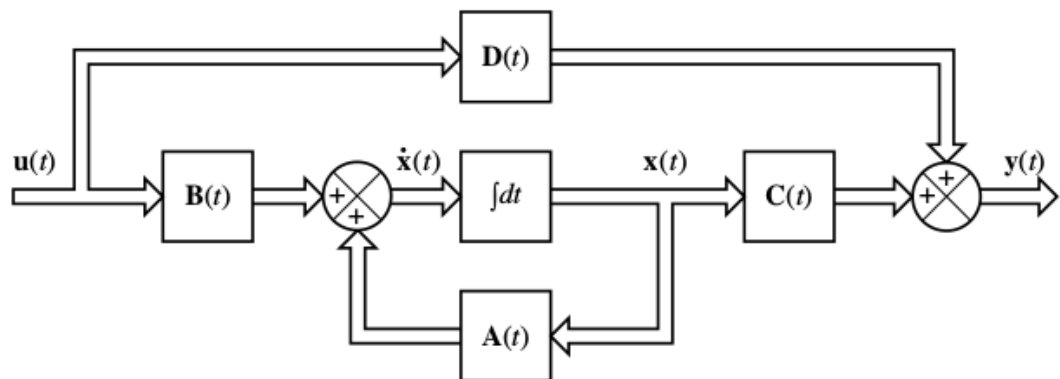
POGLAVLJE 1. LINEARNI VREMENSKI INVARIJANTNI DINAMIČKI SUSTAVI 9

- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor ulaza,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ vektor izlaza,

i matrice:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica koeficijenata sustava
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrica ulaza sustava ($m \leq n$)
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrica izlaza sustava
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrica prijenosa sustava

te varijabla $t \in \mathbb{R}^+$ koja predstavlja vrijeme. x_0 početno je stanje sustava u točki t_0 . Shematski prikaz modela je dan na slici (1.3).



Slika 1.3: Prikaz linearnog vremenski neprekidnog dinamičkog modela [3].

Ulaz i izlaz definirani su na neprekidnom vremenskom intervalu $[0, +\infty)$. Komponente x_i , varijable:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazivamo varijable stanja.

Definicija 1.2.1. *Prostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$, koji sadrži sva stanja sustava za svaki $t \geq 0$, naziva se prostor stanja (engl. state space). Jednadžbe (1.4) i (1.5) nazivaju se **jednadžba stanja** odnosno **jednadžba izlaza**.*

U slučaju kada je $u(t) = 0$, govorimo o autonomnom linearnom sustavu. Tada imamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ako je poznato stanje sustava u početnom trenutku $x(0)$ i matrica $e^{\mathbf{A}t}$, tada možemo odrediti stanje sustava u bilo kojem kasnijem trenutku $x(t)$.

Teorem 1.2.2. *Rješenje vremenski invarijantnog linearnog neprekidnog sustava jednadžbi (1.4) i (1.5) dano je s*

$$x(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds \quad (1.7)$$

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds + \mathbf{D}u(t) \quad (1.8)$$

Dokaz. Pomoću Leibnizovog pravila za deriviranje integrala:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(s, t) ds \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds + f(b(t), t)\dot{b}(t) - f(a(t), t)\dot{a}(t),$$

za $t \geq 0$ želimo dobiti \dot{x} kao u (1.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}x_0 + \mathbf{B}u(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds \\ &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}x_0 + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{A} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds \\ &= \mathbf{A} \left(e^{\mathbf{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds \right) + \mathbf{B}u(t) \\ &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Primijetimo da za $t = 0$ imamo $x(0) = x_0$. □

Definicija 1.2.3. *Matrica $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ se naziva matrica prijelaza ili fundamentalna matrica.*

Za početni uvjet x_0 i ulaznu kontrolu $u(t)$, vektori $x(t)$ i $y(t)$ određuju **odziv sustava u vremenu** (engl. *system time response*) za $t \geq 0$. Izlazni odziv sustava je zbroj dva odziva: **prisilni odziv** (engl. *forced response*) i **prirodni odziv** (engl. *natural response*). Prisilni odziv se također naziva partikularnim rješenjem, dok se prirodni odziv naziva homogenim rješenjem sustava.

1.3 Matrica prijelaznih funkcija

Dosad smo se upoznali sa reprezentacijom sustava u prostoru stanja. Sada ćemo prikazati kako pretvaramo prostor stanja u matricu prijelaznih funkcija.

Promatramo jednadžbe (1.4) i (1.5). Neka su $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$ i $\mathbf{U}(s)$, redom, Laplaceove transformacije od $x(t)$, $y(t)$ i $u(t)$. Transformiramo li dane jednadžbe pomoću Laplaceovih transformacija dobivamo:

$$s\mathbf{X}(s) - x_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.11)$$

Nadalje imamo:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{R}(s)x_0 + \mathbf{R}(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{R}(s)x_0 + \mathbf{R}(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.13)$$

$$= \mathbf{C}\mathbf{R}(s)x_0 + \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad (1.14)$$

gdje su

$$\mathbf{R}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (1.16)$$

Definicija 1.3.1. Matrica $\mathbf{R}(s)$ se naziva **rezolventa** (engl. *resolvent*), a matrica $\mathbf{G}(s)$ se naziva **matrica prijelaznih funkcija** (engl. *transfer function*).

Matrica prijelaznih funkcija $\mathbf{G}(s)$ je dimenzija $p \times m$. Njezina (i, j) -ta vrijednost predstavlja prijenosnu funkciju iz j -tog ulaza u i -ti izlaz.

Definicija 1.3.2. Točke p za koje vrijedi da je $\mathbf{G}(p) = \infty$ se zovu **polovi** sustava.

U nastavku je dan primjer pretvorbe prostora stanja u matricu prijelaznih funkcija.

Primjer 1.3.3. Za dane jednadžbe stanja i izlaza:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.625 \end{bmatrix} x.$$

treba izračunati matricu prijenosnih funkcija. Za izračun je potrebna matrica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s & -1.5 \\ 4 & s + 4 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 6}.$$

Lako se izračuna $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} \left(\begin{bmatrix} 1.5 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1.5 \\ 4 & s + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 6}.$$

1.4 Primjeri

U nastavku ćemo dati primjer prikaza električnog sustava u prostoru stanja. Osnovni zakoni za strujne krugove su Kirchhoffovi zakoni. Pomoću njih se modeliraju jednadžbe za interpretaciju u prostoru stanja.

Primjer 1.4.1. Paralelni RLC strujni krug [3].

Zadani strujni krug sa slike (1.4) se sastoji od zavojnice induktivnosti L , otpora R i kapaciteta C . Primjenom Kirchhoffovog zakona na sustav dobivaju se sljedeće jednadžbe:

$$L \frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C} \int idt = e_i,$$

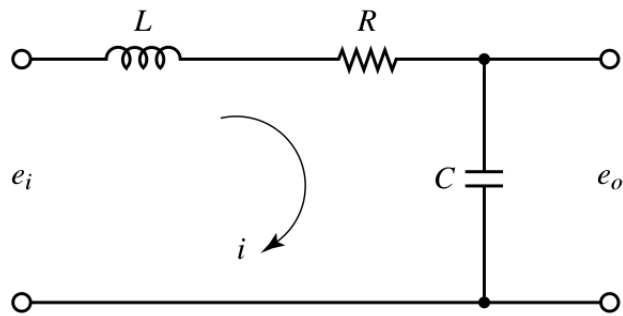
$$\frac{1}{C} \int idt = e_o. \tag{1.17}$$

Jednadžbe (1.17) daju matematički model strujnog kruga.

Model prostora stanja sustava može se zapisati kao:

$$\ddot{e}_0 + \frac{R}{L} \dot{e}_0 + \frac{1}{LC} e_0 = \frac{1}{LC} e_i.$$

Definiranjem varijabli stanja:



Slika 1.4: RLC strujni krug.

$$\begin{aligned} x_1 &= e_o, \\ x_2 &= \dot{e}_o \end{aligned} \quad (1.18)$$

te ulazne i izlazne varijable:

$$\begin{aligned} u &= e_i, \\ y &= e_o = x_1, \end{aligned} \quad (1.19)$$

nastaju diferencijalne jednačbe prvog reda:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

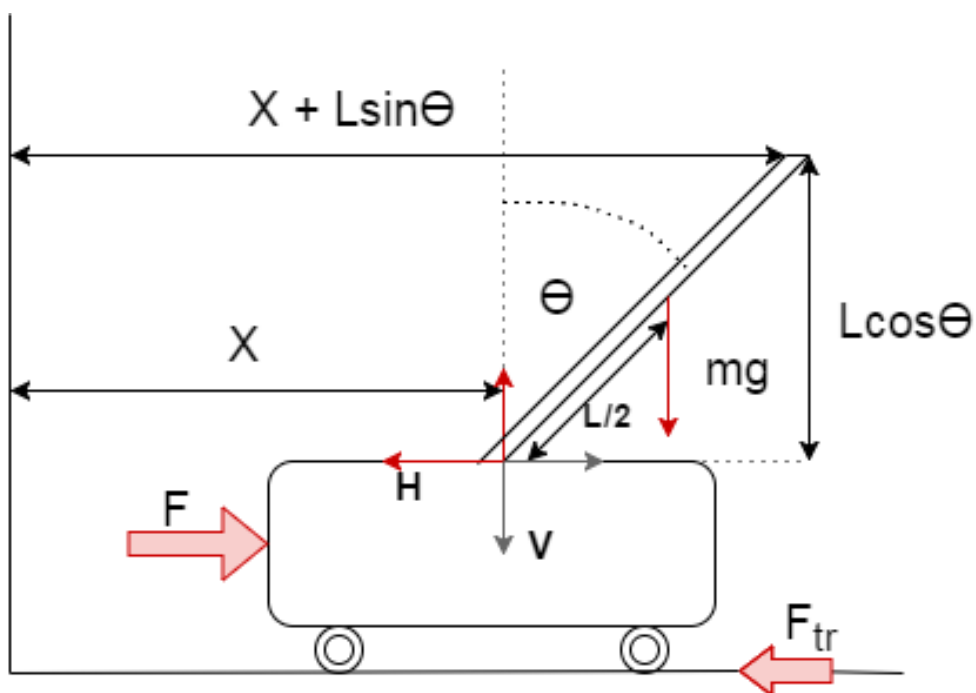
Zadnje dvije jednačbe daju matematički model sustava u prostoru stanja.

Osnovni zakoni mehanike su Newtonovi zakoni. Pomoću njih opisuju se mehanička gibanja i stvara se model u prostoru stanja.

Primjer 1.4.2. *Vozilo s inverznim klatnom.*

Sustav se sastoji od klatna pričvršćenog na motorizirano vozilo. Vozilo pomoću ulaznog signala balansira inverzno klatno mase m i dužine l , kao na slici (1.5). Neka je M masa vozila. Neka su F_H i F_V , redom, horizontalna i vertikalna sila kojima vozilo djeluje na klatno. Newton-ovi zakoni, uz linearizaciju problema, daju sljedeće jednačbe:

$$\begin{aligned} u &= (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\theta} \\ (J + mL^2)\ddot{\theta} &= -m\ddot{x}L + mgL\theta. \end{aligned} \quad (1.20)$$



Slika 1.5: Inverzno klatno [4]

Linearizirane jednadžbe kretanja mogu se prikazati u prostoru stanja pretvaranjem u diferencijalne jednadžbe prvog reda. Prvo treba izraziti $\ddot{\theta}$ i \ddot{x} :

$$\ddot{\theta} = \frac{bmL}{k}\dot{x} + \frac{(M + m)mgL}{k}\theta - \frac{mL}{k}u, \quad (1.21)$$

$$\ddot{x} = -\frac{J + mL^2}{k}b\dot{x} - \frac{gm^2L^2}{k}\theta + \frac{J + mL^2}{k}u, \quad (1.22)$$

pomoću jednadžbi (1.20), uz supstituciju:

$$k = J(M + m) + mL^2.$$

Postupak dobivanja jednadžbi može se vidjeti u dodatku (A). Za prostor stanja i izlaz sustava (za izlaz sustava se mjeri pozicija vozila i kut otklona klatna od uspravnog položaja)

iz jednadžbi (1.21) i (1.22) se dobivaju sljedeće matrične jednadžbe:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(J+mL^2)b}{k} & -\frac{gm^2L^2}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bmL}{k} & \frac{(M+m)mgL}{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(J+mL^2)}{k} \\ 0 \\ -\frac{mL}{k} \end{bmatrix} u,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

Tada su matrice **A**, **B**, **C** i **D**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(J+mL^2)b}{k} & -\frac{gm^2L^2}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bmL}{k} & \frac{(M+m)mgL}{k} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(J+mL^2)}{k} \\ 0 \\ -\frac{mL}{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Diferencijalne jednadžbe predstavljaju linearizirani sustav inverznog klatna u stanju prostora. Za parametre dane u (A), prostor stanja izračunat je pomoću Matlab koda (B):

```
>> inv_pend_ss

sys_ss =
  A =

           x      x_dot      theta  theta_dot
x           0           1           0           0
x_dot       0      -0.1628      -1.367           0
theta        0           0           0           1
theta_dot    0       0.4651       31.91           0
  B =

           u
```

x	0			
x_dot	1.628			
theta	0			
theta_dot	-4.651			
C =				
	x	x_dot	theta	theta_dot
x	1	0	0	0
phi	0	0	1	0
D =				
	u			
x	0			
phi	0			
Continuous-time state-space model.				

U prethodnom primjeru prikazan je sustav inverznog klatna u prostoru stanja. Radi lakše analize, ponekad je potrebno izračunati prijelazne funkcije koje predstavljaju fazni pomak odnosno amplitudu, u omjeru s jačinom ulaza. U primjerima tijekom rada će se podrazumijevati da su parametri iz (A) uvijek isti.

Primjer 1.4.3. Laplaceove jednadžbe inverznog klatna.

Iz sustava jednadžbi (1.20) pomoću Laplaceovih transformacija se dobivaju sljedeće jednadžbe:

$$(J + mL^2)\Theta(s)s^2 - mgL\Theta(s) = -mLX(s)s^2, \tag{1.23}$$

$$U(s) = (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s + mL\Theta(s)s^2, \tag{1.24}$$

iz toga slijedi da je:

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{J\Theta(s)}{mL} - L\Theta(s) + \frac{g}{s^2}\Theta(s) \\ &= -\frac{J + mL^2}{mL}\Theta(s) + \frac{g}{s^2}\Theta(s) \\ &= \left(\frac{g}{s^2} - \frac{J + mL^2}{mL}\right)\Theta(s). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Na temelju jednadžbi (1.24) i (1.25) se dobiva:

$$\begin{aligned} U(s) &= (M+m) \left[\left(\frac{g}{s^2} - \frac{J+mL^2}{mL} \right) \Theta(s) \right] s^2 + bs \left[\left(\frac{g}{s^2} - \frac{J+mL^2}{mL} \right) \Theta(s) \right] + mL \Theta(s) s^2 \\ &= \left(Mg - \frac{MJ s^2}{mL} - ML s^2 + mg - \frac{mJ s^2}{mL} - mL s^2 + \frac{bg}{s} - \frac{Jbs}{mL} - bsL + mL s^2 \right) \Theta(s), \end{aligned}$$

$$U(s)s^2 = \left(-\frac{(M+m)(J+mL^2) - m^2L^2}{mL} s^4 - \frac{b(J+mL^2)}{mL} s^3 + \frac{(M+m)gL}{mL} s^2 + \frac{bgmL}{mL} s \right) \Theta(s).$$

Uvrštavanjem supstitucije

$$q = (M+m)(J+mL^2) - m^2L^2,$$

dobivamo odnos ulaza i kuta otklona klatna:

$$\begin{aligned} U(s)s^2mL &= \left(-qs^4 - b(J+mL^2)s^3 + (M+m)gLs^2 + bgmLs \right) \Theta(s) \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= -\frac{\frac{mL}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(J+mL^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)gL}{q}s^2 - \frac{bgmL}{q}s}. \end{aligned}$$

Analognim računom se dobiva odnos ulaza i pozicije kolica:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{J+mL^2}{q}s^2 - \frac{gL}{q}}{s^4 + \frac{b(J+mL^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)gL}{q}s^2 - \frac{bgmL}{q}s}.$$

Nakon sređivanja razlomka, prijelazne funkcije glase:

$$P_{\text{klatno}}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{mL}{q}s}{s^3 + \frac{b(J+mL^2)}{q}s^2 - \frac{(M+m)gL}{q}s - \frac{bgmL}{q}} \quad \left[\frac{\text{rad}}{N} \right] \quad (1.26)$$

$$P_{\text{vozilo}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{J+mL^2}{q}s^2 - \frac{gL}{q}}{s^4 + \frac{b(J+mL^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)gL}{q}s^2 - \frac{bgmL}{q}s} \quad \left[\frac{m}{N} \right] \quad (1.27)$$

U Matlab kodu (B) transfer funkcije P_{klatno} i P_{vozilo} imaju vrijednosti:

```

>> InvPendTF

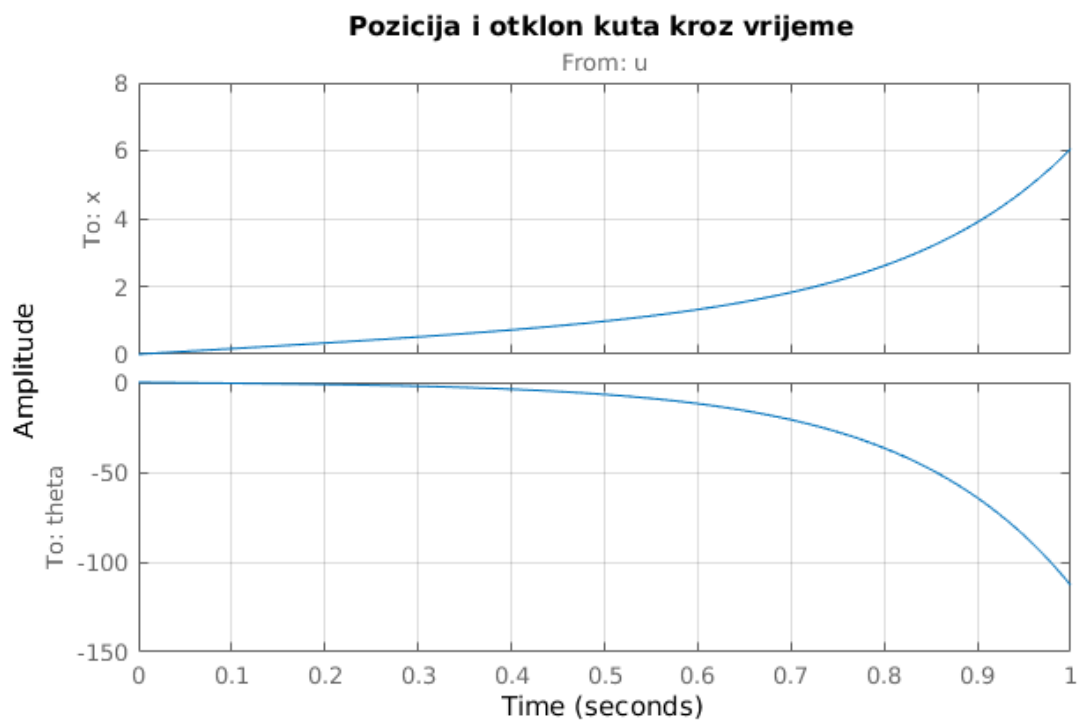
sys_tf =

From input "u" to output...
                2.818e-09 s^2 - 7.889e-08
x:  -----
    1.731e-09 s^4 + 2.818e-10 s^3 - 5.522e-08 s^2 - 7.889e-09 s

                -1.248e-06 s
theta: -----
        2.683e-07 s^3 + 4.368e-08 s^2 - 8.562e-06 s - 1.223e-06

Continuous-time transfer function.
    
```

Na slici (1.6) je prikazano kako sustav reagira na impulsni podražaj u otvorenoj petlji.



Slika 1.6: Prikaz Transfer funkcije u otvorenoj petlji pod utjecajem impulsne sile.

Poglavlje 2

Upravlјivost i osmotrivost sustava

Osnovni pojmovi teorije kontrole sustava su upravljivost i osmotrivost. Koncepte upravljivosti i osmotrivosti prvi je predstavio Rudolf E. Kalman. Upravlјivost i osmotrivost igraju važnu ulogu u dizajniranju kontrolnih sustava u prostoru stanja. Stanje upravljivosti i osmotrivosti daje informaciju o postojanju rješenja nekog problema. Također, važno je znati u kojim okolnostima je sustav upravljiv (osmotriv) odnosno neupravljiv (neosmotriv).

2.1 Upravlјivost

U nastavku definiramo pojam upravljivosti.

Definicija 2.1.1. *Upravlјivost vremenski neprekidnog sustava.*

Za sustav:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

kažemo da je **upravljiv**, ako se za svaki početni uvjet $x(0)$ sustav može dovesti do bilo koje završne točke $x_1 = x(t_1)$ u nekom konačnom vremenu t_1 , koristeći odgovarajuću funkciju $u(t)$.

Postavlja se pitanje kada su matrice \mathbf{A} odnosno \mathbf{B} dovoljno "bogate" da upravljamo sustavom na željeni način? Sljedeći teorem daje odgovor na to pitanje.

Teorem 2.1.2. *Kriterij upravljivosti za vremenski neprekidni sustav.*

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \leq n$). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) *Sustav (2.1) je upravljiv.*

(b) Matrica $\mathbf{C}_M \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ definirana s:

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

je punog ranga n .

(c) Matrica

$$\mathbf{W}_C = \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt$$

je invertibilna za bilo koji $t_1 > 0$.

(d) Ako je λ svojstvena vrijednost i x svojstveni vektor matrice \mathbf{A}^T , td. $\mathbf{A}^T x = \lambda x$, tada je $x^T \mathbf{B} \neq 0$.

(e) $\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}, \mathbf{B}) = n$ za svaku svojstvenu vrijednost λ od \mathbf{A} .

(f) Svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ mogu biti proizvoljno dodjeljene sa odgovarajućim odabirom \mathbf{K} . Za realne matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{K} kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim parovima.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $t_0 = 0$ i $x(t_0) = x_0$.

i) (a) \rightarrow (b). Pretpostavimo suprotno, tj. rang C_M nije n . Znamo da vrijedi (1.7), tj. po definiciji eksponencijalne matrice:

$$\begin{aligned} x(t_1) - e^{\mathbf{A}t_1} x_0 &= \int_0^{t_1} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}(t_1 - t) + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}(t_1 - t)^2 + \dots \right] \mathbf{B}u(t) dt \\ &= \mathbf{B} \int_0^{t_1} u(t) dt + \mathbf{A}\mathbf{B} \int_0^{t_1} (t_1 - t)u(t) dt + \mathbf{A}^2\mathbf{B} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - t)^2}{2!} u(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Iz teorema (1.1.1) slijedi da je vektor $x(t_1)$ linearna kombinacija stupaca od \mathbf{B} , $\mathbf{A}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$, \dots , $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$. Kako C_M matrica nije punog ranga, stupci te matrice ne mogu biti baza za prostor stanja, stoga postoji neki t_1 , $x(t_1) = x_1$ koji ne može biti postignut, iz čega slijedi da sustav nije upravljiv.

ii) (b) \rightarrow (c). Pretpostavimo da je matrica C_M punog ranga te matrica \mathbf{W}_C singularna. Neka je v netrivialan vektor tako da $\mathbf{W}_C v = 0$. Tada je $v^T \mathbf{W}_C v = 0$, odnosno:

$$\int_0^{t_1} v^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} v dt = 0.$$

Integrand je uvijek nenegativan s obzirom da je u obliku $c^T(t)c(t)$, gdje je $c(t) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} v$. Da bi integral bio nula mora vrijediti:

$$v^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} = 0, \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Za svaki stupanj deriviranja $c(t)$ po t , u $t = 0$ imamo:

$$v^T \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Slijedi da je vektor v ortogonalan na stupce matrice \mathbf{C}_M . Kako smo pretpostavili da je matrica \mathbf{C}_M punog ranga n , imamo da je $v = 0$, što je kontradikcija.

iii) (c) \rightarrow (a). Pokazati ćemo da vrijedi $x(t_1) = x_1$. Izaberemo li funkciju $u(t)$:

$$u(t) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_1-t)} \mathbf{W}_C^{-1} (-e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + x_1),$$

iz rješenja (1.7) slijedi:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-t)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_1-t)} \mathbf{W}_C^{-1} (-e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + x_1) dt \\ &= e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + \left(\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-t)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_1-t)} dt \right) \mathbf{W}_C^{-1} (-e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + x_1) \\ &= e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + \mathbf{W}_C \mathbf{W}_C^{-1} (-e^{\mathbf{A}t_1} x_0 + x_1) \\ &= x_1. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je sustav upravljiv.

iv) (b) \rightarrow (d). Neka je x svojstveni vektor od \mathbf{A}^T pripadne svojstvene vrijednosti λ , tako da vrijedi $x^T \mathbf{A} = \lambda x^T$. Pretpostavimo da $x^T \mathbf{B} = 0$. Tada vrijedi:

$$x^T \mathbf{C}_M = [x^T \mathbf{B}, x^T \mathbf{A} \mathbf{B}, x^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B}, \dots, x^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = 0.$$

Kako je matrica \mathbf{C}_M punog ranga, slijedi da je $x = 0$, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

v) (d) \rightarrow (b). Pretpostavimo da nijedan svojstveni vektor od \mathbf{A}^T nije ortogonalan na stupce od \mathbf{B} , ali je rang $\mathbf{C}_M = k < n$. Iz dekompozicije neupravljivog sustava (vidi [1], teorem 6.4.1.), zbog $\mathbf{C}_M < n$, postoji nesingularna matrica \mathbf{T} tako da:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje su $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ reda $(n - k)$ i $k = \text{rank}(\mathbf{C}_M)$. Neka je v_2 svojstveni vektor od $(\bar{\mathbf{A}}_{22})^T$ koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ . Tada:

$$(\bar{\mathbf{A}})^T \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11}^T & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{12}^T & \bar{\mathbf{A}}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{22}^T v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

iz čega dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & v_2^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Vidimo da postoji svojstveni vektor, $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$, od matrice $(\bar{\mathbf{A}})^T$ koji je ortogonalan na stupce matrice $\bar{\mathbf{B}}$, što je kontradikcija.

vi) $(b) \rightarrow (e)$. $\text{Rang}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}) < n$ ako i samo ako postoji netrivialan vektor v tako da $v^T(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, što je ekvivalentno zapisu:

$$\mathbf{A}^T v = \lambda v \quad \text{i} \quad v^T \mathbf{B} = 0,$$

što je u kontradikciji sa (d) .

vii) $(e) \rightarrow (b)$. Kada (e) ne bi bilo točno, tada iz (d) slijedi:

$$x^T [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = 0,$$

što znači da je $\text{Rang}(\mathbf{C}_M) < n$.

viii) $(f) \rightarrow (a)$ i $(a) \rightarrow (f)$. Može se vidjeti u [2].

□

Napomena 2.1.3. Umjesto upravljivosti sustava često se koristi termin upravljivosti para matrica (A, B) .

Primjer 2.1.4. Neka je zadan sustav:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}u.$$

Za matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vrijednost matrice upravljivosti je:

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje se vidi da je \mathbf{C}_M singularna matrica, tj. sustav je neupravljiv. Ukoliko su matrice zadane s:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{C}_M je regularan, sustav je upravljiv.

Definicija 2.1.5. Matrica

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

se naziva **upravljivačka matrica** (engl. *controllability matrix*).

Napomena 2.1.6. Upravljivost definirana s 2.1.1 se zapravo odnosi na potpuno upravljive sustave, gdje je svako stanje sustava upravljivo.

Za komponentu $u_j(t)$ ulaznog vektora $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$, za stupac b_j matrice \mathbf{B} , rang upravljivačke matrice

$$\mathbf{C}_M^j = (b_j, \mathbf{A}b_j, \dots, \mathbf{A}^{n-1}b_j)$$

određuje broj upravljivih stanja koristeći ulaz $u_j(t)$.

Iz teorema 2.1.2 se vidi da je upravljivost odnosno neupravljivost para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) direktno povezana sa svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima sustava matrice \mathbf{A} i njihovim odnosom sa matricom \mathbf{B} .

Definicija 2.1.7. Mod sustava, tj. svojstvena vrijednost λ matrice \mathbf{A} je upravljiva ako pripadni svojstveni vektor nije ortogonalan na stupce matrice \mathbf{B} . U suprotnom, mod nije upravljiv.

Primjer 2.1.8. Upravljivost inverznog klatna. Iz prostora stanja inverznog klatna (1.4.2), pomoću programskog jezika MatLab, provjerimo upravljivost inverznog klatna.

```

>> ctrb(sys_ss)

ans =
0      1.6279    -0.2650     6.4033
1.6279   -0.2650     6.4033    -2.0778
0      -4.6512     0.7572    -148.5278
-4.6512   0.7572    -148.5278    27.1372

>> rank(ctrb(sys_ss))

ans =
4

```

Vidi se da je rang jednak dimenziji stanja sustava, iz čega slijedi da je sustav upravljiv.

2.2 Osmotrivost

U ovom poglavlju su prikazani osnovni koncepti vezani uz osmotrivost sustava. Koncept osmotrivosti je dualan konceptu upravljivosti. Osmotrivost je korisna kod rješavanja problema rekonstrukcije varijabli stanja koje nisu izmjerive.

Definicija 2.2.1. Za vremenski neprekidan sustav (2.1) kažemo da je osmotriv ako postoji $t_1 > 0$ tako da početno stanje $x(0)$ može biti jedinstveno određeno iz poznatih varijabli $u(t)$ i $y(t)$, $0 \leq t \leq t_1$.

Teorem 2.2.2. Kriterij osmotrivosti za vremenski neprekidni sustav.

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \leq n$). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- (a) Sustav (2.1) je osmotriv.
- (b) Matrica O_M definirana sa:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

je punog ranga n .

(c) *Matrica*

$$\mathbf{W}_O = \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C} \mathbf{C}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt$$

je invertibilna za bilo koji $t_1 > 0$.

(d) *Matrica*

$$\begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

je punog ranga za svaku svojstvenu vrijednost λ od \mathbf{A} .

(e) Nijedan svojstveni vektor matrice \mathbf{A} nije ortogonalan na retke matrice \mathbf{C} , tj. ako je λ svojstvena vrijednost i y pripadni svojstveni vektor matrice \mathbf{A} tada $\mathbf{C}y \neq 0$.

(f) Postoji matrica \mathbf{L} tako da svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$ budu proizvoljne. Ukoliko su \mathbf{A} , \mathbf{C} i \mathbf{L} realne matrice, tada kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim parovima.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu za kriterij upravljivosti pa ga se ovdje neće navoditi. \square

Napomena 2.2.3. Umjesto osmotrivost sustava često se koristi termin osmotrivosti para matrica (\mathbf{A}, \mathbf{C}) .

Primjer 2.2.4. Osmotrivost inverznog klatna. Iz prostora stanja inverznog klatna (1.4.2), pomoću programskog jezika MatLab, provjerimo osmotrivost inverznog klatna.

```
>> obsv(sys_ss)
ans =
1.0000      0      0      0
      0      0      1.0000      0
      0      1.0000      0      0
      0      0      0      1.0000
      0     -0.1628     -1.3674      0
      0      0.4651     31.9070      0
      0      0.0265      0.2226     -1.3674
      0     -0.0757     -0.6360     31.9070
>> rank(obsv(sys_ss))
ans =
4
```

Vidi se da je rang matrice \mathbf{O}_M jednak dimenziji stanja sustava, iz čega slijedi da je sustav osmotriv.

2.3 Udaljenost do neupravljivog sustava

Koncepti upravljivosti i osmotrivost su generički. Njihovo određivanje ovisi isključivo o rang matrica C_M i O_M . Lako je vidjeti da bilo koji neupravljiv sustav može biti proizvoljno blizu neupravljivom sustavu. U primjenama važnije je znati koliko je blizu upravljiv sustav neupravljivom nego je li sustav općenito upravljiv ili nije.

Primjer 2.3.1. *Udaljenost do neupravljivog sustava kod inverznog klatna. Pokazalo se da je model inverznog klatna upravljiv, no zanima nas kolika je udaljenost do najbližeg neupravljivog sustava. SVD dekompozicijom matrice C_M dobivamo sljedeće:*

```
>> [U, Eigs, V] = svd(ctrb(A, B))

U =
  0.0302    0.0307    0.6798   -0.7322
 -0.0361    0.0248   -0.7319   -0.6800
 -0.6744   -0.7371    0.0338   -0.0274
  0.7368   -0.6747   -0.0328   -0.0284

Eigs =
163.3186         0         0         0
         0 135.3386         0         0
         0         0    1.5273         0
         0         0         0    1.3314

V =
 -0.0213    0.0235   -0.6802   -0.7324
  0.0230    0.0219    0.7324   -0.6802
 -0.6747    0.7374    0.0211    0.0237
  0.7374    0.6747   -0.0232    0.0217,
```

Najmanja svojstvena vrijednost je 1.3314, što znači da je sustav udaljen za točno 1.3314 od neupravljivog sustava.

Često ćemo u primjeni morat odlučiti koliko male svojstvene vrijednosti smatramo nulama te tako utjecati na rang matrice upravljivosti.

Poglavlje 3

Stabilnost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti

Stabilnost je općenito važno svojstvo sustava. U ovom poglavlju definiramo što je stabilnost linearnog vremenski invarijantnog sustava te koji su njegovi aspekti. Klasični pristup za određivanje stabilnosti je rješavanje Lyapunovljeve jednadžbe.

3.1 Stabilnost

Stabilnost sustava definira se s obzirom na ravnotežno stanje.

Definicija 3.1.1. *Ravnotežno stanje* (engl. *equilibrium point*) sustava:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

je vektor x_e koji zadovoljava:

$$\mathbf{A}x_e = 0,$$

bez utjecaja vanjske sile.

Očito je $x_e = 0$ ravnotežno stanje, a jedinstveno je ako i samo ako je \mathbf{A} regularna matrica.

Definicija 3.1.2. *Ravnotežno stanje* x_e je **asimptotički stabilno** ako se za bilo koje početno stanje, vektor $x(t)$ asimptotički približava x_e kada $t \rightarrow \infty$.

Sustav (3.1) je asimptotički stabilan ako i samo ako ravnotežno stanje $x_e = 0$ je asimptotički stabilno. Slijedi da je sustav asimptotički stabilan ako i samo ako $x(t) \rightarrow 0$ dok $t \rightarrow \infty$.

U nastavku prikazujemo kriterij za asimptotsku stabilnost vremenski neprekidnih sustava.

Teorem 3.1.3. *Sustav (3.1) je asimptotički stabilan ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} imaju negativne realne vrijednosti.*

Dokaz. Iz (1.2.2) znamo da je rješenje jednadžbe (3.1) dano s:

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x_0.$$

Slijedi da $x(t) \rightarrow 0$ ako i samo ako $e^{\mathbf{A}t} \rightarrow 0$ dok $t \rightarrow \infty$. Pokazat će se da prethodna tvrdnja vrijedi ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} imaju negativne realne komponente.

Neka je $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_k)$ Jordanova kanonska forma(1.1) matrice \mathbf{A} . Tada vrijedi:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X} \text{diag}(e^{\mathbf{J}_1 t}, e^{\mathbf{J}_2 t}, \dots, e^{\mathbf{J}_k t})\mathbf{X}^{-1}.$$

Neka je λ_i svojstvena vrijednost matrice \mathbf{A} povezana s \mathbf{J}_i . Tada $e^{\mathbf{J}_i t} \rightarrow 0$ ako i samo ako λ_i ima negativan realni dio. Slijedi da $e^{\mathbf{A}t} \rightarrow 0$ ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti od \mathbf{A} imaju negativan realni dio. \square

Definicija 3.1.4. *Matrica \mathbf{A} naziva se **stabilna matrica** ako sve svojstvene vrijednosti te matrice imaju negativne realne dijelove.*

Za stabilne matrice ponekad se koristi naziv **Hurwitzove** matrice. Analogno, svojstvena vrijednost sa negativnim realnim djelom naziva se stabilna svojstvena vrijednost.

Definicija 3.1.5. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{A} . Tada najmanja udaljenost $\min(-\text{Re}(\lambda_i)) : i = 1, \dots, n$ do imaginarne osi naziva se **marginu stabilnosti** (engl. *stability margin*) od \mathbf{A} .*

Nadalje, kada se kaže da je sustav stabilan misli se na asimptotsku stabilnost te će se pripadna matrica \mathbf{A} odnositi na stabilnu matricu, a ne na asimptotski stabilnu matricu.

Primjer 3.1.6. Neka su zadane tri matrice:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.3 + 2i & 0 \\ 0 & -0.3 - 100i \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & 0.625 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1.25 + 5i & 0 \\ 0 & 1.25 - 20i \end{bmatrix}$$

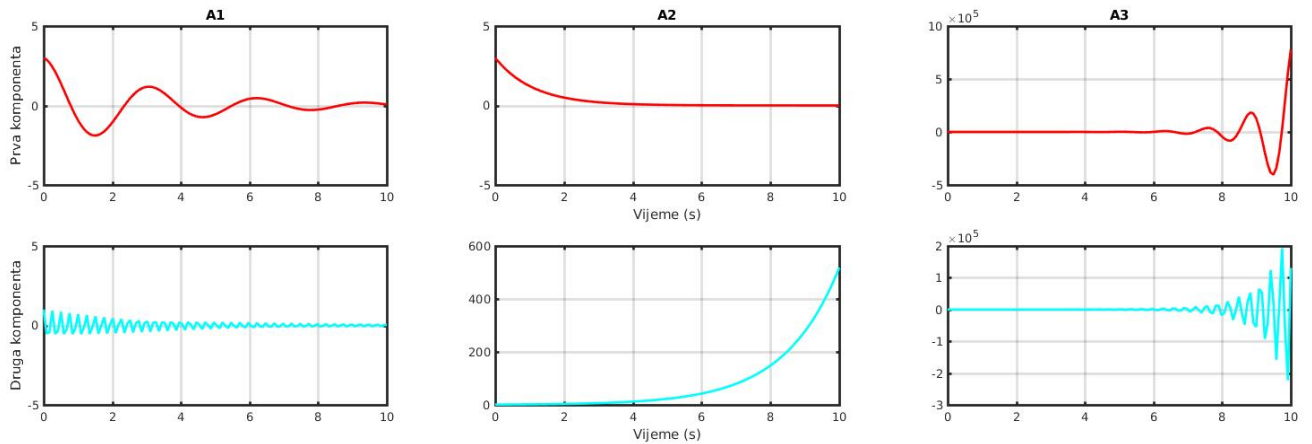
Neka je dan početni uvjet x_0 :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ponašanje sustava

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}_i x(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

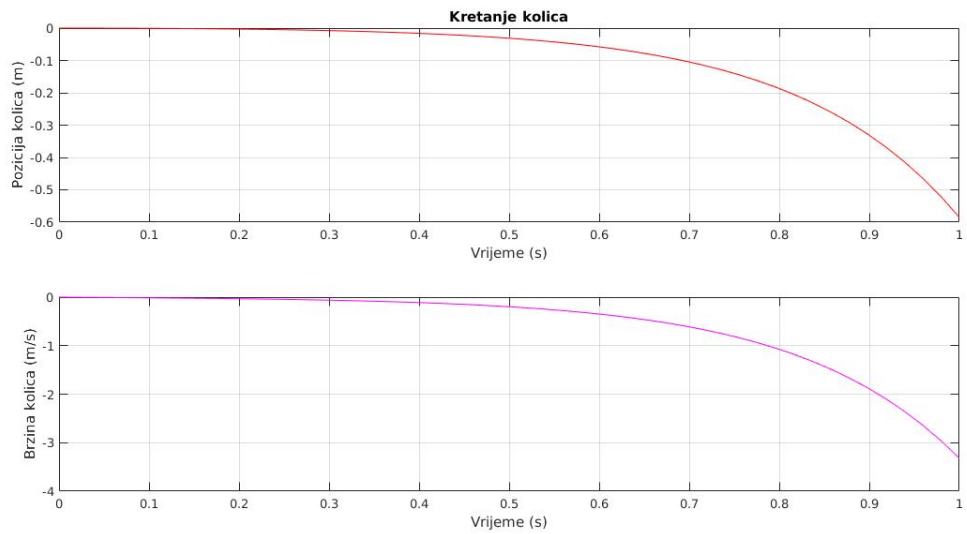
koz vrijeme je prikazano grafovima (3.1), po komponentama.



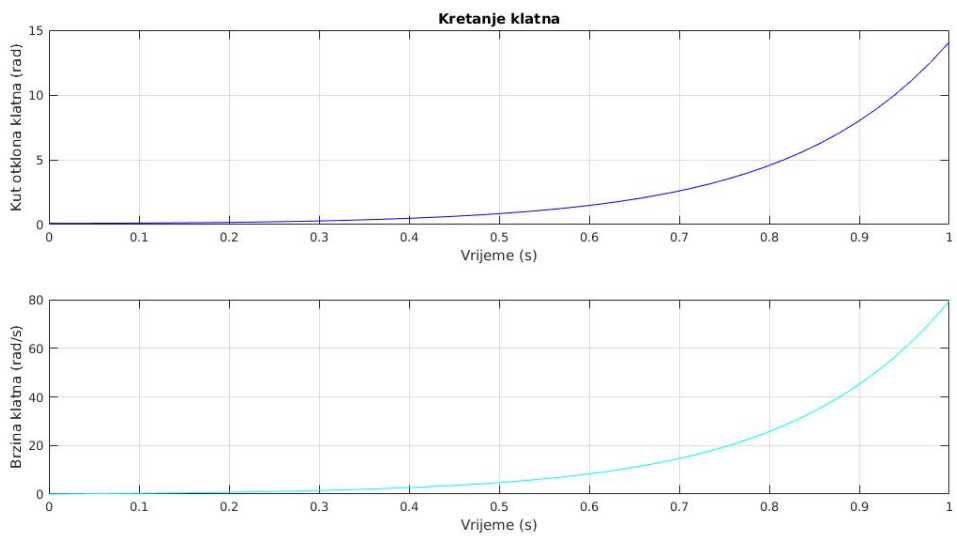
Slika 3.1: Stabilnost sustava s matricama \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 .

Komponente sa negativnim svojstvenim vrijednostima su se stabilizirale, dok je za druge komponente sustav vidno nestabilan. Primijetimo da svojstvene vrijednosti sa imaginarnim komponentama sinusoidalno konvergiraju odnosno divergiraju.

Primjer 3.1.7. U primjeru (1.4.2) smo dobili matricu \mathbf{A} stanja prostora inverznog klatna. Ponašanje vozila i klatna kroz vrijeme, za početno stanje $x_0 = [0, 0, 0.1, 0]^T$, je dano na slikama (3.2) i (3.2).



Slika 3.2: Stabilnost vozila.



Slika 3.3: Stabilnost klatna.

Iz slika se vidi da sustav inverznog klatna nije stabilan.

3.2 Lyapunovljeva teorija stabilnosti

U ovom odjeljku dajemo Lyapunovljev kriterij stabilnosti. Prije doba računala, pronalaženje svojstvenih vrijednosti matrice \mathbf{A} bio je jako težak zadatak. Zbog toga se tražilo rješenje koje ne uključuje računanje svojstvenih vrijednosti eksplicitno. Ruski matematičar A. Lyapunov (1857-1918) je razvio kriterij stabilnosti za linearne sustave jednadžbi.

Teorem 3.2.1. *Lyapunovljev kriterij stabilnosti.*

Sustav:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t)$$

je asimptotički stabilan ako i samo ako za bilo koju simetričnu pozitivno definitnu matricu \mathbf{M} , postoji jedinstvena simetrična pozitivno definitna matrica \mathbf{X} koja zadovoljava jednadžbu:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} = -\mathbf{M} \quad (3.2)$$

Dokaz. Definirajmo matricu \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} dt. \quad (3.3)$$

Kada je sustav asimptotički stabilan, pokazat ćemo da je \mathbf{X} jedinstveno rješenje jednadžbe (3.2) te da je simetrična pozitivno definitna matrica.

Uvrštavanjem \mathbf{X} u Lyapunovljevu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} &= \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{A} dt + \int_0^{\infty} \mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} \right) dt \\ &= \left[e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Kako je \mathbf{A} stabilna, slijedi $e^{\mathbf{A}^T t} \rightarrow 0$ dok $t \rightarrow \infty$. Dobivamo da matrica \mathbf{X} definirana sa (3.3) zadovoljavaju jednadžbu (3.2).

Kako bismo pokazali da je \mathbf{X} pozitivno definitna, moramo pokazati da je $u^T \mathbf{X} u > 0$ za svaki vektor $u \neq 0$. Koristeći (3.3) imamo:

$$u^T \mathbf{X} u = \int_0^{\infty} u^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} t} u dt.$$

Zbog regularnosti eksponencijalnih matrica $e^{A^T t}$ i $e^{A t}$ te pozitivne definitnosti matrice \mathbf{M} zaključujemo da vrijedi $u^T \mathbf{X} u > 0$

Kako bismo dokazali da je \mathbf{X} jedinstven, pretpostavimo da postoje dva rješenja \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 jednačbe (3.2). Tada:

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \mathbf{A} = 0,$$

$$e^{A^T t} (\mathbf{A}^T (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \mathbf{A}) e^{A t} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{A^T t} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) e^{A t} \right] = 0,$$

iz čega slijedi da je $e^{A^T t} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) e^{A t}$ konstantna matrica za svaki t . Za $t = 0$ dobivamo da je $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = 0$ iz čega slijedi da su matrice jednake.

Sada ćemo dokazati obratnu tvrdnju, tj. ako je \mathbf{X} simetrična pozitivno definitna matrica koja zadovoljava jednačbu (3.3), tada je \mathbf{A} stabilna matrica. Neka je λ svojstvena vrijednost te x svojstveni vektor za λ matrice \mathbf{A} . Množenjem jednačbe (3.2) sa x^* s lijeva i sa x s desna dobivamo:

$$x^* \mathbf{X} \mathbf{A} x + x^* \mathbf{A}^T \mathbf{X} x = \lambda x^* \mathbf{X} x + \bar{\lambda} x^* \mathbf{X} x = (\lambda + \bar{\lambda}) x^* \mathbf{X} x = -x^* \mathbf{M} x.$$

Kako su \mathbf{X} i \mathbf{M} obje simetrične pozitivno definitne matrice, imamo da je $(\lambda + \bar{\lambda} < 0)$ iz čega slijedi $Re(\lambda) < 0$, tj. \mathbf{A} je stabilna matrica. \square

Napomena 3.2.2. Matrica \mathbf{X} definirana sa (3.3) zadovoljava (3.2) čak i kada matrica \mathbf{M} nije pozitivno definitna.

Definicija 3.2.3. Matrična jednačba:

$$\mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} = -\mathbf{M},$$

se naziva **Lyapunovljeva jednačba**.

Neka je \mathbf{A} stabilna matrica te \mathbf{M} simetrična pozitivno semidefinitna. Jedinstveno rješenje \mathbf{X} Lyapunovljeve jednačbe:

$$\mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} = -\mathbf{M}$$

je dano s:

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{A^T t} \mathbf{M} e^{A t} dt.$$

U primjeni matrica \mathbf{M} bude češće pozitivno semidefinitna nego definitna.

Napomena 3.2.4. *Jednadžba (3.2) je zapravo sustav linearnih jednadžbi, izražena u pomalo neuobičajenoj formi. Pomoću vektorizacije matrice i Kroneckerovog produkta (1.1) možemo problem svesti na standardnu formu sustava linearnih jednadžbi. Vektorizacijom Lyapunovljeve jednadžbe dobivamo:*

$$\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T) = \text{vec}(-\mathbf{M})$$

te primjenom teorema (1.1.4):

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{I})\text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(-\mathbf{M}).$$

Rezultat je standardni linearni sustav jednadžbi, pomoću kojega možemo lako odrediti postojanje i jedinstvenost rješenja.

3.3 Osmotrivost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti

Teorem 3.3.1. *Neka je \mathbf{A} stabilna matrica. Tada Lyapunovljeva jednadžba:*

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} = -\mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (3.5)$$

ima jedinstveno simetrično pozitivno definitno rješenje \mathbf{X} ako i samo ako je par matrica (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da osmotrivost para matrica (\mathbf{A}, \mathbf{C}) i stabilnost matrice \mathbf{A} impliciraju da je \mathbf{X} pozitivno definitna. Kako je \mathbf{A} stabilna, rješenje jednadžbe (3.5) je dano sa (3.3):

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{A^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{A t} dt.$$

Ako pretpostavimo da \mathbf{X} nije pozitivno definitna, tada postoji vektor $x \neq 0$ tako da $\mathbf{X}x = 0$. U tom slučaju:

$$\int_0^{\infty} \|\mathbf{C}e^{A t} x\|^2 dt = 0.$$

Zaključujemo da je $\mathbf{C}e^{A t} x = 0$. U točki $t = 0$, deriviranjem po t , dobivamo $\mathbf{C}\mathbf{A}^i x = 0$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Slijedi da je $\mathbf{O}_M x = 0$ gdje je \mathbf{O}_M matrica osmotrivosti. Kako je (\mathbf{A}, \mathbf{C})

osmotriv, \mathbf{O}_M je punog ranga iz čega slijedi da je $x = 0$, što je kontradikcija.

Sada dokazujemo obratnu tvrdnju. Stabilnost matrice \mathbf{A} i pozitivna definitnost matrice \mathbf{X} impliciraju osmotrivost para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) .

Pretpostavimo suprotno, tj. (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nije osmotriv. Tada iz (e) teorema (2.2.2) o kriteriju osmotrivosti imamo da postoji svojstveni vektor x od \mathbf{A} tako da $\mathbf{C}x = 0$. Neka je λ svojstvena vrijednost od \mathbf{A} za vektor x . Tada iz jednadžbe (3.5) množenjem s lijeve i s desne strane dobivamo:

$$\begin{aligned} x^* \mathbf{X} \mathbf{A} x + x^* \mathbf{A}^T \mathbf{X} x &= -x^* \mathbf{C}^T \mathbf{C} x, \\ (\lambda + \bar{\lambda}) x^* \mathbf{X} x &= -\|\mathbf{C}x\|^2. \end{aligned}$$

Zbog $\mathbf{C}x = 0$ imamo:

$$(\lambda + \bar{\lambda}) x^* \mathbf{X} x = 0.$$

Kako je \mathbf{A} stabilna matrica imamo da je $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ što povlači da je:

$$x^* \mathbf{X} x = 0.$$

\mathbf{X} je pozitivno definitna matrica, iz čega slijedi da je $x = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. \square

Sljedeće ćemo pokazati nužan i dovoljan uvjet stabilnosti uz pretpostavku da je (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv.

Teorem 3.3.2. *Neka je (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv. Tada je \mathbf{A} stabilna ako i samo ako postoji jedinstvena simetrična pozitivno definitna matrica \mathbf{X} koja je rješenje Lyapunovljeve jednadžbe (3.2).*

Dokaz. U prethodnom teoremu smo dokazali da ako je \mathbf{A} stabilna i (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv, tada postoji jedinstveno, simetrično, pozitivno definitno rješenje \mathbf{X} Lyapunovljeve jednadžbe dano s:

$$\int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt.$$

Dokazujemo obratni smjer. Neka je (λ, x) svojstveni par od \mathbf{A} . Iz prošlog teorema imamo:

$$(\lambda + \bar{\lambda}) x^* \mathbf{X} x = -\|\mathbf{C}x\|^2.$$

Kako je (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv, $\mathbf{C}x \neq 0$ i \mathbf{X} pozitivno definitna, $x^* \mathbf{X} x > 0$ slijedi da $\lambda + \bar{\lambda} < 0$, tj. \mathbf{A} je stabilna matrica. \square

U ostatku rada simetričnu pozitivno definitnu (semidefinitnu) matricu \mathbf{X} označavat ćemo sa $\mathbf{X} > 0$ (≥ 0). Iz praktičnih razloga posljednja tri teorema ćemo ujediniti u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3.3. *Neka je \mathbf{X} rješenje Lyapunovljeve jednadžbe. Tada vrijedi sljedeće:*

- (i) *Ako je $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ i (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv, tada je \mathbf{A} stabilna matrica.*
- (ii) *Ako je \mathbf{A} stabilna matrica i (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv, tada je $\mathbf{X} > \mathbf{0}$*
- (iii) *Ako je \mathbf{A} stabilna matrica i $\mathbf{X} > \mathbf{0}$, tada (\mathbf{A}, \mathbf{C}) je osmotriv.*

Pošto je osmotrivost dualan koncept upravljivosti, dani dokazi osmotrivosti se mogu iskoristiti po dualnosti za upravljivost.

3.4 Upravlјivost i Lyapunovljeva teorija stabilnosti

Teorem 3.4.1. *Neka je \mathbf{A} stabilna matrica. Tada Lyapunovljeva jednadžba:*

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (3.6)$$

ima jedinstveno, simetrično, pozitivno definitno rješenje \mathbf{X} ako i samo ako je par matrica (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv.

Teorem 3.4.2. *Neka je (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv. Tada je \mathbf{A} stabilna ako i samo ako postoji jedinstvena, simetrična, pozitivno definitna matrica \mathbf{X} koja je rješenje Lyapunovljeve jednadžbe (3.2).*

Iz praktičnih razloga posljednja dva teorema ćemo također ujediniti.

Teorem 3.4.3. *Neka je \mathbf{X} rješenje Lyapunovljeve jednadžbe. Tada vrijedi sljedeće:*

- (i) *Ako je $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ i (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv, tada je \mathbf{A} stabilna matrica.*
- (ii) *Ako je je \mathbf{A} stabilna matrica i (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv, tada je $\mathbf{X} > \mathbf{0}$*
- (iii) *Ako je \mathbf{A} stabilna matrica i $\mathbf{X} > \mathbf{0}$, tada (\mathbf{A}, \mathbf{B}) je upravljiv.*

3.5 Lyapunovljeve jednadžbe i Gramiani upravljivosti i osmotrivosti

Definicija 3.5.1. Neka je \mathbf{A} stabilna matrica. Tada se matrica:

$$\mathbf{C}_G = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (3.7)$$

naziva **Gramian upravljivosti**, a matrica:

$$\mathbf{O}_G = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (3.8)$$

Gramian osmotrivosti.

S obzirom na nove definicije teoremi (3.5) i (3.6) se mogu preformulirati.

Teorem 3.5.2. Gramian upravljivosti i Lyapunovljeva jednadžba.

Neka je \mathbf{A} stabilna matrica. Tada Gramian upravljivosti \mathbf{C}_G zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu:

$$\mathbf{A} \mathbf{C}_G + \mathbf{C}_G \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (3.9)$$

te je simetrično pozitivno definitan ako i samo ako je (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv.

Teorem 3.5.3. Gramian osmotrivosti i Lyapunovljeva jednadžba.

Neka je \mathbf{A} stabilna matrica. Tada Gramian upravljivosti \mathbf{O}_G zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu:

$$\mathbf{O}_G \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{O}_G = -\mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (3.10)$$

te je simetrično pozitivno definitan ako i samo ako je (\mathbf{A}, \mathbf{C}) osmotriv.

Primjer 3.5.4. Neka su zadane matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gramian upravljivosti \mathbf{C}_G je dobiven rješavanjem Lyapunovljeve jednadžbe (koristeći Octave funkciju `lyap`) $\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.291667 & -0.041667 & -0.041667 \\ -0.041667 & -0.166667 & -0.166667 \\ -0.041667 & -0.166667 & -0.166667 \end{bmatrix}$$

što je očito singularna matrica. Slijedi da (\mathbf{A}, \mathbf{B}) nije upravljiv.

Poglavlje 4

Povratna veza i podešavanje svojstvenih vrijednosti

U ovom poglavlju promatramo problem stabilizacije linearnog kontrolnog sustava koristeći odgovarajući upravljački signal. Matematički, problem je pronaći povratnu matricu \mathbf{K} tako da matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ bude stabilna. Za konstrukciju takve matrice pomoći će nam Lyapunovljeve jednačbe. Predstaviti ćemo novi koncept dualan stabilnosti, **detektabilnost**. U nekim praktičnim situacijama, stabilizacija sustava nije dovoljna. Bit će potrebno podešavati svojstvene vrijednosti matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$. Taj problem se naziva problem podešavanja polova ili problem dodjeljivanja svojstvenih vrijednosti.

Promotrimo problem stabilizacije linearnog sustava:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pretpostavimo da je vektor stanja $x(t)$ poznat te izaberimo $u(t)$ tako da:

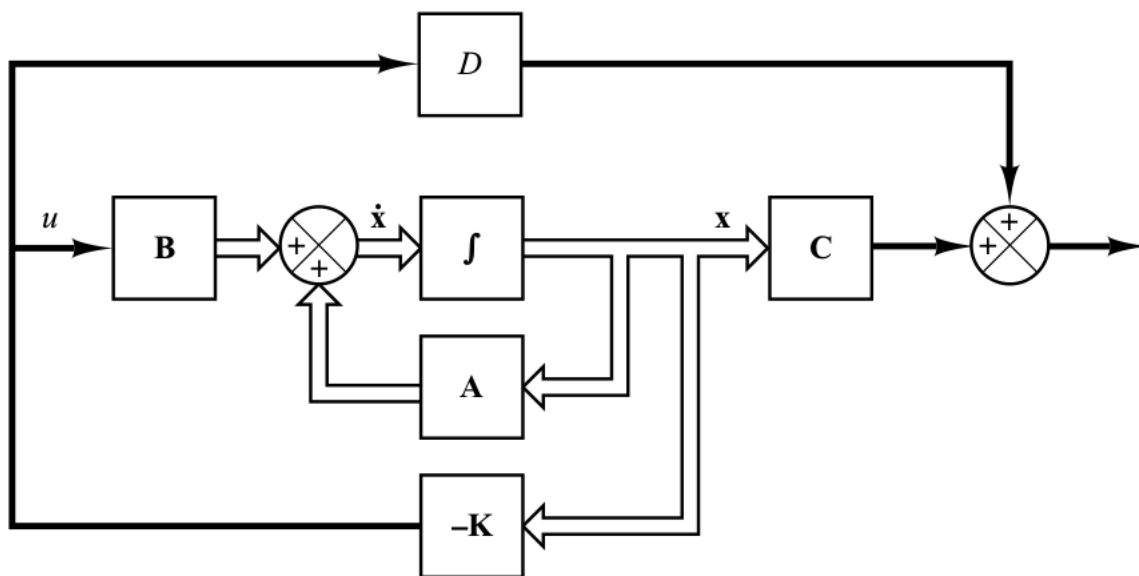
$$u(t) = v(t) - \mathbf{K}x(t),\tag{4.2}$$

gdje je \mathbf{K} konstantna matrica, a $v(t)$ referentni ulazni vektor. Tako definiran ulazni vektor $u(t)$ daje sljedeće jednačbe:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x(t) + \mathbf{B}v(t) \\ y(t) &= (\mathbf{C} - \mathbf{DK})x(t) + \mathbf{D}v(t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Problem stabilizacije sustava postaje problem pronalaska matrice \mathbf{K} tako da sustav (4.3) postane stabilan. Problem **povratne veze stanja** se može preformulirati: za par matrica

(\mathbf{A} , \mathbf{B}) treba pronaći matricu \mathbf{K} tako da matrica ($\mathbf{A} - \mathbf{BK}$) bude stabilna. Slika (4.1) daje shematski prikaz sustava povratne veze stanja.



Slika 4.1: Shematski prikaz povratne veze stanja [3].

Ukoliko postoji, matrica \mathbf{K} se naziva **stabilizirajuća povratna matrica**. U tom slučaju par (\mathbf{A} , \mathbf{B}) se može stabilizirati. Sustav (4.3) se naziva **sustav zatvorene petlje**, a matrica ($\mathbf{A} - \mathbf{BK}$) se naziva **matrica zatvorene petlje**.

Sljedeće poglavlje opisuje jednostavne kriterije stabilizacije sustava za konstruiranje matrice povratne veze pomoću Lyapunovljevih matričnih jednažbi.

4.1 Stabilnost i upravljivost

Nužni i dovoljni uvjeti da par (\mathbf{A} , \mathbf{B}) bude stabilan su dani u nastavku.

Teorem 4.1.1. *Karakterizacija vremenski neprekidne stabilizacije. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- (i) par (\mathbf{A} , \mathbf{B}) se može stabilizirati.
- (ii) $\text{Rang}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$, za svaki $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Drugim riječima, nestabilni modovi (definicija (2.1.7)) od \mathbf{A} su upravljivi.

(iii) za svaki λ i $x \neq 0$ tako da $x^* \mathbf{A} = \lambda x^*$ i $Re(\lambda) \geq 0$, imamo $x^* \mathbf{B} \neq 0$.

Dokaz. • (i) \iff (ii). Za potrebe dokaza provest ćemo neke transformacije i tvrdnje.

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da vrijedi:

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{PB} = \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje je par $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1)$ upravljiv. Pošto je par $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1)$ upravljiv, kriterij svojstvenih vrijednosti za upravljivost (2.1.2) nam daje $Rang(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1) = p$, gdje je p dimenzija matrice $\bar{\mathbf{A}}_{11}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} Rang(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) &= Rang \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11} & -\bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 & \lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22} & 0 \end{bmatrix} < n \\ &\iff \\ &Rang(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22}) < n - p, \end{aligned}$$

tj. ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost od $\bar{\mathbf{A}}_{22}$.

Dokaz slijedi iz činjenice da ako se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) može stabilizirati, matrica $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ mora biti stabilna. Mogućnost stabilizacije (\mathbf{A}, \mathbf{B}) implicira da se $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ može stabilizirati. Slijedi da postoji matrica $\bar{\mathbf{K}}$ takva da je $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}$ stabilna. Ako je $\bar{\mathbf{K}} = (\bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_2)$ tada je:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{K}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{K}}_2 \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

stabilna matrica, slijedi da $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ mora biti stabilna. Kako je matrica $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ stabilna, znači da su joj sve svojstvene vrijednosti $\lambda < 0$.

- (i) \implies (iii). Pretpostavimo da je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) stabilizirajuć. Tada postoji $\bar{\mathbf{K}}$ tako da je matrica $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}$ stabilna, kao u (4.4). Neka je λ svojstvena vrijednost td. $Re(\lambda) \geq 0$, $x^* \neq 0$, $x^* \mathbf{A} = \lambda x^*$ te $x^* \mathbf{B} = 0$, tada:

$$x^* (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}) = \lambda x^*$$

što znači da je λ svojstvena vrijednost od matrice $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}$. Pošto je $Re(\lambda) > 0$ dobivamo da matrica nije stabilna, što je kontradikcija.

- (ii) \implies (iii). Neka vrijedi $\text{Rang}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$ za svaki $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Pretpostavimo da postoji $\lambda > 0$ tako da $x^*\mathbf{A} = \lambda x^*$ te da je $x^*\mathbf{B} = 0$. Znamo da vrijedi:

$$x^*(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

no i $x^*\mathbf{B} = 0$ iz čega slijedi:

$$x^*[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = \mathbf{0}.$$

Kako je matrica punog ranga imamo da je $x^* = 0$, što je kontradikcija.

□

Prethodni teorem daje sljedeći rezultat.

Korolar 4.1.2. *Ako je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv, tada ga možemo stabilizirati.*

Dokaz. Ako je (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv, tada znamo da $\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}, \mathbf{B}) = n$, za svaku λ . Specijalno, $\text{Rang}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}, \mathbf{B}) = n$, za svaku $\lambda > 0$. Slijedi da se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) može stabilizirati. □

Gornji rezultati nam sugeriraju da **upravljivost implicira stabilnost**. Obrnuta tvrdnja ne vrijedi.

4.2 Stabilizacija i Lyapunovljeve jednadžbe

Iz prethodnog odjeljka se vidi da za pronalaženje stabilizirajuće matrice povratne veze \mathbf{K} , za dani par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , možemo pretpostaviti da je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv. U slučaju da (\mathbf{A}, \mathbf{B}) nije upravljiv, ali se može stabilizirati, možemo ga prikazati u formi:

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{TB} = \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje je $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1)$ upravljiv, a $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ stabilna matrica. Jednom kada nađemo stabilizirajuću matricu $\bar{\mathbf{K}}_1$ za $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1)$, stabilizirajuća matrica \mathbf{K} se može dobiti:

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = (\bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_2).$$

$\bar{\mathbf{K}}_2$ je proizvoljan. Naredni teorem pokazuje kako stabilizirati upravljiv par koristeći Lyapunovljeve jednadžbe.

Teorem 4.2.1. *Neka je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv i neka je β skalar tako da:*

$$\beta > |\lambda_{\max}(\mathbf{A})|,$$

gdje je $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ svojstvena vrijednost od \mathbf{A} sa najvećim realnim dijelom. Neka je \mathbf{K} definirana sa:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{Z}^{-1},$$

gdje \mathbf{Z} (nužno simetrična, pozitivno definitna) zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu:

$$\mathbf{XZ} + \mathbf{ZX}^T = -2\mathbf{BB}^T.$$

gdje je:

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})$$

Tada je $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ stabilna matrica, tj. (\mathbf{A}, \mathbf{B}) se može stabilizirati.

Dokaz. Zbog uvjeta $\beta > |\lambda_{\max}(\mathbf{A})|$ vidimo da je matrica \mathbf{X} stabilna. Upravlјivost para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) implicira upravljivost para (\mathbf{X}, \mathbf{B}) . Tada po teoremu (3.6) Lyapunovljeva jednadžba ima jedinstveno simetrično pozitivno rješenje \mathbf{Z} . Lako se provjeri da je $(\mathbf{A}, \sqrt{2}\mathbf{B})$ također upravljiv. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{XZ} + \mathbf{ZX}^T &= -2\mathbf{BB}^T \\ \iff \\ -\mathbf{AZ} - \beta\mathbf{Z} - \mathbf{ZA}^T - \beta\mathbf{Z} &= -2\mathbf{BB}^T \\ \iff \\ \mathbf{AZ} - \mathbf{BB}^T + \mathbf{ZA}^T - \mathbf{BB}^T &= -2\beta\mathbf{Z}, \end{aligned}$$

sada izlučivanjem \mathbf{Z} dobivamo:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BB}^T \mathbf{Z}^{-1})\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(\mathbf{A}^T - \mathbf{BB}^T \mathbf{Z}^{-1})^T = -2\beta\mathbf{Z}.$$

Uvrstimo li supstituciju \mathbf{K} dobivamo:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(\mathbf{A}^T - \mathbf{BK})^T = -2\beta\mathbf{Z}.$$

Iz Lyapunovljevog kriterija stabilnosti (3.2.1) imamo da matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ mora biti stabilna (\mathbf{Z} je simetrična pozitivno definitna matrica koja zadovoljava uvjete teorema). Slijedi da se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) može stabilizirati. \square

Prethodni teorem možemo interpretirati na sljedeći način: neka je μ svojstvena vrijednost matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ te \mathbf{y} pripadajući svojstveni vektor. Pomnožimo li gornju jednadžbu sa \mathbf{y}^* s lijeva te \mathbf{y} s desna dobivamo:

$$2\operatorname{Re}(\mu)\mathbf{y}^*\mathbf{Z}\mathbf{y} = -2\beta\mathbf{y}^*\mathbf{Z}\mathbf{y}$$

Kako je \mathbf{Z} pozitivno definitna, slijedi $\mathbf{y}^*\mathbf{Z}\mathbf{y} > 0$, tj. $\operatorname{Re}(\mu) < 0$. Dobivamo da je $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ stabilna. U algoritmu (1) dajemo Lyapunovljevu metodu za stabilizaciju.

Algoritam 1 : Lyapunovljeva metoda za stabilizaciju

Ulaz: matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tako da je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) upravljiv .

Izlaz: Stabilizirajuća povratna matrica \mathbf{K} .

Korak 1. Izaberemo skalar β tako da $\beta > |\lambda_{\max}(\mathbf{A})|$, gdje $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ označava svojstvenu vrijednost od \mathbf{A} s najvećim realnim dijelom.

Korak 2. Riješiti Lyapunovljevu jednadžbu za \mathbf{Z} :

$$-(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(-(\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}))^T = -2\mathbf{B}\mathbf{B}^T.$$

Korak 3. Izračunati stabilizirajuću povratnu matricu \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{Z}^{-1}.$$

Pogledajmo primjer neupravljivog, ali stabilizirajućeg para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

Primjer 4.2.2. Neka su zadane matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tada su $\bar{\mathbf{A}}_{11}$, $\bar{\mathbf{A}}_{22}$ i $\bar{\mathbf{B}}_1$:

$$\bar{\mathbf{A}}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{22} = -3, \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći Lyapunovljevu metodu stabilizacije, implementiranu u Matlab funkciji (B), za $\beta = 3$ dobivamo sljedeće rezultate :


```
>> K = lyap_stab_sol(A11, B1)

K =
-18.0000  -27.0000   0

>> rank(ctrb(A, B)) == size(A, 1)

ans =
logical
0

>> eig(A - B * K)

ans =
-3.0000 + 4.4721i
-3.0000 - 4.4721i
-3.0000 + 0.0000i
```

Vidimo da je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) neupravljiv, ali ipak stabilizirajuć.

Primjer 4.2.3. U primjeru (3.1.7) se vidi da sustav inverznog klatna nije stabilan. Pomoću Lyapunovljeve funkcije za stabilizaciju u Matlabu(B) dobivamo \mathbf{K} za koji je $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ stabilna matrica.

```
>> K = lyap_stab_sol(A, B)

K =
-275.7283  -92.5736 -209.5218  -38.0752

>> A - B * K

ans =
1.0e+03 *
   0   0.0010   0   0
 0.4489 0.1505 0.3397 0.0620
   0   0   0   0.0010
```

```
-1.2825   -0.4301   -0.9426   -0.1771
```

```
>> eig(A - B * K)
```

```
ans =
```

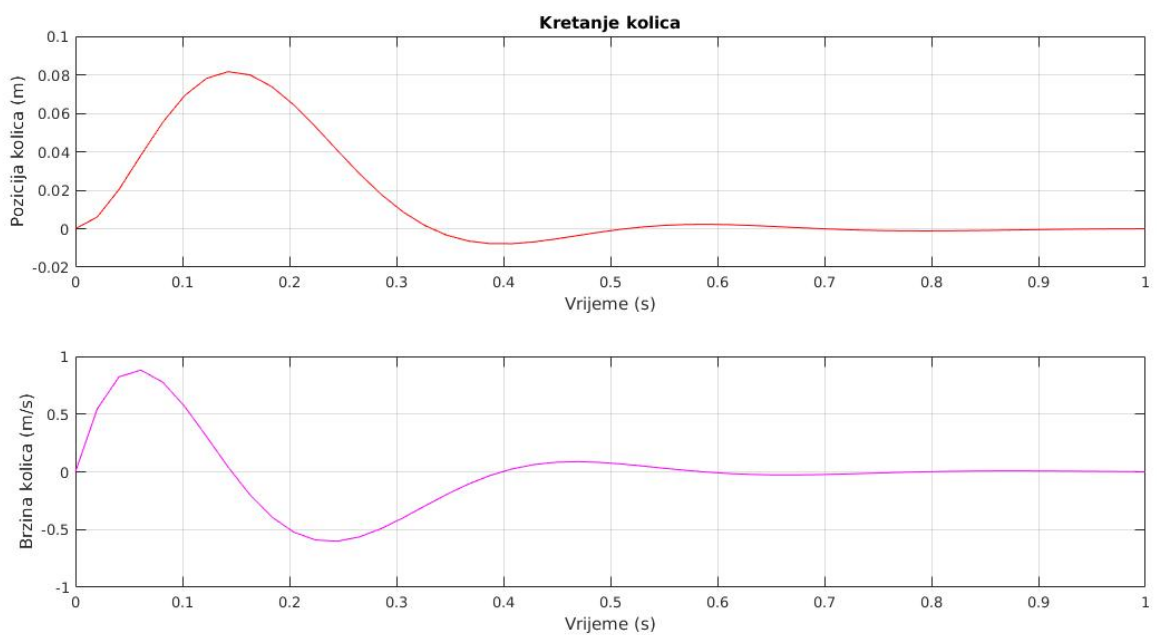
```
-6.6389 +15.0670i
```

```
-6.6389 -15.0670i
```

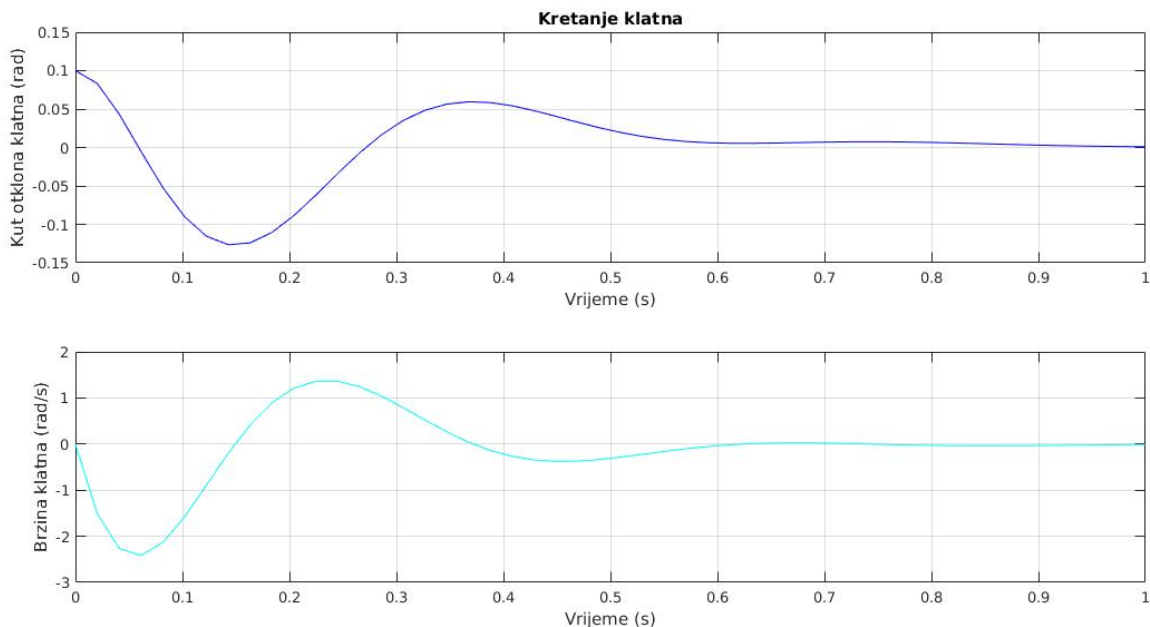
```
-6.6389 + 1.5119i
```

```
-6.6389 - 1.5119i
```

Grafički prikaz stabilnosti sustava $x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x(t)$ izračunat u prethodnom primjeru, sa početnom točkom $x_0 = [0, 0, 0.1, 0]^T$, je dan slikama (4.2) i (4.3).



Slika 4.2: Kretanje kolica sustava inverznog klatna s povratnom vezom



Slika 4.3: Kretanje klatna sustava inverznog klatna s povratnom vezom

4.3 Detektabilnost

Koncept dualan stabilnosti naziva se detektabilnost.

Definicija 4.3.1. Par matrica (\mathbf{A}, \mathbf{C}) je **detektabilan** (engl. *detectable*) ako postoji matrica \mathbf{L} tako da je $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ stabilna.

Po dualnosti sa stabilnošću, teorem (4.1.1) možemo promijeniti u smislu detektabilnosti.

Teorem 4.3.2. Karakterizacija vremenski neprekidne detektabilnosti.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- (i) par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) je detektabilan.
- (ii) matrica $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ ima puni rang po stupcima za svaki $Re(\lambda) \geq 0$.
- (iii) za svaki λ i $x \neq 0$ tako da $\mathbf{A}x = \lambda x$ i $Re(\lambda) \geq 0$ imamo $\mathbf{C}x \neq 0$.
- (iv) par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ se može stabilizirati.

Detektabilnost također igra ulogu u pronalasku rješenja Lyapunovljevih jednadžbi.

Teorem 4.3.3. *Detektabilnost i stabilnost.*

Neka je (\mathbf{A}, \mathbf{C}) detektabilan par te neka Lyapunovljeva jednadžba:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} = -\mathbf{C}\mathbf{C}^T$$

ima pozitivno semidefinitno rješenje \mathbf{X} . Tada je matrica \mathbf{A} stabilna.

Poglavlje 5

Linearno kvadratni optimizacijski regulator

Ukoliko je sustav upravljiv svojstvene vrijednosti zatvorene petlje mogu biti proizvoljno odabrane u kompleksnoj ravnini [2]. Nedostatak postojanja određenih smjernica gdje postaviti svojstvene vrijednosti predstavlja problem u praksi. Dizajner se mora koristiti intuicijom kako bi došao do željenih svojstava sustava. Zbog toga je poželjno imati metodu za dizajniranje koja se može koristiti kao inicijalni dizajn sustava, a kasnije prilagoditi.

5.1 Definicija LQR regulatora

Umjesto podešavanja svojstvenih vrijednosti na željene točke, sustav se stabilizira s obzirom na pojedine kriterije performanse. To će najčešće biti riješeno kompromisom. U ovom poglavlju predstaviti ćemo rješenje linearnog kvadratnog optimizacijskog sustava pomoću **linearno kvadratnog regulatora** (engl. *Linear Quadratic Regulator*, skraćeno **LQR**).

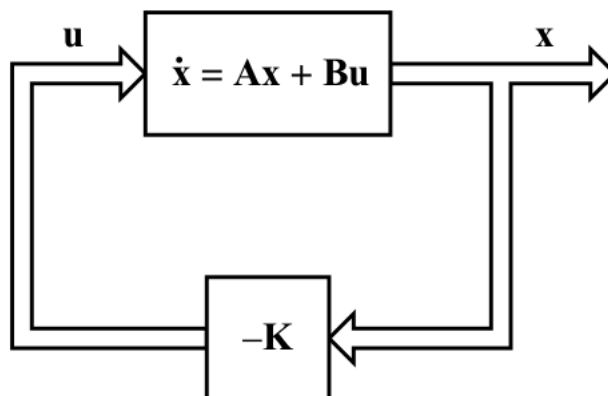
LQR je opisan u nastavku. Za dane matrice **Q** i **R** potrebno je pronaći signal $u(t) = -\mathbf{K}x(t)$ (slika (5.1)) tako da kvadratna funkcija cilja

$$J_C(x) = \int_0^{\infty} [x^T(t)\mathbf{Q}x(t) + u^T(t)\mathbf{R}u(t)]dt \quad (5.1)$$

bude minimizirana s obzirom na:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad x(0) = x_0.$$

Matrice **Q** i **R** su težine za vektor stanja odnosno ulazni signal.



Slika 5.1: Optimalna regulacija sustava [3].

Kvadratna forma $x^T \mathbf{Q}x$ predstavlja devijacije stanja x od inicijalnog stanja, dok $u^T \mathbf{R}u$ predstavlja "cijenu" ulaznog signala. Matrice \mathbf{Q} i \mathbf{R} moraju biti izabrane u skladu sa zahtjevima specifičnosti dizajna sustava.

Nažalost i kod ovakvog pristupa teško je izabrati matrice \mathbf{Q} i \mathbf{R} . Ipak, pretpostavlja se da je \mathbf{Q} **simetrična pozitivno semidefinitna** te \mathbf{R} **simetrično pozitivno definitna**. U ostatku poglavlja smatrat ćemo ih takvima.

Rješenje problema (5.1) se dobiva rješavanjem kvadratnih matričnih jednadžbi zvanih algebarske Riccatijeve jednadžbe (engl. *Algebraic Riccati Equation*, skraćeno **ARE**), o kojima će biti više riječi u poglavlju (7).

Teorem 5.1.1. *LQR teorem.*

Pretpostavimo da se par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) može stabilizirati te da je par (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) detektabilan. Tada postoji jedinstveno optimalno upravljanje $u^0(t)$ koje minimizira $J_C(x)$. Vektor $u^0(t)$ je dan sa $u^0(t) = -\mathbf{K}x(t)$, gdje je $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{X}$. \mathbf{X} je jedinstvena pozitivno semidefinitna matrica, koja je ujedno rješenje ARE:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{X} = 0 \quad (5.2)$$

Matrica zatvorene petlje $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ je stabilna, a minimalna vrijednost od $J_C(x)$ je $x_0^T \mathbf{X}x_0$, gdje je $x_0 = x(0)$.

Dokaz. Dokaz egzistencije i jedinstvenosti stabilizacijskog rješenja ARE je priložen u poglavlju (7). Dokazat ćemo postojanje jedinstvenog optimalnog upravljanja, uz pretpostavku da rješenje ARE postoji. Deriviranjem $x^T \mathbf{X}x$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(x^T \mathbf{X}x) &= \dot{x}^T \mathbf{X}x + x \mathbf{X} \dot{x}^T \\
 &= (\mathbf{A}x + \mathbf{B}u)^T \mathbf{X}x + x^T \mathbf{X}(\mathbf{A}x + \mathbf{B}u) \\
 &= (u^T \mathbf{B}^T + x^T \mathbf{A}^T) \mathbf{X}x + x^T \mathbf{X}(\mathbf{A}x + \mathbf{B}u) \\
 &= x^T (\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}) + u^T \mathbf{B}^T \mathbf{X}x + x^T \mathbf{X} \mathbf{B}u \\
 &= [\text{iz (5.2)}] \\
 &= x^T (\mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X} - \mathbf{Q})x + u^T \mathbf{B}^T \mathbf{X}x + x^T \mathbf{X} \mathbf{B}u \\
 &= x^T \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x + u^T \mathbf{B} \mathbf{X}x + x^T \mathbf{X} \mathbf{B}u + u^T \mathbf{R}u - u^T \mathbf{R}u - x^T \mathbf{Q}x \\
 &= (u^T + x^T \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{R} (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x) - (x^T \mathbf{Q}x + u^T \mathbf{R}u).
 \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti slijedi:

$$x^T \mathbf{Q}x + u^T \mathbf{R}u = -\frac{d}{dt}(x^T \mathbf{X}x) + (u^T + x^T \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{R} (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x).$$

Integriranjem po t na intervalu $[0, T]$ dobivamo:

$$\int_0^T (x^T \mathbf{Q}x + u^T \mathbf{R}u) dt = -x^T(T) \mathbf{X}x(T) + x_0^T \mathbf{X}x_0 + \int_0^T (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}x)^T \mathbf{R} (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x) dt.$$

S obzirom da je $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \geq 0$ i $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, puštanjem $T \rightarrow \infty$ može se primijetiti da $x(T) \rightarrow 0$ iz čega proizlazi:

$$J_C(x) = x_0^T \mathbf{X}x_0 + \int_0^\infty (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}x)^T \mathbf{R} (u + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x)$$

Kako je \mathbf{R} simetrična i pozitivno definitna, slijedi da $J_C(x) \geq x_0^T \mathbf{X}x_0$ za svaki x_0 i za sve kontrole u . Kako je $x_0^T \mathbf{X}x_0$ nezavisan s obzirom na u , najmanja vrijednost $J_C(x)$:

$$J_C(x) = x_0^T \mathbf{X}x_0$$

se postiže za kontrolni signal:

$$u^0(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}x(t) = -\mathbf{K}x(t),$$

□

Definicija 5.1.2. Algebarska Riccatijeva jednadžba (ARE):

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X} = 0$$

gdje se $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T$ naziva *vremenski neprekidna algebarska Riccatijeva jednadžba* (engl. Continuous Algebraic Riccati Equation, skraćeno CARE).

Definicija 5.1.3. Svako CARE pridružena je matrica \mathbf{H} definirana s:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}.$$

Matrica \mathbf{H} naziva se *Hamiltonova matrica*.

Definicija 5.1.4. Simetrično rješenje \mathbf{X} pripadne CARE, tako da je $(\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{X})$ stabilna, naziva se *stabilizirajuće rješenje*.

Više o povezanosti Hamiltonove matrice i CARE je opisano u poglavlju (7).

5.2 Algoritam vremenski neprekidnog LQR-a

Iz teorema (5.1.1) dizajniramo algoritam (2) za LQR.

Algoritam 2 : LQR

Ulaz: matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ te početni uvjet $x(0) = x_0$.

Izlaz:

- \mathbf{X} - rješenje CARE.
- \mathbf{K} - LQR matrica povratne veze.
- J_{Cmin} - najmanja vrijednost funkcije cilja $J_C(x)$.

Pretpostavke:

- (\mathbf{A}, \mathbf{B}) se može stabilizirati, (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) je detektabilna.
 - \mathbf{Q} je simetrična pozitivno semidefinitna, \mathbf{R} je simetrična pozitivno definitna.
-

Algoritam 2: LQR

Korak 1. Izračunati stabilizirajuće rješenje \mathbf{X} od CARE:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T,$$

Korak 2. Izračunati LQR matricu povratne veze:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X},$$

Korak 3. Izračunati najmanju vrijednost $J_C(x)$:

$$J_{Cmin} = x_0^T \mathbf{X} x_0.$$

Prikažimo kako radi gornji algoritam na primjeru inverznog klatna.

Primjer 5.2.1. *Problem Inverznog klatna je originalno postavljen u primjeru (1.4.2). Želimo postići sljedeći dizajn sustava:*

- *Otklon kuta θ od uspravnog stanja se stabilizira za manje od pet sekundi, tj. otklon postane nula.*
- *otklon klatna od vertikalnog položaja ne smije biti veći od 20 stupnjeva (0.35 radijana).*

Neka su dani \mathbf{R} i \mathbf{Q} :

$$\mathbf{R} = [1], \quad \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C},$$

koji će redom uravnotežiti relativnu važnost kontrolnog napora (u) odnosno pozicije vozila i klatna. Element (1, 1) u matrici \mathbf{Q} predstavlja težinu za poziciju kolica, dok element (3, 3) predstavlja težinu otklona klatna od vertikalnog položaja. Traži se matrica \mathbf{K} za koju ćemo imati kontroler koji ispunjava zahtjeve dizajna sustava. Prvo ćemo numerički dokazati da je par matrica (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) detektabilan:

```
>> L = lyap_stab_sol(A', Q')
L =
13.1068    84.8369    0.2541    7.5404
     0         0         0         0
 0.2541    2.4973   13.2861   88.3800
     0         0         0         0
```

```
>> eig(A' - Q' * L)
```

```
ans =
```

```
-6.6389 + 6.5749i
```

```
-6.6389 - 6.5749i
```

```
-6.6389 + 3.4641i
```

```
-6.6389 - 3.4641i
```

Vidimo da se par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{Q}^T)$ može stabilizirati pa iz teorema (4.3.3) slijedi tvrdnja. U primjeru (4.2.3) smo pokazali da je par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) moguće stabilizirati. Sada su ispunjene sve pretpostavke za LQR metodu, tj. za dobivanje stabilizirajuće povratne matrice \mathbf{K} . Implementacijom LQR-a u Matlabu (B), dobivamo sljedeće rezultate.

```
>> [X, K, Jc] = LQR(A, B, Q, R, x0)
```

```
X =
```

```
1.5491    1.1948    3.3413    0.6332
```

```
1.1948    1.4398    4.5427    0.8585
```

```
3.3413    4.5427   30.7100    5.5823
```

```
0.6332    0.8585    5.5823    1.0189
```

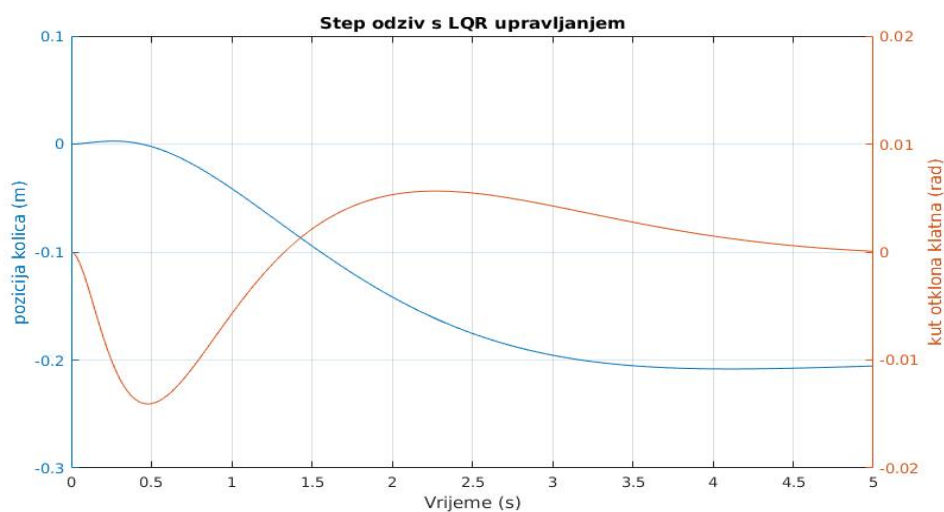
```
K =
```

```
-1.0000   -1.6491  -18.5688   -3.3413
```

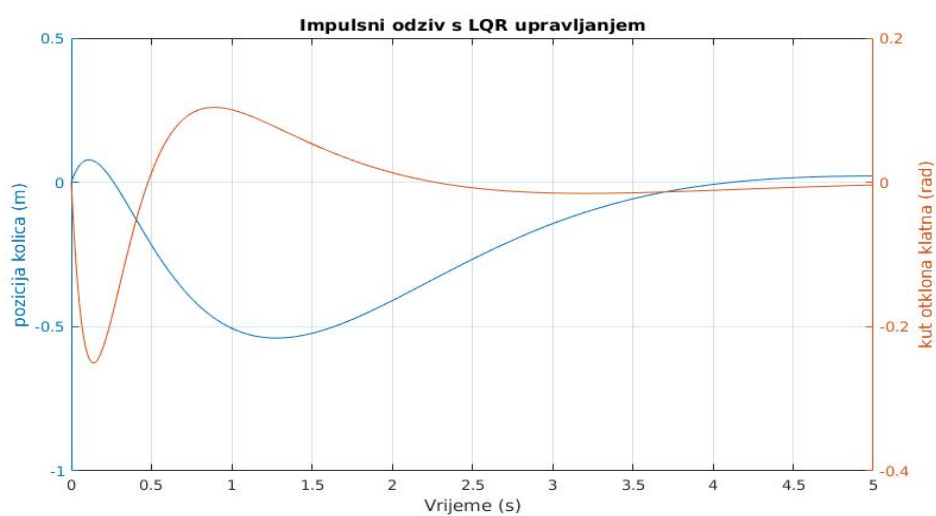
```
Jc =
```

```
0.3071
```

Na slici (5.2) se vidi ponašanje sustava sa step funkcijom kao ulazom sustava, dok na slici (5.3) je prikazan sustav s impulsnom funkcijom kao ulazom.

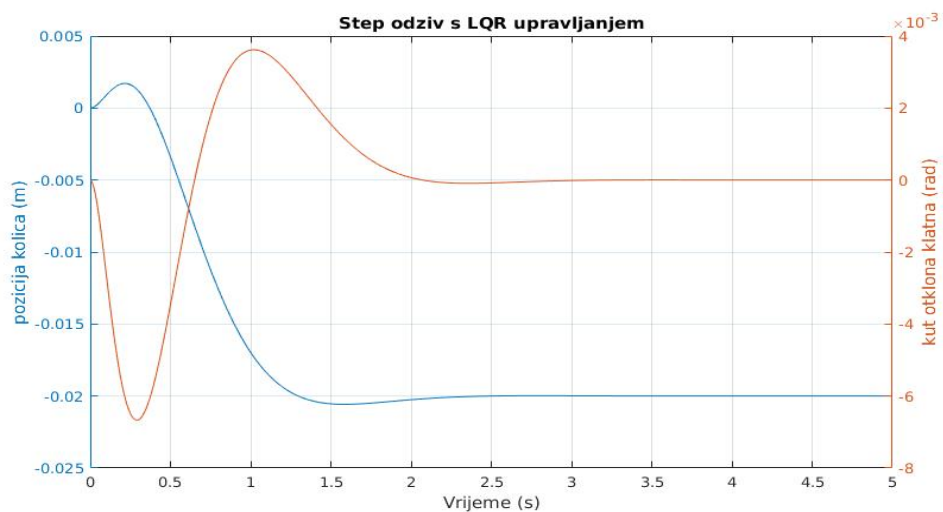


Slika 5.2: Step odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom.

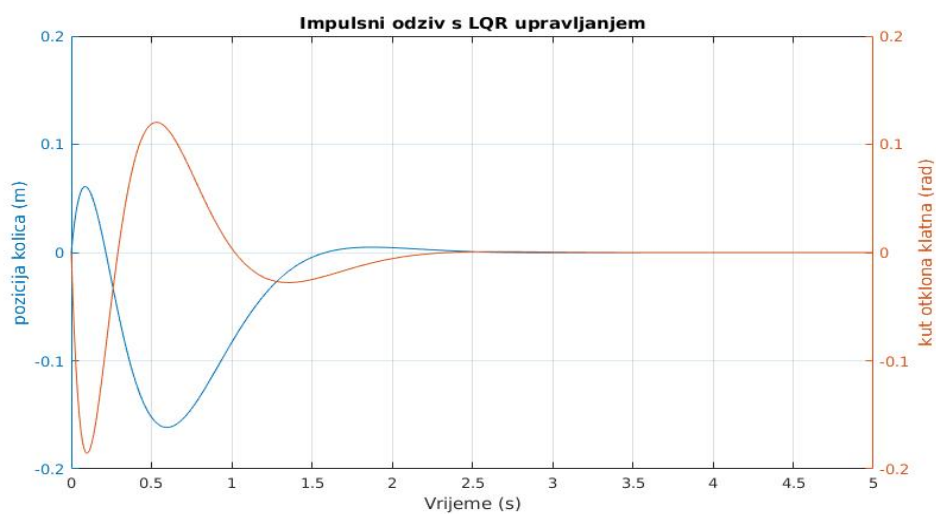


Slika 5.3: Impulsni odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom.

Sustav se nije stabilizirao unutar pet sekundi, što je bio jedan od uvjeta za dizajn kontrolera. Ukoliko stavimo element matrice $\mathbf{Q}(1, 1) = 100$, za iste ulazne funkcije, dobivamo grafove (5.4) i (5.5).

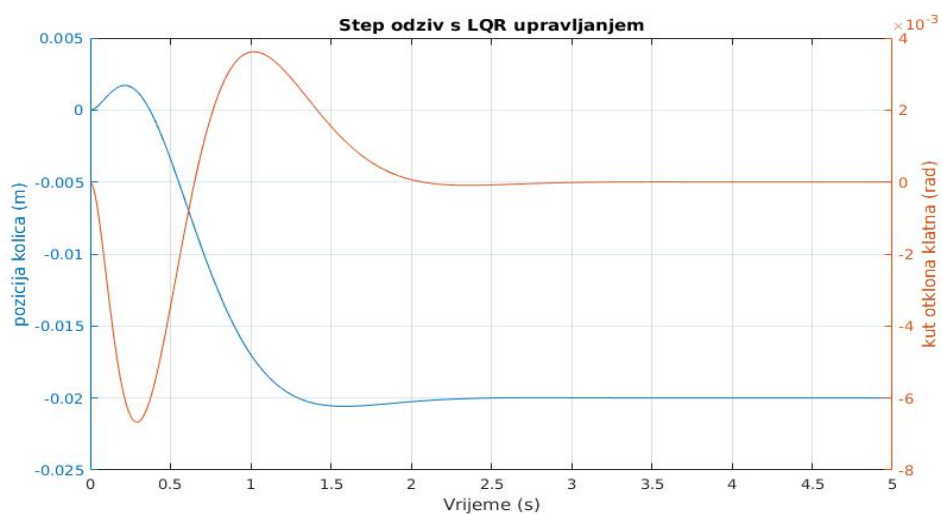


Slika 5.4: Step odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom.

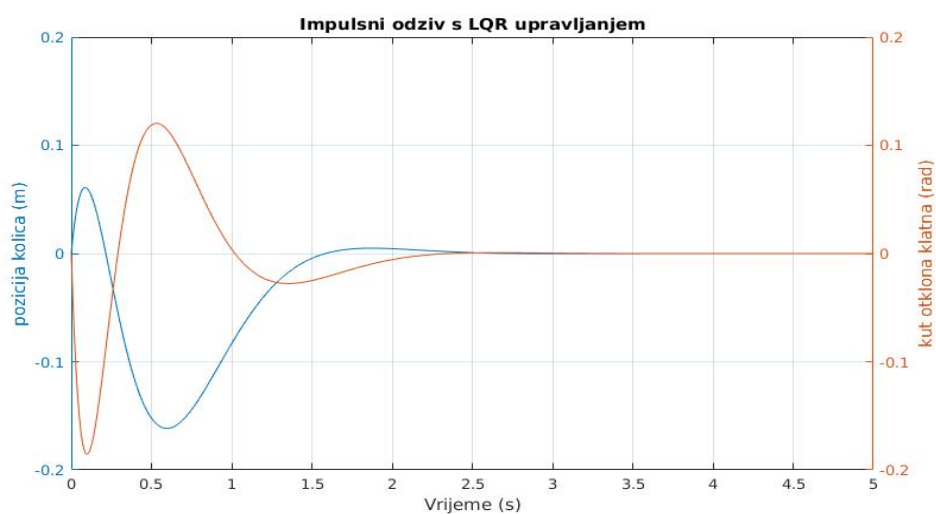


Slika 5.5: Impulsni odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom.

Unutar pet sekundi sustav se stabilizirao pomoću povratne matrice. Usporedimo posljednje rezultate sa Matlabovom funkcijom `lqr`.



Slika 5.6: Step odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom, Matlabov LQR.



Slika 5.7: Impulsni odziv sustava inverznog klatna s povratnom vezom, Matlabov LQR.

Grafovi funkcija su gotovo identični, iz čega zaključujemo da Matlab koristi sličan algoritam za LQR kontrolu upravljanja. Može se primijetiti da ako povećamo vrijednosti matrice \mathbf{Q} , odziv će biti još bolji. Povećanjem elemenata matrice \mathbf{Q} pogreška praćenja je manja, no zahtjeva se više kontrolne sile u . Više kontrolne sile generalno povećava potrošnju (cijene, energije, većih aktuatora).

Poglavlje 6

Aproksimacija stanja

U poglavlju (5) vidi se da linearno kvadratni regulator koristi vektor stanja $x(t)$ eksplicitno. Međutim, u većini praktičnih slučajeva vektor stanja nije u potpunosti dostupan, tj. samo su informacije o ulazu $u(t)$ i izlazu $y(t)$ poznate. Stanja koja nedostaju moraju se precizno aproksimirati, uz poznavanje matrica \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} te izlaznih vektora $y(t)$ i $u(t)$. Jedna od metoda aproksimacije stanja vremenski neprekidnog sustava bit će prikazana u ovom poglavlju.

6.1 Aproksimacija stanja pomoću svojstvenih vrijednosti

Neka je zadan linearan, vremenski neprekidni sustav:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$. Neka je $\hat{x}(t)$ aproksimacija vektora stanja $x(t)$. Potrebno je konstruirati vektor $\hat{x}(t)$ tako da odstupanje $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ konvergira k nuli što je brže moguće, za svaki početni uvjet $x(0)$ i svaki ulazni signal $u(t)$. Dinamički sustav s danim parametrima ima oblik:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{x}(t) + \mathbf{K}y(t) + \mathbf{B}u(t),\tag{6.2}$$

gdje matrica \mathbf{K} treba biti konstruirana. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{C}\hat{x}(t) - \mathbf{K}y(t) - \mathbf{B}u(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})x(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})e(t).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe glasi $e(t) = e^{(A-KC)t}e(0)$, što pokazuje da vektor odstupanja može biti kontroliran svojstvenim vrijednostima matrice $A - KC$. Ako svojstvene vrijednosti od $A - KC$ imaju negativne realne dijelove manje od $-\alpha$, tada odstupanje $e(t)$ konvergira brže k nuli od $e^{-\alpha t}e(0)$.

Problem aproksimacije stanja može biti riješen pronalaženjem matrice K tako da matrica $(A - KC)$ ima svojstvene vrijednosti manje od 0. Ako je (A, C) osmotriv, tada takav K uvijek postoji jer osmotrivost (A, C) povlači upravljivost (A^T, C^T) . Ako je (A^T, C^T) upravljiv, tada se par može stabilizirati, iz čega slijedi da je par (A, C) detektabilan, tj. postoji K tako da je $A - KC$ stabilna. Tada su sve svojstvene vrijednosti manje od 0.

Teorem 6.1.1. *Ako je (A, C) osmotriv, tada stanja $x(t)$ sustava (6.1) mogu biti procijenjena s:*

$$\hat{x}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Ky(t) + Bu(t), \quad (6.4)$$

gdje je K konstruirana tako da je $(A - KC)$ stabilna matrica. Odstupanje $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ upravlja se s:

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$$

te vrijedi da $e(t) \rightarrow 0$ kako $t \rightarrow \infty$.

Primjer 6.1.2. *Stabilnost sustava s aproksimacijom stanja na primjeru inverznog klatna. Rerezentacija prostora stanja je dana u (1.4.2). Stabilizirajuća povratna matrica je dana s:*

```
>> K = lyap_stab_sol(A', C')

K =
13.1068    84.8369    0.2541    7.5404
0.2541     2.4973   13.2861   88.3800,
```

a matrica $(A - KC)$ ima vrijednost:

```
>> A - K' * C

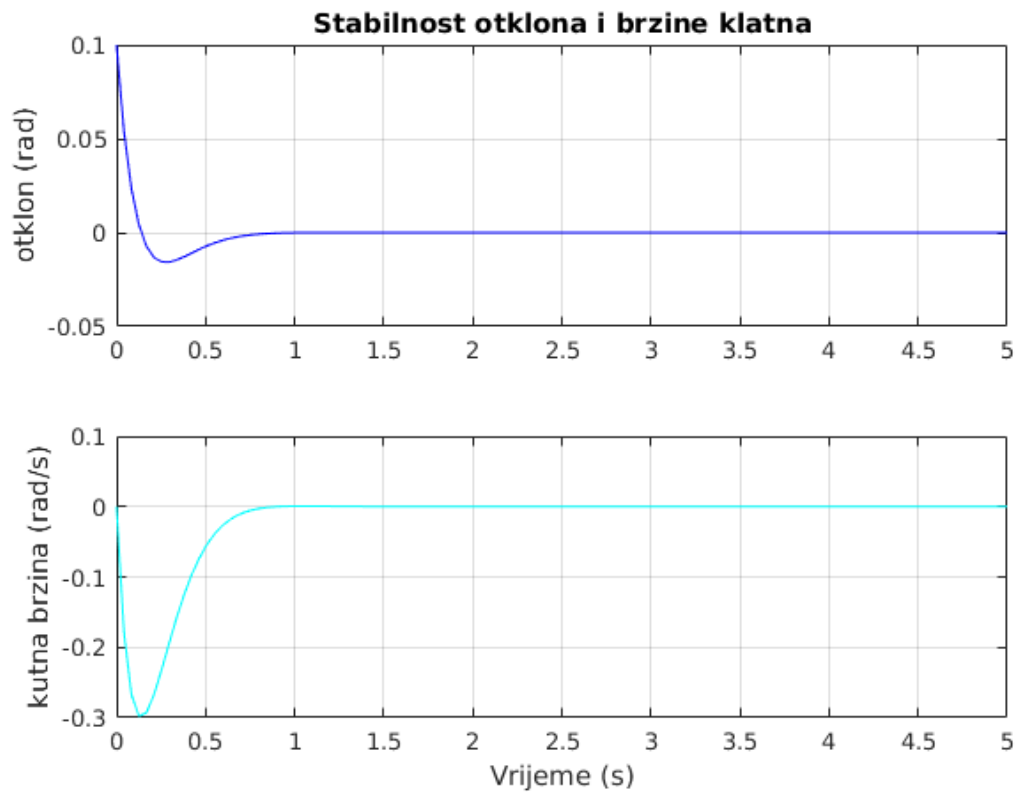
ans =
-13.1068    1.0000   -0.2541         0
-84.8369   -0.1628   -3.8648         0
-0.2541         0  -13.2861    1.0000
-7.5404    0.4651  -56.4730         0,
```

čije svojstvene vrijednosti su:

```
>> eig(A - K' * C)

ans =
-6.6389 + 6.5749i
-6.6389 - 6.5749i
-6.6389 + 3.4641i
-6.6389 - 3.4641i.
```

Stabilnost sustava, s početnim uvjetom $\hat{x}_0 = [0, 0, 0.1, 0]^T$, dan je na slici (6.1).



Slika 6.1: Stabilnost sustava s aproksimacijom stanja.

6.2 Kalmanov filter

Do sada se u dizajnu kontrolera ignorirao "šum" u sustavu, tj. svi ulazni podatci dani su egzaktno te su izlazne vrijednosti izmjerene točno, bez grešaka. U praksi, mjerenja su često neprecizna i sadrže šumove. U ovom odjeljku će se promatrati problem pronalaska optimalne aproksimacije stanja stohastičkog sustava.

Stohastički sustav je zadan s:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{F}w(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + v(t)\end{aligned}\tag{6.5}$$

gdje $w(t)$ i $v(t)$ predstavljaju "šum" u ulazu odnosno izlazu sustava. Problem je pronaći linearnu aproksimaciju $\hat{x}(t)$ od $x(t)$ pomoću svih prošlih i trenutačnih ulaza $\{y(s), s \leq t\}$ tako da minimizira srednju kvadratnu grešku:

$$E\left[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2\right], \text{ dok } t \rightarrow \infty,\tag{6.6}$$

gdje je $E[z]$ očekivana vrijednost vektora z .

Napomena 6.2.1. U narednim teoremima se pretpostavlja sljedeće:

- Sustav je upravljiv i osmotriv.
- w i v su "bijeli šumovi", tj. stohastički procesi čija je srednja vrijednost nula. Za svaki t i s vrijedi:

$$\begin{aligned}E[w(t)] &= E[v(t)] = 0, \\ E[w(t)w^T(s)] &= \mathbf{W}\delta(t-s), \\ E[v(t)v^T(s)] &= \mathbf{V}\delta(t-s),\end{aligned}$$

gdje su \mathbf{W} i \mathbf{V} simetrična pozitivno semidefinitna odnosno pozitivno definitna matrica kovarijance, a $\delta(t-q)$ je Diracova delta funkcija.

- w i v su nekorelirane:

$$E[w(t)v^T(t)] = 0.$$

- početni uvjet x_0 je slučajna Gaussova varijabla srednje vrijednosti nula tako da vrijedi:

$$E[x_0] = 0, \quad E[x_0x_0^T] = \mathbf{S}, \quad E[x_0w^T(t)] = 0, \quad E[x_0v^T(0)] = 0,$$

gdje je \mathbf{S} pozitivno semidefinitna kovarijanca.

U sljedećem teoremu prikazujemo rješenje gornjeg problema koristeći algebarsku Riccatijevu jednadžbu.

Teorem 6.2.2. *Pod prethodno navedenim pretpostavkama, najbolja aproksimacija $\hat{x}(t)$ (u smislu linearnih najmanjih srednjih kvadrata) se može generirati **Kalmanovim filterom**:*

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C})\hat{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_f y(t), \quad (6.7)$$

gdje je $\mathbf{K}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1}$, a \mathbf{X}_f simetrično pozitivno definitno rješenje ARE:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T - \mathbf{X}\mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}^T = 0 \quad (6.8)$$

Definicija 6.2.3. *Matrica $\mathbf{K}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1}$ se naziva filter matrica.*

Aproksimacija $\hat{y}(t)$ dana je s $\hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{x}(t)$. Greška između izmjerenog izlaza $y(t)$ i predviđenog izlaza $\mathbf{C}\hat{x}(t)$ je dano rezidualom $r(t)$:

$$r(t) = y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t)$$

gdje je \hat{x} iz (6.7). U nastavku slijedi algoritam (3) za Kalmanov filter.

Algoritam 3 : Aproksimacija $\hat{x}(t)$ pomoću Kalmanovog filtera

Ulaz: matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, matrice kovarijance \mathbf{V} i \mathbf{W} (obje simetrične pozitivno definitne).

Izlaz: Aproksimacija $\hat{x}(t)$ od $x(t)$ tako da je $E[\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2]$ minimiziran kako $t \rightarrow \infty$.

Pretpostavke: navedene u napomeni (6.2.1).

Korak 1. Izračunati stabilizirajuće rješenje \mathbf{X} od ARE:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_f + \mathbf{A}^T \mathbf{X}_f - \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{X}_f + \mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}^T = \mathbf{0}$$

Korak 2. Izračunati filter matricu \mathbf{K}_f :

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1},$$

Korak 3. Izračunati aproksimaciju $\hat{x}(t)$ rješavanjem (6.7):

Kalmanov filter je implementiran u Matlab funkciji (*B*).

6.3 Linearni kvadratni Gaussov regulator

Linearni kvadratni regulator LQR se bavi optimizacijom performansi determinističkih sustava. Za razliku od LQR regulatora, **linearno kvadratni Gaussov** regulator (engl. *Linear Quadratic Gaussian*, skraćeno **LQG**) bavi se optimizacijom performansi stohastičkih sustava.

LQG regulator opisan je u nastavku. Neka je stohastički sustav (6.1) upravljiv i osmotriv. Za taj sustav potrebno je pronaći optimalnu kontrolu $u(t)$ koja minimizira kvadratnu funkciju cilja:

$$J_{QG} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T (x^T \mathbf{Q} x + u^T \mathbf{R} u) dt \right]$$

gdje su težinske matrice \mathbf{Q} i \mathbf{R} navedene u poglavlju (5). Pretpostavimo da su šumovi $w(t)$ i $v(t)$ bijeli, Gaussovi, srednje vrijednosti nula te statički procesi s pozitivnom semidefinitnom i pozitivno definitnom kovarijancom \mathbf{W} i \mathbf{V} .

6.4 Algoritam vremenski neprekidnog LQG-a

Rješenje za LQG regulator dobiveno je kombinacijom rješenja determinističkog LQR regulatora i optimalnom aproksimacijom stanja pomoću Kalmanovog filtera. Kontrolni vektor $u(t)$ za LQG regulator dan je s:

$$u(t) = -\mathbf{K}_c \hat{x}(t),$$

gdje je \mathbf{K}_c matrica povratne veze povezana s LQR regulatorom:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}_c,$$

\mathbf{X}_c zadovoljava CARE:

$$\mathbf{X}_c \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X}_c + \mathbf{Q} - \mathbf{X}_c \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}_c = 0,$$

a vektor $\hat{x}(t)$ je generiran Kalmanovim filterom:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \hat{x}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{K}_f y(t).$$

Filter matrica dana je s $\mathbf{K}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1}$, gdje \mathbf{X}_f zadovoljavaju vremenski neprekidnu filtrirajuću Riccatijevu jednadžbu, (engl. *Continuous-time Filter Algebraic Riccati Equation*, skraćeno **CFARE**):

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_f + \mathbf{X}_f \mathbf{A}^T - \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{X}_f + \mathbf{F} \mathbf{W} \mathbf{F}^T = 0.$$

Algoritam 4 : LQG

Ulaz: matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, matrice kovarijance $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (obje simetrične pozitivno definitne).

Izlaz: upravljački vektor $u(t)$ generiran sa LQG regulatorom.

Pretpostavke: navedene u napomeni (6.2.1).

Korak 1. Izračunati stabilizirajuće rješenje \mathbf{X}_c od CARE:

$$\mathbf{X}_c \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X}_c - \mathbf{X}_c \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}_c + \mathbf{Q} = 0.$$

Korak 2. Izračunati matricu \mathbf{K}_c :

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{X}_c.$$

Korak 3.

1. Riješiti CFARE:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_f + \mathbf{X}_f \mathbf{A}^T - \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{X}_f + \mathbf{F} \mathbf{W} \mathbf{F}^T = \mathbf{0},$$

kako bismo dobili simetrično pozitivno definitno rješenje \mathbf{X}_f .

2. Izračunati filter matricu:

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{X}_f \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1}.$$

Korak 4. Pronaći rješenje $\hat{x}(t)$:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \hat{x}(t) + \mathbf{K}_f y(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0.$$

Korak 5. Izvesti upravljačku silu:

$$u(t) = -\mathbf{K}_c \hat{x}(t).$$

Primjer 6.4.1. Promotrimo LQG dizajn za problem inverznog klatna. Neka su

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}_{2 \times 2},$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad \mathbf{V} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$$

Pomoću Matlab funkcije (B), rješenje \mathbf{X}_c od CARE algoritma, matrica \mathbf{K}_c te matrica \mathbf{K}_f dani su s:

```

>> [Kf, Kc] = LQG(A, B, C, F, Q, R, V, W, x0);

Xc =
1.5491    1.1948    3.3413    0.6332
1.1948    1.4398    4.5427    0.8585
3.3413    4.5427   30.7100    5.5823
0.6332    0.8585    5.5823    1.0189

Kc =
-1.0000   -1.6491  -18.5688   -3.3413

Kf =
 1.5646   -0.3904
 1.3002   -2.7538
-0.3904   11.2920
-2.2650   63.8304.

```

Svojsvene vrijednosti matrice zatvorene petlje su:

```

>> eig(A - B*Kc - Kf * C)

ans =
-12.3356 +10.9865i
-12.3356 -10.9865i
 -0.9091 + 0.0000i
 -0.2957 + 0.0000i .

```

Za stabilizaciju linearnog sustava uglavnom su potrebna mjerenja stanja. Nažalost, u mnogim praktičnim situacijama neka stanja nisu dostupna te se ne mogu izmjeriti. LQR se može smatrati posebnim slučajem LQG-a gdje je dinamika deterministički određena te su sva stanja osmotriva.

Poglavlje 7

Algebarska Riccatijeva jednađžba

Ovo poglavlje posvećeno je numeričkom rješavanju vremenski neprekidne algebarske Riccatijeve jednađžbe (CARE):

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} = 0. \quad (7.1)$$

Gornja jednađžba se često zapisuje u kompaktnijoj formi:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T. \quad (7.2)$$

Ove jednađžbe su dugo bile predmet istraživanja u matematici, fizici i inženjerstvu te igraju važnu ulogu u dizajniranju problema teorije kontrole i filtriranja. Algebarske Riccatijeve jednađžbe su postale važan alat u rješavanju **linearno kvadratnih optimizacijskih problema**.

7.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja CARE

Cilj je pronaći uvjete pod kojima CARE ima jedinstveno, simetrično, pozitivno, semidefinitno i stabilizirajuće rješenje. Važan je odnos između CARE i pripadne Hamiltonove matrice. Definicija Hamiltonove matrice \mathbf{H} je dana u (5.1.3):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Naredni teorem daje zanimljivo svojstvo Hamiltonove matrice.

Teorem 7.1.1. *Za svaku svojstvenu vrijednost λ od \mathbf{H} , $-\bar{\lambda}$ je također svojstvena vrijednost od \mathbf{H} .*

Dokaz. Definiramo $2n \times 2n$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica identiteta. Množenjem vidimo da vrijedi:

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{J} = -\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{J} = -\mathbf{H}^T,$$

iz čega slijedi da su \mathbf{H} i $-\mathbf{H}^T$ slične. Tada je λ svojstvena vrijednost matrice $-\mathbf{H}^T$. Kako su svojstvene vrijednosti od $-\mathbf{H}^T$ negativne svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{H} , a znamo da kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranom paru, teorem je dokazan. \square

Naredni teorem pokazuje da je rješenje \mathbf{X} , jednadžbe CARE, određeno pripadnom Hamiltonovom matricom.

Teorem 7.1.2. *Matrica \mathbf{X} je rješenje CARE ako i samo ako stupci od $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}$ razapinju n -dimenzionalni invarijantni potprostor Hamiltonove matrice \mathbf{H} .*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da ako stupci od $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}$ razapinju n -dimenzionalni invarijantni potprostor od \mathbf{H} , tada je \mathbf{X} rješenje CARE. Pretpostavimo da postoji $n \times n$ matrica \mathbf{L} tako da:

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \mathbf{L}.$$

Množenjem \mathbf{J}^{-1} s lijeve strane, gdje je \mathbf{J} definiran u prethodnom teoremu, dobivamo:

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \mathbf{L},$$

to jest:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{L}.$$

Množenjem $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$ s obje strane dobivamo:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X} = 0$$

iz čega proizlazi da \mathbf{X} zadovoljava CARE. Kako bismo dokazali obratni smjer, primijetimo da za rješenje \mathbf{X} vrijedi:

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{X} \\ -\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{X}),$$

tj. stupci matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}$ razapinju invarijantni potprostor od \mathbf{H} □

Korolar 7.1.3. *Ako stupci od $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ razapinju n -dimenzionalni invarijantni potprostor Hamiltonove matrice \mathbf{H} , sa pripadnom CARE, te je \mathbf{X}_1 invertibilna matrica, tada je $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1}$ rješenje CARE.*

Dokaz. Prostor razapet stupcima matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ jednak je prostoru razapetom stupcima od $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1}$ koji je jednak prostoru razapetom stupcima $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1} \end{bmatrix}$. Iz prethodnog teorema vidimo da je rješenje CARE dano sa $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1}$ □

Sljedeći teorem prikazuje odnose svojstvenih vrijednosti Hamiltonove matrice \mathbf{H} i optimalne matrice zatvorene petlje (poglavlje 4).

Teorem 7.1.4. *Neka je \mathbf{X} simetrično rješenje CARE. Tada su svojstvene vrijednosti Hamiltonove matrice \mathbf{H} također svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, zajedno sa onima matrice $-(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T$, gdje je $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$.*

Dokaz. Za $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i identitetu \mathbf{I} istih dimenzija definiramo $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{HT} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{SX} & -\mathbf{S} \\ -(\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{XA} + \mathbf{Q} - \mathbf{XSX}) & -(\mathbf{A} - \mathbf{SX})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{SX} & -\mathbf{S} \\ 0 & -(\mathbf{A} - \mathbf{SX})^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice \mathbf{H} ujedno svojstvene vrijednosti matrica $\mathbf{A} - \mathbf{SX}$ odnosno $-(\mathbf{A} - \mathbf{SX})^T$. \mathbf{K} se dobije iz jednakosti:

$$\mathbf{A} - \mathbf{SX} = \mathbf{A} - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}.$$

□

Kako smo vidjeli u poglavlju (5), nekolicina primjena treba simetrično pozitivno semidefinitno stabilizirajuće rješenje CARE jednadžbe. Simetrično rješenje \mathbf{X} je **stabilizirajuće rješenje** ako je matrica $\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \mathbf{A} - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{SX}$ stabilna. U nastavku je priložen teorem za nužan i dovoljan uvjet postojanja takvog rješenja.

Teorem 7.1.5. *Izraz za egzistenciju i jedinstvenost stabilizirajućeg rješenja CARE.*

Neka se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) može stabilizirati i neka je (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) detektabilna. Pretpostavimo da $\mathbf{Q} \geq 0$ i $\mathbf{R} > 0$. Tada postoji jedinstveno, pozitivno, semidefinitno i stabilizirajuće rješenje \mathbf{X} za CARE:

$$\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} + \mathbf{Q} = 0,$$

dano s $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1}$, gdje stupci matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ razapinju invarijantni potprostor Hamiltonove matrice.

U nastavku je priložen Schurov algoritam za rješavanje CARE [1]. Implementacija algoritma se nalazi u funkciji (*B*).

Algoritam 5 Schurov algoritam za rješavanje CARE

Ulaz: matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Izlaz: jedinstveno stabilizirajuće rješenje CARE, \mathbf{X} .

Korak 1. Formirati Hamiltonovu matricu:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}.$$

Korak 2. Transformirati \mathbf{H} u sortiranu realnu Schurovu formu (1.1):

$$\mathbf{U}^T\mathbf{H}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ 0 & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix},$$

gdje je n svojstvenih vrijednosti sa negativnim realnim dijelom sadržano u \mathbf{T}_{11} .

Korak 3. \mathbf{U} se particionira na 4 jednaka dijela:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix}.$$

Korak 4. Pronaći rješenje \mathbf{X} računanjem sustava linearnih jednadžbi:

$$\mathbf{X}\mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_{21}.$$

Dodatak A

Inverzno klatno

A.1 Problem inverznog klatna

Inverzno klatno je primjer koji se često nalazi u knjigama i radovima o kontroli sustava. Više o problemu je priloženo u (1.4.2).

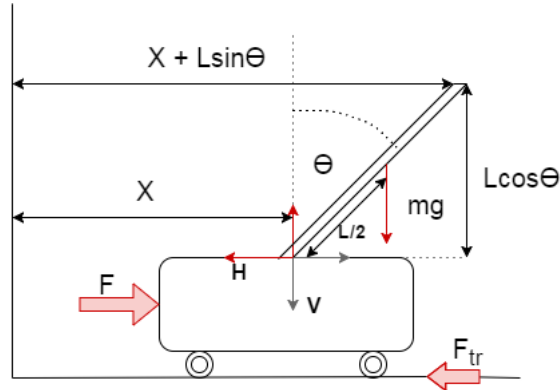
Parametri

Za sustav jednadžbi inverznog klatna koristimo sljedeće parametre:

- (M) masa vozila 0.5 kg .
- (m) masa klatna 0.2 kg .
- (L) duljina polovice klatna 0.15 m .
- (g) gravitacija 9.81 m/s^2 .
- (J) koeficijent inercije 0.006 kg/m^2 .
- (b) koeficijent trenja 0.1 .
- (F) sila primijenjena na vozilo (N).
- (x) pozicija vozila (m).
- (Θ) kut otklona od uspravnog klatna (rad).

A.2 Sustav jednažbi inverznog klatna

Koristeći Newtonove zakone opisati ćemo inverzno klatno.



Slika A.1: Inverzno klatno [4]

Prvo definiramo položaj vrha klatna:

$$X' = X + L \sin \Theta$$

$$Y' = L \cos \Theta.$$

Horizontalna reakcijska sila F_H dana je formulom $F = ma$. Računamo horizontalnu i vertikalnu silu F_H i F_V :

$$\begin{aligned} F_H &= m\ddot{X}' \\ &= m \frac{d^2}{dt^2}(X + L \sin \Theta) \\ &= m(\ddot{X} + \ddot{\Theta}L \cos \Theta - \dot{\Theta}^2 L \sin \Theta). \end{aligned}$$

(A.1)

$$\begin{aligned} F_V &= m\ddot{Y}' \\ &= m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \Theta) \\ &= m(L\ddot{\Theta}^2 \cos \Theta - L\ddot{\Theta} \sin \Theta). \end{aligned}$$

Za silu trenja vrijedi formula:

$$F_{tr} = b\dot{X}.$$

Zbrajanjem sila koje djeluju na vozilo dobivamo silu F :

$$\begin{aligned}
F &= M\ddot{X} + F_{tr} + F_H \\
&= (M + m)\ddot{X} + b\dot{X} + mL\ddot{\Theta} \cos \Theta - mL\dot{\Theta}^2 \sin \Theta.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Sila F predstavlja ulaznu funkciju u sustava. Kako bismo dobili drugu jednadžbu sustava, zbrajamo sile okomite na klatno, računajući i inerciju klatna. Jednadžba je dana sa formulom:

$$-F_H \cos \Theta L + (F_V + mg)L \sin \Theta = J\ddot{\Theta}. \tag{A.3}$$

Kako bismo došli do linearnog modela, za male kuteve pretpostavljamo da vrijede sljedeći uvjeti: $\sin \Theta \approx \Theta$, $\cos \Theta \approx 1$, $\Theta^2 \approx \dot{\Theta}^2 \approx \Theta\ddot{\Theta} \approx \ddot{\Theta} \approx 0$.

Uz oznaku $\Theta \rightarrow \theta$ i $F \rightarrow u$, Dobivamo sustav jednadžbi za inverzno klatno:

$$\begin{aligned}
u &= (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\theta}, \\
(J + mL^2)\ddot{\theta} &= -m\ddot{x}L + mgL\theta.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Iz (A.4) dobivamo $\ddot{\theta}$ i \ddot{x} :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(J + mL^2) &= -\frac{mL}{M + m}(u - b\dot{x} - mL\ddot{\theta}) + mgL\theta, \\
\ddot{\theta}(J + mL^2) - \frac{m^2L^2}{M + m}\ddot{\theta} &= -\frac{mL}{M + m}(u - b\dot{x}) + mgL\theta, \\
\ddot{\theta}\left(\frac{J(M + m) + m^2L^2 + mML^2 - m^2L^2}{M + m}\right) &= -\frac{mL}{M + m}(u - b\dot{x}) + mgL\theta, \\
\ddot{\theta} &= \frac{bmL}{k}\dot{x} + \frac{(M + m)mgL}{k}\theta - \frac{mL}{k}u,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(M + m) &= u - b\dot{x} - mL\left(\frac{bmL}{k}\dot{x} + \frac{(M + m)mgL}{k}\theta - \frac{mL}{k}u\right) \\
&= \frac{J(M + m) + mML^2 + m^2L^2}{k}u - \frac{J(M + m) + mML^2 + m^2L^2}{k}b\dot{x} - \frac{(M + m)gm^2L^2}{k}\theta \\
&= (M + m)\frac{J + mL^2}{k}u - (M + m)\frac{J + mL^2}{k}b\dot{x} - (M + m)\frac{gm^2L^2}{k}\theta, \\
\ddot{x} &= -\frac{J + mL^2}{k}b\dot{x} - \frac{gm^2L^2}{k}\theta + \frac{J + mL^2}{k}u,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

uz supstituciju:

$$k = J(M + m) + mML^2.$$

Dodatak B

Matlab kod za inverzno klatno

U ovom dodatku navodimo Matlab kod koji je korišten u radu.

init_pend_constants.m

```
1 % Inicijalizacija konstanti inverznog klatna.  
2  
3 % masa vozila (kg)  
4 M = 0.5;  
5 % masa klatna (kg)  
6 m = 0.2;  
7 % duljina polovice klatna  
8 L = 0.15;  
9 % koeficijent trenja (N/m/s)  
10 b = 0.1;  
11 % koeficijent inercije (kg m^2)  
12 J = 0.006;  
13 % gravitavija (m/s^2)  
14 g = 9.8;  
15 % supstitucije  
16 q = (M+m) * ( J+m*L^2 ) - (m*L)^2;  
17 k = J * (M+m) + m*M*L^2;
```

inv_pend_ss.m

```
1 % Prostor stanja inverznog klatna.  
2
```

```

3 A = [0      1      0      0;
4      0 -(J+m*L^2)*b/k -(g*m^2*L^2)/k 0;
5      0      0      0      1;
6      0 (m*L*b)/k      m*g*L*(M+m)/k 0];
7 B = [      0;
8      (J+m*L^2)/k;
9      0;
10     -m*L/k];
11 C = [1 0 0 0;
12      0 0 1 0];
13 D = [0;
14      0];
15 % stanja sustava
16 states = {'x' 'x_dot' 'theta' 'theta_dot'};
17 % ulazi sustava
18 inputs = {'u'};
19 % izlazi sustava
20 outputs = {'x'; 'phi'};
21 % prostor stanja sustava
22 sys_ss = ss(A,B,C,D, 'statename', states, 'inputname', inputs,
    'outputname', outputs )

```

inv_pend_tf.m

```

1 % Transfer funkcije inverznog klatna.
2
3 s = tf('s');
4 I = J;
5
6 % odnos pozicije kolica i ulaza
7 P_cart = (((I+m*L^2)/q)*s^2 - (m*g*L/q))/(s^4 + (b*(I + m*L
    ^2))*s^3/q - ((M + m)*m*g*L)*s^2/q - b*m*g*L*s/q);
8 % odnos otklona klatna i ulaza
9 P_pend = -(m*L*s/q)/(s^3 + (b*(I + m*L^2))*s^2/q - ((M + m)*
    m*g*L)*s/q - b*m*g*L/q);
10
11 % sustav transfer funkcija
12 sys_tf = [P_cart ; P_pend];

```

```

13
14 % ulaz sustava
15 inputs = {'u'};
16 % izlazi sustava
17 outputs = {'x'; 'theta'};
18
19 set(sys_tf, 'InputName', inputs)
20 set(sys_tf, 'OutputName', outputs)

```

lyap_stab_sol.m

```

1 function [K] = lyap_stab_sol(A, B)
2 % lyap_stab_sol je Lyapunovljeva metoda za stabilizaciju.
3 % K = lyap_stab_sol(A, B) rjesava Lyapunovljevu matricnu
   % jednadzbu
4 %  $-(A + \text{beta} * I)Z + Z(-(A + \text{beta} * I))' = -2 * B * B'$ 
5 % za  $\text{beta} = \text{abs}(\text{max}(\text{real}(\text{eig}(A)))) + 1$ .
6 %
7 %  $K = B' \text{inv}(Z)$ .
8
9 beta = abs(max(real(eig(A)))) + 1;
10 Z = lyap(-(A + beta * eye(size(A))), 2 * B * B');
11
12 K = B' * inv(Z);

```

LQR.m

```

1 function [X, K, Jc] = LQR(A, B, Q, R, x0)
2 % Linearno kvadraticni regulator za stanje sustava.
3 % [X, K, Jc] = LQR(A, B, Q, R, x0) za rezultat daje
   % rjesenje CARE,
4 % optimalnu stabilizirajucu povratnu matricu te minimalnu
   % vrijednost
5 % kvadraticne funkcije Jc.
6
7 X = schur_alg_care(A, B, -Q, R);

```

```

8
9 K = inv(R) * B' * X;
10
11 Jc = x0' * X * x0;

```

kalman_filter_matrix.m

```

1 function [Kf] = kalman_filter_matrix(A, C, F, V, W)
2 % Funkcija racuna matricu zvanu kalmanov filter.
3 % Kf = kalman_filter_matrix(A, C, F, V, W), gdje su W i V
   matrice
4 % kovarijance, a F sum u sustavu.
5
6 X = schur_alg_care(A', C', -F * W * F', V);
7 Kf = X * C' * inv(V);

```

LQG.m

```

1 function [Kf, Kc] = LQG(A, B, C, F, Q, R, V, W, x0)
2 % Linearno kvadraticni Gaussov regulator za stanje sustava.
3 % [Kf, Kc] = LQG(A, B, C, F, Q, R, V, W, x0) kao rezultat
   daje
4 % kalmanov filter Kf te stabilizirajucu povratnu matricu
   Kc.
5 [Xc, Kc, ~] = LQR(A, B, Q, R, x0)
6 Kf = kalman_filter_matrix(A, C, F, V, W)

```

schur_alg_care.m [1]

```

1 function [X] = schur_alg_care(A, B, Q, R)
2 % Algoritam za rjesavanje vremenski neprekidnih
   algebarskih Riccatijevih
3 % jednadzbi (CARE).
4 % X = schur_alg_care(A, B, Q, R) racuna rjesenje X
   pripadne CARE.

```



```
5
6 H = [A, -B * inv(R) * B'; Q, -A'];
7 n = size(A, 1);
8
9 [U, T] = schur(H);
10
11 e = ordeig(T);
12
13 [es, idxs] = sort(real(e), 'ascend');
14 sel = zeros(2*n, 1);
15 sel(idxs(1:n)) = 1;
16
17 Q = ordschur(U, T, sel);
18
19 X = Q(n+1:2*n, 1:n) / Q(1:n, 1:n);
```

Bibliografija

- [1] Beatrice Meini Dario A. Bini, Bruno Iannazzo, *Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2012.
- [2] B.N. Data., *Numerical methods for linear control systems design and analysis*, Elsevier Science Publishing Co Inc, 2004.
- [3] K. Ogata, *Modern Control Engineering, 5th Edition*, Prentice Hall, Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Upper Saddle River, 2010.
- [4] Prasanna Priyadarshi, *Optimal Controller Design for Inverted Pendulum System: An Experimental Study*, Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology, Rourkela, India, 2013.
- [5] R. C. DiPrima W. E. Boyce, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th edition*, John Wiley and Sons, 2000.
- [6] M. Marušić S. Singer S. Singer Z. Drmač, V. Hari, *Numerička analiza*, Sveučilište u Zagrebu, PMF - matematički odsjek, 2003.

Sažetak

Automatsko upravljanje sustavima je bitna sastavnica suvremenih tehnoloških rješenja. Sustav je uređena cjelina pojedinih dijelova koji s okolinom komuniciraju preko ulaznih i izlaznih signala. Pomoću fizičkih zakona, potrebno je napraviti matematički model sustava iz kojeg nastaje reprezentacija sustava u vremenskoj domeni, tj. prostor stanja sustava. Pomoću definicija upravljivosti, osmotrivosti, stabilnosti i detektabilnosti otkrivaju se važna svojstva sustava koja govore o mogućnosti implementacije automatskog upravljanja na željeni način. Kako bismo stabilizirali sustav, koristeći odgovarajući upravljački signal, potrebno je dizajnirati povratnu vezu metodom namještanja svojstvenih vrijednosti. Nedostatak određenih smjernica gdje postaviti svojstvene vrijednosti predstavlja problem u praksi. Pitanje dizajna sustava rješava se najčešće kompromisom, tako da se zadovolje traženi kriteriji performanse sustava. Stabilnost sustava, s obzirom na tražene kriterije, postiže se linearno kvadratnim regulatorom LQR (engl. *Linear Quadratic Regulator*) ili linearno kvadratnim Gaussovim regulatorom LQG (engl. *Linear Quadratic Gaussian*). LQR optimizira determinističke sustave, dok se LQG bavi optimizacijom performansi stohastičkih sustava. Za pronalaženje LQR i LQG regulatora potrebno je numeričko rješavanje neprekidne algebarske Riccatijeve jednadžbe. U radu je pokazano da se sustavi sa više ulaza i izlaza mogu kontrolirati pomoću LQR i LQG regulatora u vremenskoj domeni.

Summary

Control systems have many applications in modern world and play an important role in technology. To control a system, its mathematical model needs to be developed. Modeling is a process of defining a corresponding system of differential equations for a physical problem. Systems state space can be derived from its mathematical model. Generic concepts like controllability, observability, stability and detectability can lead to some significant system specifications, telling whether the system can be controlled in a specific way. The main goal is to prevent the system from diverging or "blowing up", so it needs to be stabilized. With the right control signal, a feedback control loop is set up through pole placement. In the absence of instructions on how to place poles, a more convenient way is used to obtain certain specifications, called linear quadratic regulation. For deterministic system optimizations linear quadratic regulator LQR is used, while for stochastic system optimizations linear quadratic Gaussian regulator is in charge. In order to obtain LQR and LQG regulators, a solution of algebraic Riccati equation needs to be computed. This work shows that multi-input and multi-output systems can be controlled with LQR and LQG regulators in time domain.

Životopis

Gregor Boris Banušić rođen je 2. studenog, 1993. godine u Wittenu, Njemačka. Sa 5 godina dolazi živjeti u Svetu Nedelju gdje završava osnovnu školu. U Zagrebu pohađa Petu gimnaziju, gdje je pokazao interes za matematiku učešćem na nekoliko državnih natjecanja. Na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu, 2012. godine upisuje preddiplomski studij matematike. Za vrijeme studija bio je član studentske udruge MNM (Mladi Nadareni Matematičari), posvećene radu sa srednjoškolcima, sudionicima matematičkih natjecanja. U sklopu udruge organizira *Turnir gradova*, međunarodno matematičko natjecanje za srednjoškolce. Nakon preddiplomskog studija izobrazbu nastavlja na istom fakultetu, na diplomskom studiju Računarstvo i matematika. Interes usmjerava na nekoliko područja: numerička matematika, strojno učenje te metaheuristike. Za vrijeme trajanja studija uspješno završava nekoliko kolegija s FER-a: *Osnove programskog jezika Java*, *Rješavanje optimizacijskih problema algoritmima evolucijskog računanja u Javi* te *Sustavi za rad u stvarnom vremenu*. Tijekom diplomskog studija radio je u nekoliko tvrtki: Bellabeat, CROZ i Zagrebačka banka.