Učeničko razumijevanje proporcionalnosti

Benković, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Benković

UČENIČKO RAZUMIJEVANJE PROPORCIONALNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr.sc. Ana Sušac

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ________________________, predsjednik
2. ________________________, član
3. ________________________, član

Povjerenstvo je rad ocjenilo ocjenom ________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________
2. ______________________
3. ______________________

Veliko hvala mojoj mentorici, dr.sc. Ani Sušac, na pomoći i uloženom trudu, na svim savjetima pri izradi ovog diplomskog rada, i što je uvijek imala strpljenja i vremena za moje upite.

Također, zahvaljujem se svim svojim kolegama, prijateljima i partneru koji su uvijek bili uz mene i bez kojih moje studiranje ne bi prošlo ovako lako i zabavno.

Posebno hvala mojoj obitelji, osobito mojim roditeljima na pruženoj podršci, ljubavi i odricanju, bez kojih sve što sam postigla ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Uvod

U 7. razredu osnovne škole učenici se susreću s proporcionalnim i obrnuto proporcionalnim veličinama u nastavi matematike. Učenici prvo pomoću multiplikativne veze određuju omjere raznih veličina te njihove vrijednosti. Zatim pomoću jednakosti omjera dolaze do pojmova razmjera ili proporcije. Nakon što su učenici savladali postavljanje omjera i proporcija raznih veličina, uvodi se pojam proporcionalnih veličina. Proporcionalne veličine su veličine koje ovise jedna o drugoj u obliku multiplikativne veze. Ovisnost proporcionalnih veličina se može odrediti pomoću koeficijenta proporcionalnosti. Proporcionalne veličine učenici prikazuju i grafički kao pravac kroz ishodište koordinatnog sustava. Uz proporcionalne veličine, učenici se susreću i s obrnuto proporcionalnim veličinama i koeficijentom obrnute proporcionalnosti. Učenici se s proporcionalnosti i obrnutom proporcionalnosti susreću i tijekom nastave fizike. Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost, se spominju kod objašnjavanja ovisnosti raznih veličina. Također, učenici, tijekom nastave fizike, grafički prikazuju proporcionalne veličine, npr. graf ovisnosti produljenja elastične opruge o sili, graf ovisnosti akceleracije tijela o sili koja djeluje na njega itd. Učenici se još s proporcionalnim veličinama susreću i tijekom nastave kemije i geografije, ali se tu naglasak stavlja na procese i situacije koje proporcionalne veličine predstavljaju, a ne direktno na odnos veličina.

Zbog nužnosti proporcionalnog rasuđivanja u mnogim nastavnim predmetima te u raznim situacijama iz stvarnog života konstruirali smo test kojim ćemo provjeriti stupanj proporcionalnog rasuđivanja kod učenika. Testirali smo učenike osmih razreda osnovne škole te drugih razreda srednje škole. Budući da se proporcionalnost obrađuje tek u sedmom razredu, testirali smo učenike osmog razreda osnovne škole jer se pretpostavlja da su učenici usvojili koncept proporcionalnosti. Učenike drugog razreda srednje škole smo testirali tako da provjerimo postoji li napredak u proporcionalnom rasuđivanju u odnosu na učenike osnovne škole.

1 Prijašnja istraživanja

Razvoj proporcionalnog rasuđivanja je jedan od najvažnijih ciljeva u nastavi matematike, ali i fizike. Ono je povezujuća tema gotovo svih matematičkih sadržajnih područja kao što su algebra, razlomci, postotci, geometrija, vjerojatnost i slično. Iako je proporcionalno rasuđivanje veoma bitno u mnogim aspektima nastave i svakodnevnog života, u Hrvatskoj još nisu provedena istraživanja o učeničkom razumijevanju proporcionalnosti. Što se tiče istraživanja u svijetu, provedeno je mnogo istraživanja na temelju kojih su napisani razni članci i priručnici o tome kako učenicima približiti proporcionalne veličine i operacije vezane za njih.

Prema [1], [2] i [3], učenici imaju problema pri razumijevanju proporcionalnosti, što dovodi do poteškoća u razumijevanju mnogih nastavnih cjelina raznih predmeta te različitih situacija u svakodnevnom životu.

Razvoj proporcionalnog rasuđivanja započinje s razumijevanjem multiplikativnih veza. Dok se nisu upoznali s pojmom proporcionalnosti, učenici uspoređuju vrijednosti veličina te predočavaju razlomke kao dijelove cjeline (vidi [1]). Pojam proporcionalnosti treba uvoditi postupno, od učenicima jednostavnijih primjera, kao što su, prema [2], primjeri s površinom. Prijelaz učeničkog razmišljanja s aditivnog na multiplikativno je veoma kompleksan proces. Učenici često imaju poteškoća s razumijevanjem situacija gdje vrijednost omjera nisu prirodni brojevi što ukazuje da učenici nisu u potpunosti usvojili multplikativnu vezu (vidi [1]). Također, učenici imaju poteškoća kod razlikovanja proporcionalnih i neproporcionalnih veličina. Da bi nadišli te teškoće učenicima treba osigurati mnogo primjera s različitim kontekstima s proporcionalnim i neproporcionalnim veličinama (vidi [2]). Kako bi učenici razvijali sposobnost proporcionalnog rasuđivanja, potrebno je uočiti da mehaničke procedure rješavanja zadataka s proporcionalnosti ne pridonose razvoju, već da učenici trebaju biti fleksibilni u svojem razmišljanju tako da koriste razne strategije kod rješavanja (vidi [3]). Prema [3], s učenicima treba redovito diskutirati o zadacima te tražiti od njih obrazloženja zadataka tako da se učenici odmaknu od mehaničkih procedura, a da razviju sposobnost modeliranja raznih situacija pomoću proporcionalnih veličina.

2 Metode

2.1. Konstrukcija testa

Prije konstrukcije testa trebali smo razmisliti što želimo ispitati ovim testom, odnosno koje obrazovne ishode želimo provjeriti jesu li učenici usvojili. Učenici kroz nastavu matematike, ali i fizike, kemije i geografije trebaju razvijati sposobnost proporcionalnog rasuđivanja. Sposobnost proporcionalnog rasuđivanja se temelji na razumijevanju multiplikativnih ovisnosti veličina. Proporcionalno rasuđivanje je teško definirati jednostavnom definicijom jer su u njemu isprepleteni procesi i kvalitativnog i kvantitativnog zaključivanja. Neke od sposobnosti koje bi proporcionalni mislioci trebali imati su:

- osjećaj za kovarijaciju, odnosno, razumijevanje veze u kojoj se dvije veličine mijenjaju u ovisnosti jedna o drugoj te uočavanja na koji način promjena vrijednosti jedne veličine utječe na vrijednosti druge veličine;
- razlikovanje omjera koji predstavlja vezu dviju veličina od samih veličina koje se uspoređuju;
- razlikovanje proporcionalnih veza od onih koje nisu proporcionalne u kontekstima iz realnog svijeta;
- razvijanje raznovrsnih strategija pri rješavanju zadataka s proporcionalnošću i uspoređivanju omjera, od kojih su većina neformalne, a ne primjena propisanih algoritama.

Test koji smo konstruirali se sastoji od 12 zadataka. Zadatke smo podijelili u nekoliko grupa, ovisno o tome što se provjerava u zadacima. Prvu grupu zadataka čine tri zadatka u kojima se koristi Ohmov zakon. U zadacima se provjeravalo razumijevanje veze u kojima se veličine mijenjaju o ovisnosti jedna o drugoj. Zadaci su bili podijeljeni tako da se prvo ispituje zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti tako što su u prvom zadatku veličine bile proporcionalne, u drugom zadatku su bile obrnuto proporcionalne, a u posljednjem zadatku iz ove grupe, trebalo je pomoću funkcionalne ovisnosti odrediti promjene veličine ako se mijenjaju dvije veličine ovisne o njoj, proporcionalna i obrnuto proporcionalna.

Drugu grupu zadataka čine dva zadatka u kojima se traži razlikovanje omjera koji predstavlja vezu dviju veličina od samih veličina koje se uspoređuju. Navedeni zadaci su osmišljeni tako da za njih nema propisanih algoritama za rješavanje, već se zahtijeva da učenici kontekst iz realnog svijeta prepoznaju kao vezu veličina. U jednom zadatku se uspoređuju dvije jednake geografske karte, ali su podaci o mjerilu karata prikazani na različite načine. U drugom zadatku se uspoređuju „jačine“ limunada čiji su sastojci u različitim količinama.

Treću grupu zadataka čine tri zadatka u kojima se također traži razlikovanje omjera koji predstavlja vezu dviju veličina od uspoređivanja tih veličina. Međutim, u ovoj grupi zadataka treba odrediti jednu nepoznatu veličinu koja se pojavljuje u omjerima. Kao i u drugoj grupi zadataka, zadaci su osmišljeni tako da za njihovo rješavanje nema propisanih algoritama. U jednom zadatku se uspoređuju visine dvojice likova. Jedan lik, gosp. Niski, ima prikazanu veličinu na dva načina, pomoću gumba i spajalica. Drugi lik, gosp. Visoki ima prikazanu visinu pomoću gumba, a traži se njegova visina u spajalicama. Učenici trebaju prepoznati ovisnost visine u gumbima i visine u spajalicama te odrediti kako se promijeni vrijednost visine u spajalicama kada se promijeni visina u gumbima. U drugom zadatku je prikazano mjerilo geografske karte pomoću odnosa stvarne udaljenosti u km i udaljenosti na karti u cm. Učenici trebaju odrediti drugačije mjerilo, odnosno pomoću ovisnosti navedenih veličina odrediti nove vrijednosti jedne veličine ako mijenjamo drugu veličinu. U trećem zadatku se traži masa smjese ako znamo omjer sastojka te masu jednog sastojka.

Četvrtu grupu zadataka čine tri zadatka u kojima se traži uočavanje ovisnosti dviju veličina i na koji način promjena vrijednosti jedne veličine utječe na vrijednost druge veličine. Za ove zadatke postoji algoritam za rješavanje, odnosno postoje formule pomoću kojih učenici mogu riješiti zadatke, ali te formule nisu nužne za rješavanje. U prvom zadatku se pojavljuje brzina kod jednolikog pravocrtnog gibanja. U zadatku su navedene dvije proporcionalne veličine, prijeđeni put i vrijeme potrebno da se prijeđe taj put. Učenici trebaju odrediti ovisnost tih veličina te zatim odrediti novu vrijednost vremena, ako je zadano koliki je prijeđeni put. U drugome zadatku s polugom su navedene obrnuto proporcionalne veličine, sila, odnosno masa, te udaljenost hvatišta sile od oslonca. Učenici trebaju odrediti ovisnost tih veličina te odrediti novu vrijednost udaljenosti hvatišta sile od oslonca, ako je zadana nova sila, tj. masa. U trećem zadatku s gustoćom je prikazan omjer dviju veličina te treba protumačiti značenje tog omjera. Također se traži određivanje vrijednosti jedne veličine nakon promjene druge veličine.

Posljednju grupu zadataka čini jedan zadatak. U zadatku se provjerava razumijevanje grafičkog prikaza proporcionalnih veličina. U tekstu zadatka je navedeno da su dvije veličine proporcionalne te se od učenika traži da odaberu grafički prikaz ovisnosti navedenih veličina od tri navedena grafička prikaza.

2.2. Ispitanici i testiranje

Istraživanje je provedeno tijekom svibnja i lipnja 2017. godine u 4 osnovne škole i 3 srednje škole u Zagrebu. U osnovnim školama testiran je po jedan osmi razred, a u srednjim školama po jedan drugi razred, osim u jednoj osnovnoj školi, gdje su testirana dva osma razreda. Ukupno je sudjelovalo 155 učenika, od čega je 91 učenik osmog razreda osnovne škole te 64 učenika drugog razreda srednje škole.

Sve osnovne škole imaju jednake programe i satnica fizike je dva sata tjedno u osmom razredu. Testirane srednje škole su bile različitih profila. Jedna škola je opća gimnazija, druga je tehnička škola te treća je prirodoslovna gimnazija. Program nastave fizike u tim školama je sličan, ali je tjedna satnica različita. Satnica fizike je propisana nastavnim planom Ministarstva znanosti i obrazovanja. U općoj gimnaziji tjedno se održavaju dva školska sata fizike, u prirodoslovnoj gimnaziji i tehničkoj školi tri sata fizike od čega su jedan sat praktične vježbe u laboratorijima.

Predviđeno vrijeme za pisanje testa je bio jedan školski sat, odnosno 45 min. Učenici su mogli pitati ako im je trebalo dodatno objašnjenje u pojedinim zadacima.

2.3. Obrada podataka

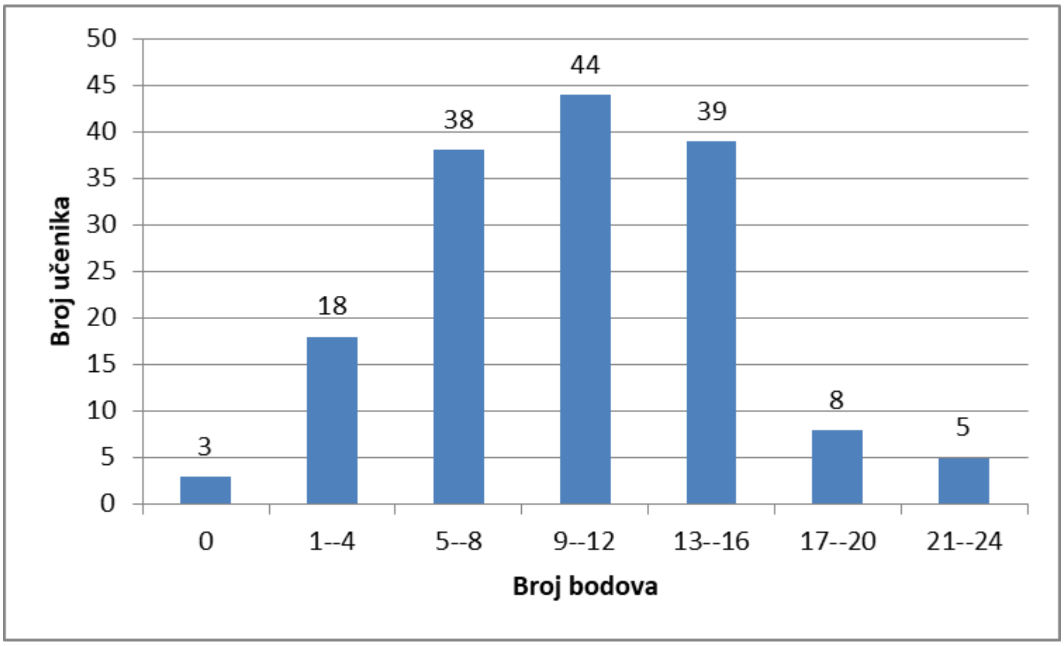
Bodovanje testa bilo je na sljedeći način. Svaki točan odgovor uz obrazloženje nosio je dva boda. Ako su učenici napisali samo točan rezultat ili su zaokružili točan odgovor, bez obrazloženja, dobili su jedan bod. Također, ako su učenici napisali samo valjano obrazloženje bez rezultata, dobili su jedan bod. Budući da se test sastoji od 12 zadataka, maksimalan broj postignutih bodova je 24. Sve podatke o učenicima (ime, prezime, škola) te odgovore koje su učenici napisali unijela sam u Excel tablicu. U tablici sam napravila analizu rezultata, tj. odredila sam uspjeh svakog učenika na testu i zatim izračunala prosječni broj bodova svih učenika zajedno te posebno učenika osnovne i srednje škole. Analiza učeničkih obrazloženja daje uvid u različite strategije koje su učenici koristili kod rješavanja zadataka, odnosno postotak najčešće korištenih ispravnih i krivih strategija za svaki pojedini zadatak.

Za statističku obradu podataka koristila sam poznatu statističku metodu, t-test. T-test je statistički postupak za određivanje statističke značajnosti razlike između dva uzorka, odnosno između dvije aritmetičke sredine. Razlikujemo t-testove za zavisne i nezavisne uzorke. T-test promatra odnos razlika aritmetičkih sredina i njihovih pogreška, odnosno standardnih devijacija. Što je razlika aritmetičkih sredina veća od svoje pogreške to je statistički značajnija. Kada je neka razlika statistički značajna, to znači da nađena razlika, bez obzira na njenu veličinu, nije slučajna već da ta razlika postoji i među širom populacijom. Suprotno, ako navedena razlika nije statistički značajna, to znači da ona može biti slučajna posljedica varijacije uzorka te da postoji mogućnost da nema nikakve razlike među uzorcima. Statističku značajnost određujemo pomoću p vrijednosti. p vrijednost ili razina značajnosti je vjerojatnost da su razlike koje promatramo nastale slučajno. Ako je p vrijednost manja od 5%, odnosno $p < 0,05$, razlike su statistički značajne.

3 Rezultati i diskusija

3.1. Raspodjela svih učenika po ostvarenom broju bodova

Na Slici 3.0 prikazana je raspodjela svih testiranih učenika po broju bodova postignutih na testu.

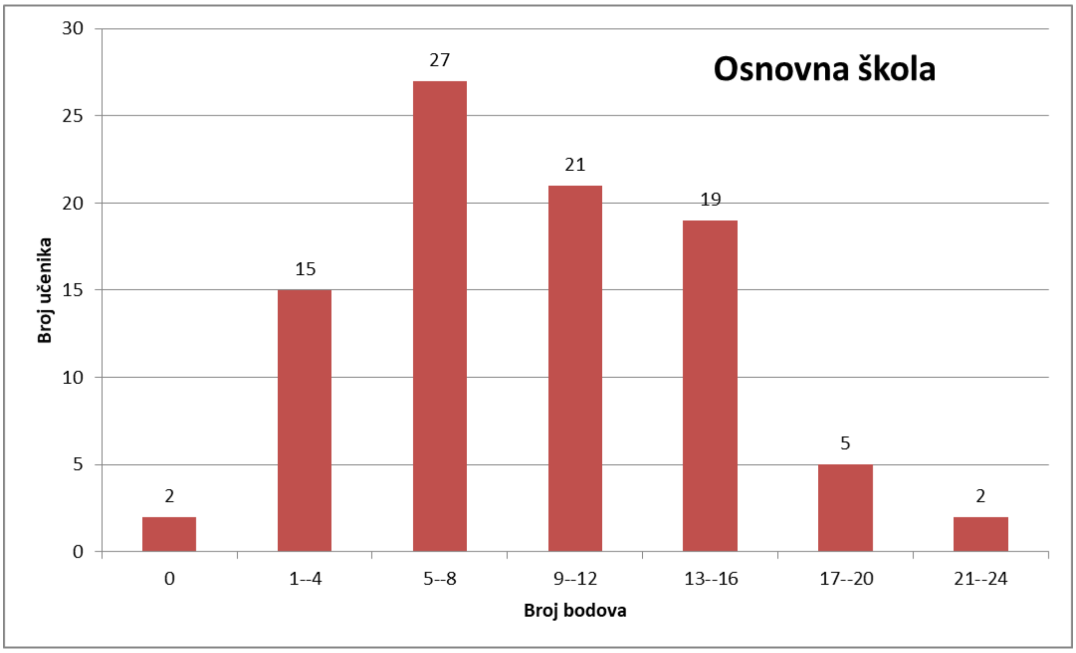


Slika 3.0: *Raspodjela učenika po broju bodova*

Iz grafa uočavamo da je najviše učenika, njih 44, dobilo od 9 do 12 bodova, odnosno da je 28% od ukupnog broja učenika postiglo od 37,5% do 50,0% bodova na testu. Nadalje, vidimo da su tri učenika dobilo 0 bodova. Slika 3.0 također pokazuje da je raspodjela broja učenika po broju dobivenih bodova približno normalna, što vidimo po „zvonolikom“ izgledu grafa. Srednja vrijednost postignutih bodova je 10, a standardna devijacija, odnosno prosječno odstupanje od srednje vrijednosti, je 5. Gledajući u postotcima, srednja vrijednost je 42%, a standardna devijacija je 20%. To nam pokazuje da je većina učenika postigla između 5 i 15 bodova, što možemo vidjeti i na Slici 3.0. Srednja vrijednost je manja od polovine ukupnih bodova, odnosno, manja od 50% što nam govori da je test bio težak za učenike.

3.2. Raspodjela učenika osnovne škole po ostvarenom broju bodova

Na Slici 3.1 prikazana je raspodjela učenika osnovnih škola po broju bodova postignutih na testu.

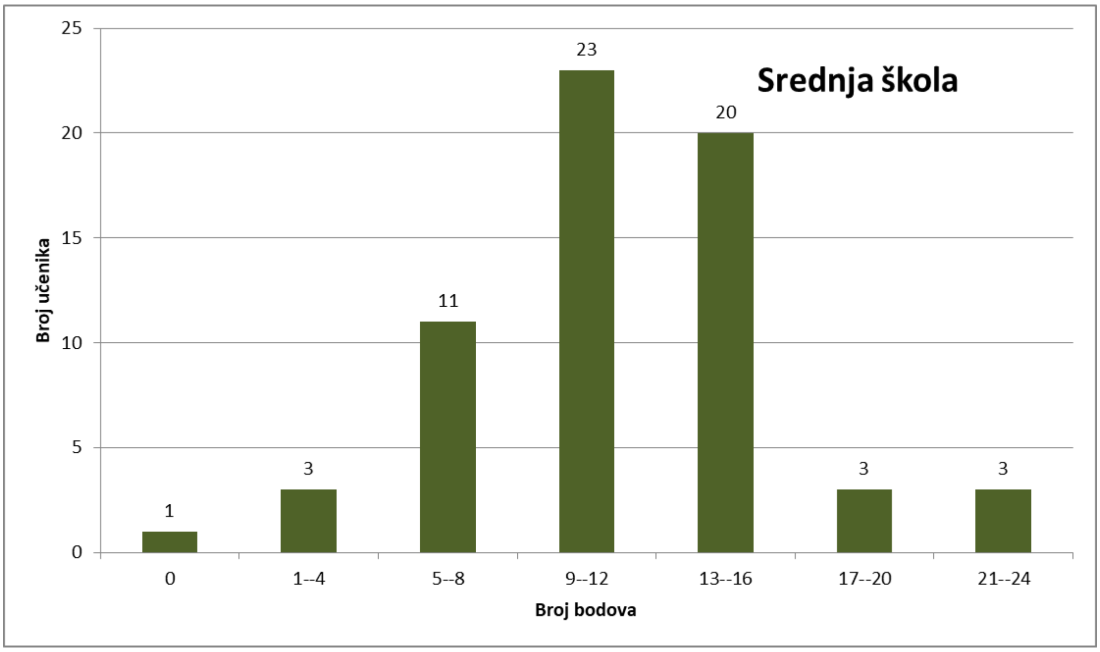


Slika 3.1: *Raspodjela učenika osnovne škole po broju bodova*

Na Slici 3.1 uočavamo da je najviše učenika, njih 27, ostvarilo od 5 do 8 bodova na testu. Dvoje učenika je ostvarilo 0 bodova. Gledajući u postotcima, 29,7% učenika osnovnih škola je postiglo od 20,8% do 33,3% bodova u testu. Srednja vrijednost postignutih bodova je 9, a standardna devijacija je 5, odnosno srednja vrijednost je 38%, a standardna devijacija je 21%. Srednja vrijednost nam govore da je test bio vrlo težak za učenike osnovnih škola.

3.3. Raspodjela učenika srednje škole po ostvarenom broju bodova

Na Slici 3.2 je prikazana raspodjela učenika srednjih škola po broju bodova postignutih na testu.

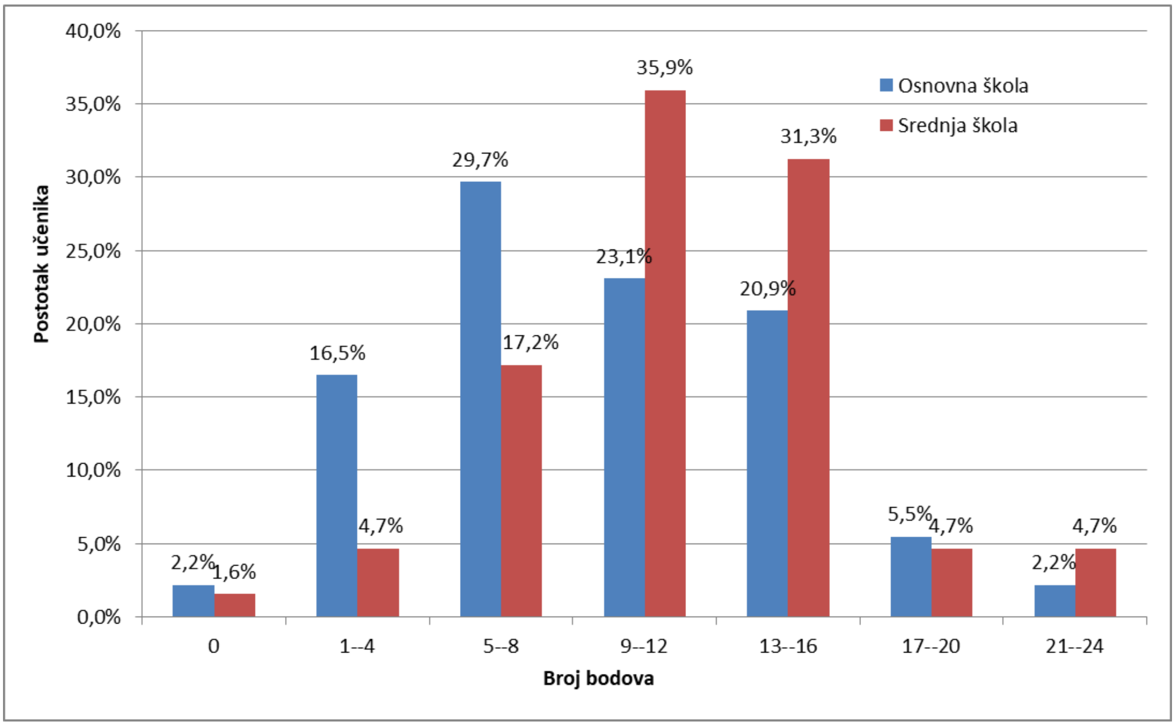


Slika 3.2: *Raspodjela učenika srednje škole po broju bodova*

Na Slici 3.2 uočavamo da je najviše učenika, njih 23, postiglo od 9 do 12 bodova, odnosno, 35,9% učenika je postiglo od 37,5% do 50,0% na testu. Jedan učenik je ostvario 0 bodova. Srednja vrijednost postignutih bodova je 11, a standardna devijacija je 5, odnosno, gledajući u postotcima, srednja vrijednost je 48%, a standardna devijacija je 19%. Srednja vrijednost nam govori da je test bio težak za učenike srednjih škola.

3.4. Usporedba učenika osnovnih škola i srednjih škola

Na Slici 3.3 su prikazane raspodjele učenika osnovnih i srednjih škola po broju bodova ostvarenih na testu.



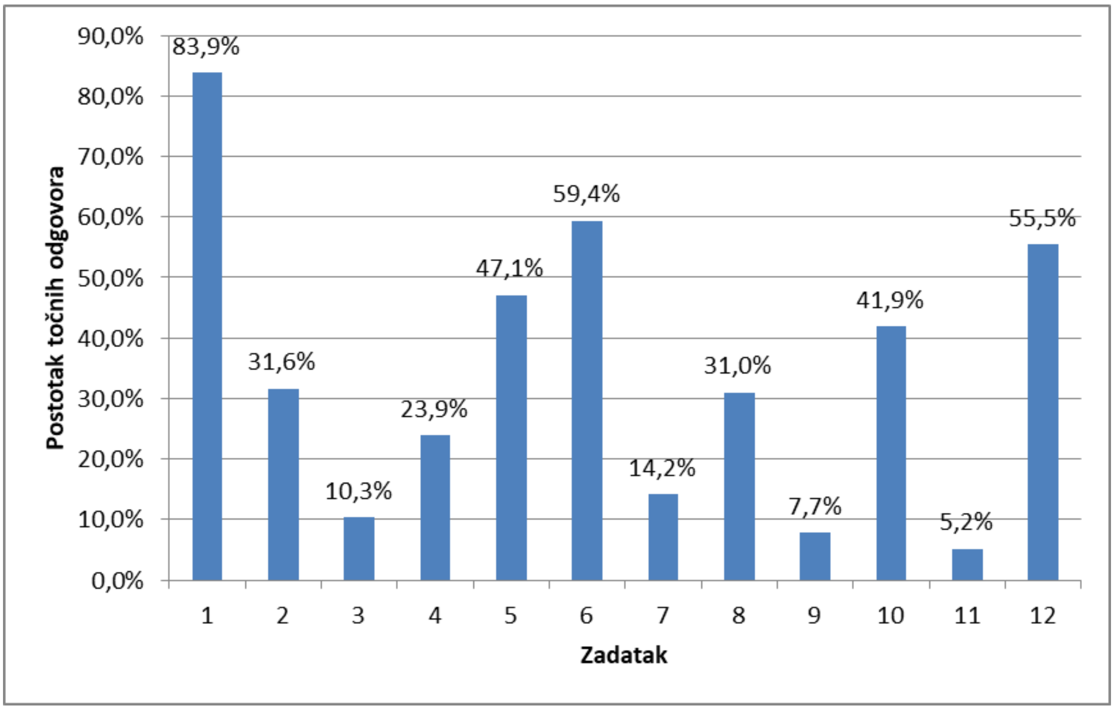
Slika 3.3: *Raspodjela učenika osnovnih i srednjih škola po broju bodova*

Iz grafa uočavamo da u osnovnoj i u srednjoj školi imamo približno normalne raspodjele, ali sredine raspodjela se ne preklapaju što ukazuje na to da su prosječne vrijednosti različite. Učenici osnovnih škola su, očekivano, lošije riješili test od učenika srednjih škola. Razliku prosječnih vrijednosti možemo uočiti u Tablici 3.1 u kojoj su navedene srednje vrijednosti i standardna devijacija postignutih bodova za učenike osnovnih i srednjih škola, i ukupno, za sve učenike zajedno. Da bih odredila je li ta razlika statistički značajna, provela sam t-test. Dobivena *p* vrijednost iznosi 0,006 što znači da je razlika dobivena između učenika osnovnih i srednjih škola statistički značajna.

	Srednja vrijednost i standardna devijacija broja postignutih bodova	Srednja vrijednost i standardna devijacija postotka točnih odgovora
OSNOVNA ŠKOLA	9 ± 5	$(38 \pm 21)\%$
SREDNJA ŠKOLA	11 ± 4	$(47 \pm 19)\%$
UKUPNO	10 ± 5	$(42 \pm 20)\%$

Tablica 3.1: *Usporedba srednjih vrijednosti i standardnih devijacija*

3.5. Ostvareni broj bodova po pojedinom zadatku



Slika 3.4: *Raspodjela postotka točnih odgovora po zadacima*

Na Slici 3.4 su prikazani postotci točnih odgovora po zadacima. Najbolje su riješeni 1. i 6. zadatak u kojima je trebalo prepoznati multiplikativnu ovisnost veličina te odrediti kako se mijenja vrijednost jedne veličine, ako mijenjamo vrijednost druge veličine, te 12. zadatak u kojem je također trebalo prepoznati multiplikativnu ovisnost i usporediti dva omjera. Najlošije su riješeni zadaci koji su tražili zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti (3., 7. i 11.) te 9. zadatak u kojemu je trebalo prepoznati graf ovisnosti proporcionalnih veličina. Detaljna analiza svakog pojedinog zadatka nalazi se u sljedećem poglavlju.

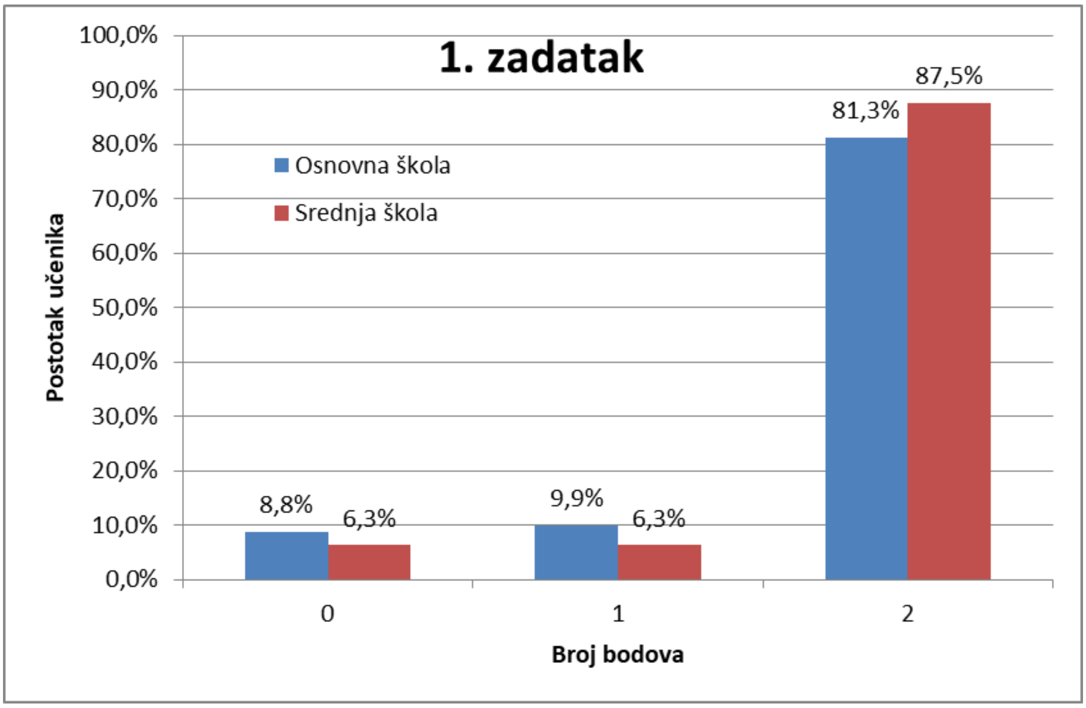
3.6. Analiza po zadacima

Zadatak 1.

Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

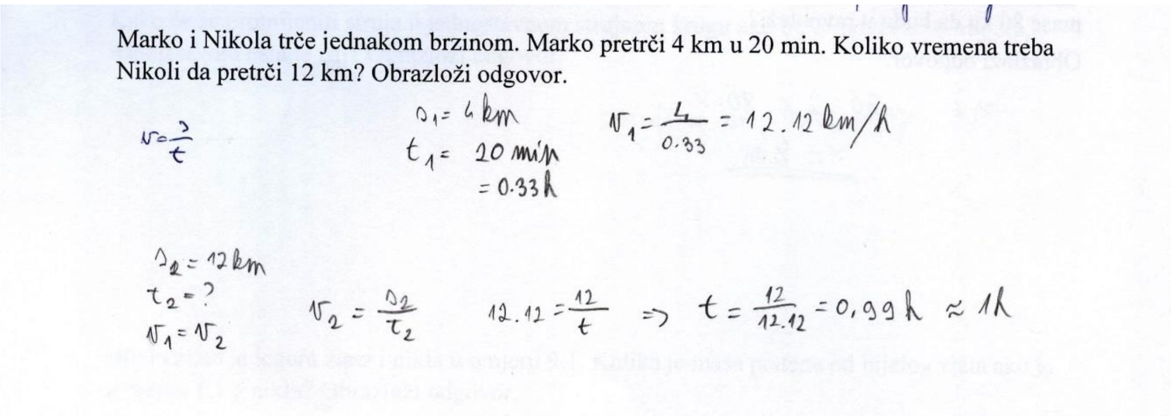
Ovim zadatkom ispituje se učeničko razumijevanje ovisnosti veličina, tj. ispituje se jesu li učenici sposobni odrediti kako će se promijeniti jedna veličina, ako mijenjamo drugu veličinu, a veličine su u multiplikativnoj vezi. Zadatak se može riješiti, npr. pomoću strategije svođenja na jedinicu. Marko pretrči 4 km u 20 min, odnosno Marko pretrči 1 km u $20 : 4 = 5$ min. Budući da Marko i Nikola trče jednakom brzinom, slijedi da i Nikola pretrči 1 km u 5 min. Tada Nikola pretrči 12 km za $5 \cdot 12 = 60$ min.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli $(86 \pm 31)\%$ bodova, a učenici srednjih škola $(91 \pm 27)\%$ bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,36). Na Slici 3.5 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Uočavamo da je veliki broj učenika i osnovne škole (81,3%) i srednje škole (87,5%) na ovom zadatku dobio dva boda što znači da je učenicima ovaj zadatak bio lagan.



Slika 3.5: *Raspodjela učenika po broju bodova u 2. zadatku*

Od 130 učenika koji su postigli dva boda na ovome zadatku, njih 45 (34,6%) su koristili formulu brzine kod jednolikog pravocrtnog gibanja (Slika 3.6). Za navedene učenike ne možemo zaključiti jesu li dosegli fazu proporcionalnog rasuđivanja u kojoj prepoznaju ovisnost proporcionalnih veličina. Učenici se često susreću s pojmom brzine te s korištenom formulom jednolikog pravocrtnog gibanja pa je razumljivo da je najveći broj učenika u kontekstu zadatka prepoznao da se može koristiti navedenom formulom.


Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

$v = \frac{s}{t}$

$s_1 = 4\,km$

$t_1 = 20\,min = 0.33\,h$

$v_1 = \frac{4}{0.33} = 12.12\,km/h$

$s_2 = 12\,km$

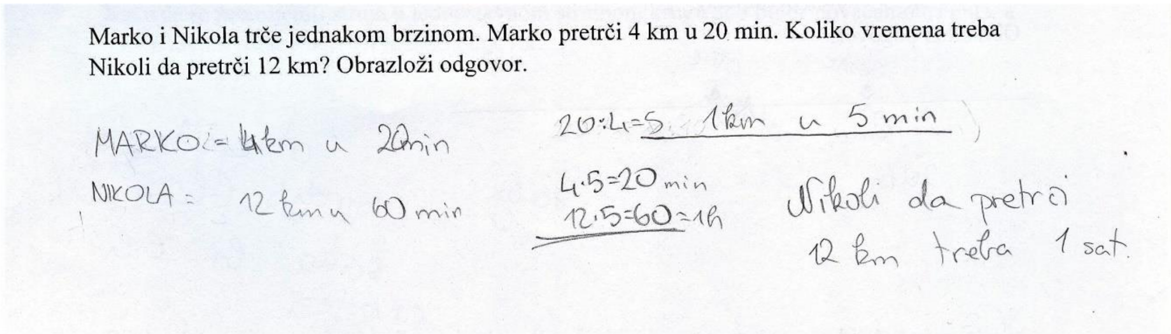
$t_2 = ?$

$v_1 = v_2$

$v_2 = \frac{s_2}{t_2}$ $12.12 = \frac{12}{t} \Rightarrow t = \frac{12}{12.12} = 0{,}99\,h \approx 1\,h$

Slika 3.6: *Primjer korištenja formule za 2 boda u 1. zadatku*

33 učenika (25,4%), koji su postigli dva boda, su koristili strategiju svođenja na jedinicu (Slika 3.7).


Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

MARKO = 4 km u 20 min

NIKOLA = 12 km u 60 min

20:4=5 1 km u 5 min

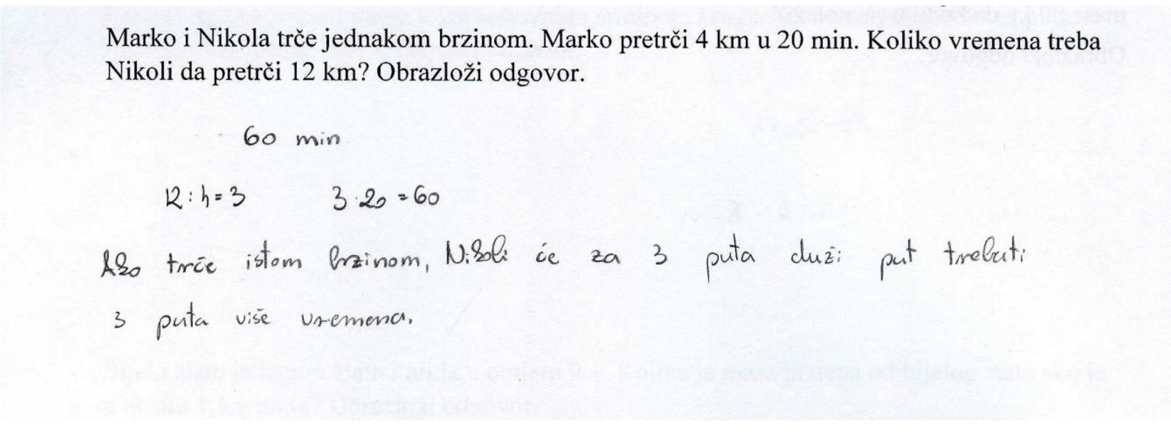
4·5=20 min

12·5=60=1h

Nikoli da pretrči 12 km treba 1 sat.

Slika 3.7: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 2 boda u 1. zadatku*

28 učenika (21,5%) se koristilo svojstvima proporcionalnih veličina, odnosno multiplikativnom vezom dviju veličina (Slika 3.8).


Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

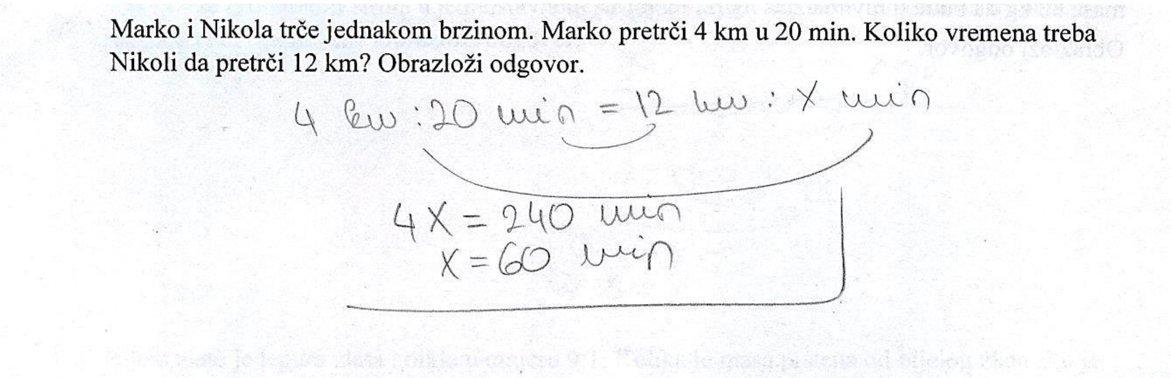
60 min

12:4=3 3·20=60

Ako trče istom brzinom, Nikoli će za 3 puta duži put trebati 3 puta više vremena.

Slika 3.8: *Primjer korištenja svojstva proporcionalnosti za 2 boda u 1. zadatku*

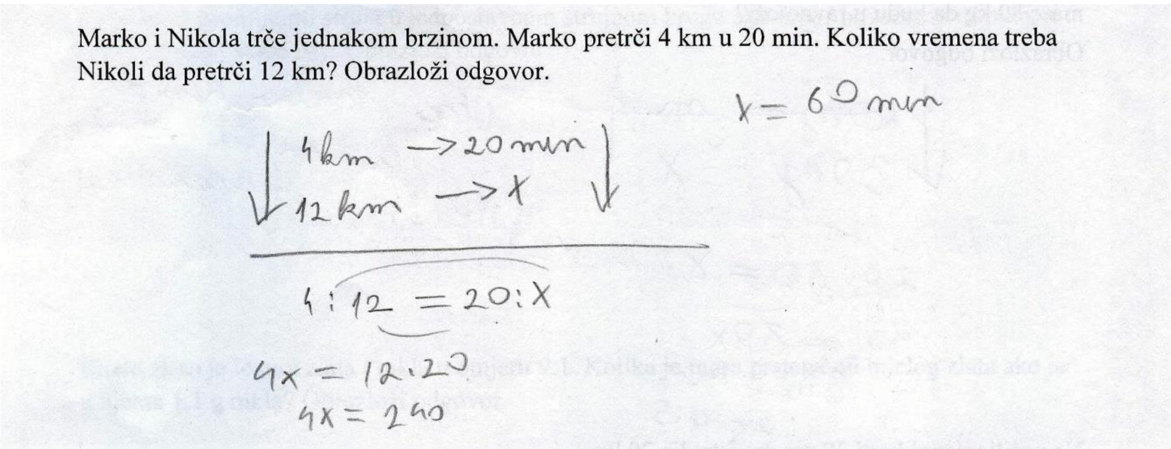
11 učenika (8,5%) su koristili strategiju rješavanja razmjera, odnosno učenici su postavili razmjer te odredili vrijednost nepoznate veličine (Slika 3.9). 13 učenika (10,0%) su također postavili razmjer, ali pomoću metode strelica (Slika 3.10).


Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

4 km : 20 min = 12 km : x min

4x = 240 min
x = 60 min

Slika 3.9: *Primjer strategije razmjera za 2 boda u 1. zadatku*


Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

x = 60 min

4 km → 20 min
12 km → x

4 : 12 = 20 : x

4x = 12 · 20
4x = 240

Slika 3.10: *Primjer korištenja metode strelica za 2 boda u 1. zadatku*

Za učenike koji su postigli dva boda u ovom zadatku možemo reći da u određenim situacijama prepoznaju proporcionalne veličine te mogu zaključivati na osnovi njihove ovisnosti.

Od 13 učenika, koji su postigli jedan bod na ovome zadatku, njih 11 (84,6%) nije kategorizirano. Navedeni učenici su ponudili ispravan odgovor, ali bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili. Dvoje učenika (15,4%) je kod rješavanja zadatka koristilo ispravnu formulu, ali su pogriješili u računu.

Od 12 učenika, koji nisu postigli niti jedan bod na ovome zadatku, njih 6 (50,0%) nije ništa napisalo. 4 učenika (33,3%) su koristili formulu, ali nisu završili račun niti došli do nekog odgovora. Dvoje učenika (16,7%) nije kategorizirano jer ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili.

U Tablici 3.2 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	korištenje formule	20	25
	svođenje na jedinicu	22	11
	svojstva proporcionalnosti	20	8
	razmjer	2	9
	metoda strelica	10	3
	ukupno	**74**	**56**
1 bod	korištenje formule	2	0
	nekategorizirano	7	4
	ukupno	**9**	**4**
0 boda	korištenje formule	2	2
	nekategorizirano	2	0
	ukupno	**4**	**2**

Tablica 3.2: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 1. zadatku*

Budući da ovaj zadatak ima veliku riješenost, možemo reći da su učenici prepoznaju proporcionalne veličine i primjenjuju njihova svojstva u određenim situacijama. Također učenici modeliraju problemske situacije pomoću proporcionalnosti te razvijaju raznovrsne strategije kod rješavanja zadatka, ali još uvijek se javlja primjena propisanih algoritama, u ovom slučaju je to bilo korištenje formule, pa možemo reći da učenici još uvijek razvijaju sposobnost proporcionalnog rasuđivanja.

Zadatak 2.

Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

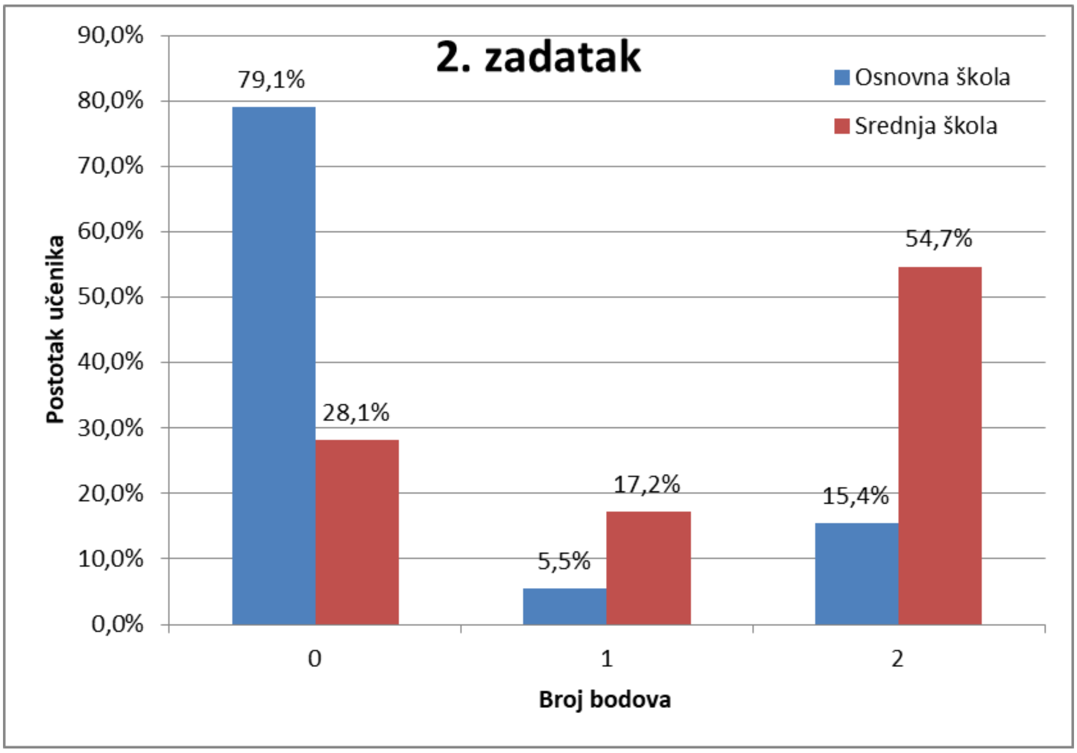
b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

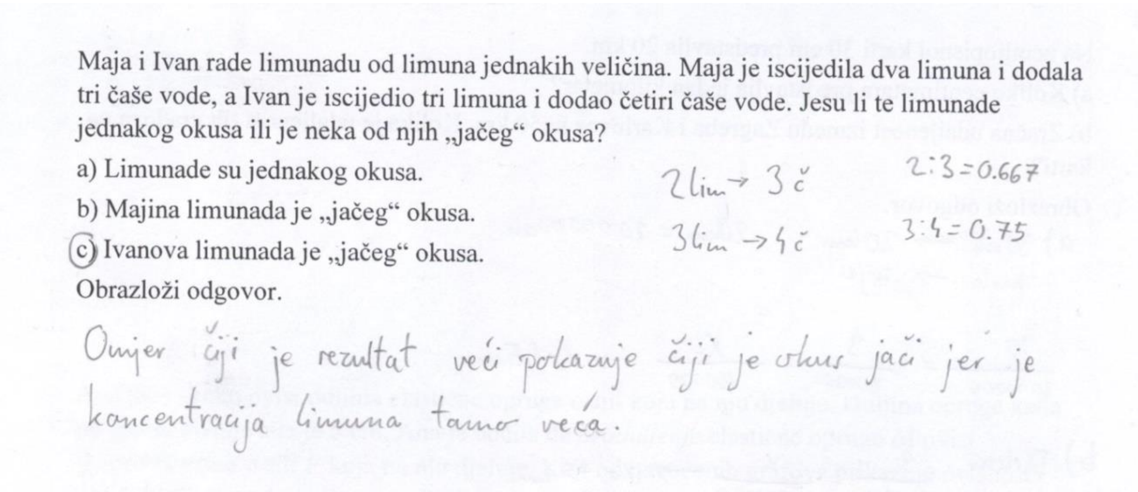
Ovim zadatkom ispituje se učeničko razlikovanje aditivne i multiplikativne veze, odnosno učeničko poznavanje vrijednosti, odnosno kvocijenta omjera. U zadatku treba usporediti „jačine“ limunada, odnosno treba vidjeti koja limunada ima veću vrijednost omjera ili koja limunada sadrži veći udio limuna u sebi. Omjer limuna i vode u Majinoj limunadi je $2:3$, odnosno vrijednost omjera je $\frac{2}{3} = 0{,}67$. Omjer limuna i vode u Ivanovoj limunadi je $3:4$, odnosno vrijednost omjera je $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Kada usporedimo vrijednosti omjera, vidimo da je Ivanova vrijednost omjera veća od Majine te zaključujemo da je Ivanova limunada „jača“. Ako promatramo udjele limuna u limunadama, možemo kao udio uzeti, već dobivene, vrijednosti omjera limuna i vode ili vrijednost omjera limuna i zbroja količine limuna i vode. U tome slučaju, vrijednost omjera Majine limunade je $\frac{2}{5} = 0{,}40$, a vrijednost omjera Ivanove limunade je $\frac{3}{7} = 0{,}43$. Uspoređujući dobivene vrijednosti, opet da je Ivanova limunada „jačeg“ okusa.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (18 ± 37)% bodova, a učenici srednjih škola (63 ± 44)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole bila je statistički značajna (p < 0,0001). Na Slici 3.11 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Uočavamo da je veliki broj učenika osnovne škole (skoro 80%) na ovom zadatku dobio nula bodova dok je 55 % učenika srednje škole dobilo dva boda. To ukazuje na znatan napredak učenika srednje škole u odnosu na učenike osnovne škole u razumijevanju i primjeni omjera.



Slika 3.11: *Raspodjela učenika po broju bodova u 2. zadatku*

Učenici koji su postigli 2 boda su najčešće koristili strategiju usporedbe vrijednosti omjera (Slika 3.12). Od 49 učenika koji su u potpunosti riješili ovaj zadatak, njih 41 (83,7%) je koristilo navedenu strategiju.


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg" okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg" okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg" okusa.

Obrazloži odgovor.

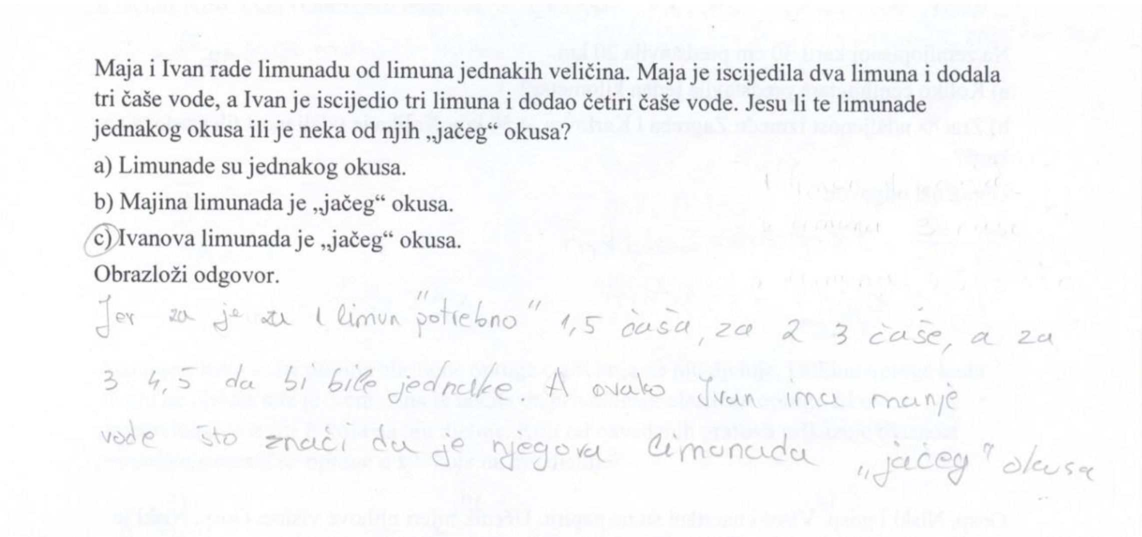
2 lim → 3 č   2:3 = 0.667

3 lim → 4 č   3:4 = 0.75

Omjer čiji je rezultat veći pokazuje čiji je okus jači jer je koncentracija limuna tamo veća.

Slika 3.12: *Primjer strategije usporedbe vrijednosti omjera za 2 boda u 2. zadatku*

7 učenika (14,3%) se koristilo strategijom svođenja na jedinicu, odnosno učenici su računali koliko bi koristili čaša vode u pojedinoj limunadi ako imamo jedan limun, i obratno, koliko limuna ide na jednu čašu vode u pojedinoj limunadi (Slika 3.13).



Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg" okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg" okusa.

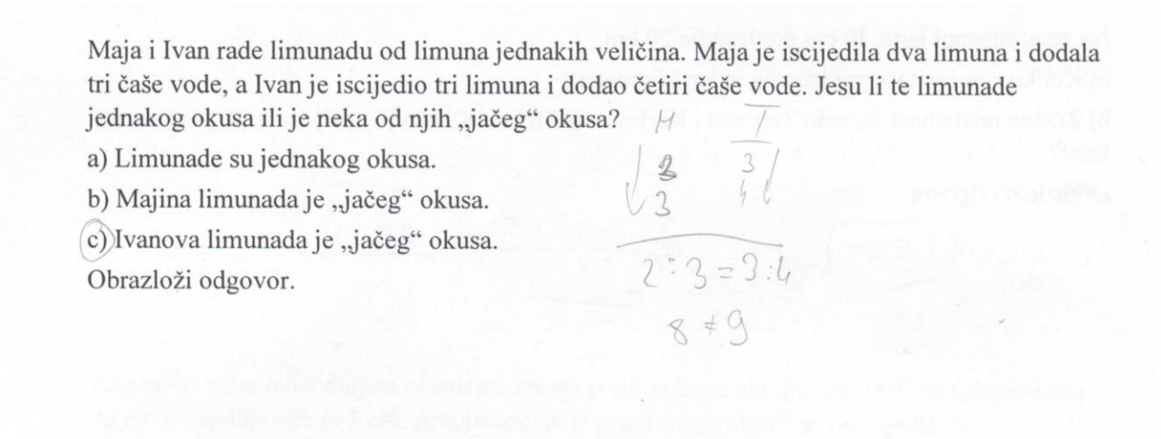
c) Ivanova limunada je „jačeg" okusa.

Obrazloži odgovor.

Jer ~~za~~ je za 1 limun "potrebno" 1,5 čaša, za 2 3 čaše, a za 3 4,5 da bi bile jednake. A ovako Ivan ima manje vode što znači da je njegova limunada „jačeg" okusa

Slika 3.13: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 2 boda u 2. zadatku*

Jedan učenik se koristio metodom strelica, odnosno pomoću metode strelica je izjednačio omjere limuna i vode (Slika 3.14).



Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg" okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg" okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg" okusa.

Obrazloži odgovor.

M	I
2	3
3	4

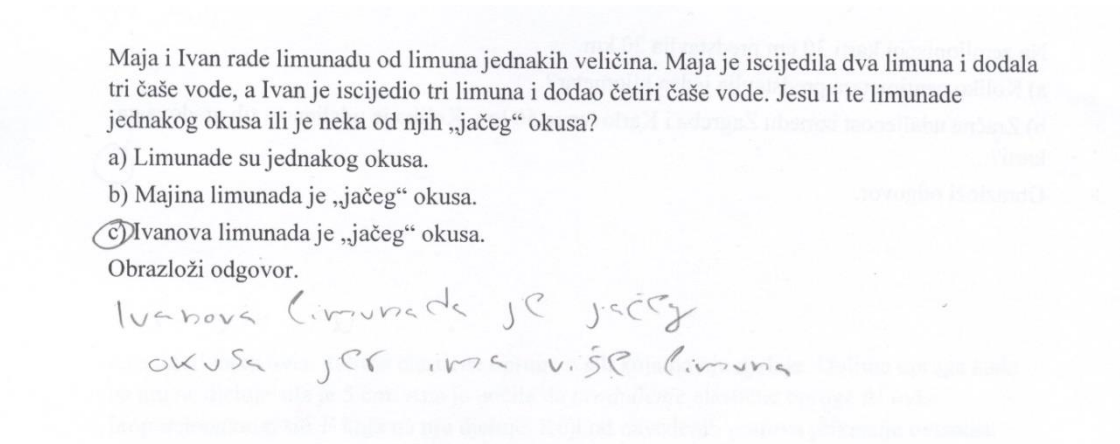
$2:3 = 3:4$

$8 \neq 9$

Slika 1.14: *Primjer metode strelica za 2 boda u 2. zadatku*

Za sve navedene učenike možemo reći da razlikuju multiplikativnu vezu od aditivne, odnosno da su u stanju uočiti na koji način promjena jedne veličine utječe na promjenu druge veličine.

Od 16 učenika koji su postigli jedan bod, njih 8 (50,0%) se koristilo strategijom uspoređivanja veličina (Slika 3.15). Učenici su zaokružili ispravan odgovor na temelju usporedbe broja limuna i čaša vode. Učenici su do odgovora dolazili uspoređujući broj limuna. Tako su učenici zaključili da je „jača“ ona limunada koja ima veći broj limuna. Budući da Ivan ima 3 limuna, a Maja 2 limuna, a kako je 3 > 2, tada je Ivanova limunada „jača“. Učenici koji su se koristili ovom strategijom su ispravno zaključili da je „jača“ ona limunada koja ima više limuna, ali oni su uspoređivali samo količinu limuna. Možemo reći da učenici još nisu razvili sposobnost razmišljanja o omjeru kao vezi dviju veličina, a ne kao o dvije veličine koje se uspoređuju.


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

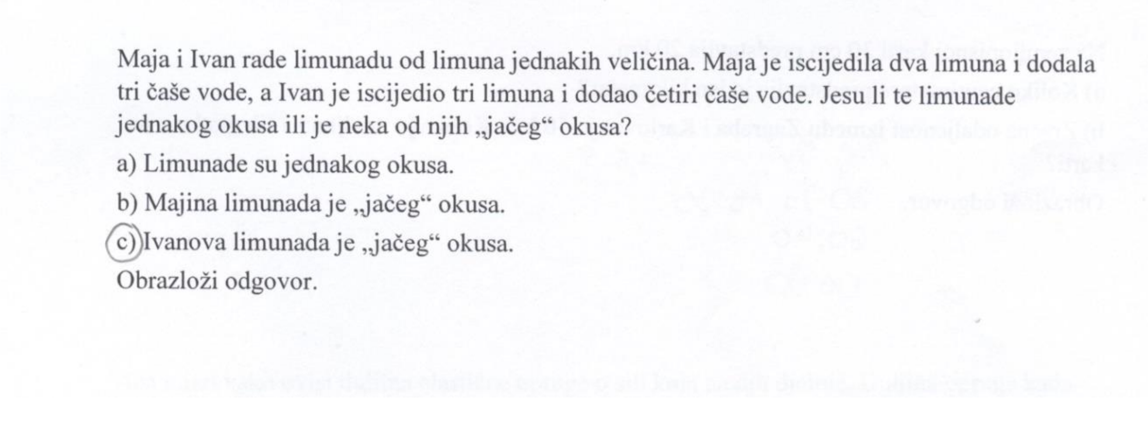
c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

Ivanova limunada je jačeg
okusa jer ima više limuna

Slika 3.15: *Primjer strategije aditivne veze za 1 bod u 2. zadatku*

7 učenika (43,8%) je nekategorizirano, nisu dali obrazloženje ili se iz njihovih odgovora nije moglo razaznati kojom su se strategijom koristili, a zaokružili su točan odgovor (Slika 3.16).


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

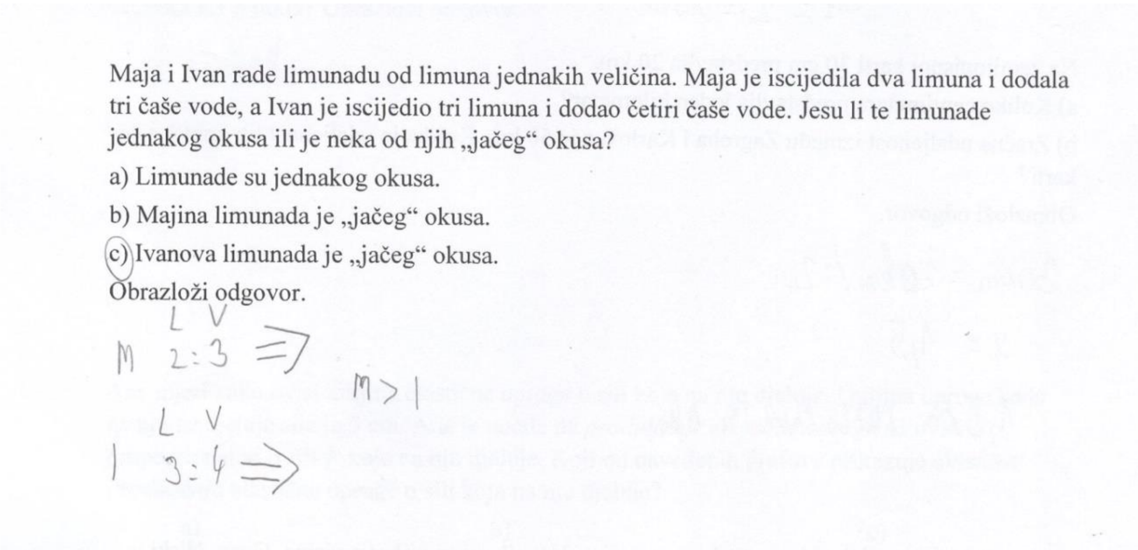
b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

Slika 3.16: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 1 bod u 2. zadatku*

Jedan učenik se koristio strategijom omjera, ali je krivo usporedio vrijednosti omjera (Slika 3.17).


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

L V

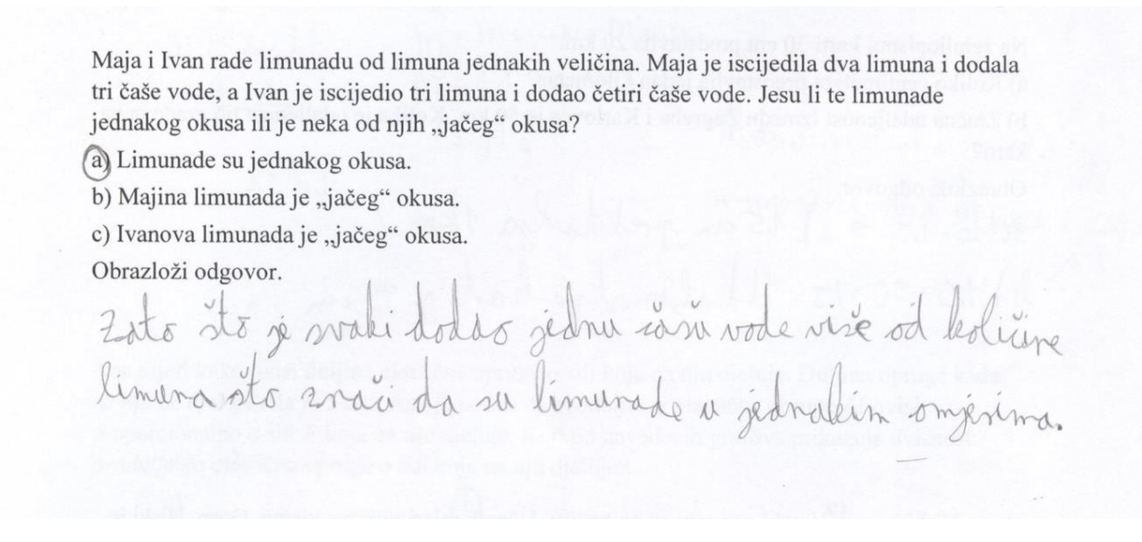
M 2:3 ⇒ M > I

L V

I 3:4 ⇒

Slika 32.17: *Primjer strategije jednakosti omjera za 1 bod u 2. zadatku*

Od 90 učenika koji nisu postigli niti jedan bod, njih 52 (57,8%) se koristilo strategijom aditivne veze kod rješavanja (Slika 3.18). Koristeći aditivnu vezu veličina koje promatraju (limun i čaša vode), učenici su uočili da se obje vrijednosti veličina razlikuju za jednu. Odnosno, Ivan ima jednu čašu vode više i jedan limun više.


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

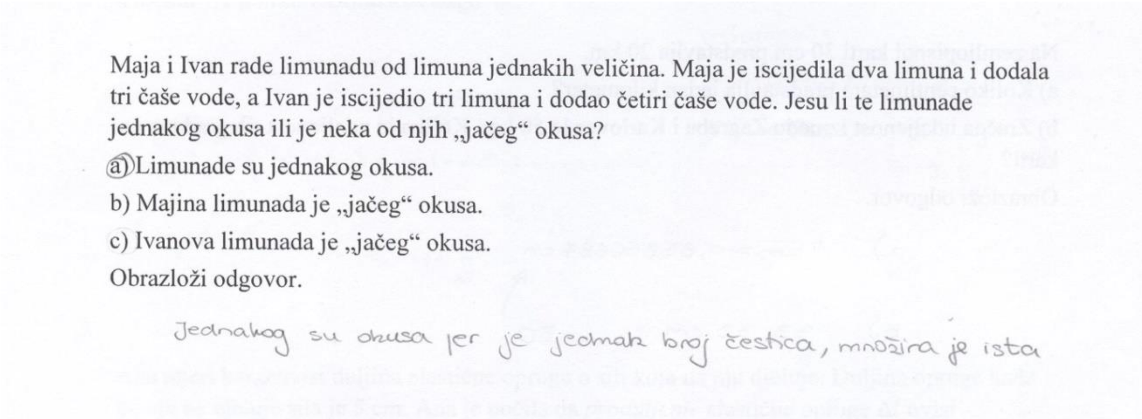
c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

Zato što je svaki dodao jednu čašu vode više od količine limuna što znači da su limunade u jednakim omjerima.

Slika 3.18: *Primjer strategije aditivne veze za 0 bodova u 2. zadatku*

30 učenika (33,3%) nije kategorizirano, odnosno ne može se razaznati kojom su se strategijom koristili (Slika 3.19).


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

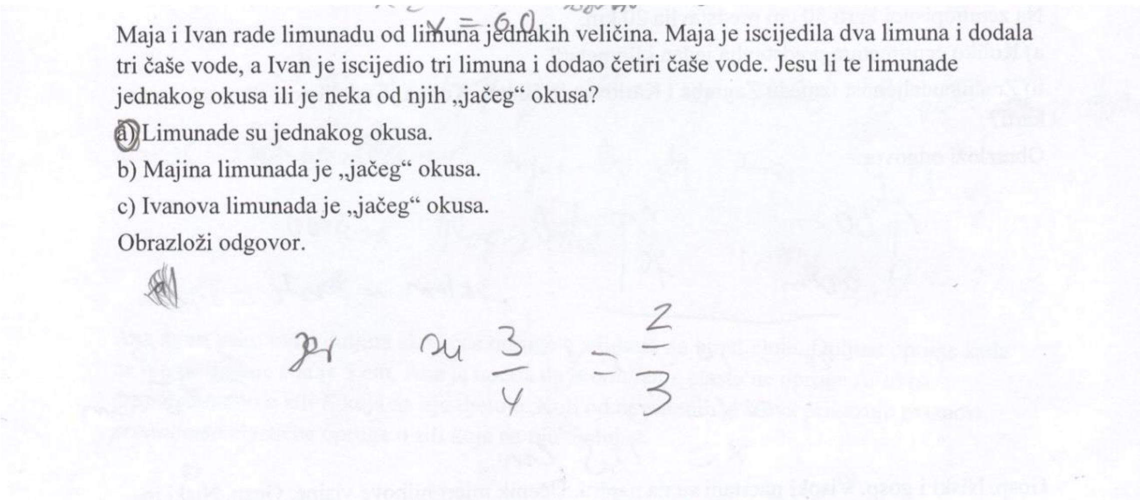
c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

Jednakog su okusa jer je jednak broj čestica, množina je ista

Slika 3.19: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 0 bodova u 2. zadatku*

4 učenika (4,4%) se koristilo strategijom jednakosti omjera (Slika 3.20). Međutim, ti učenici su ili izjednačili omjere ili su krivo usporedili vrijednosti omjera.


Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

jer su $\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

Slika 3.20: *Primjer strategije jednakosti omjera za 0 bodova u 2. zadatku*

4 učenika nisu ništa odgovorili. Učenici koji su zadatak rješavali koristeći aditivnu vezu još nisu razvili sposobnost proporcionalnog rasuđivanja pomoću omjera, već umjesto omjera, koji je rezultat multiplikativne veze, učenici pomoću aditivne veze uspoređuju veličine.

U Tablici 3.3 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	uspoređivanje vrijednosti omjera	13	28
	svođenje na jedinicu	1	6
	metoda strelica	0	1
	ukupno	**14**	**35**
1 bod	uspoređivanje veličina	4	4
	jednakost omjera	0	1
	nekategorizirano	1	6
	ukupno	**5**	**11**
0 boda	aditivna veza	43	9
	jednakost omjera	4	0
	nekategorizirano	22	8
	ukupno	**69**	**17**

Tablica 3.3: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 2. zadatku*

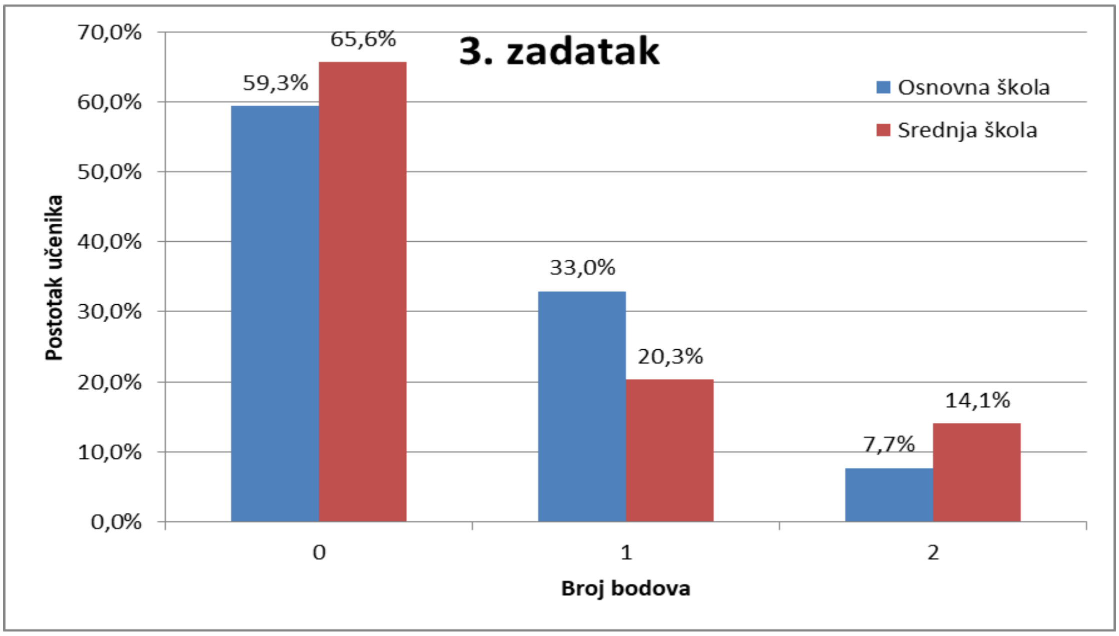
Uočavamo (Slika 3.11 i Tablica 3.3) da su učenici srednjih škola bolje riješili zadatak u odnosu na učenike osnovnih škola. Učenici srednjih škola više uključuju multiplikativnu vezu u omjerima, dok se učenici osnovnih škola više koriste aditivnom vezom. Razumijevanjem multiplikativnih veza započinje sposobnost proporcionalnog rasuđivanja. Učenici koji koriste aditivnu vezu u primjerima s omjerima, odnosno s veličinama koje ovise jedna od drugoj, nemaju u potpunosti razvijenu sposobnost proporcionalnog rasuđivanja.

Zadatak 3.

U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

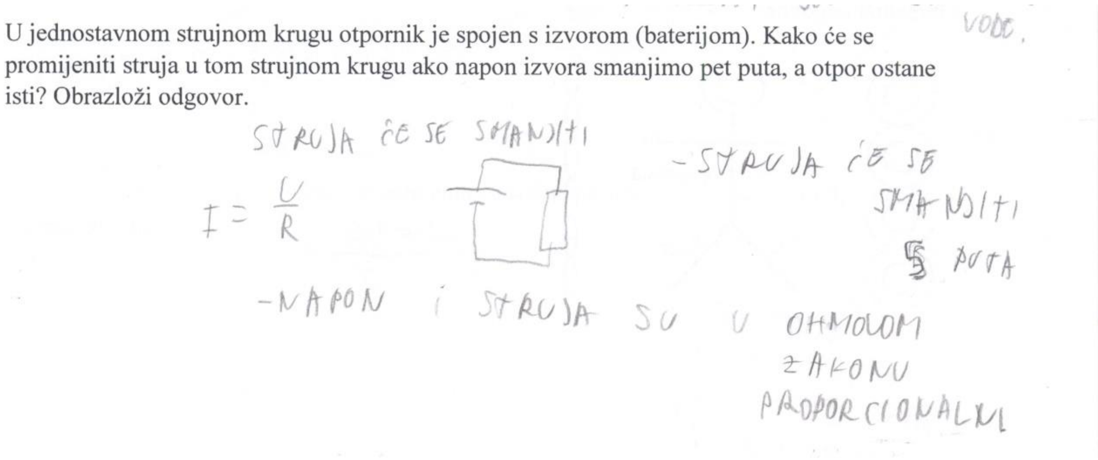
Ovim zadatkom ispituje se učeničko zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti dvije proporcionalne varijable. U zadatku se primjenjuje Ohmov zakon. Pomoću Ohmovog zakona, $I = \frac{U}{R}$, gdje je I struja, U napon te R otpor u strujnom krugu, treba odrediti koliko će se promijeniti struja ako se promijeni napon, a otpor ostane isti. Struja je, prema Ohmovom zakonu, proporcionalna s naponom. Iz toga slijedi da se smanjenjem napona pet puta, zbog proporcionalnosti, i struja smanjuje pet puta. Dakle, iznos struje nakon promjene će biti $I_{novo} = \frac{\frac{U}{5}}{R} = \frac{U}{5R} = \frac{1}{5}\frac{U}{R} = \frac{I}{5}$.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (24 ± 32)% bodova, a učenici srednjih škola (24 ± 37)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,83). Na Slici 3.21 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Vidimo da veliki broj učenika osnovnih škola (59,3%) i srednjih škola (65,6%) dobio nula bodova na ovom zadatku. Kao što vidimo na Slici 3.21 i prema rezultatima t-testa, nije došlo do napretka učenika srednjih škola u odnosu na učenike osnovnih škola u ovom zadatku.



Slika 3.21: *Raspodjela učenika po broju bodova u 3. zadatku*

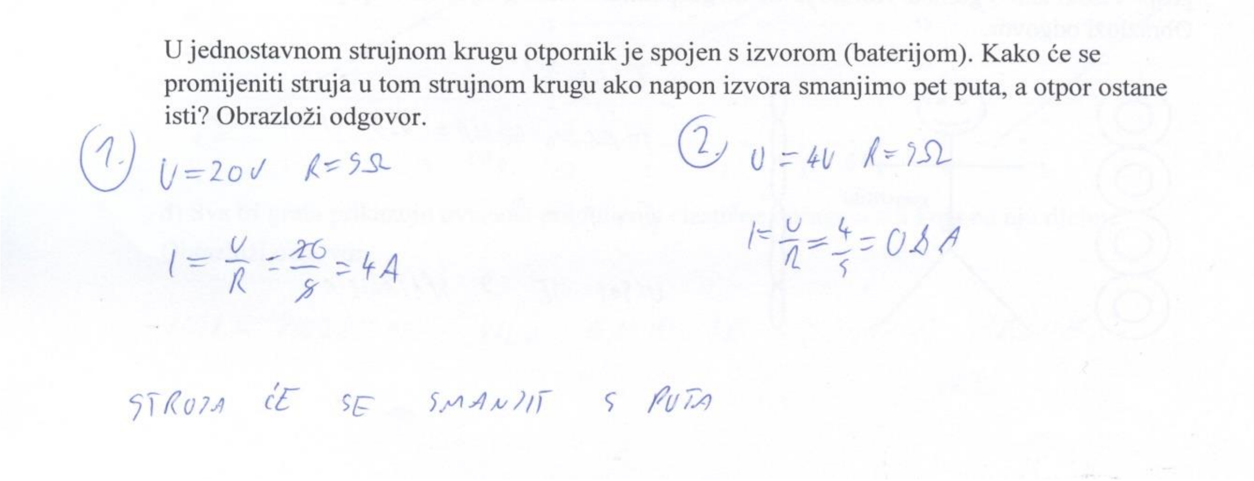
Učenici koji su postigli 2 boda su se najčešće koristili funkcionalnom ovisnosti dviju varijabli (Slika 3.22). Od 16 učenika koji su u potpunosti riješili ovaj zadatak, njih 12 (75,0%) je koristilo navedenu strategiju.



Slika 3.22: *Primjer strategije funkcionalne ovisnosti za 2 boda u 3. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da su u ovom zadatku uočili na koji način promjena jedne veličine utječe na promjenu druge veličine, odnosno da su prepoznali proporcionalne veličine i odredili njihovu ovisnost.

Troje učenika (18,8%) se koristilo strategijom konkretnog primjera (Slika 3.23). Učenici su došli do točnog rješenja uspoređujući brojčane vrijednosti. Za navedene učenike možemo reći da, iako su došli do točnog rješenja, ne prepoznaju proporcionalne veličine i njihovu ovisnost. Oni su još uvijek konkretni mislioci i s konkretnim brojevima mogu računati i zaključivati, ali još nisu dosegli fazu formalnih mislioca u kojoj bi mogli apstraktnije misliti, prepoznati proporcionalnost i zaključivati pomoću funkcionalne ovisnosti.



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

1. $U = 20V \quad R = 5\Omega$

$I = \frac{U}{R} = \frac{20}{5} = 4A$

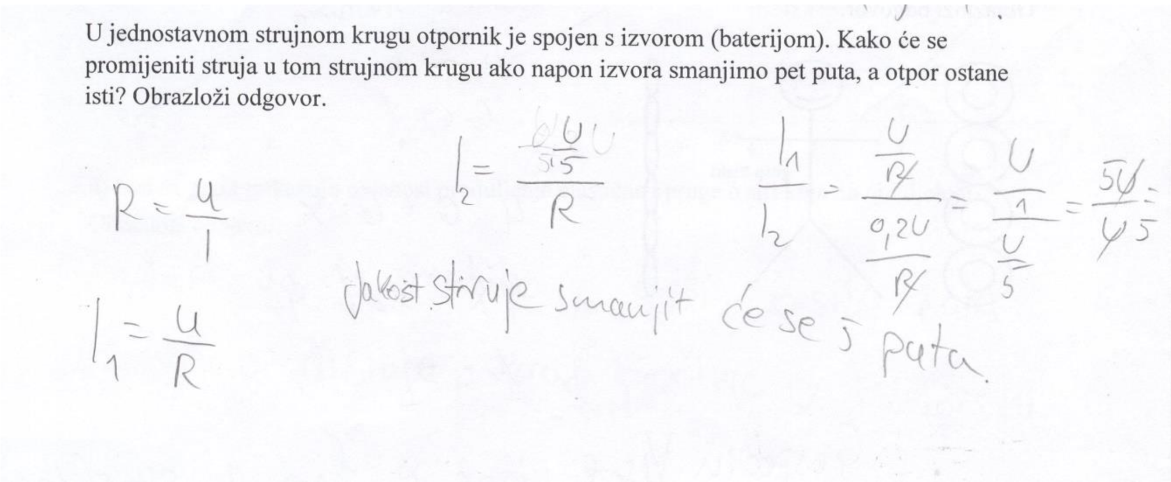
2. $U = 4V \quad R = 5\Omega$

$I = \frac{U}{R} = \frac{4}{5} = 0{,}8\,A$

STRUJA ĆE SE SMANJIT 5 PUTA

Slika 3.23: *Primjer strategije korištenja konkretnog primjera za 2 boda u 3. zadatku*

Jedan učenik se koristio strategijom omjera dviju struja, odnosno učenik je računao vrijednost omjera (Slika 3.24). I za ovog učenika možemo reći da, iako je računom došao do točnog rješenja, izravno ne prepoznaje proporcionalne veličine i njihovu ovisnost.



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

$R = \frac{U}{I}$

$I_1 = \frac{U}{R}$

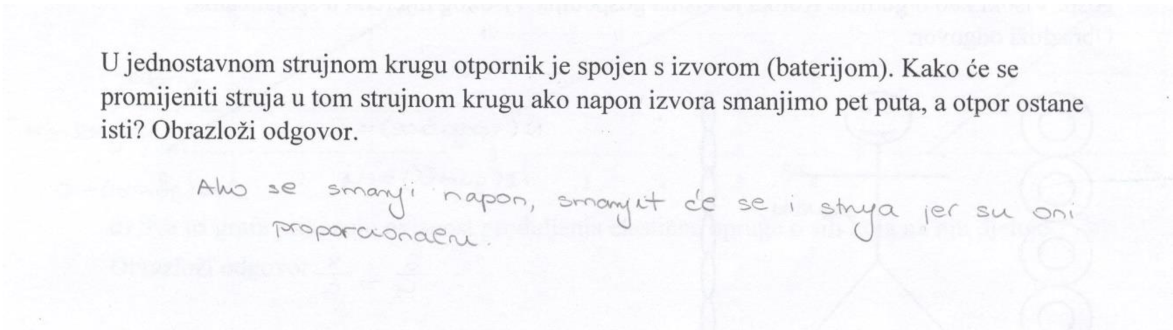
$I_2 = \frac{\frac{U}{5}}{R}$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R}}{\frac{0{,}2U}{R}} = \frac{U}{\frac{U}{5}} = \frac{5U}{U} = 5$

Jakost struje smanjit će se 5 puta.

Slika 3.24: *Primjer strategije omjera za 2 boda u 3. zadatku*

Od 43 učenika koji su postigli jedan bod, njih 19 (44,2%) se koristilo strategijom funkcionalne ovisnosti, ali nisu došli do točnog rješenja već su samo kvalitativno razmišljali (Slika 3.25).



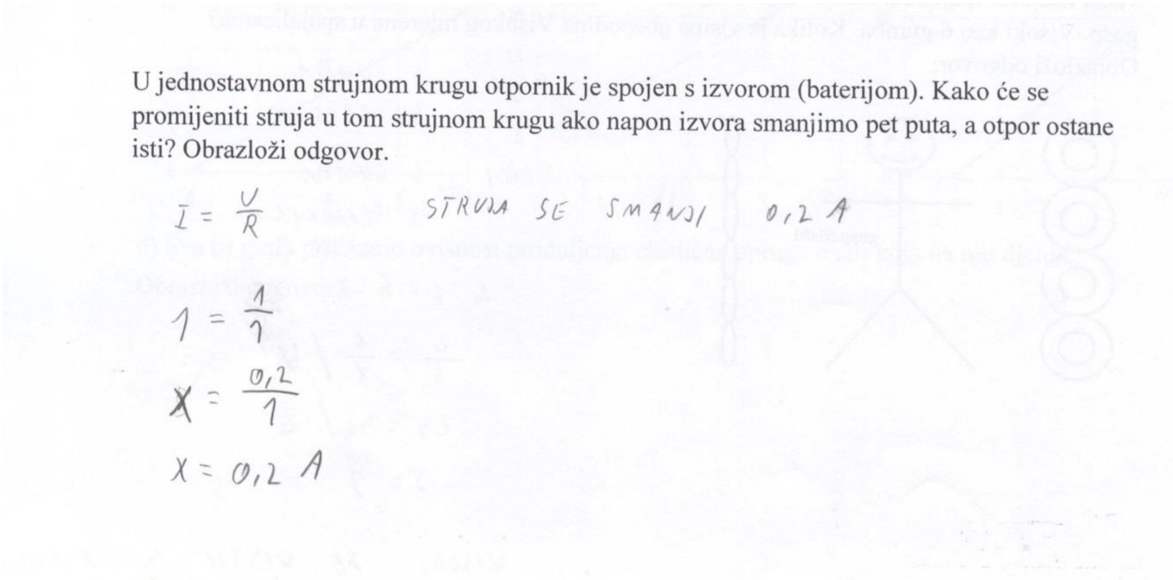
U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

Ako se smanji napon, smanjit će se i struja jer su oni proporcionalni.

Slika 3.25: *Primjer kvalitativnog razmišljanja za 1 bod u 3. zadatku*

Za navedene učenike, zbog kvalitativnog načina razmišljanja, ne možemo tvrditi da razlikuju multiplikativnu ovisnost, koja vrijedi za proporcionalne veličine, od aditivne ovisnosti veličina.

4 učenika (9,3%), koji su postigli jedan bod, se koristilo konkretnim primjerima kod rješavanja zadatka (Slika 3.26). Međutim, navedeni učenici su naveli da se struja smanji za brojčanu vrijednost koju su oni dobili što pokazuje da učenici još nisu razvili sposobnost korištenja funkcionalne ovisnosti varijabli, već da se služe isključivo brojčanim vrijednostima, koje ne znaju kasnije interpretirati kao ovisnost varijabli.



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

$I = \frac{U}{R}$ STRUJA SE SMANJI 0,2 A

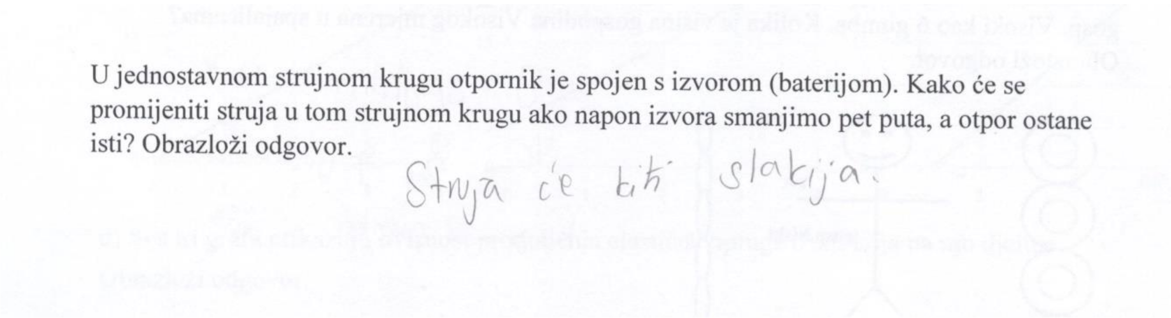
$1 = \frac{1}{1}$

$X = \frac{0,2}{1}$

$X = 0,2$ A

Slika 3.26: *Primjer strategije korištenja konkretnog primjera za 1 bod u 3. zadatku*

19 učenika (44,2%), koji su postigli jedan bod, nije kategorizirano. Većinom su to učenici koji su došli do zaključka da se struja smanjuje, ali bez obrazloženja ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili (Slika 3.27). Za ovu skupinu učenika ne možemo odrediti mogu li prepoznati proporcionalne veličine i njihovu ovisnost.

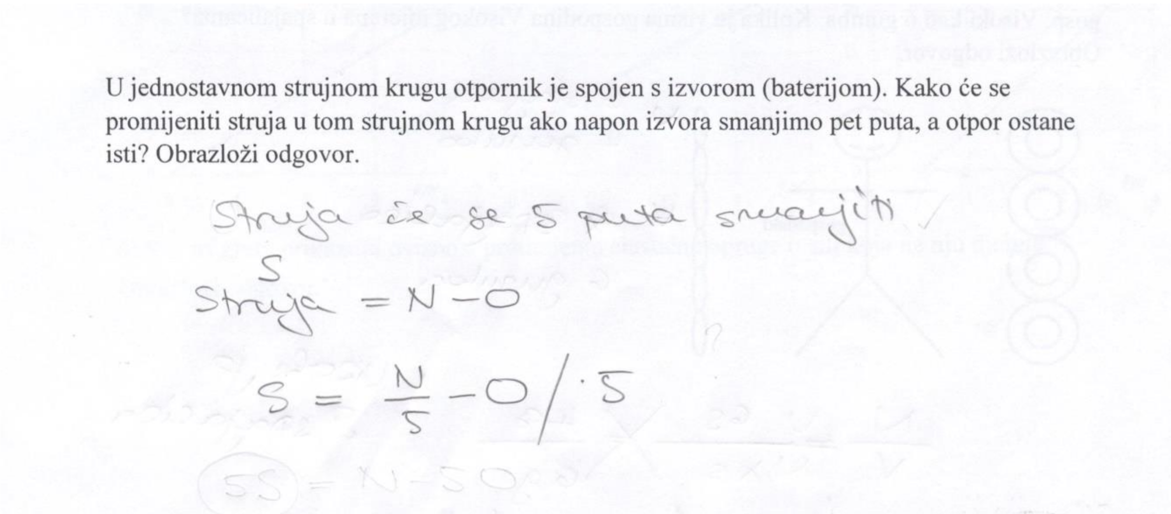


U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

Struja će biti slabija.

Slika 3.27: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 1 bod u 3. zadatku*

Jedna učenica je koristeći aditivnu vezu postavila formulu za Ohmov zakon došla do točnog rješenja (Slika 3.28). Za navedenu učenicu možemo reći da nije usvojila značajke multiplikativne veze te da svojstva multiplikativne veze pripisuje aditivnoj vezi.



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

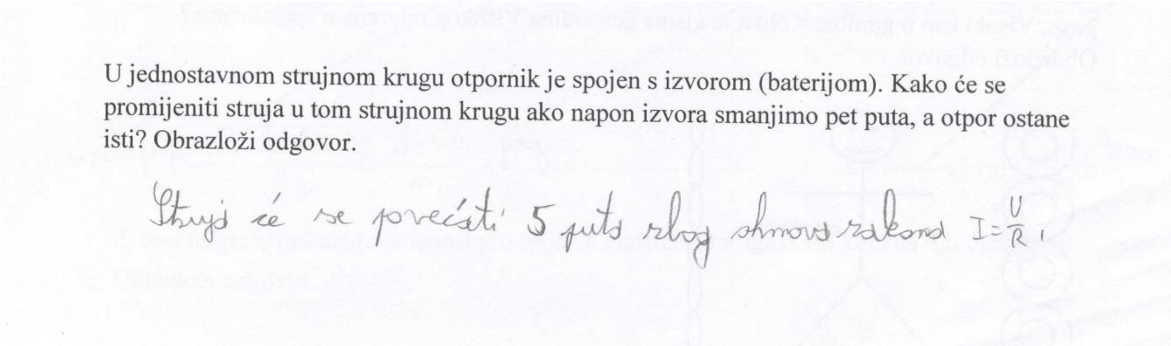
Struja će se 5 puta smanjiti

S
Struja = N − O

$S = \frac{N}{5} - O \,/\cdot 5$

Slika 3.28: *Primjer strategije aditivne veze za 1 bod u 3. zadatku*

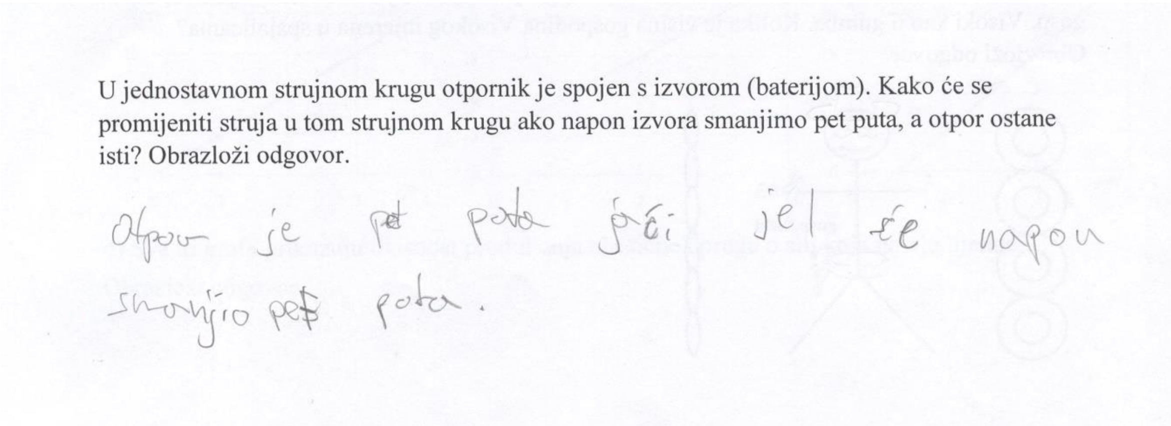
Od 96 učenika koji nisu postigli niti jedan bod, njih 84 (87,5%) nije ništa napisalo u zadatku. Ti učenici se vjerojatno nisu sjetili Ohmovog zakona. To je prilično poražavajuće budući da su Ohmov zakon radili u toj školskoj godini (u 8. razredu osnovne škole i 2. razredu srednje škole). 7 učenika (7,3%) nije kategorizirano. Navedeni učenici su najčešće zapisali promjenu napona. 5 učenika (5,2%) se koristilo strategijom funkcionalne ovisnosti, ali su došli do krivog zaključka (Slika 3.29 i Slika 3.30).



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

Struja će se povećati 5 puta zbog Ohmovog zakona $I=\frac{U}{R}$.

Slika 3.29: *Primjer strategije funkcionalne ovisnosti za 0 bodova u 3. zadatku*



U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

Otpor je pet puta jači jel će napon smanjio pet puta.

Slika 3.30: *Primjer strategije funkcionalne ovisnosti za 0 bodova u 3. zadatku*

U Tablici 3.4 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	funkcionalna ovisnost	6	6
	konkretan primjer	1	2
	omjer	0	1
	ukupno	**7**	**9**
1 bod	funkcionalna ovisnost/ kvalitativno razmišljanje	13	6
	konkretan primjer	1	3
	nekategorizirano	16	4
	ukupno	**30**	**13**
0 boda	funkcionalna ovisnost/ pogrešno zaključivanje	3	2
	nekategorizirano	4	3
	ukupno	**7**	**5**

Tablica 3.4: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 3. zadatku*

Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da učenici imaju problema s prepoznavanjem i razumijevanjem proporcionalnih veličina i njihovim ovisnostima. Samim time, možemo reći da učenici nisu u potpunosti usvojili multiplikativnu vezu, odnosno da nisu usvojili proporcionalno rasuđivanje. Vjerojatno dobar dio učenika koji nije ništa odgovorio na ovo pitanje ne zna Ohmov zakon. Bilo bi zanimljivo vidjeti kako bi oni odgovorili da su imali napisan Ohmov zakon u zadatku.

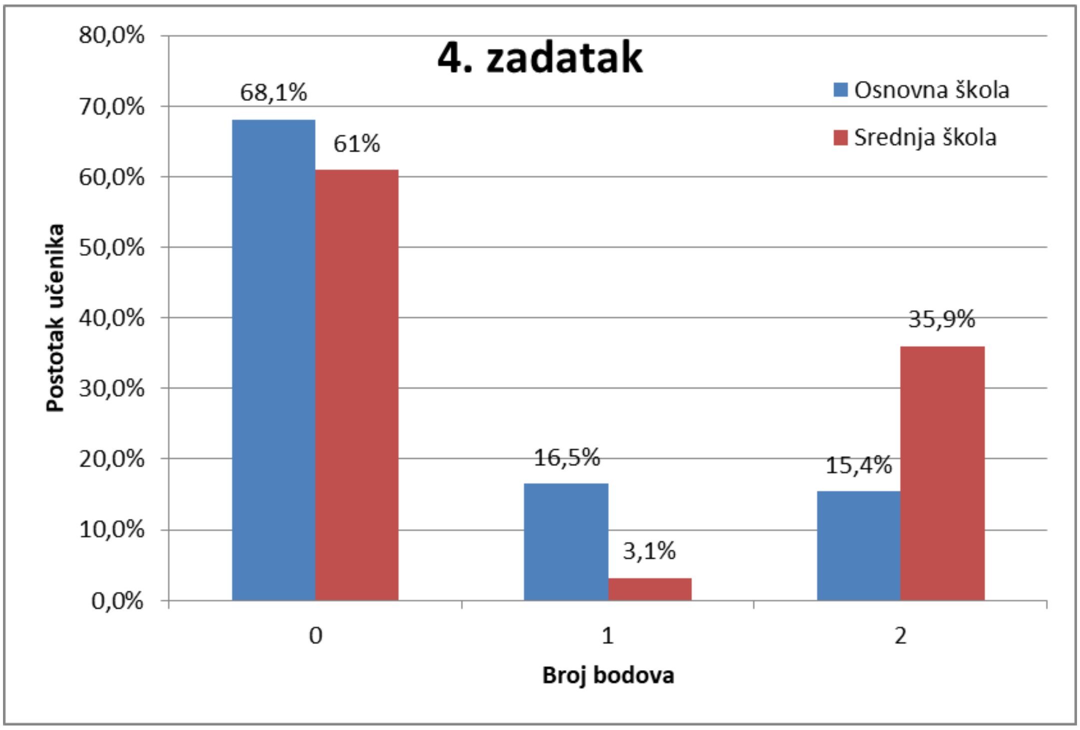
Zadatak 4.

Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?

Obrazloži odgovor.

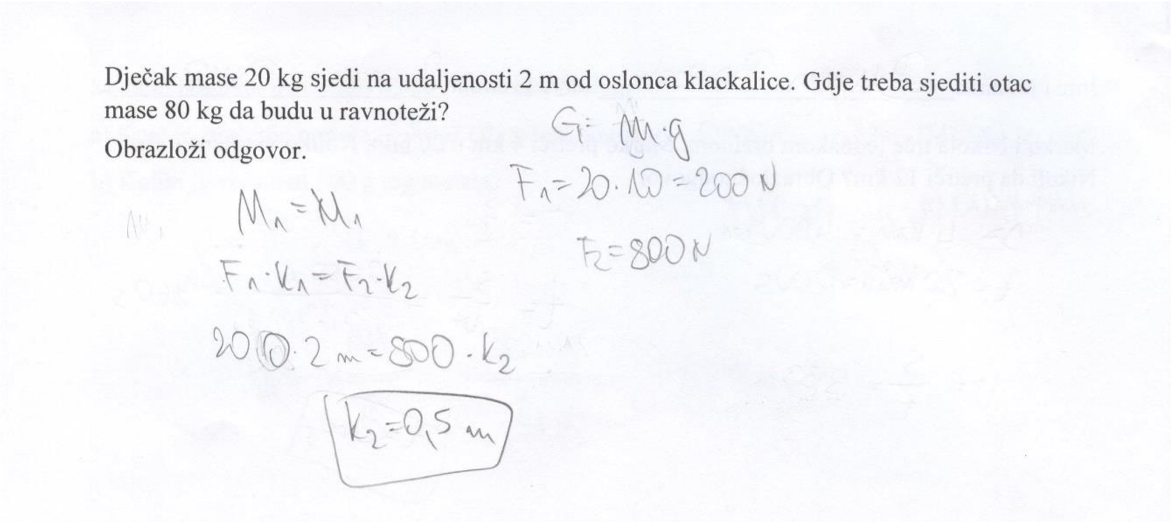
Ovim zadatkom ispituje se učeničko razumijevanje obrnuto proporcionalnih veličina te korištenje svojstava obrnuto proporcionalnih veličina. U zadatku se pojavljuju dvije obrnuto proporcionalne veličine, masa i udaljenost. Budući da je masa oca 4 puta veća od mase dječaka, koristeći svojstva obrnute proporcionalnosti, slijedi da je udaljenost oca od oslonca klackalice 4 puta manja od udaljenosti dječaka. Udaljenost oca od oslonca klackalice je tada 2 m : 4 = 0,5 m.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (24 ± 38)% bodova, a učenici srednjih škola (38 ± 48)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole je statistički značajna (p = 0,03). Na Slici 3.31 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Kao što vidimo na Slici 3.31 i prema rezultatima t-testa, možemo reći da je došlo do napretka učenika srednjih škola u odnosu na učenike osnovnih škola.



Slika 3.31: *Raspodjela učenika po broju bodova u 4. zadatku*

Od 37 učenika, koji su postigli dva boda na ovome zadatku, njih 29 (78,4%) je koristilo formulu kod rješavanja ovog zadatka (Slika 3.32). Učenici su prepoznali klackalicu kao primjer poluge, a uvjet za ravnotežu poluge je da zbroj momenata sile bude jednak nuli, odnosno, u ovome zadatku vrijedi zakon poluge: $F_{dječak} \cdot k_{dječak} = F_{otac} \cdot k_{otac}$, gdje su F sile koje djeluju na klackalicu, a k krakovi tih sila (udaljenosti hvatišta sila od oslonca). Za navedene učenike, iako su došli do točnog rješenja, ne znamo prepoznaju li obrnuto proporcionalne veličine i njihovu ovisnost. Učenici pokazuju sklonost korištenju formula, umjesto prepoznavanju funkcionalne ovisnosti dviju veličina.


Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

$G = m \cdot g$

$F_1 = 20 \cdot 10 = 200\ N$

$F_2 = 800\ N$

$M_1 = M_1$

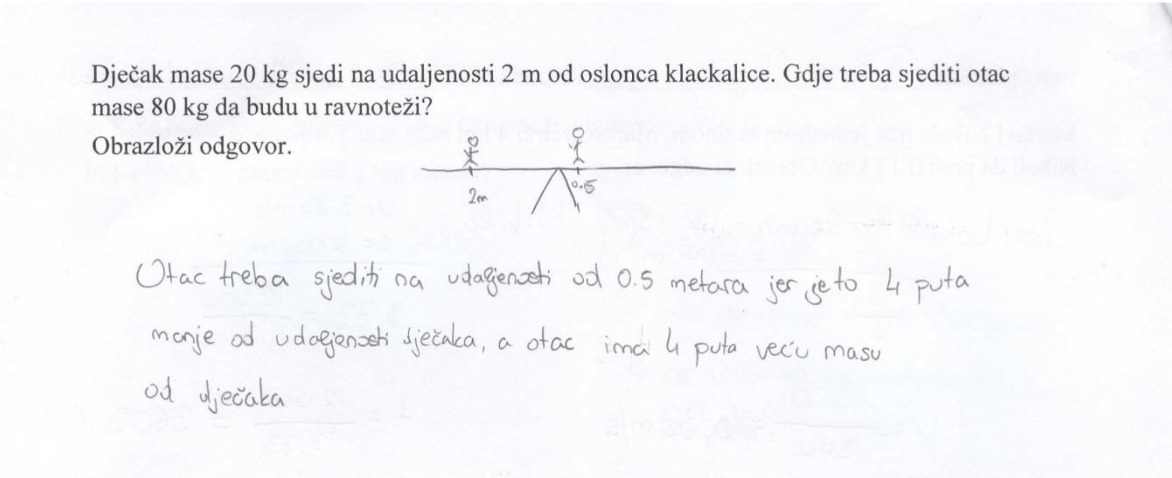
$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$

$200 \cdot 2\ m = 800 \cdot k_2$

$\boxed{k_2 = 0{,}5\ m}$

Slika 3.32: *Primjer korištenja formule za 2 boda u 4. zadatku*

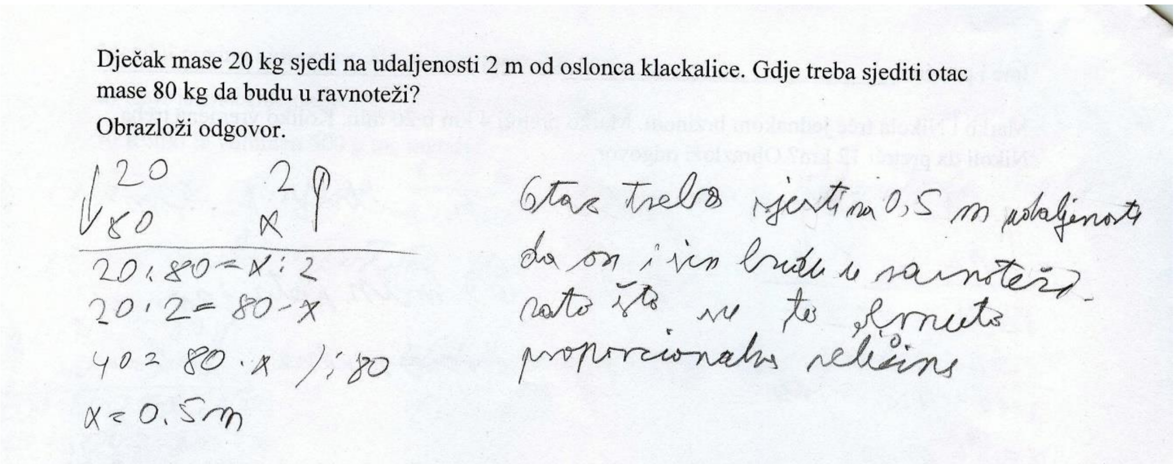
3 učenika (8,1%) su prepoznala obrnuto proporcionalne veličine te su pomoću njihove ovisnosti odredili rješenje zadatka (Slika 3.33).


Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

Otac treba sjediti na udaljenosti od 0.5 metara jer je to 4 puta manje od udaljenosti dječaka, a otac ima 4 puta veću masu od dječaka

Slika 3.33: *Primjer korištenja obrnuto proporcionalnih veličina za 2 boda u 4. zadatku*

3 učenika (8,1%) su također prepoznala obrnuto proporcionalne veličine te su zadatak riješili postavljajući razmjere koristeći metodu strelica (Slika 3.34).

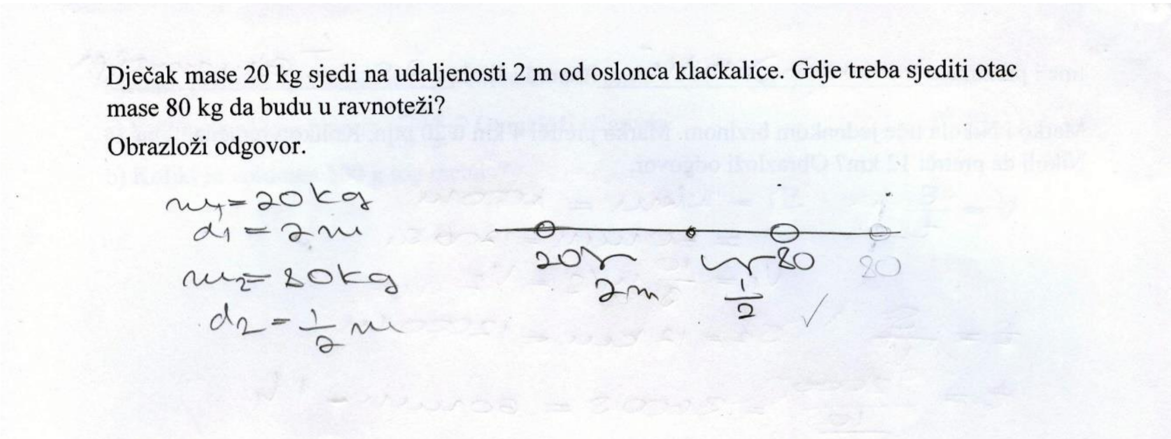


Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

Slika 4.34: *Primjer korištenja metoda strelica za 2 boda u 4. zadatku*

Za navedenih 6 učenika možemo reći da prepoznaju obrnuto proporcionalne veličine i zaključuju pomoću funkcionalnog zaključivanja.

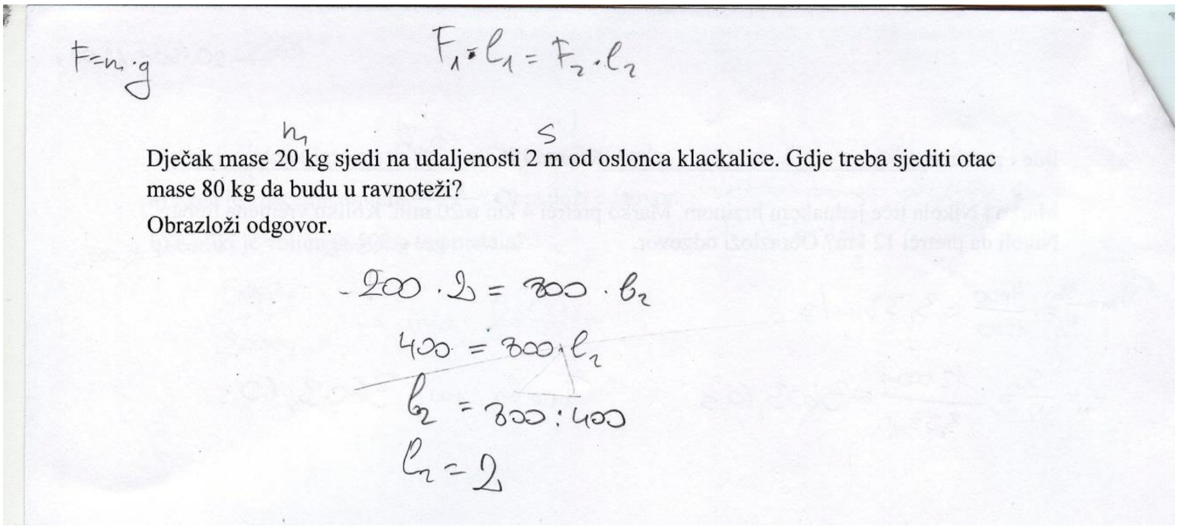
Dvoje učenika (5,4%) nije kategorizirano jer su učenici ponudili točno rješenje, ali bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili (Slika 3.35).



Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

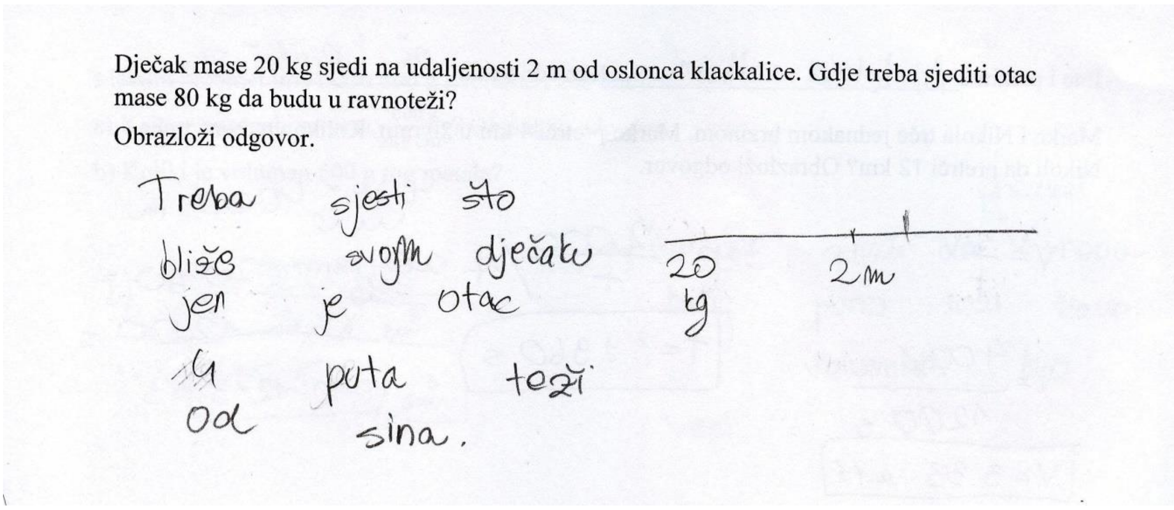
Slika 3.35: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 2 boda u 4. zadatku*

Od 17 učenika koji su postigli jedan bod na ovome zadatku, njih 11 (64,7%) nije kategorizirano jer su učenici ponudili točan odgovor, ali bez obrazloženja ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili. Troje učenika (17,6%) je u rješavanju zadatka je koristilo zakon poluge, ali je pogriješilo u računu (Slika 3.36).



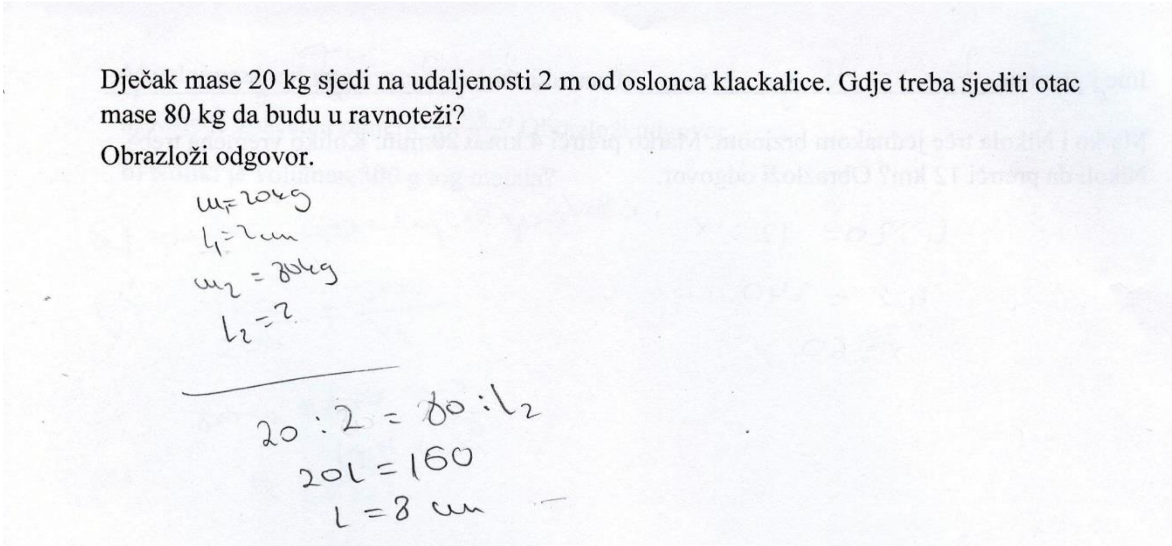
Slika 3.36: *Primjer korištenja formule za 1 bod u 4. zadatku*

Troje učenika (17,6%), koji su postigli jedan bod na ovom zadatku, prepoznali su ovisnost veličina, ali pomoću kvalitativnog razmišljanja (Slika 3.37). Učenici su ispravno zaključili da otac treba sjediti bliže osloncu od dječaka, ali nisu zaključili na kojoj udaljenosti pa možemo reći da nemaju u potpunosti razvijenu sposobnost prepoznavanja obrnuto proporcionalnih veličina te sposobnost zaključivanja pomoću funkcionalne ovisnosti.



Slika 3.37: *Primjer kvalitativnog zaključivanja za 1 bod u 4. zadatku*

Od 101 učenika, koji nisu postigli niti jedan bod na ovome zadatku, njih 32 (33,7%) nije ništa napisalo. 23 učenika (22,8%) nije kategorizirano jer iz njihovih odgovora ne možemo razaznati kojim su se strategijama koristili. Navedeni učenici su ponudili krivi odgovor bez obrazloženja ili su samo prepisali podatke. 17 učenika (16,8%) su koristili razmjere kod rješavanja zadatka, ali učenici su razmjere postavili kao da se radi o proporcionalnim veličinama (Slika 3.38).

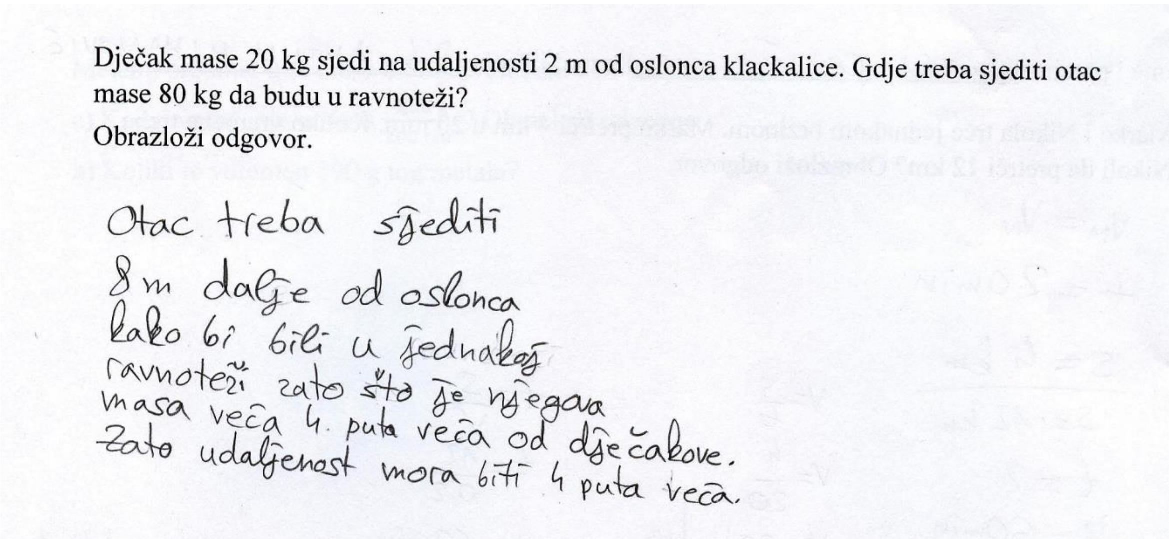

Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

$m_1 = 20 kg$
$l_1 = 2 m$
$m_2 = 80 kg$
$l_2 = ?$

$20 : 2 = 80 : l_2$
$20 l = 160$
$l = 8 m$

Slika 3.38: *Primjer strategije korištenja razmjera za 0 bodova u 4. zadatku*

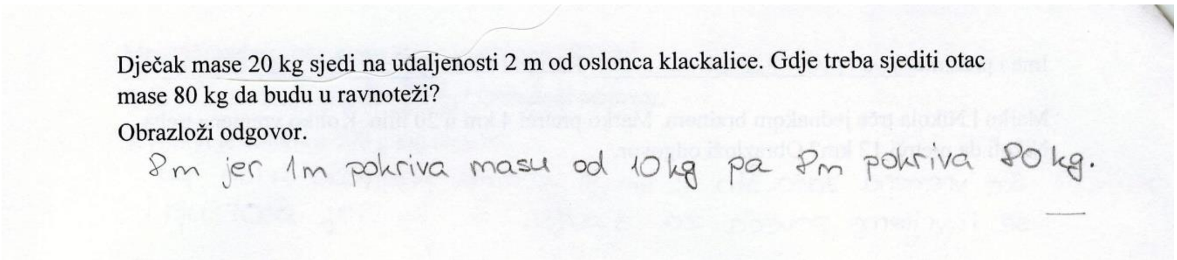
20 učenika (19,8%), koji nisu postigli niti jedan bod, su kod rješavanja ovog zadatka koristili svojstva proporcionalnosti, tj. koristili su koeficijent proporcionalnosti (Slika 3.39). Ti učenici prepoznaju multiplikativnu vezu, ali imaju poteškoća u razlikovanju proporcionalne i obrnuto proporcionalne veze između dvije veličine.


Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

Otac treba sjediti
8 m dalje od oslonca
kako bi bili u jednakoj
ravnoteži zato što je njegova
masa veća 4. puta veća od dječakove.
Zato udaljenost mora biti 4 puta veća.

Slika 3.39: *Primjer strategije korištenja koeficijenta proporcionalnosti za 0 bodova u 4. zadatku*

5 učenika (4,9%), koji nisu postigli niti jedan bod, su koristili strategiju svođenja na jedinicu (Slika 3.40).

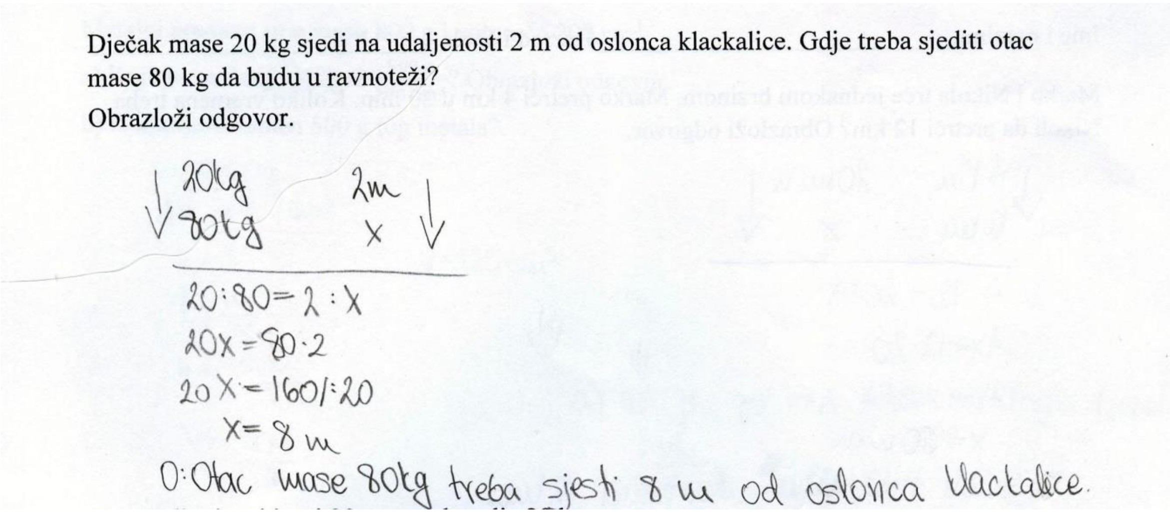


Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

8m jer 1m pokriva masu od 10kg pa 8m pokriva 80kg.

Slika 3.40: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 0 bodova u 4. zadatku*

4 učenika (4,0%), koji nisu postigli niti jedan bod, su koristili metodu strelica kod postavljanja razmjera, međutim, učenici su razmjere postavili za proporcionalne veličine (Slika 3.41).



Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?
Obrazloži odgovor.

20kg 2m
80kg x

20:80=2:x
20x=80·2
20x=160/:20
x=8 m
O: Otac mase 80kg treba sjesti 8 m od oslonca klackalice.

Slika 3.41: *Primjer korištenja metode strelica za 0 bodova u 4. zadatku*

Iako učenici koji nisu postigli niti jedan bod na ovom zadatku koriste proporcionalnost u svojem zaključivanju, ne prepoznaju kontekst zadatka te ne ispituju smislenost konačnog rezultata.

U Tablici 3.5 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	korištenje formule	9	20
	obrnuta proporcionalnost	2	1
	metoda strelica	3	0
	nekategorizirano	0	2
	ukupno	**14**	**23**
1 bod	korištenje formule	3	0
	kvalitativno razmišljanje	3	0
	nekategorizirano	9	2
	ukupno	**15**	**2**
0 boda	razmjeri	3	14
	koeficijent proporcionalnosti	15	5
	svođenje na jedinicu	2	3
	metoda strelica	3	1
	nekategorizirano	18	5
	ukupno	**41**	**28**

Tablica 3.5. *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 4. zadatku*

65,2% učenika osnovnih i srednjih škola nije postiglo niti jedan bod na ovome zadatku. Zaključujemo da je obrnuta proporcionalnost učenicima teža od direktne proporcionalnosti. Ovaj zadatak te 1. zadatak su slični, samo što se u 1. zadatku pojavljuju proporcionalne veličine, a u ovome obrnuto proporcionalne veličine, ali ovaj zadatak je, u usporedbi s 1. zadatkom, dosta lošije riješen.

Zadatak 5.

Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.

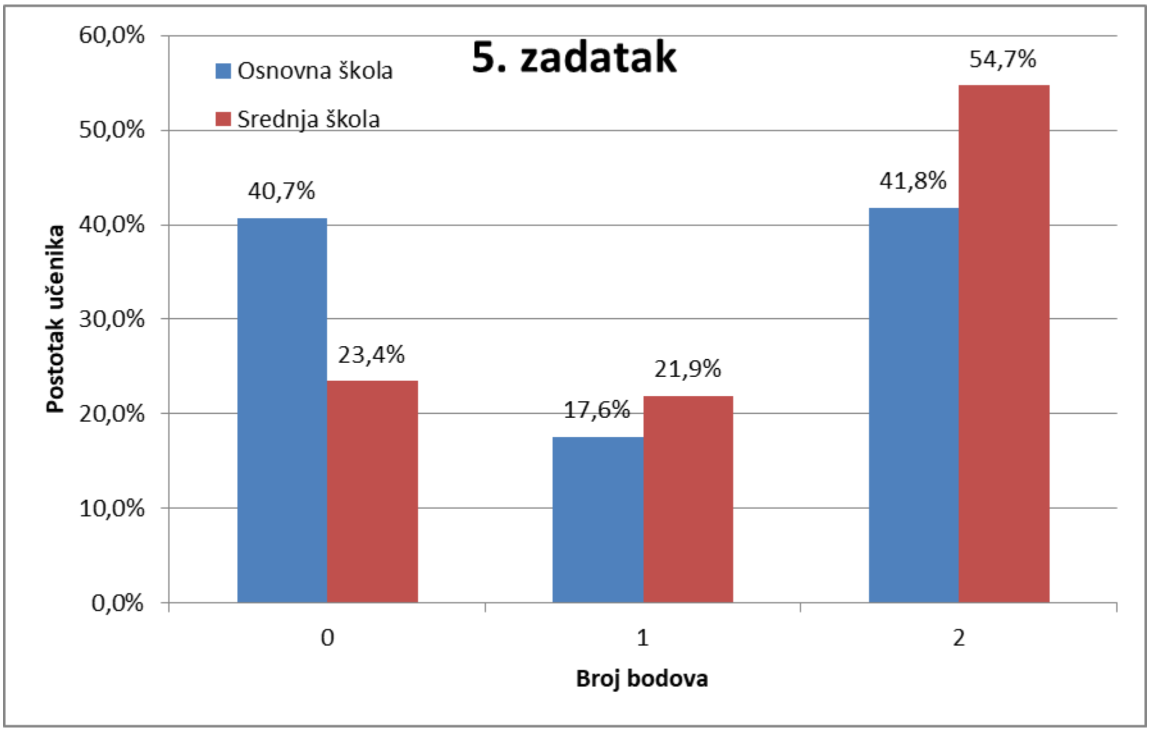
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?

b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?

Obrazloži odgovor.

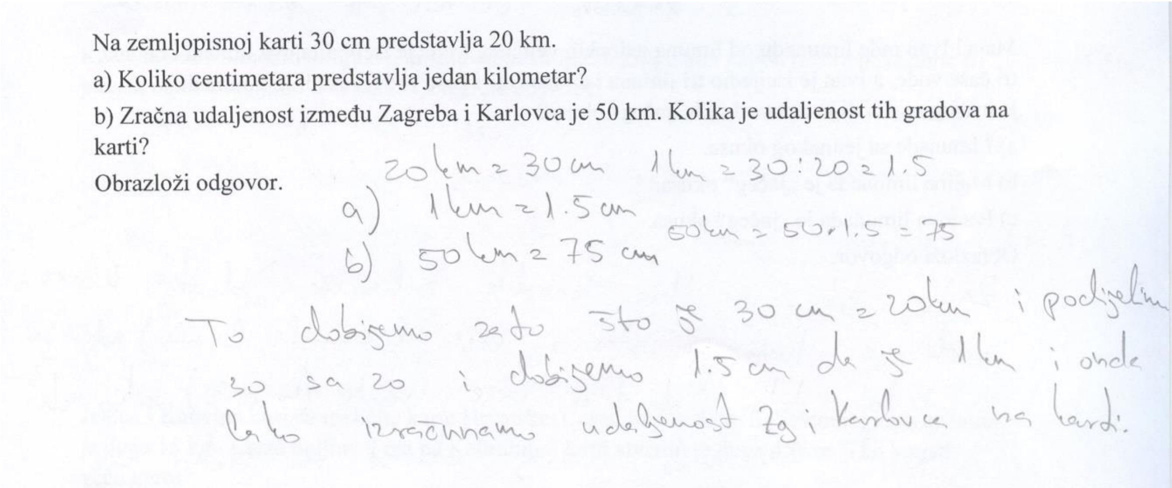
Ovim zadatkom ispituje se učenička sposobnost razumijevanja multiplikativnih ovisnosti dviju veličina, odnosno ispituje se prepoznaju li učenici vezu između različitih veličina. Zadatak se mogao riješiti korištenjem različitih strategija, ali sve strategije uključuju korištenje multiplikativne veze. Jedna od strategija je, npr., svođenje na jedinicu. Tekst a) dijela zadatka upućuje na korištenje navedene strategije. Imamo, ako 20 km predstavljaju 30 cm, tada vrijedi: 20 km − 30 cm ↔ 1 km – 30 cm / 20 =1,5 cm. Dakle 1,5 cm predstavlja 1 km. U b) dijelu zadatka se traži udaljenost gradova na karti, ako je njihova udaljenost 50 km. Koristeći strategiju svođenja na jedinicu te rješenje a) dijela zadatka, imamo: 1 km = 1,5 cm, 50 km = 50 · 1,5 cm = 75 cm. Dakle, udaljenost Zagreba i Karlovca na karti je jednaka 75 cm.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (51 ± 46)% bodova, a učenici srednjih škola (66 ± 42)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole je statistički značajna (p = 0,04). Na Slici 3.42 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima.



Slika 3.42: *Raspodjela učenika po broju bodova u 5. zadatku*

Od 73 učenika, koji su postigli 2 boda na ovom zadatku, njih 54 (74,0%) se koristilo strategijom svođenja na jedinicu (Slika 3.43).



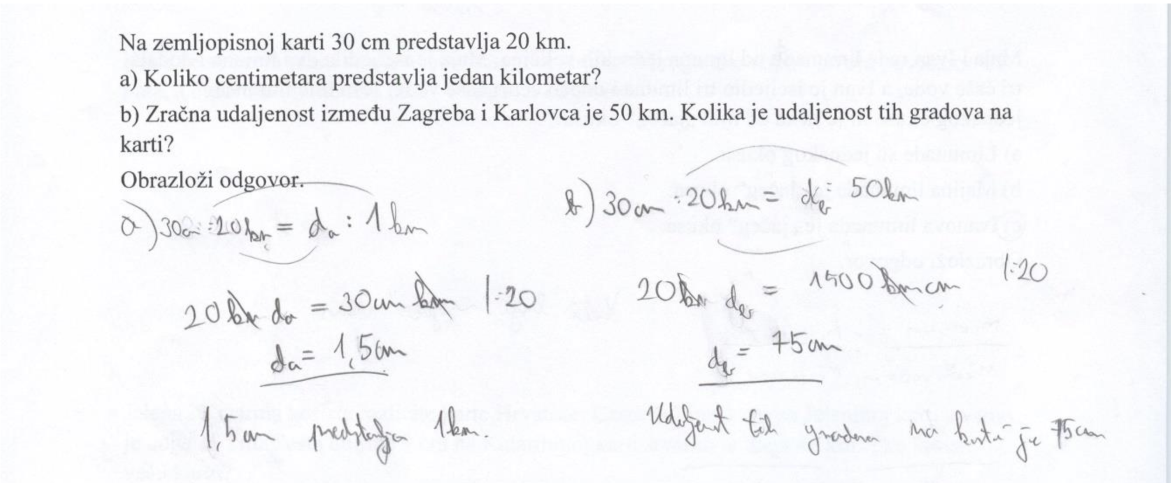
Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

20 km = 30 cm   1 km = 30 : 20 = 1.5
a) 1 km = 1.5 cm
b) 50 km = 75 cm   50 km = 50 · 1.5 = 75

To dobijemo zato što je 30 cm = 20 km i podijelim 30 sa 20 i dobijemo 1.5 cm da je 1 km i onda lako izračunam udaljenost Zg i Karlovca na karti.

Slika 3.43: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 2 boda u 5. zadatku*

13 učenika (17,8%), koji su postigli 2 boda, su se koristili strategijom korištenja razmjera u računanju nepoznate veličine (Slika 3.44).



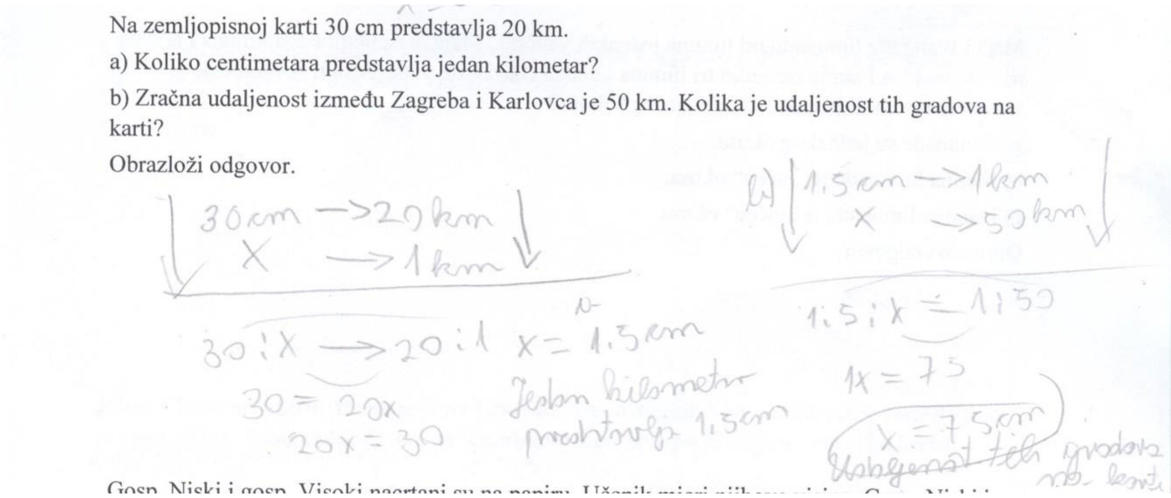
Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

a) $30 cm : 20 km = d_a : 1 km$
$20 km \cdot d_a = 30 cm \cdot km \quad |:20$
$d_a = 1,5 cm$
1,5 cm predstavlja 1 km.

b) $30 cm : 20 km = d_b : 50 km$
$20 km \cdot d_b = 1500 km \cdot cm \quad |:20$
$d_b = 75 cm$
Udaljenost tih gradova na karti je 75 cm

Slika 3.44: *Primjer strategije razmjera za 2 boda u 5. zadatku*

6 učenika (8,2%) se također koristilo strategijom razmjera, ali su razmjere postavili pomoću metode strelica (Slika 3.45).



Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

30cm → 20km
X → 1km

30 : X → 20 : 1   x = 1.5cm
30 = 20x
20x = 30
Jedan kilometar predstavlja 1,5cm

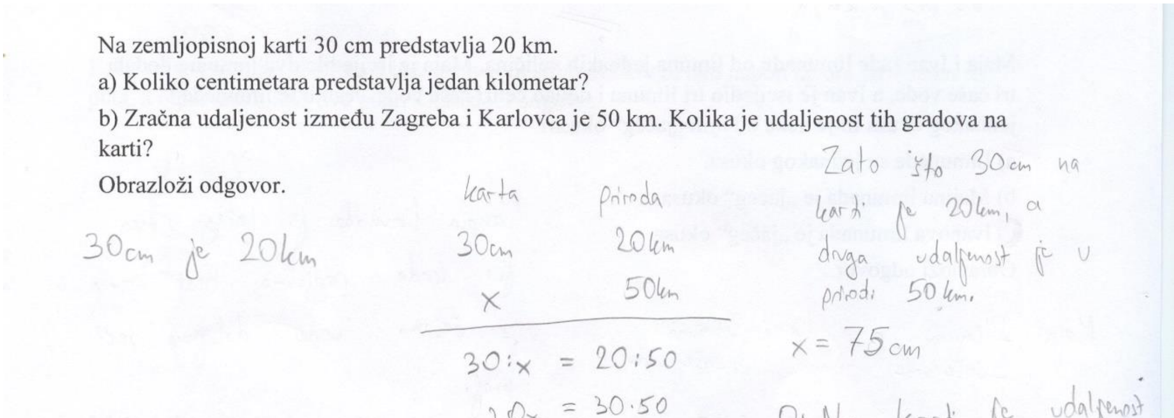
b) 1,5cm → 1km
X → 50km

1,5 : X = 1 : 50
1x = 75
x = 75cm
Udaljenost tih gradova na karti

Slika 3.45: *Primjer korištenja metode strelica za 2 boda u 5. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da su ovladali prepoznavanje i korištenje multiplikativne veze kao ovisnosti dviju promatranih veličina.

Od 30 učenika, koji su postigli jedan bod, njih 19 (63,3%) nije kategorizirano, odnosno učenici su napisali točan odgovor, ali bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili. Učenici su jedan bod dobivali i ako su samo na jedan dio zadatka ponudili točan odgovor s obrazloženjem. 7 učenika (23,3%) se u jednom dijelu zadatka koristilo strategijom razmjera (Slika 3.46).



Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

30cm je 20km

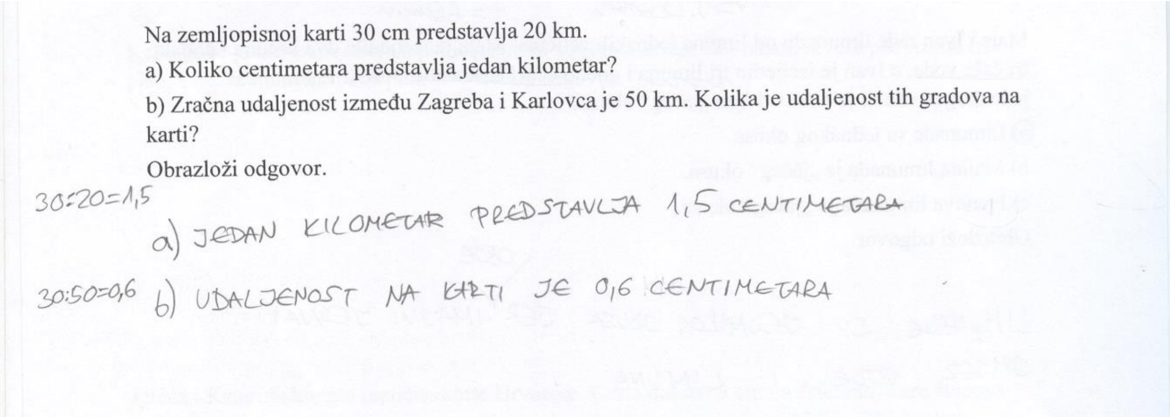
karta   priroda
30cm   20km
x   50km

30 : x = 20 : 50
20x = 30 · 50
20x = 1500

Zato što 30cm na karti je 20km, a druga udaljenost je u prirodi 50km.
x = 75cm
O: Na karti je udaljenost tih gradova 75cm.

Slika 3.46: *Primjer strategije razmjera za 1 bod u 5. zadatku*

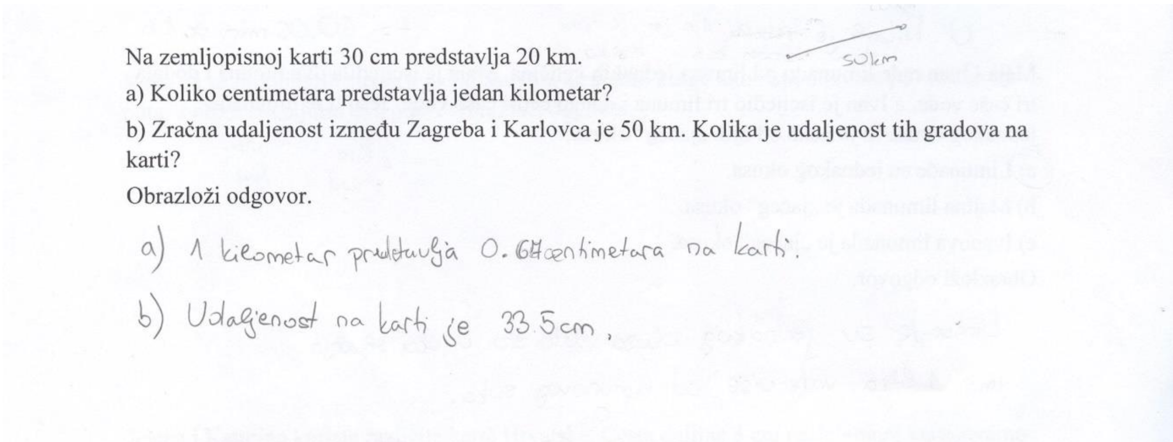
4 učenika (13,3%), koji su postigli jedan bod, se koristilo strategijom svođenja na jedinicu u dijelu zadatka koji je točno odgovoren (Slika 3.47).


Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

30:20=1,5
a) JEDAN KILOMETAR PREDSTAVLJA 1,5 CENTIMETARA
30:50=0,6
b) UDALJENOST NA KARTI JE 0,6 CENTIMETARA

Slika 3.47: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 1 bod u 5. zadatku*

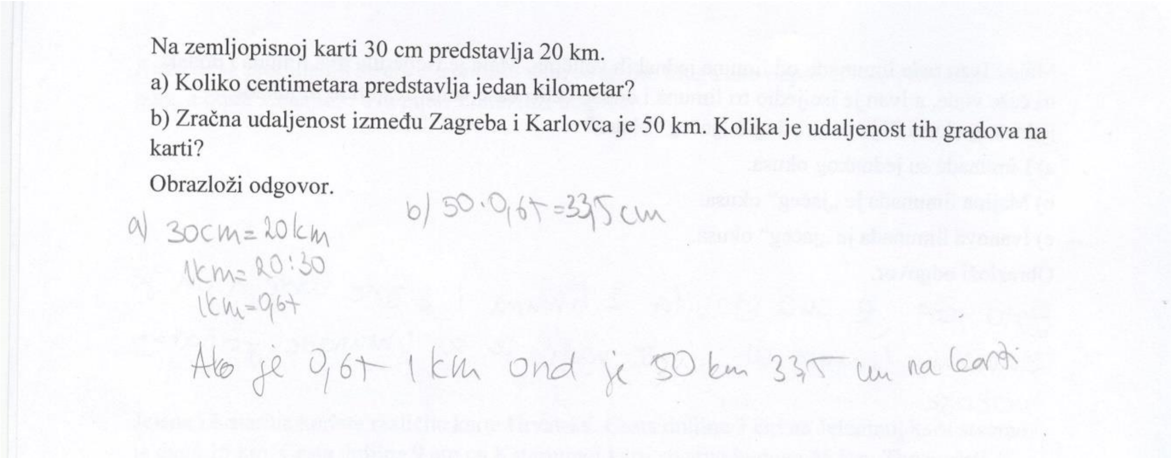
Od 52 učenika, koji nisu postigli niti jedan bod na ovom zadatku, njih 24 (46,2%) nije ništa napisalo. 16 učenika (30,8%) nije kategorizirano. To su učenici koji su započeli zadatak te ga nisu završili te učenici koji su samo ponudili netočne odgovore bez obrazloženja (Slika 3.48).


Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
50km
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

a) 1 kilometar predstavlja 0.67 centimetara na karti.
b) Udaljenost na karti je 33.5cm.

Slika 3.48: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 0 bodova u 5. zadatku*

10 učenika (19,2%), koji nisu postigli niti jedan bod, se koristilo strategijom svođenja na jedinicu (Slika 3.49). Navedeni učenici su pogriješili kod izražavanja vrijednosti 1 km u a) dijelu zadatka te su tu vrijednost upotrijebili i u b) dijelu zadatka. Učenici prepoznaju multiplikativnu vezu, ali nisu ovladali računanjem nepoznate veličine.


Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

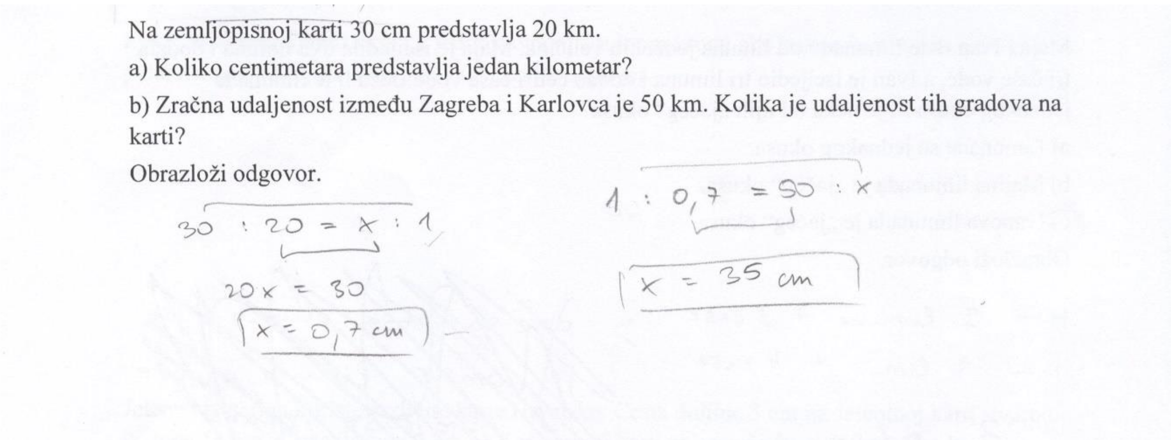
a) 30cm = 20km
1km = 20 : 30
1km = 0,67

b) 50 · 0,67 = 33,5 cm

Ako je 0,67 1 km onda je 50 km 33,5 cm na karti

Slika 3.49: *Primjer korištenja strategije svođenja na jedinicu za 0 bodova u 5. zadatku*

2 učenika (3,8%), koji nisu postigli niti jedan bod, se koristilo strategijom razmjera (Slika 3.50). Učenici su dobro postavili razmjere, ali su pogriješili kod računanja nepoznate veličine. Možemo reći da navedeni učenici prepoznaju situacije u kojima mogu postaviti i koristiti razmjere, međutim učenici nisu ovladali tehnikom računa linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.


Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.
a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?
b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?
Obrazloži odgovor.

$30 : 20 = x : 1$
$20x = 30$
$\boxed{x = 0,7 \text{ cm}}$

$1 : 0,7 = 50 : x$
$\boxed{x = 35 \text{ cm}}$

Slika 3.50: *Primjer strategije razmjera za 0 bodova u 5. zadatku*

U Tablici 3.6 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

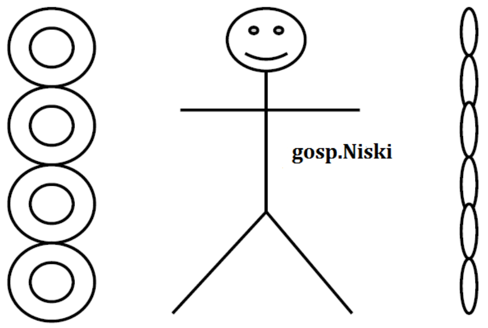
	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	svođenje na jedinicu	32	22
	razmjeri	1	12
	metoda strelica	5	1
	ukupno	**38**	**35**
1 bod	razmjeri	3	4
	svođenje na jedinicu	4	0
	nekategorizirano	9	10
	ukupno	**16**	**14**
0 boda	svođenje na jedinicu	7	3
	razmjeri	1	1
	nekategorizirano	11	5
	ukupno	**19**	**9**

Tablica 3.6: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 5. zadatku*

Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da većina učenika nema problema s prepoznavanjem multiplikativne veze te njenim korištenjem. Možemo reći da većina učenika u ovom zadatku razumije ovisnost dviju veličina koje promatramo. Učenici koji nisu postigli bodove na ovom zadatku su najviše problema imali s izražavanjem nepoznate varijable, odnosno s računskim dijelom zadatka, a ne s prepoznavanjem i korištenjem multiplikativne veze. Navedeni učenici su, uglavnom, prepoznali da se radi o multiplikativnoj vezi te su postavili razmjere, ali kod računanja nisu ispravno izrazili nepoznatu, traženu veličinu.

Zadatak 6.

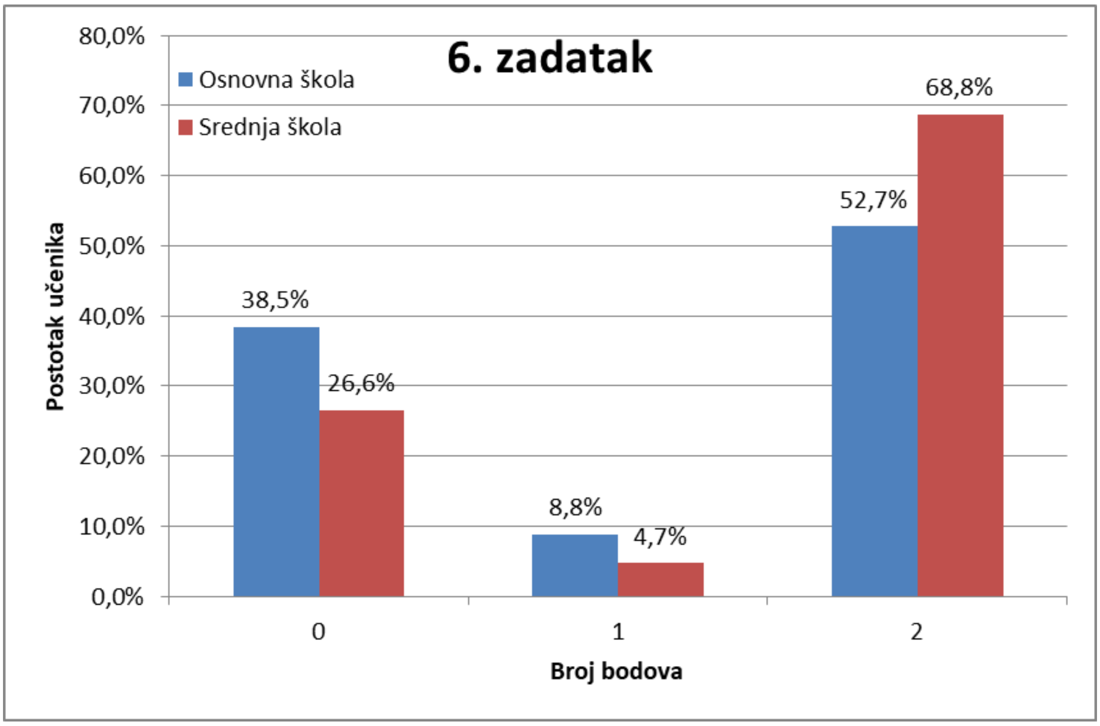
Gosp. Niski i gosp. Visoki nacrtani su na papiru. Učenik mjeri njihove visine. Gosp. Niski je visok kao šest spajalica. Ako se mjeri u gumbima, gospodin Niski je visok kao 4 gumba, a gosp. Visoki kao 6 gumba. Kolika je visina gospodina Visokog mjerena u spajalicama? Obrazloži odgovor.



Ovim zadatkom ispituje se razlikuju li učenici multiplikativnu od aditivne veze. Razumijevanje i razlikovanje multiplikativne od aditivne veze označava početak razvoja proporcionalnog rasuđivanja. Zadatak se mogao riješiti pomoću različitih strategija, ali sve uključuju multiplikativnu vezu. Jedna od strategija je, npr. svođenje na jedinicu. Ovom strategijom pomoću visine g. Niskog dolazimo do relacije da je visina 2 gumba jednaka visini 3 spajalice, odnosno da je visina 1 gumba jednaka visini 1,5 spajalice. Budući da je visina g. Visokog kao 6 gumba, tada je visina u spajalicama jednaka:

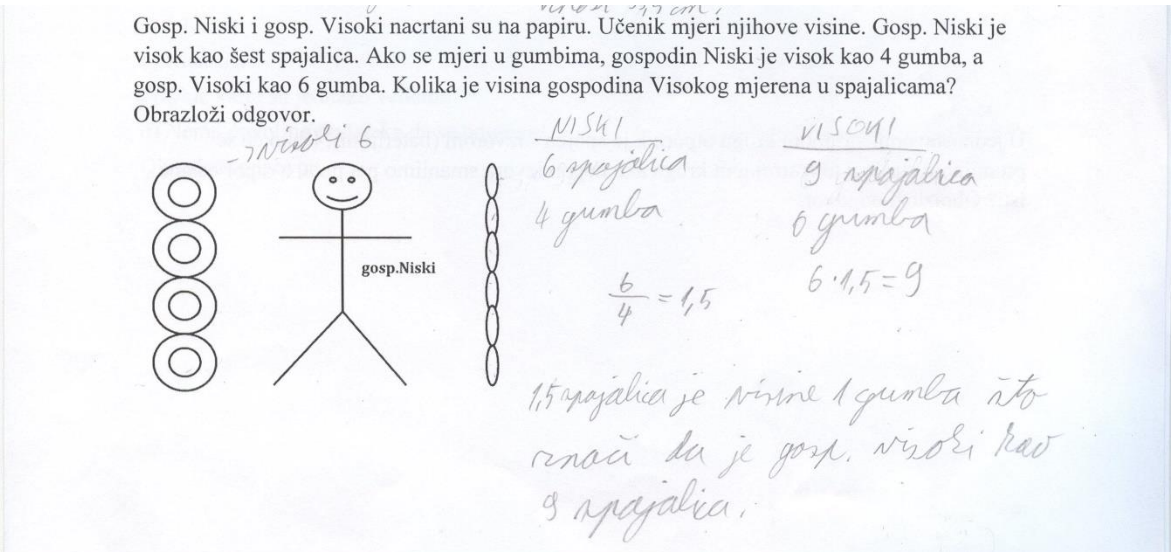
$$6\ gumba = 6 \cdot 1\ gumb \rightarrow 6 \cdot 1{,}5\ spajalica = 9\ spajalica.$$

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (57 ± 48)% bodova, a učenici srednjih škola (71 ± 44)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,06). Na Slici 3.51 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima.



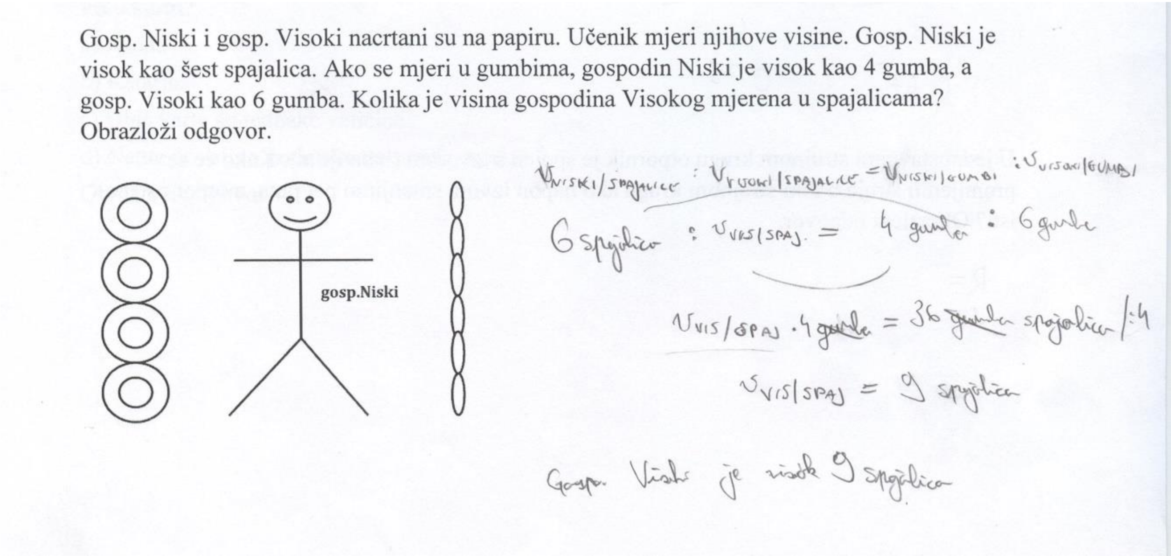
Slika 3.51: *Raspodjela učenika po broju bodova u 6. zadatku*

Od 92 učenika koji su na ovome zadatku postigli 2 boda, jedan učenik nije kategoriziran, tj. iz odgovora ne možemo razaznati kojom se strategijom učenik koristio. 47 učenika (51,1%) se koristilo strategijom svođenja na jedinicu (Slika 3.52).



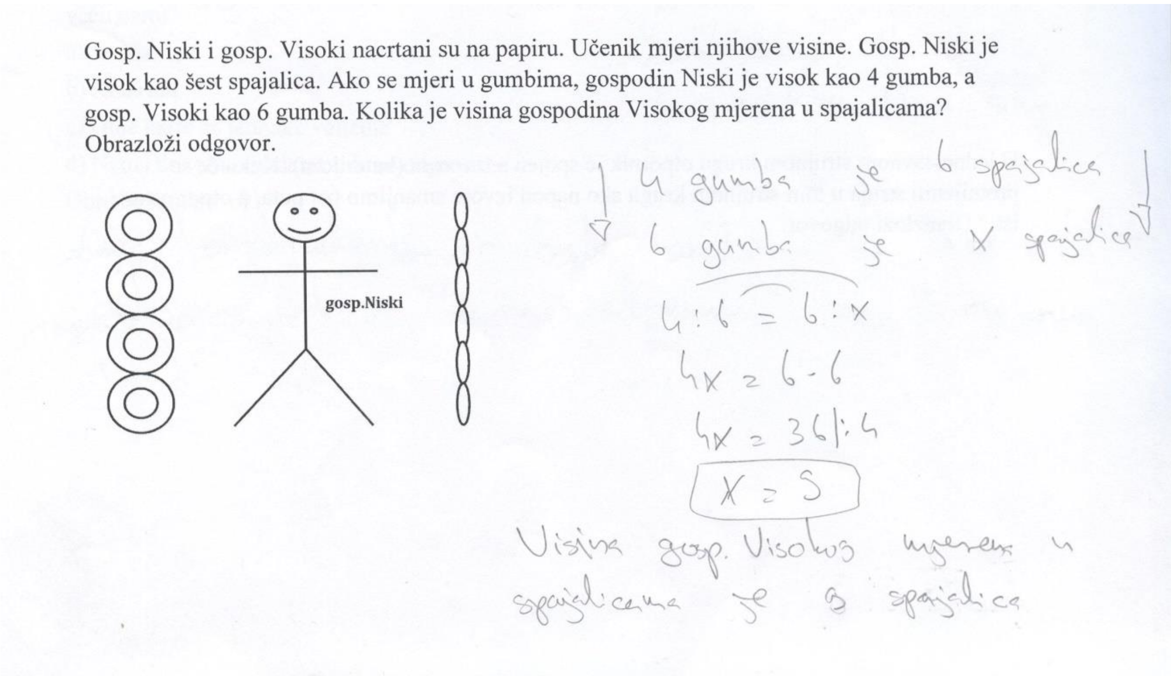
Slika 3.52: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 2 boda u 6. zadatku*

38 učenika (41,3%), koji su postigli 2 boda, su se koristili strategijom korištenja razmjera, odnosno jednakosti omjera. Učenici su u omjer postavili visine g.Niskog i g.Visokog te izrazili nepoznatu veličinu (Slika 3.53).



Slika 3.53: *Primjer strategije korištenja razmjera za 2 boda u 6. zadatku*

6 učenika (6,5%), koji su postigli 2 boda, se također koristilo strategijom razmjera, ali učenici su razmjere postavili pomoću metode strelica (Slika 3.54).

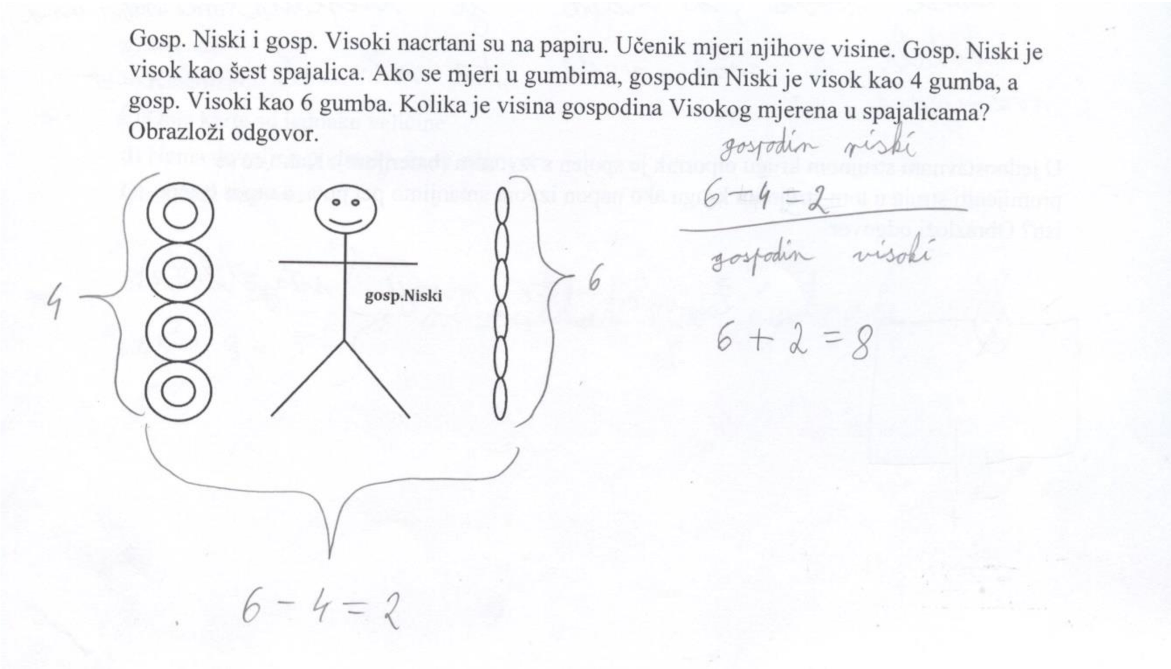


Slika 3.54: *Primjer metode strelica za 2 boda u 6. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da razumiju kovarijaciju dviju veličina koje se mijenjaju u ovisnosti jedna o drugoj te da su u stanju uočiti na koji način promjena jedne veličine utječe na promjenu druge veličine.

Od 11 učenika, koji su postigli jedan bod, svih 11 nije kategorizirano. Učenici su napisali samo točan odgovor bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili.

Od 52 učenika, koji nisu postigli niti jedan bod, njih 25 (48,1%) nije ništa napisalo. 6 učenika (11,5%) nije kategorizirano. Iz njihovih odgovora ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili da bi došli do odgovora. 21 učenika (40,4%) je koristilo aditivnu vezu. Budući da je razlika između gumba i spajalica kod gosp.Niskog jednaka 2, učenici su odredili visinu gosp.Visokog u spajalicama tako da su visini od 6 gumba dodali 2 te su tako dobili 8 spajalica (Slika 3.55). Za navedene učenike možemo reći da nisu usvojili svojstva multiplikativne veze te nisu u stanju uočiti kako veličine međusobno ovise.



Slika 3.55: *Primjer aditivne metode za 0 bodova u 6. zadatku*

U Tablici 3.7 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	svođenje na jedinicu	32	15
	razmjeri	11	27
	metoda strelica	5	1
	nekategoriziran	0	1
	ukupno	**48**	**44**
1 bod	nekategorizirano	8	3
	ukupno	**8**	**3**
0 boda	aditivna veza	17	4
	nekategorizirano	5	1
	ukupno	**22**	**5**

Tablica 3.7 *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 6. zadatku*

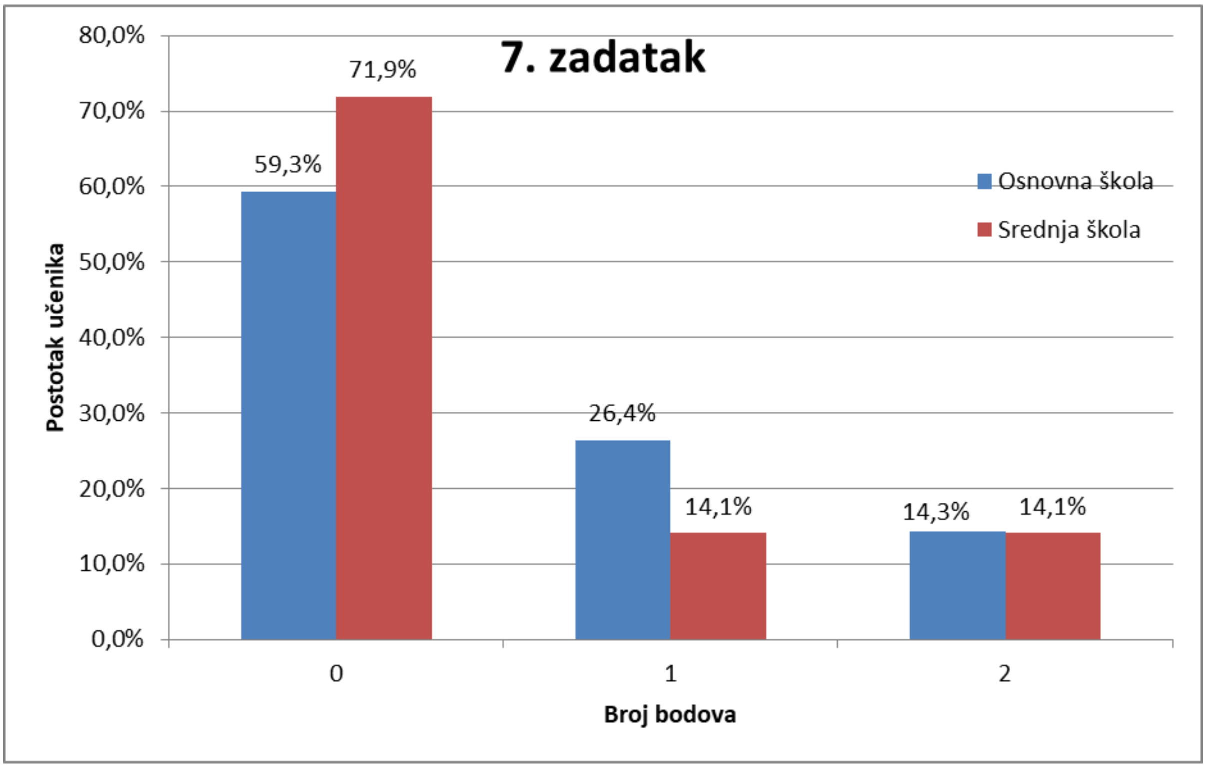
Iz rezultata t-testa, Slike 3.51 i Tablice 3.7. uočavamo da nema značajne razlike između učenika osnovnih i srednjih škola u rješavanju ovog zadatka. Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da većina učenika nema problema s razlikovanjem multiplikativne veze od aditivne veze. Možemo reći da većina učenika razumije omjer koji predstavlja vezu veličina od samih veličina koje se uspoređuju. Učenici koji nisu postigli bodove na ovom zadatku još nisu na tome stupnju razumijevanja proporcionalnog rasuđivanja između ovisnih veličina.

Zadatak 7.

Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

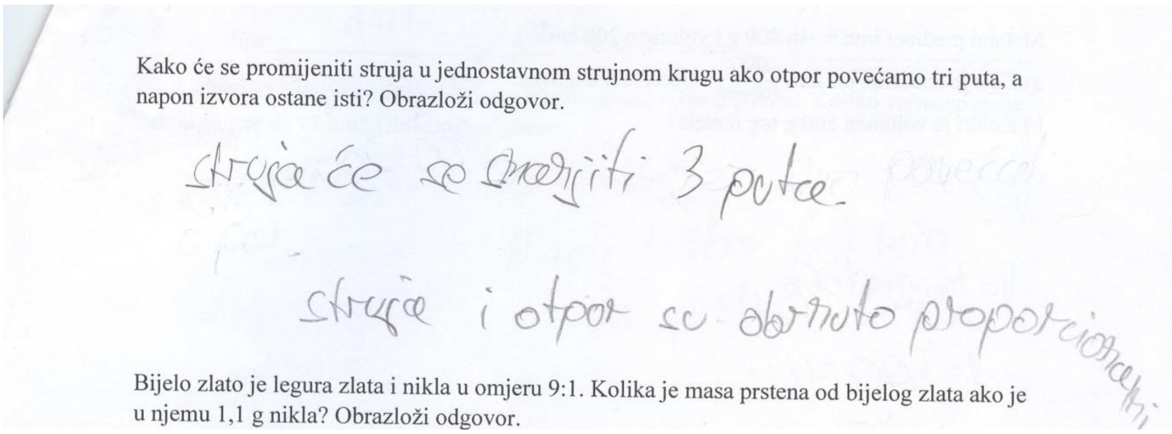
Ovim zadatkom ispituje se učeničko zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti dvije obrnuto proporcionalne varijable. U zadatku se primjenjuje Ohmov zakon. Pomoću Ohmovog zakona, $I = \frac{U}{R}$, gdje je I struja, U napon te R otpor u strujnom krugu, treba odrediti koliko će se promijeniti struja ako se promijeni otpor, a napon ostane isti. Struja je, prema Ohmovom zakonu, obrnuto proporcionalna s otporom. Iz toga slijedi da se povećanjem otpora tri puta, zbog obrnute proporcionalnosti, struja smanjuje tri puta. Dakle, iznos struje nakon promjene će biti $I_{novo} = \frac{U}{3R} = \frac{1}{3}\frac{U}{R} = \frac{I}{3}$.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (28 ± 37)% bodova, a učenici srednjih škola (21 ± 37)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,36). Na Slici 3.56 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Vidimo da veliki broj učenika osnovnih škola (59,3%) i srednjih škola (71,9%) dobio nula bodova na ovom zadatku. Kao što vidimo na Slici 3.56 i prema rezultatima t-testa, nije došlo do napretka učenika srednjih škola u odnosu na učenike osnovnih škola.



Slika 3.56: *Raspodjela učenika po broju bodova u 7. zadatku*

Učenici koji su postigli 2 boda su se najčešće koristili funkcionalnom ovisnosti dviju varijabli (Slika 3.57). Od 22 učenika koji su u potpunosti riješili ovaj zadatak, njih 19 (86,4%) je koristilo navedenu strategiju.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

struja će se smanjiti 3 puta

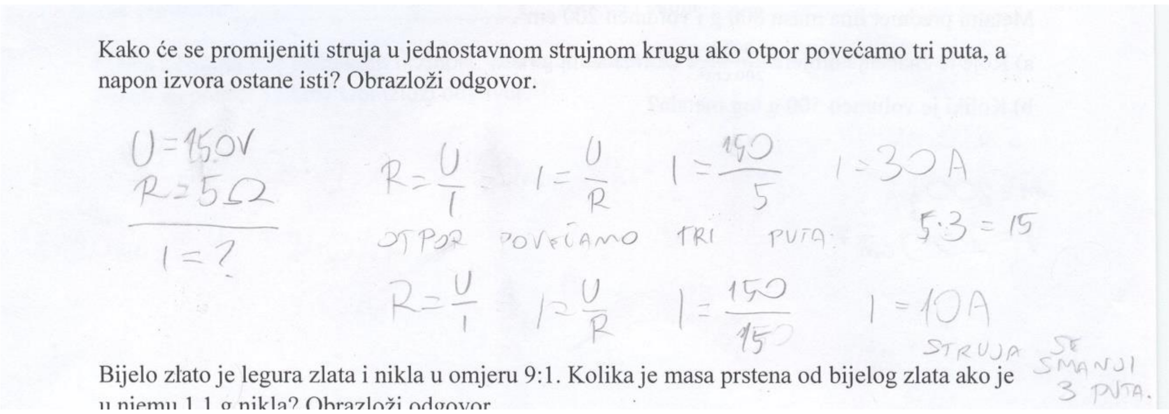
struja i otpor su obrnuto proporcionalni

Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

Slika 3.57: *Primjer strategije funkcionalne ovisnosti za 2 boda u 7. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da su u stanju uočiti na koji način promjena jedne veličine utječe na promjenu druge veličine, odnosno da mogu prepoznati obrnuto proporcionalne veličine i s lakoćom odrediti njihovu ovisnost.

Dvoje učenika (9,1%) se koristilo strategijom konkretnog primjera (Slika 3.58). Učenici su došli do točnog rješenja uspoređujući brojčane vrijednosti. Za navedene učenike možemo reći da, iako su došli do točnog rješenja, ne prepoznaju obrnuto proporcionalne veličine i njihovu ovisnost. Oni su još uvijek konkretni mislioci i s konkretnim brojevima mogu računati i zaključivati, ali još nisu dosegli fazu formalnih mislioca u kojoj bi mogli prepoznati proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost te zaključivati pomoću funkcionalne ovisnosti.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

$U = 150V$

$R = 5\Omega$

$I = ?$

$R = \frac{U}{I}$ $I = \frac{U}{R}$ $I = \frac{150}{5}$ $I = 30A$

OTPOR POVEĆAMO TRI PUTA $5 \cdot 3 = 15$

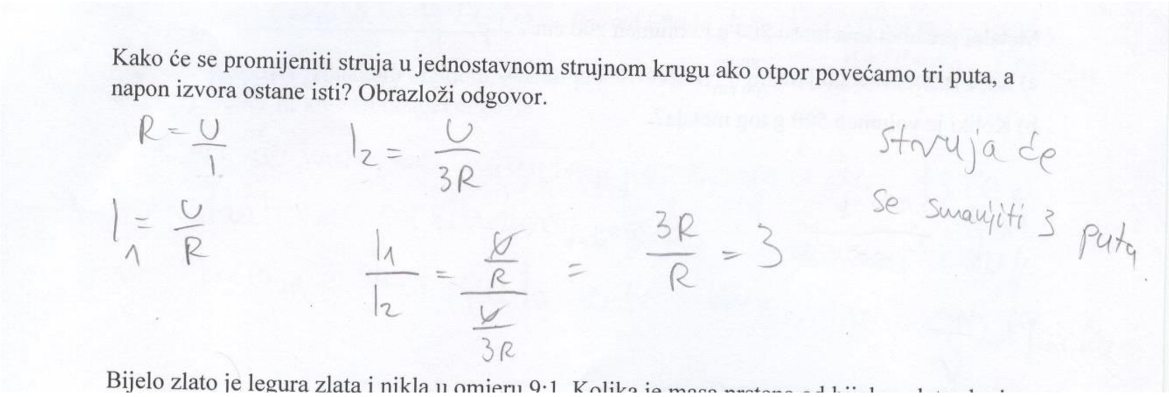
$R = \frac{U}{I}$ $I = \frac{U}{R}$ $I = \frac{150}{15}$ $I = 10A$

STRUJA SE SMANJI 3 PUTA.

Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

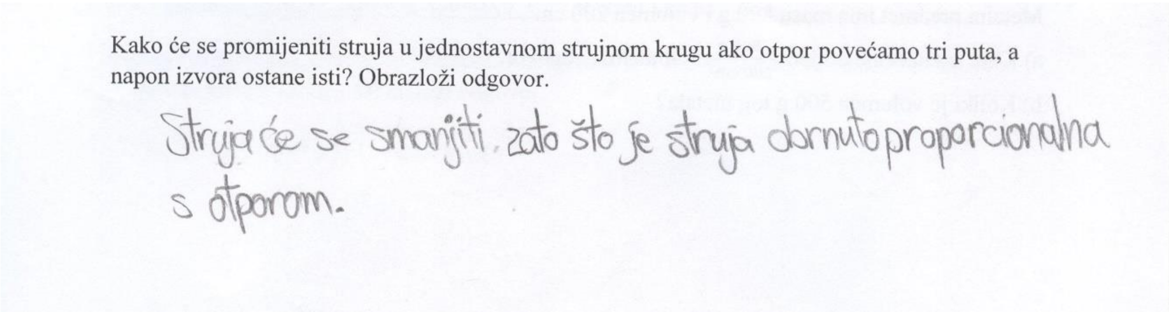
Slika 3.58: *Primjer strategije korištenja konkretnog primjera za 2 boda u 7. zadatku*

Jedan učenik se koristio strategijom omjera dviju struja, odnosno učenik je računao vrijednost omjera (Slika 3.59). I za ovog učenika možemo reći da, iako je računom došao do točnog rješenja, izravno ne prepoznaje obrnuto proporcionalne veličine i njihovu ovisnost.



Slika 3.59: *Primjer strategije omjera za 2 boda u 7. zadatku*

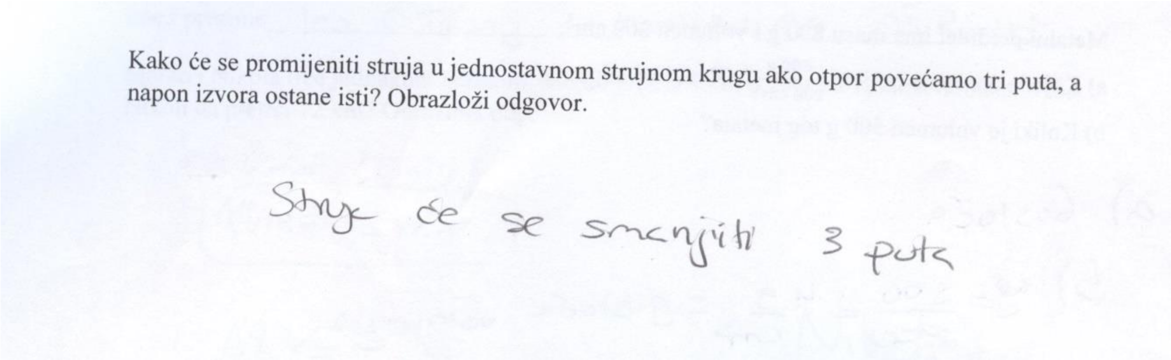
Od 33 učenika koji su postigli jedan bod, njih 21 (63,6%) se koristilo strategijom funkcionalne ovisnosti, ali nisu došli do točnog rješenja već su kvalitativno razmišljali (Slika 3.60).



Slika 3.60: *Primjer kvalitativnog razmišljanja za 1 bod u 7. zadatku*

Za navedene učenike, zbog kvalitativnog načina razmišljanja, ne možemo tvrditi da razlikuju multiplikativnu ovisnost, koja vrijedi za proporcionalne, odnosno, obrnuto proporcionalne veličine, od aditivne ovisnosti veličina.

Ostalih 12 učenika (36,4%) nije kategorizirano. To su učenici koji su došli do zaključka da se struja smanjuje, ali nisu napisali kako su došli do zaključka pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili (Slika 3.61). Za ovu skupinu učenika ne možemo odrediti prepoznaju li obrnuto proporcionalne veličine, odnosno njihovu ovisnost.

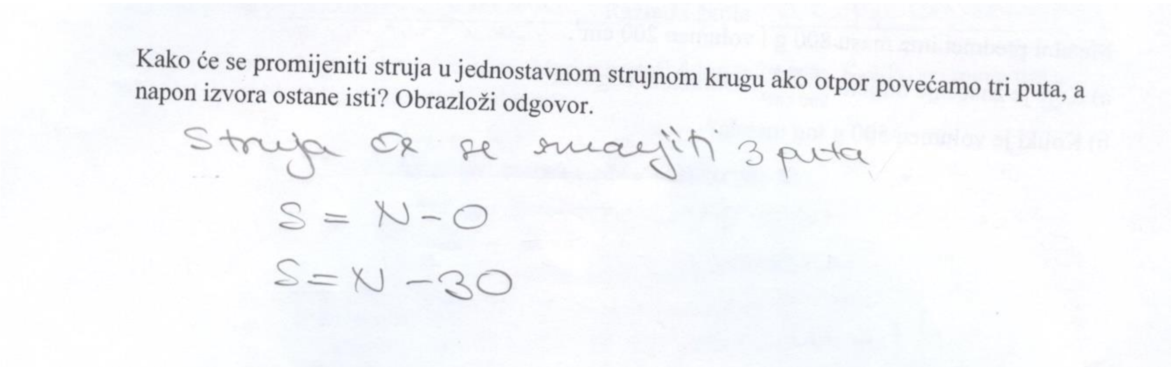


Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

Struja će se smanjiti 3 puta

Slika 3.61: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 1 bod u 7. zadatku*

Jedna učenica je, kao i u 3.zadatku, koristeći aditivnu vezu postavila formulu za Ohmov zakon došla do točnog rješenja (Slika 3.62). Za navedenu učenicu možemo reći da nije usvojila značajke multiplikativne veze te da svojstva multiplikativne veze pripisuje aditivnoj vezi.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

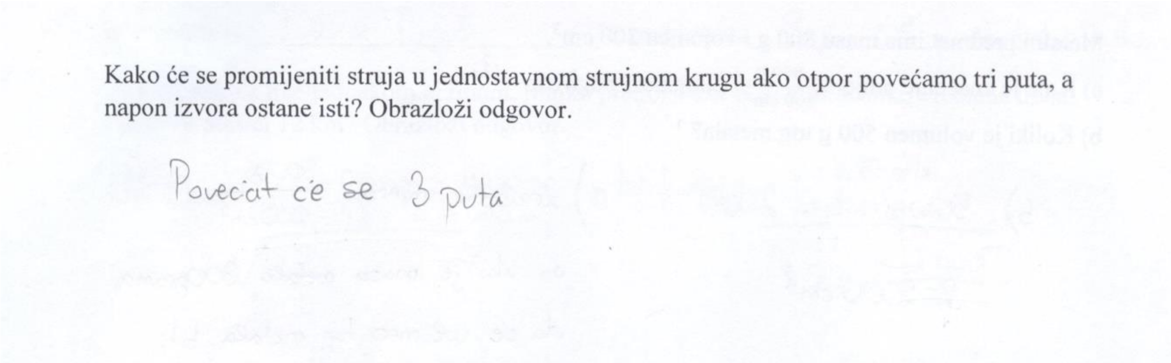
Struja će se smanjiti 3 puta

S = N − O

S = N − 3O

Slika 3.62: *Primjer strategije aditivne veze za 1 bod u 7. zadatku*

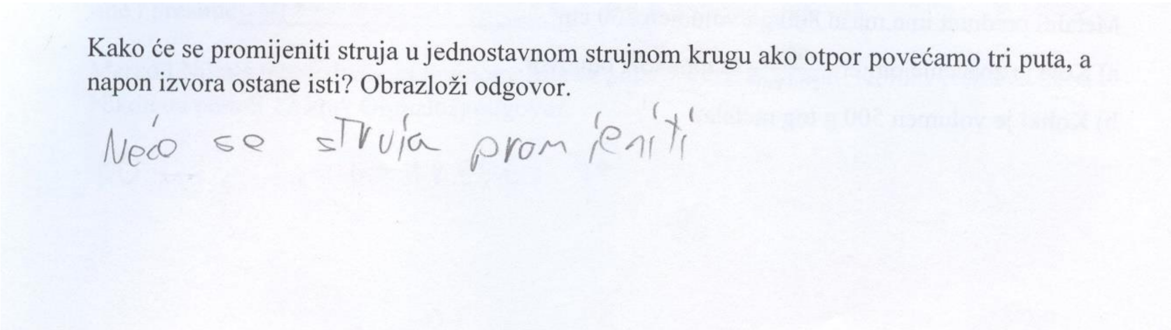
Od 100 učenika koji nisu postigli niti jedan bod, njih 87 (87%) nije ništa napisalo u zadatku. Kao i u 3. zadatku, moguće je da se ti učenici nisu sjetili Ohmovog zakona što je razočaravajuće budući da se Ohmov zakon obrađuje i u 8. razredu osnovne škole i u 2. razredu srednje škole. Ostalih 13 učenika (13%) nije kategorizirano. Navedeni učenici ili nisu prepoznali funkcionalnu ovisnost, pa su zaključili da se struja neće mijenjati ili su zapisali krivi zaključak bez obrazloženja (Slika 3.63 i Slika 3.64).



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

Povecat će se 3 puta

Slika 3.63: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 0 bodova u 7. zadatku*



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

Neće se struja promjeniti

Slika 3.64: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 0 bodova u 7. zadatku*

U Tablici 3.8 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	funkcionalna ovisnost	12	7
	konkretan primjer	1	1
	omjer	0	1
	ukupno	**13**	**9**
1 bod	funkcionalna ovisnost/ kvalitativno razmišljanje	16	5
	nekategorizirano	8	4
	ukupno	**24**	**9**
0 boda	nekategorizirano	10	3
	ukupno	**10**	**3**

Tablica 3.8 *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 7.zadatku*

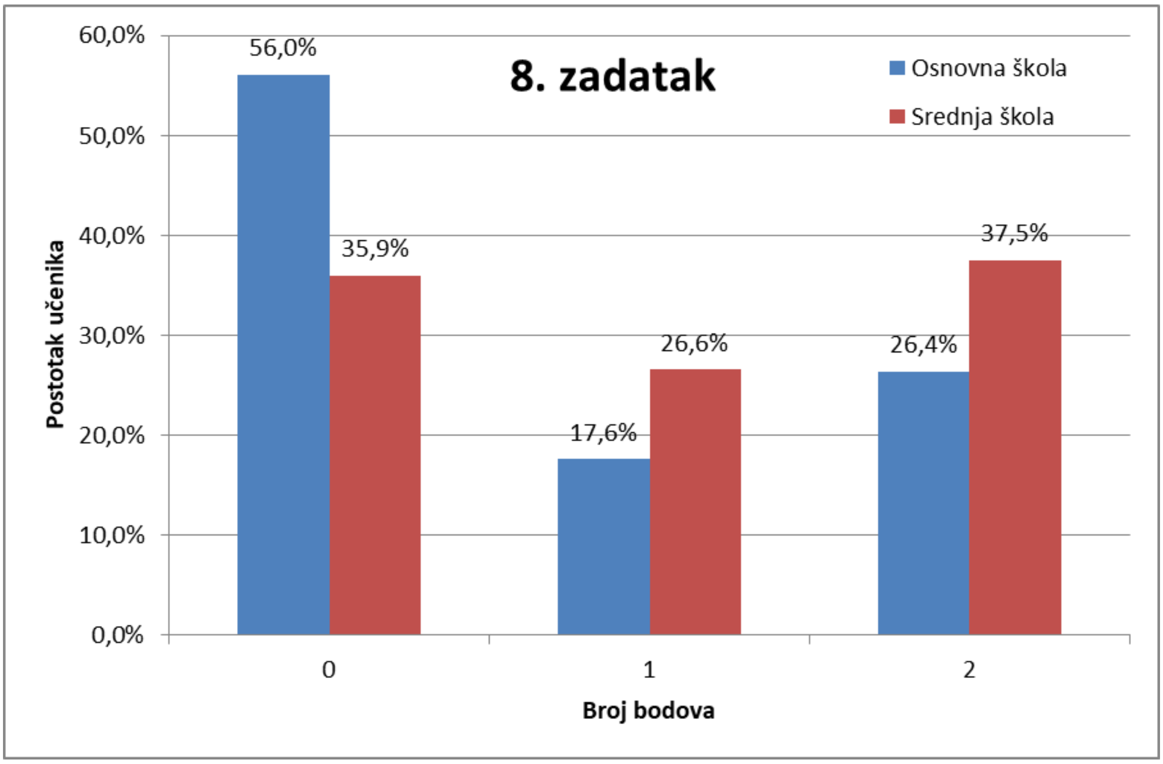
Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da mnogi učenici imaju problema s prepoznavanjem i razumijevanjem obrnuto proporcionalnih veličina i njihovim ovisnostima. To pokazuje da učenici nisu u potpunosti usvojili multiplikativnu vezu, odnosno da nisu usvojili proporcionalno rasuđivanje, već da se i dalje oslanjaju na aditivnu vezu i njena svojstva pa im je ovaj zadatak bio težak.

Zadatak 8.

Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

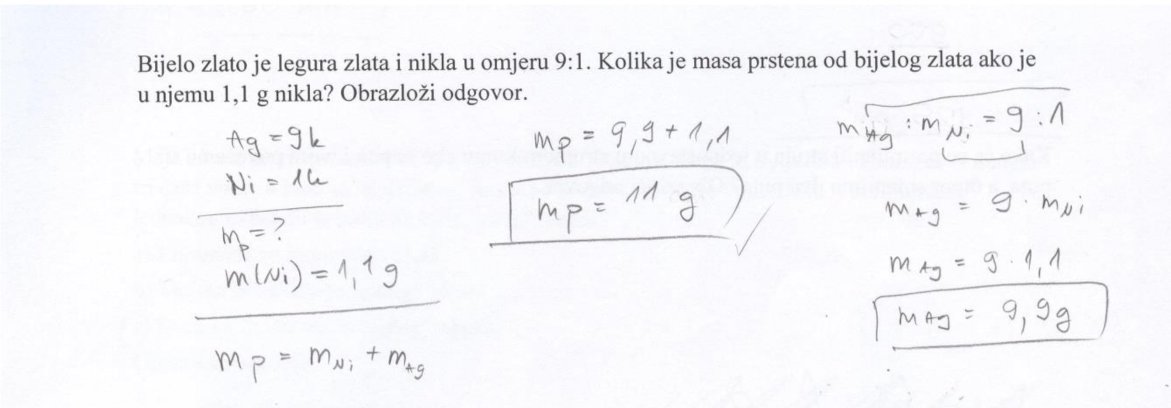
Ovim zadatkom ispituje se učeničko razumijevanje omjera, određivanje vrijednosti omjera te postavljanje razmjera kako bi se riješio problem. Označimo masu bijelog zlata s M, masu zlata s m(Au) te masu nikla s m(Ni). Veličina koju tražimo je M, međutim da se odredi masa bijelog zlata prvo se mora odrediti masa zlata. Budući da su zlato i nikal u bijelom zlatu u omjeru 9 : 1, u tom omjeru se odnose i njihove mase, odnosno, ako prikažemo navedene veličine preko razmjera, imamo m(Au) : m(Ni) = 9 : 1. Rješavanjem razmjera, dobivamo da je m(Au) = 9 · m(Ni) = 9 · 1,1 g = 9,9 g. Dakle masa zlata u leguri je 9,9 g. Tražena masa bijelog zlata je jednaka zbroju masa u leguri, odnosno, M = m(Au) + m(Ni) = 9,9 g + 1,1 g = 11 g.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (35 ± 43)% bodova, a učenici srednjih škola (51 ± 43)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole je statistički značajna (p = 0,03). Na Slici 3.65 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Vidimo da je više od polovine učenika osnovnih škola (56%) na ovom zadatku dobilo nula bodova .



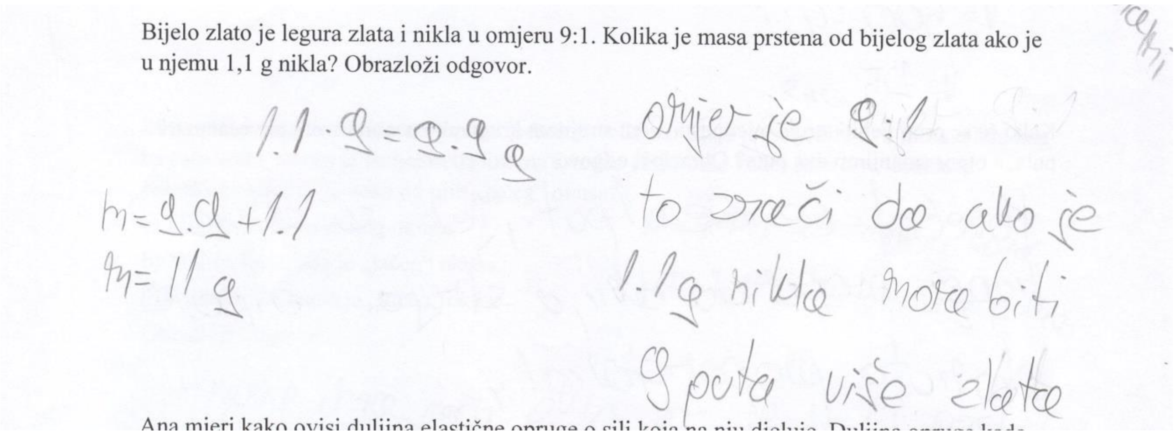
Slika 3.65: *Raspodjela učenika po broju bodova u 8. zadatku*

Od 48 učenika, koji su postigli 2 boda na ovom zadatku, njih 27 (56,2%) se koristilo strategijom razmjera (Slika 3.66).



Slika 3.66: *Primjer strategije razmjera za 2 boda u 8. zadatku*

Ostali učenici (43,8%), koji su postigli 2 boda na ovom zadatku, su se koristili strategijom određivanja vrijednosti omjera, odnosno koeficijenta proporcionalnosti (Slika 3.67).



Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

$1.1 \cdot 9 = 9.9\,g$

$m = 9.9 + 1.1$

$m = 11\,g$

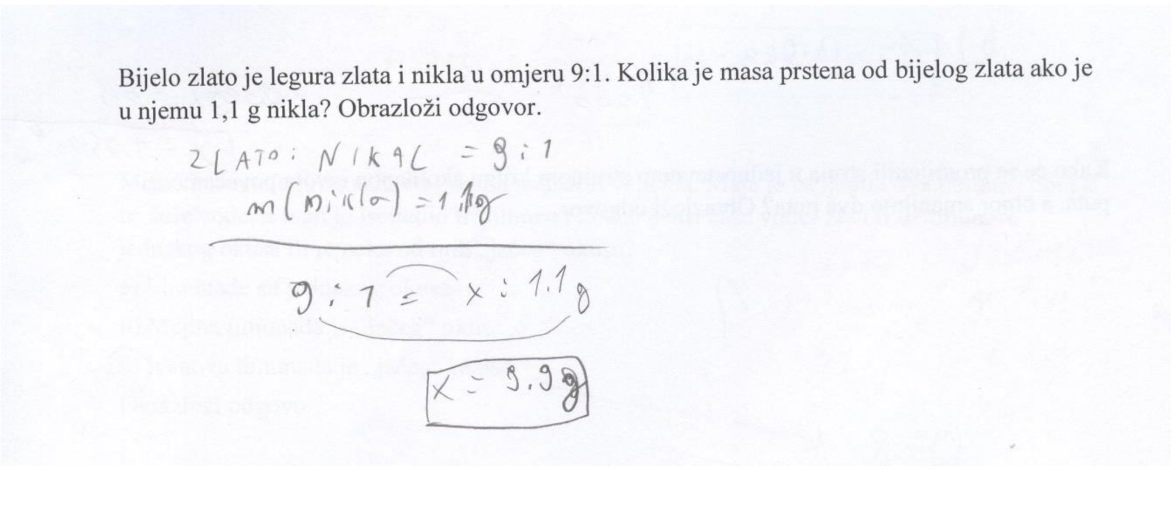
omjer je 9:1 to znači da ako je 1.1 g nikla mora biti 9 puta više zlata

Slika 3.67: *Primjer strategije određivanja vrijednosti omjera za 2 boda u 8. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da vladaju omjerima te prepoznaju svojstva omjera kao multiplikativne veze veličina i pomoću njih računaju vrijednost omjera. Također, učenici su ovladali postavljanjem razmjera i određivanjem nepoznate vrijednosti iz razmjera.

Od 33 učenika koji su postigli jedan bod na ovome zadatku, njih 6 (18,2%) nije kategorizirano. To su učenici koji su napisali točan odgovor, ali bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili tijekom rješavanja zadatka. Učenici koji su postigli jedan bod na ovome zadatku su većinom točno odredili masu zlata u leguri, ali nisu odredili masu legure, tj. bijelog zlata, ili su pogreškom u zbrajanju došli do krivog rezultata.

14 učenika (42,4%), koji su postigli jedan bod, se koristilo strategijom razmjera (Slika 3.68).



Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

ZLATO : NIKAL = 9 : 1

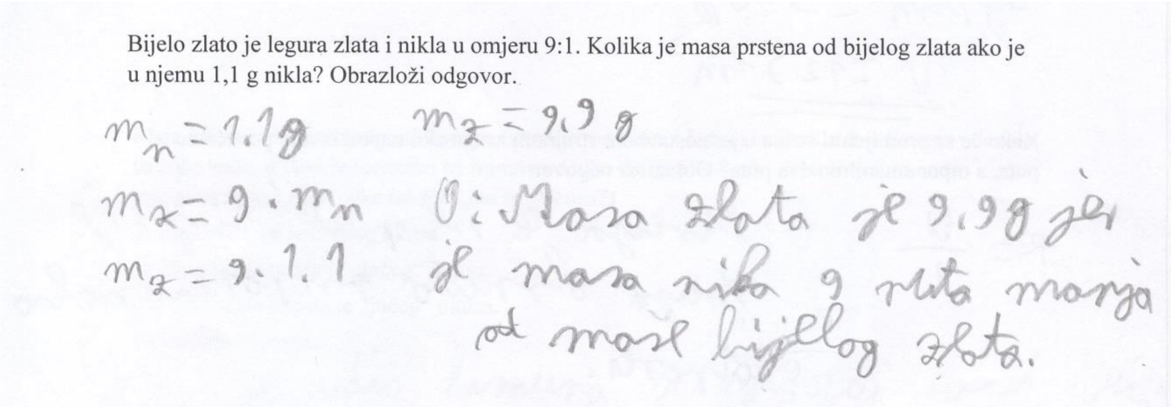
m(nikla) = 1.1 g

$9 : 1 = x : 1.1\,g$

$\boxed{x = 9.9\,g}$

Slika 3.68: *Primjer strategije razmjera za 1 bod u 8. zadatku*

13 učenika (39,4%), koji su postigli jedan bod, se koristilo strategijom određivanja vrijednosti omjera (Slika 3.69).


Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

$m_n = 1.1g$ $m_z = 9.9\ g$

$m_z = 9 \cdot m_n$ O: Masa zlata je 9,9g jer

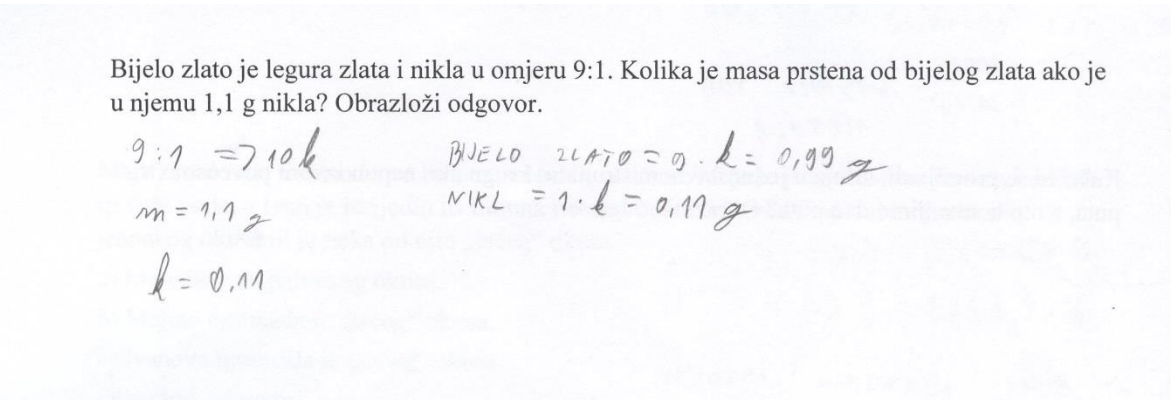
$m_z = 9 \cdot 1.1$ je masa nika 9 puta manja

od mase bijelog zlata.

Slika 3.69: *Primjer strategije određivanja vrijednosti omjera za 1 bod u 8. zadatku*

Za učenike, koji su postigli jedan bod na ovome zadatku, možemo reći da su ovladali korištenjem omjera i postavljanjem razmjera te računanjem nepoznate vrijednosti iz razmjera. Međutim, učenici su zaboravili jedan korak do točnog rješenja, zbrajanje dobivenih vrijednosti. Moguće je da su učenici predvidjeli da se radi o leguri ili koja masa je tražena u zadatku.

Od 74 učenika, koji nisu postigli nijedan bod u ovome zadatku, njih 52 (70,3%) nije ništa napisalo. 10 učenika (13,5%) nije kategorizirano. To su učenici koji su prepisali omjer ili učenici koji su samo ponudili krivo rješenje, bez obrazloženja. 7 učenika (9,5%) se koristilo strategijom određivanja vrijednosti omjera, odnosno koeficijenta proporcionalnosti, ali nisu odredili točnu vrijednost omjera (Slika 3.70).


Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

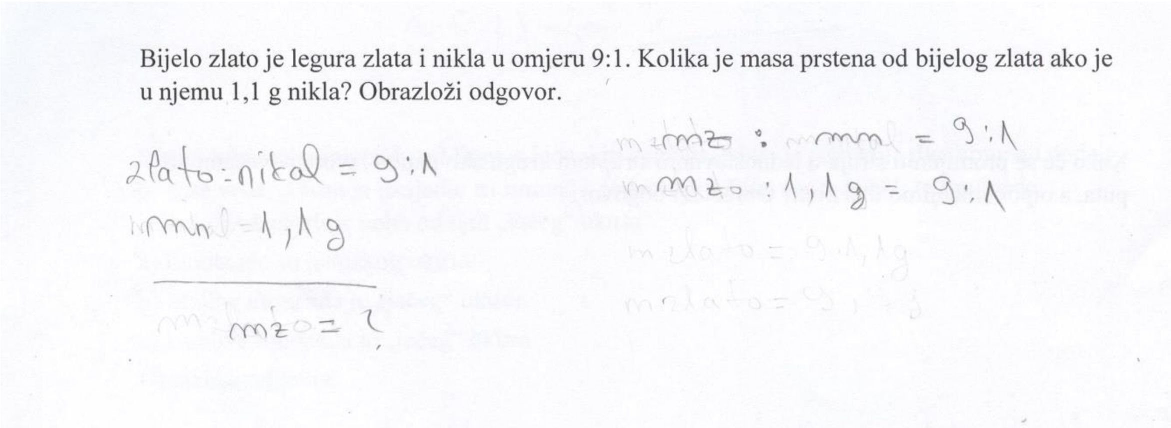
$9:1 \Rightarrow 10k$ BIJELO ZLATO $= 9 \cdot k = 0,99\ g$

$m = 1,1\ g$ NIKL $= 1 \cdot k = 0,11\ g$

$k = 0,11$

Slika 3.70: *Primjer strategije određivanja vrijednosti omjera za 0 bodova u 8. zadatku*

5 učenika (6,7%), koji nisu postigli nijedan bod, su se koristili strategijom razmjera. Učenici su postavili razmjer, ali nisu odredili nepoznatu veličinu te zatim došli do konačnog rješenja (Slika 3.71).



Slika 3.71: *Primjer strategije razmjera za 0 bodova u 8. zadatku*

Za učenike, koji nisu postigli niti jedan bod u ovome zadatku, možemo reći da nisu ovladali omjerima, tj. određivanjem vrijednosti omjera i postavljanjem razmjera te određivanjem nepoznate veličine u razmjeru.

U Tablici 3.9 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	razmjer	8	19
	određivanje vrijednosti omjera	16	5
	ukupno	**24**	**24**
1 bod	razmjer	4	10
	određivanje vrijednosti omjera	9	4
	nekategorizirano	3	3
	ukupno	**16**	**17**
0 boda	određivanje vrijednosti omjera	2	**5**
	razmjer	3	2
	nekategorizirano	7	3
	ukupno	**12**	**10**

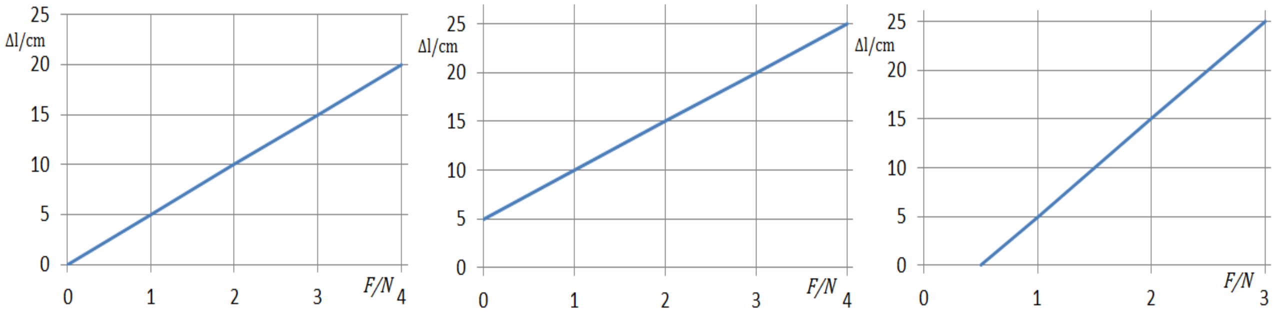
Tablica 3.9. *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 8. zadatku*

Iz rezultata t-testa i Slike 3.65 uočavamo da postoji razlike između učenika osnovnih i srednjih škola u rješavanju ovog zadatka. Učenici srednjih škola su bolje savladali razumijevanje omjera i postavljanje ekvivalentnih omjera, tj. razmjera. Zbog toga možemo reći da učenici srednjih škola pokazuju napredak u proporcionalnom rasuđivanju, čija je glavna stavka razumijevanje omjera, odnosno multiplikativne veze u omjeru.

Zadatak 9.

Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da produljenje elastične opruge Δl *ovisi proporcionalno o sili* F *koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje?*

a) *b)* *c)*

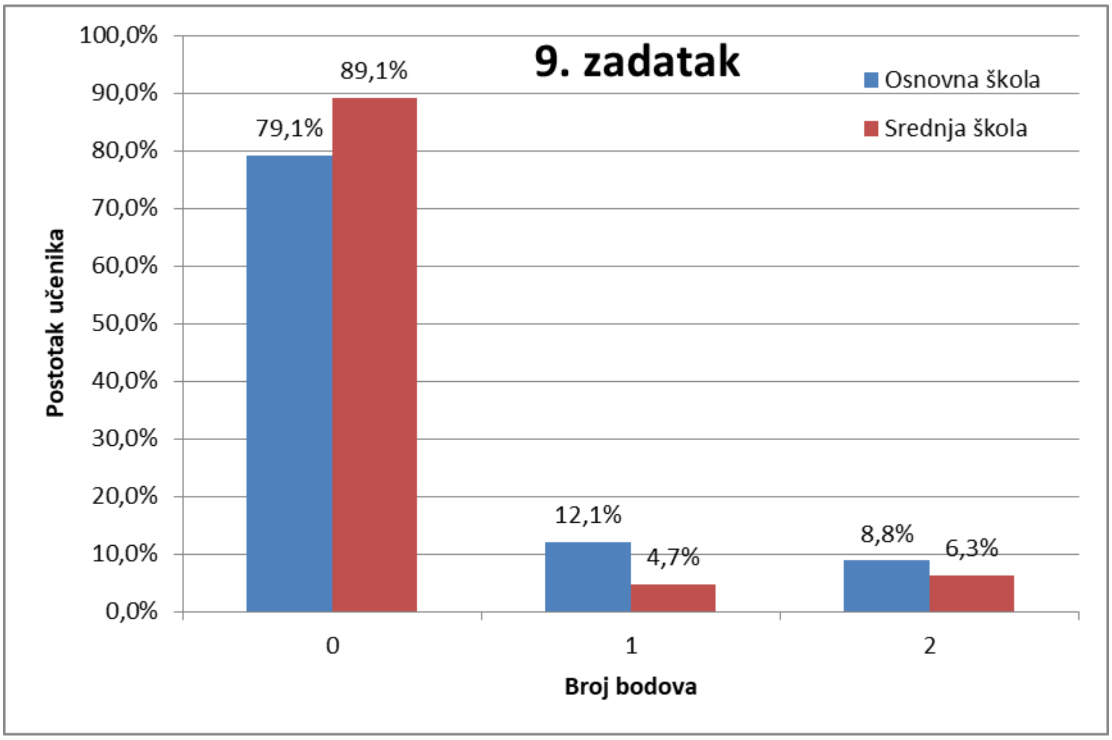


d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

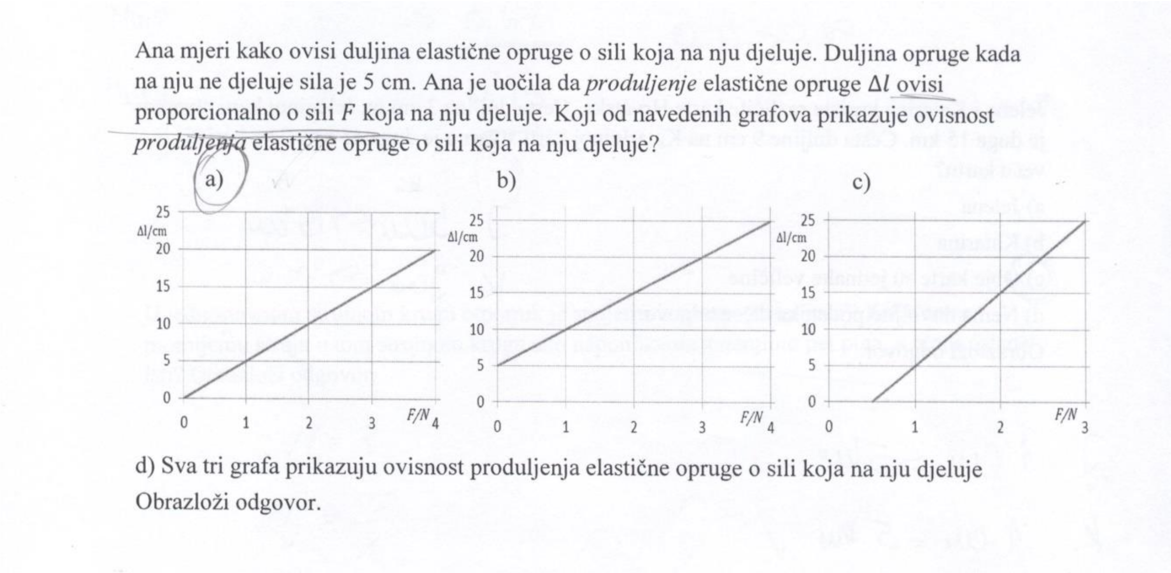
Ovim zadatkom ispituje se učeničko razumijevanje grafičkog prikaza proporcionalnih veličina. Grafički prikaz proporcionalnih veličina u koordinatnom sustavu je pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava. U zadatku promatramo grafički prikaz dvije proporcionalne veličine, produljenje elastične opruge Δl i sila F koja djeluje na oprugu. Točan odgovor je a) te je obrazloženje navedeno u tekstu zadatka, tj. navedene veličine su proporcionalne.

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (15 ± 31)% bodova, a učenici srednjih škola (9 ± 26)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,19). Na Slici 3.72 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Vidimo da veliki broj učenika osnovnih škola (79,1%) i srednjih škola (89,1%) dobio nula bodova na ovom zadatku. Kao što vidimo na Slici 3.72 i prema rezultatima t-testa, nije došlo do napretka učenika srednjih škola u odnosu na učenike osnovnih škola.



Slika 3.72: *Raspodjela učenika po broju bodova u 9. zadatku*

Učenici koji su postigli 2 boda su najčešće koristili činjenicu da graf proporcionalnih veličina prolazi kroz ishodište. (Slika 3.73 i Slika 3.74). Svih 12 učenika koji su postigli 2 boda na ovom zadatku su se koristili ovom strategijom. Za navedene učenike možemo reći da su ovladali svojstvima proporcionalnih veličina, odnosno, da razumiju kako izgleda graf dviju proporcionalnih veličina. Slika 3.74 pokazuje da učeničke poteškoće s izražavanjem proporcionalnosti. Iako je učenik prepoznao proporcionalnu ovisnost i zna kako izgleda graf ovisnosti dviju proporcionalnih veličina, u opisu koristi aditivnu terminologiju („za koliko povećamo silu, za toliko će se opruga produljiti“). U nastavi bi trebalo razvijati i ispravno korištenje terminologije.



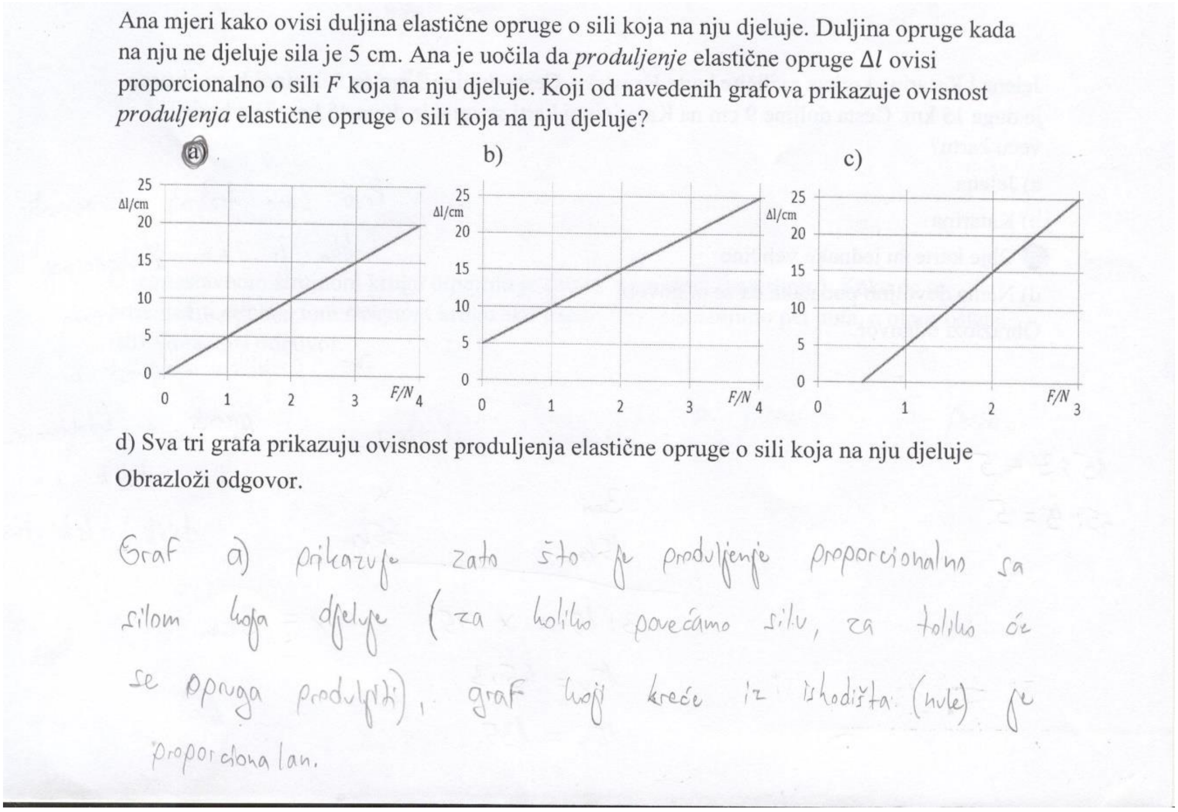
Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

a) b) c)

d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

Slika 3.73: *Primjer strategije grafičkog prikaza proporcionalnih veličina za 2 boda u 9. zadatku*



Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

a) b) c)

d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

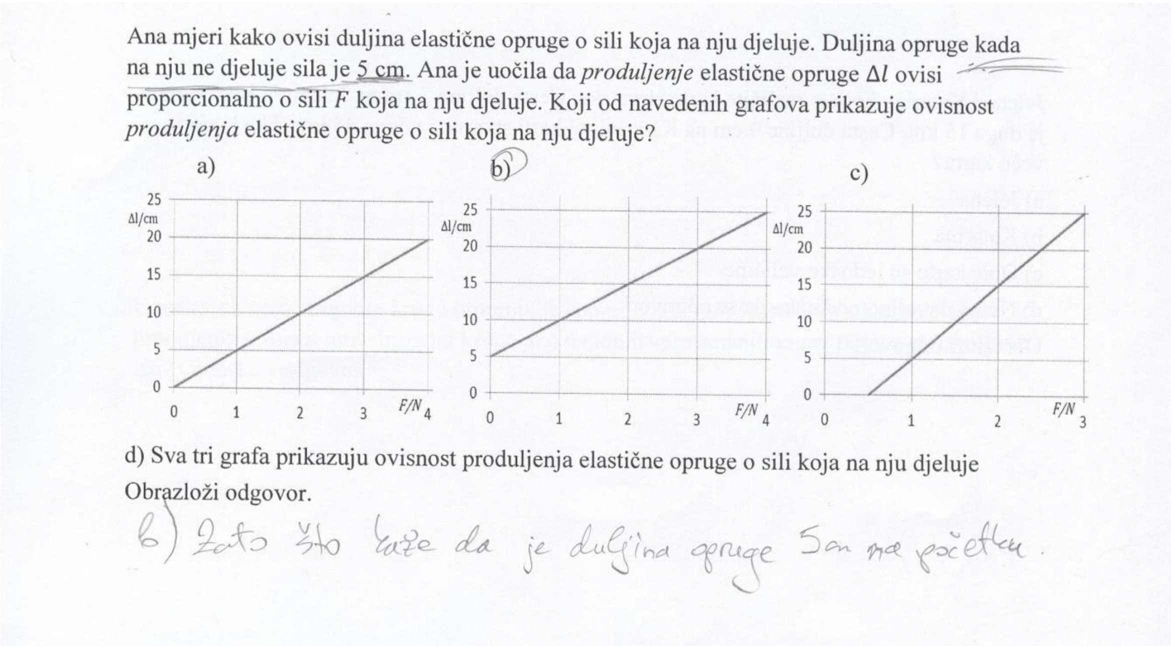
Obrazloži odgovor.

Graf a) prikazuje zato što je produljenje proporcionalno sa silom koja djeluje (za koliko povećamo silu, za toliko će se opruga produljiti), graf koji kreće iz ishodišta (nule) je proporcionalan.

Slika 3.74: *Primjer strategije grafičkog prikaza proporcionalnih veličina za 2 boda u 9. zadatku*

Od 14 učenika koji su postigli jedan bod na ovome zadatku su svi zaokružili točan odgovor, a), ali nisu obrazložili svoj odgovor pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili.

Od 129 učenika, koji nisu postigli nijedan bod, njih 48 (37,2%) nije ništa odgovorilo. 71 učenik (55,0%) su zaokružili da je točan odgovor b). U slučajevima kada su učenici obrazložili svoj odgovor, obrazloženje je bilo da je duljina opruge 5 cm kada na nju ne djeluje sila (Slika 3.75).



Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

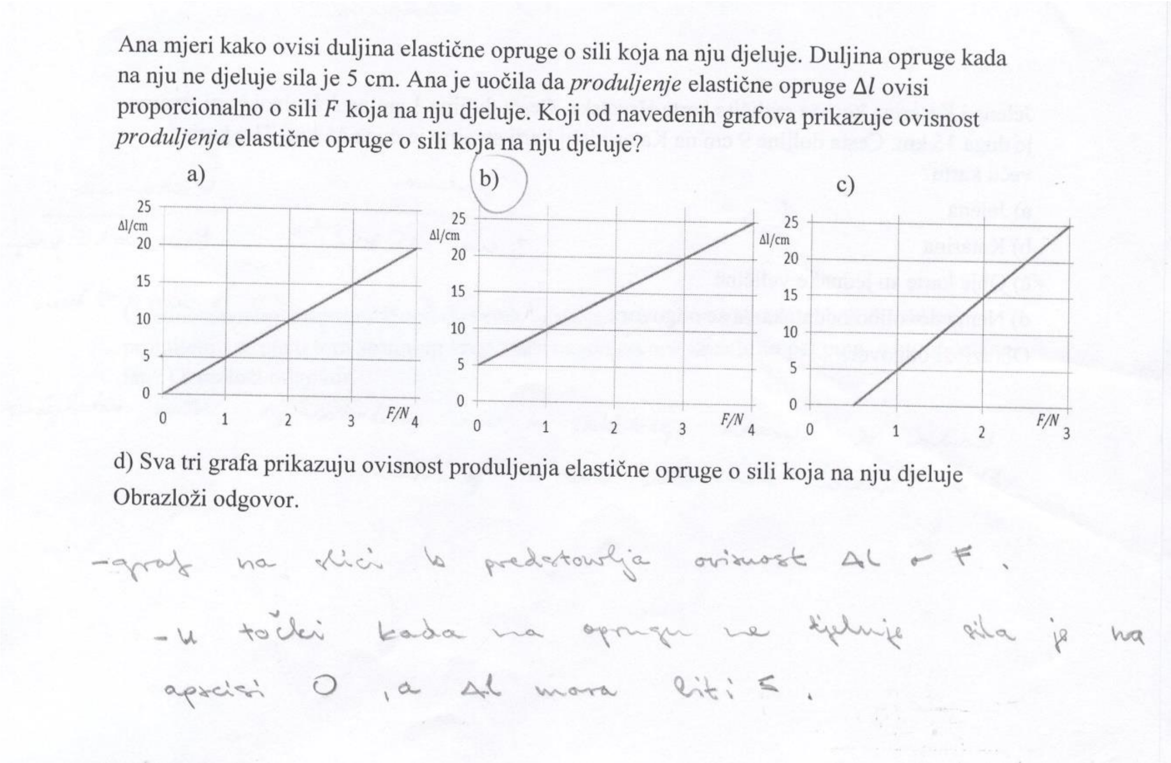
d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

b) Zato što kaže da je duljina opruge 5cm na početku.

Slika 3.75: *Primjer iščitavanja odgovora iz teksta zadatka za 0 bodova u 9. zadatku*

Zaključujemo da su učenici promatrali koji je od ponuđenih grafova, grafički prikaz ovisnosti duljine opruge o sili koja djeluje na nju, a ne traženi grafički prikaz ovisnosti produljenja opruge o sili koja djeluje na oprugu. Mogući razlozi tomu su da učenici ne razlikuju pojam produljenja i duljine, a samim time ne prepoznaju grafički prikaz proporcionalnih veličina, jer je u tekstu zadatka navedeno da su veličine proporcionalne (Slika 3.76). Također, moguće je da su učenici predvidjeli što se traži u zadatku jer nisu dobro pročitali tekst zadatka.



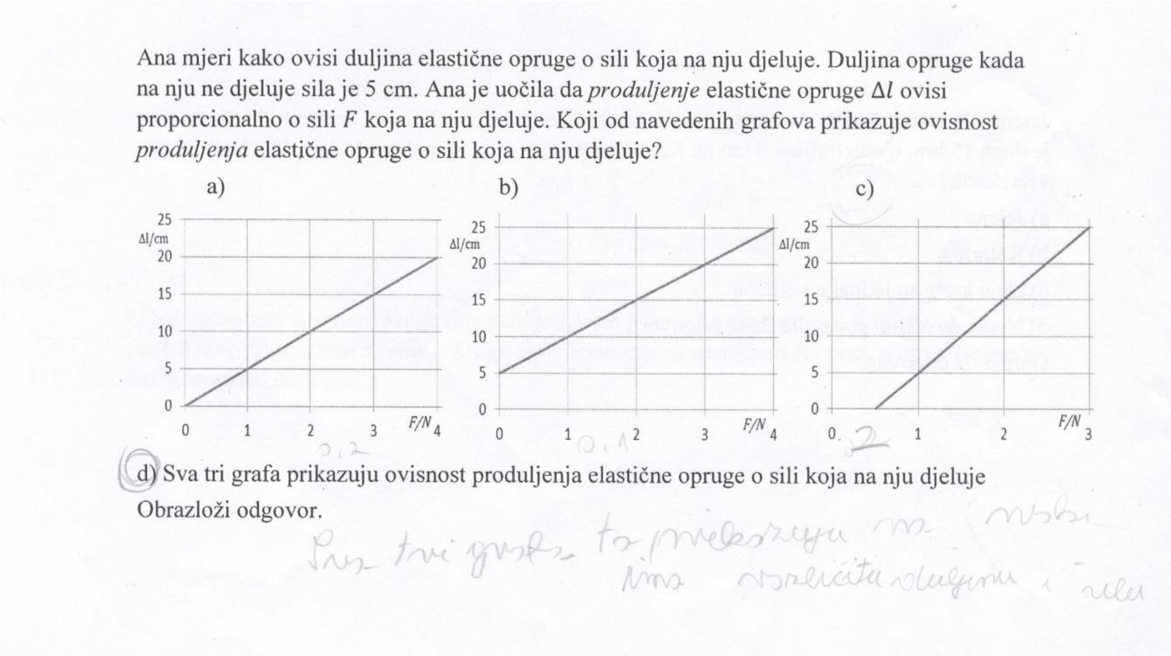
Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje
Obrazloži odgovor.

-graf na slici b predstavlja ovisnost Δl o F.
- u točki kada na oprugu ne djeluje sila je na apscisi 0, a Δl mora biti 5.

Slika 3.76: *Primjer iščitavanja odgovora iz teksta zadatka za 0 bodova u 9. zadatku*

Od učenika koji nisu postigli nijedan bod, njih 6 (4,7%) je zaokružilo da je točan odgovor d). U slučajevima kada su učenici obrazložili svoj odabir, obrazloženje je bilo da se duljine opruga i sile koje djeluju na njih razlikuju (Slika 3.77). Zaključujemo da navedeni učenici nemaju sposobnost proporcionalnog rasuđivanja, odnosno ne uočavaju multiplikativnu vezu koja je temelj proporcionalnosti. Samim time, učenici ne prepoznaju svojstva grafičkog prikaza proporcionalnih veličina.



Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

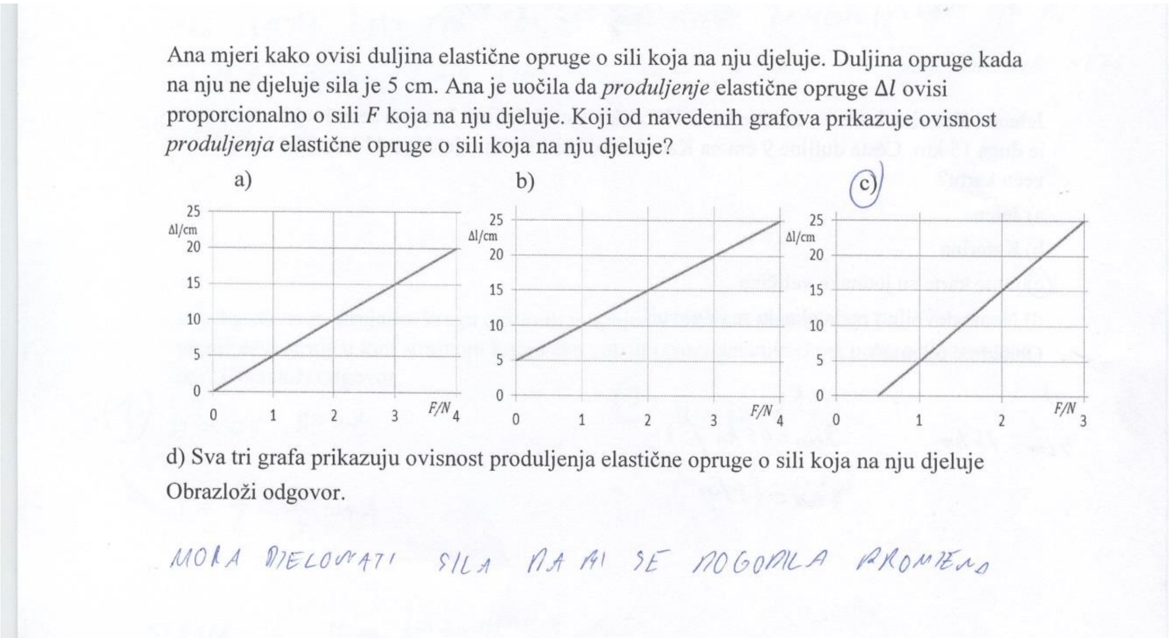
d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

Sva tri grafa to prikazuju na ... ima različitu duljinu i silu

Slika 3.77: *Primjer obrazloženja d) odgovora za 0 bodova u 9. zadatku*

4 učenika (3,1%) je zaokružilo da je točan odgovor c). Obrazloženja za navedeni odgovor su bila da je potrebno djelovanje sile da bi se dogodila promjena duljine (Slika 3.78). Zaključujemo da navedeni učenici ne prepoznaju multiplikativna svojstva proporcionalnih veličina te zbog toga i ne prepoznaju njihov grafički prikaz.



Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

MORA DJELOVATI SILA DA BI SE DOGODILA PROMJENA

Slika 3.78: *Primjer obrazloženja c) odgovora za 0 bodova u 9. zadatku*

U Tablici 3.10 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	grafički prikaz proporcionalnih veličina	8	4
	ukupno	**8**	**4**
1 bod	nekategorizirano	14	3
	ukupno	**14**	**3**
0 boda	zaokruženo b)	39	32
	zaokruženo c)	1	3
	zaokruženo d)	5	1
	ukupno	**45**	**36**

Tablica 3.10: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 9. zadatku*

Iz rezultata t-testa, Slike 3.72 i Tablice 3.10. uočavamo da nema značajne razlike između učenika osnovnih i srednjih škola u rješavanju ovog zadatka. Ovo je pokus koji se radi na nastavi fizike te se rezultati pokusa obično prikazuju i pomoću grafičkog prikaza, tako da smo očekivali da će riješenost ovog zadatka biti veća. Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da većina učenika ima poteškoća s prepoznavanjem veličina koje su proporcionalne u ovom primjeru, a samim time i grafičkog prikaza tih veličina. Učenike je u ovome zadatku najčešće zbunjivalo početno produljenje opruge, tj. razlika između duljine i produljenja opruge.

Zadatak 10.

Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

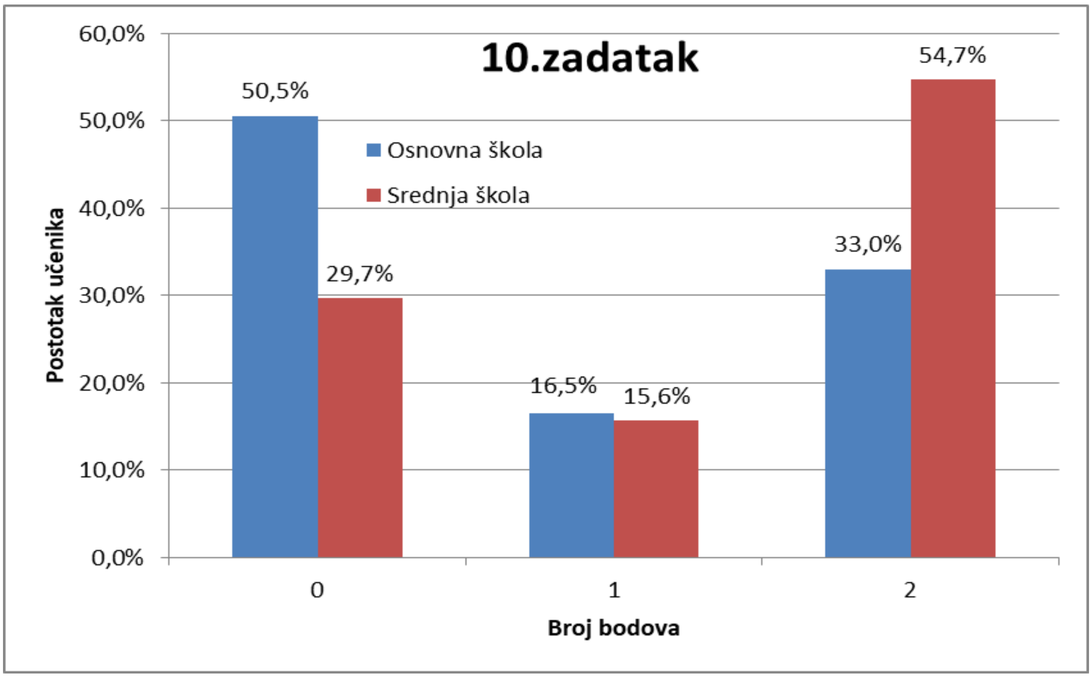
a) Koje je značenje omjera $\frac{800\ g}{200\ cm^3}$*? Obrazloži odgovor.*

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

Ovim zadatkom ispituje se učeničko tumačenje brojeva dobivenih dijeljenjem te korištenje jediničnih „paketića“, odnosno razumijevanje strategije svođenja na jedinicu.

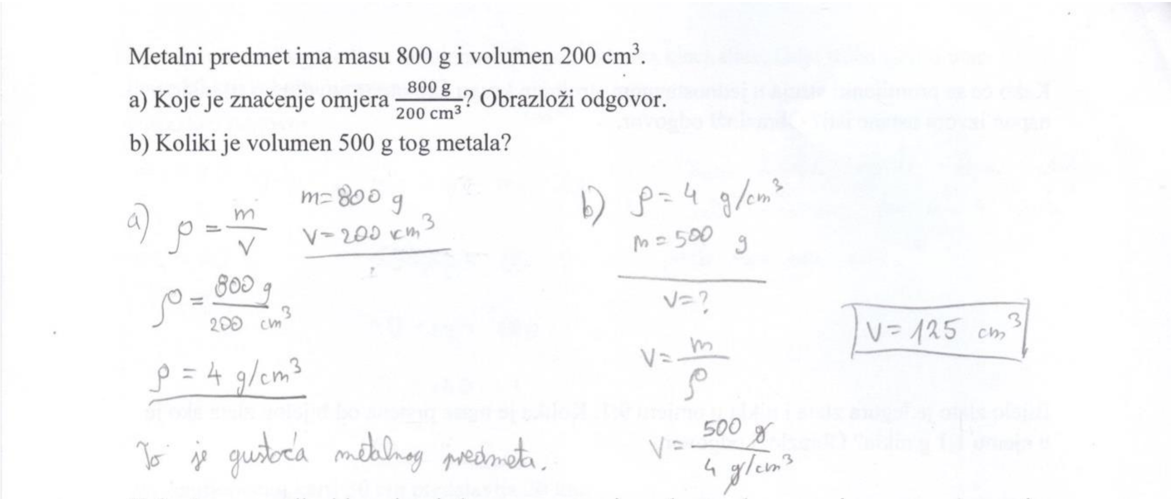
Tumačenjem brojeva dobivenih dijeljenjem, dobivamo da je značenje omjera $\frac{800g}{200cm^3}$ da 200 cm^3 metalnog predmeta ima masu 800 g, odnosno da 800 g metalnog predmeta zauzima volumen 200 cm^3. Pomoću strategije svođenja na jedinicu navedeni omjer možemo preobraziti u $\frac{800g|:8}{200cm^3|:8} = \frac{100g}{25cm^3}$. To znači da 100 g zauzima volumen od 25 cm^3. Ako želimo saznati koliki je volumen 500 g tog metala, omjer $\frac{100g}{25cm^3}$ proširimo, odnosno svaki član omjera pomnožimo, s 5. Tada dobivamo $\frac{100g|\cdot 5}{25cm^3|\cdot 5} = \frac{500g}{125cm^3}$, što znači da 500 g metalnog predmeta zauzima volumen od 125 cm^3. Ili se omjer može svesti doslovno na jedinicu, tj. zaključiti da 1 g zauzima 0.25 cm^3, onda 500 g zauzima $500 \cdot 0{,}25$ cm^3 = 125 cm^3.

Učenici osnovne škole su na ovom zadatku postigli (41 ± 45)% bodova, a učenici srednjih škola (63 ± 45)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole je statistički značajna (p = 0,003). Na Slici 3.79 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Slika 3.79 prikazuje da je 50,5% učenika osnovne škole postiglo nula bodova na zadatku, dok je 54,7% učenika srednje škole postiglo dva boda na zadatku. Kao što vidimo na Slici 3.79 i prema rezultatima t-testa, da je kod učenika srednjih škola došlo do napretka u rješavanju ovog zadatka u odnosu na učenike osnovnih škola.



Slika 3.79: *Raspodjela učenika po broju bodova u 10. zadatku*

Učenici koji su postigli, maksimalnih, dva boda na zadatku su najčešće (76,9%) koristili formulu gustoće predmeta (Slika 3.80). Učenici su prepoznali omjer mase i volumena kao gustoću tvari. Učenici su odredili kolika je gustoća, te pomoću izraza $\rho = \frac{m}{V}$, gdje je ρ gustoća tvari, m masa tvari i V volumen tvari, odredili volumen ($V = \frac{m}{\rho}$).



Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm³.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

a) $\rho = \frac{m}{V}$ $m = 800$ g, $V = 200$ cm³

$\rho = \frac{800 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3}$

$\rho = 4$ g/cm³

To je gustoća metalnog predmeta.

b) $\rho = 4$ g/cm³, $m = 500$ g, $V = ?$

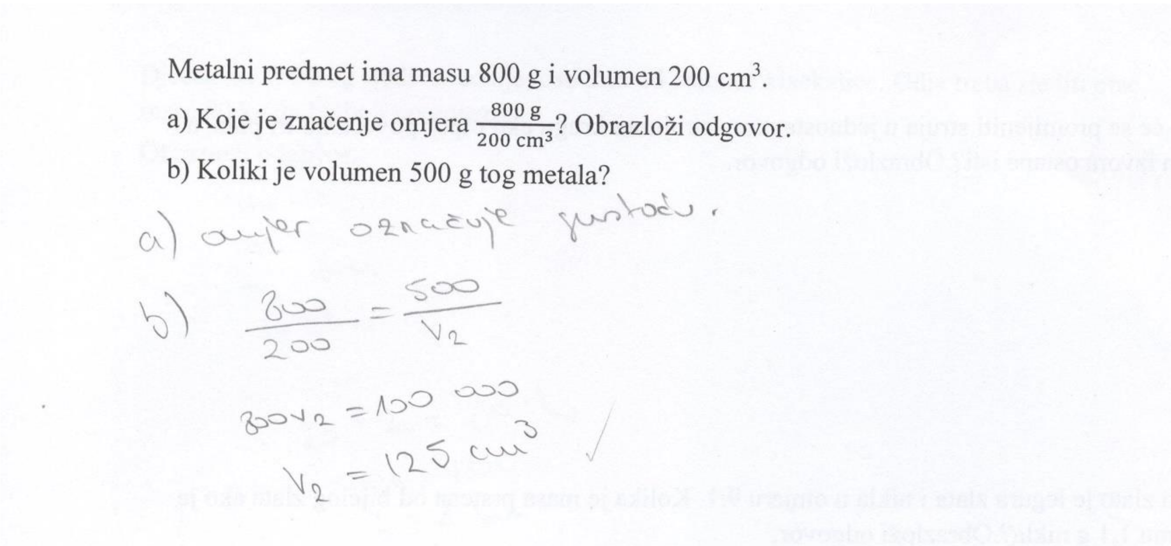
$V = \frac{m}{\rho}$

$V = \frac{500 \text{ g}}{4 \text{ g/cm}^3}$

$\boxed{V = 125 \text{ cm}^3}$

Slika 3.80: *Primjer korištenja formule za 2 boda u 10. zadatku*

9 učenika (13,8%), koji su postigli dva boda, se uz formulu, odnosno poznavanje omjera kao gustoće tvari, koristilo i strategijom razmjera (Slika 3.81).



Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm³.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

a) omjer označuje gustoću.

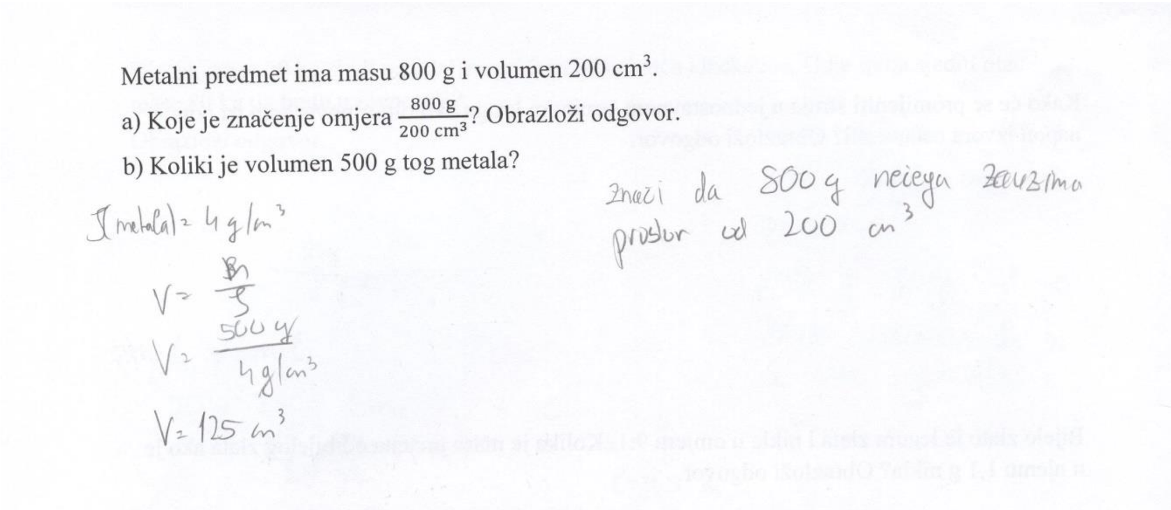
b) $\frac{800}{200} = \frac{500}{V_2}$

$800 V_2 = 100\,000$

$V_2 = 125$ cm³

Slika 3.81: *Primjer strategije razmjera za 2 boda u 11. zadatku*

5 učenika (7,7%), koji su dobili dva boda na ovom zadatku, su uz poznavanje omjera kao gustoće tvari te korištenje formule obrazložili značenje navedenog omjera (Slika 3.82).



Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800\ \mathrm{g}}{200\ \mathrm{cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

$\rho(\text{metala}) = 4\ g/cm^3$

$V = \frac{m}{\rho}$

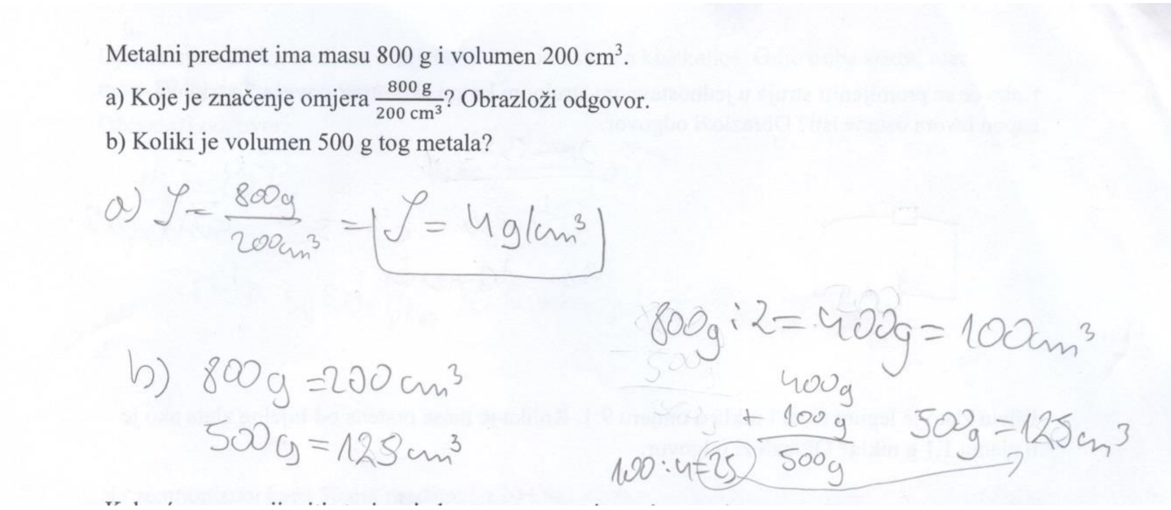
$V = \frac{500\ g}{4\ g/cm^3}$

$V = 125\ cm^3$

Znači da 800 g nečega zauzima prostor od 200 cm^3

Slika 3.82: *Primjer tumačenja brojeva dobivenih dijeljenjem za 2 boda u 10. zadatku*

Jedan učenik, koji je postigao dva boda na ovom zadatku, je uz korištenje formule gustoće tvari, koristio i strategiju jediničnih „paketića“ te je zbrajanjem nekoliko različitih „paketića“, do kojih je došao proširivanjem i kraćenjem omjera, došao do ispravnog rješenja (Slika 3.83).



Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800\ \mathrm{g}}{200\ \mathrm{cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

a) $\rho = \frac{800g}{200cm^3} = \boxed{\rho = 4g/cm^3}$

$800g : 2 = 400g = 100cm^3$

b) $800g = 200cm^3$

$500g = 125cm^3$

$400g + 100g = 500g$

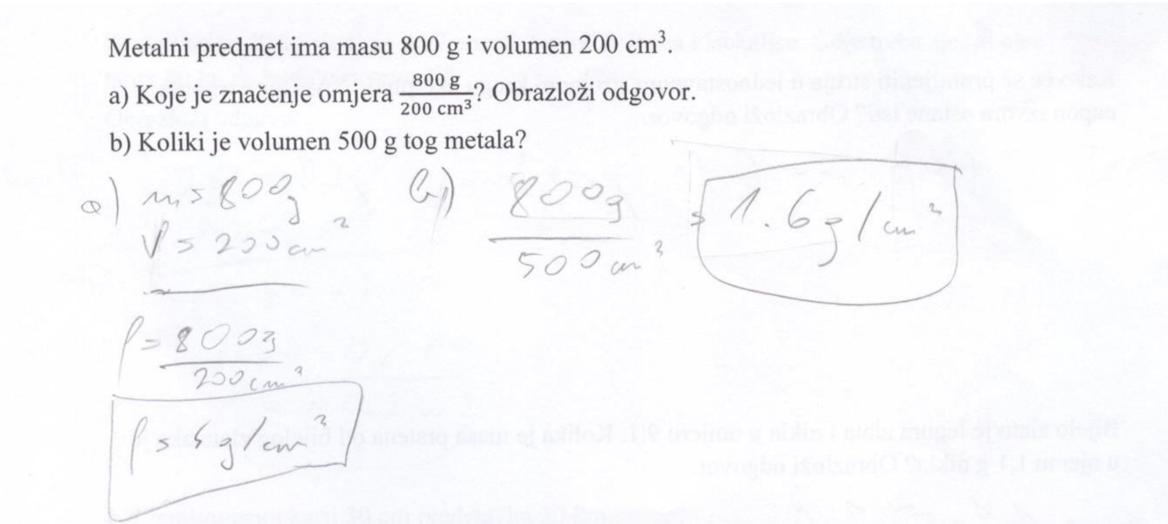
$100 : 4 = 25$

$500g = 125cm^3$

Slika 3.83: *Primjer strategije jediničnih „paketića“ za 2 boda u 10. zadatku*

Za učenike, koji su postigli 2 boda na ovome zadatku, možemo reći da vješto računski manipuliraju omjerima. Svi navedeni učenici su prepoznali navedeni omjer kao gustoću tvari. Možemo reći da su navedeni učenici sposobni izračunati kako promjena jedne veličine ovisi o promjeni druge veličine, te su sposobni izračunati vrijednosti veličina tako da omjer ostane jednak.

25 učenika je na ovome zadatku postiglo jedan bod. Učenici su postigli jedan bod ako su samo jedan dio zadatka ispravno riješili. 14 učenika (56%) je prepoznalo omjer kao gustoću tvari, ali kod računanja volumena, učenici su krivo izrazili veličinu ili su uvrstili krive podatke u omjer (Slika 3.84).


Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800\text{ g}}{200\text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

a) $m = 800\text{ g}$

$V = 200\text{ cm}^2$

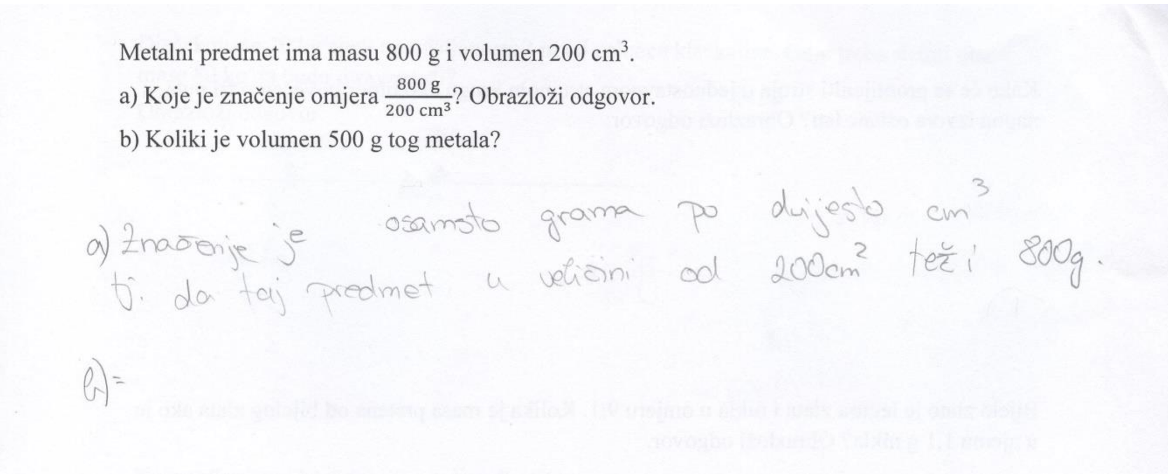
$\rho = \frac{800\text{ g}}{200\text{ cm}^3}$

$\boxed{\rho = 4\text{ g/cm}^3}$

b) $\frac{800\text{ g}}{500\text{ cm}^3} = \boxed{1.6\text{ g/cm}^2}$

Slika 3.84: *Primjer korištenja formule za 1 bod u 10. zadatku*

7 učenika (28%), koji su postigli jedan bod, su obrazložili omjer tumačenjem brojeva dobivenih dijeljenjem (Slika 3.85).


Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800\text{ g}}{200\text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

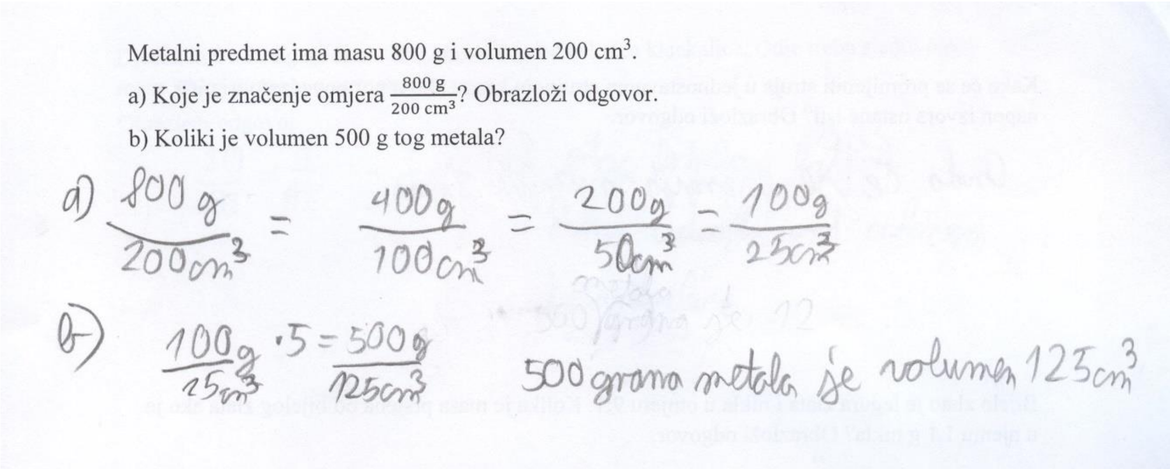
a) Značenje je osamsto grama po dvjesto cm^3 tj. da taj predmet u veličini od 200cm^2 teži 800g.

b) =

Slika 3.85: *Primjer tumačenja brojeva dobivenih dijeljenjem za 1 bod u 10. zadatku*

Dvoje učenika (8%) se koristilo strategijom razmjera u b) dijelu zadatka, ali u a) dijelu zadatka nisu ponudili ispravan odgovor i obrazloženje. Jedan učenik je ponudio točne odgovore, ali bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom se strategijom koristio te zbog toga nije kategoriziran.

Jedan učenik se koristio strategijom jediničnih „paketića“, odnosno strategijom svođenja na jedinicu (Slika 3.86). Navedeni učenik barata računskim manipulacijama omjera, ali učenik nije obrazložio značenje omjera već je omjer preobrazio u jedinični „paketić“.

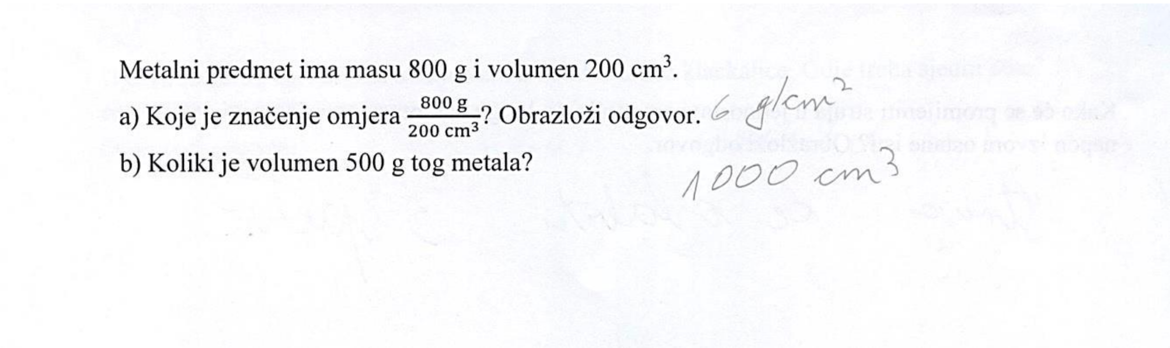

Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.
a) Koje je značenje omjera $\frac{800\text{ g}}{200\text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor.
b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

a) $\frac{800\,g}{200\,cm^3} = \frac{400\,g}{100\,cm^3} = \frac{200\,g}{50\,cm^3} = \frac{100\,g}{25\,cm^3}$

b) $\frac{100\,g}{25\,cm^3} \cdot 5 = \frac{500\,g}{125\,cm^3}$ 500 grama metala je volumen $125\,cm^3$

Slika 3.86: *Primjer strategije jediničnih „paketića“ za 1 bod u 10. zadatku*

Od 65 učenika, koji nisu postigli niti jedan bod na ovome zadatku, njih 59 (90,8%) nije ništa napisalo. Ostatak učenika nije kategoriziran jer su ponudili odgovore bez obrazloženja pa ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili (Slika 3.87).


Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.
a) Koje je značenje omjera $\frac{800\text{ g}}{200\text{ cm}^3}$? Obrazloži odgovor. $6\,g/cm^2$
b) Koliki je volumen 500 g tog metala? $1000\,cm^3$

Slika 3.87: *Primjer nekategoriziranog odgovora za 0 bodova u 10. zadatku*

U Tablici 3.11 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	korištenje formule	23	27
	razmjeri	3	6
	tumačenje brojeva dobivenih dijeljenjem	3	2
	jedinični „paketići“	1	0
	ukupno	**30**	**35**
1 bod	korištenje formule	7	7
	tumačenje brojeva dobivenih dijeljenjem	6	1
	razmjeri	0	2
	jedinični „paketići“	1	0
	nekategorizirano	1	0
	ukupno	**15**	**10**
0 boda	nekategorizirano	4	2
	ukupno	**4**	**2**

Tablica 3.11: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 10. zadatku*

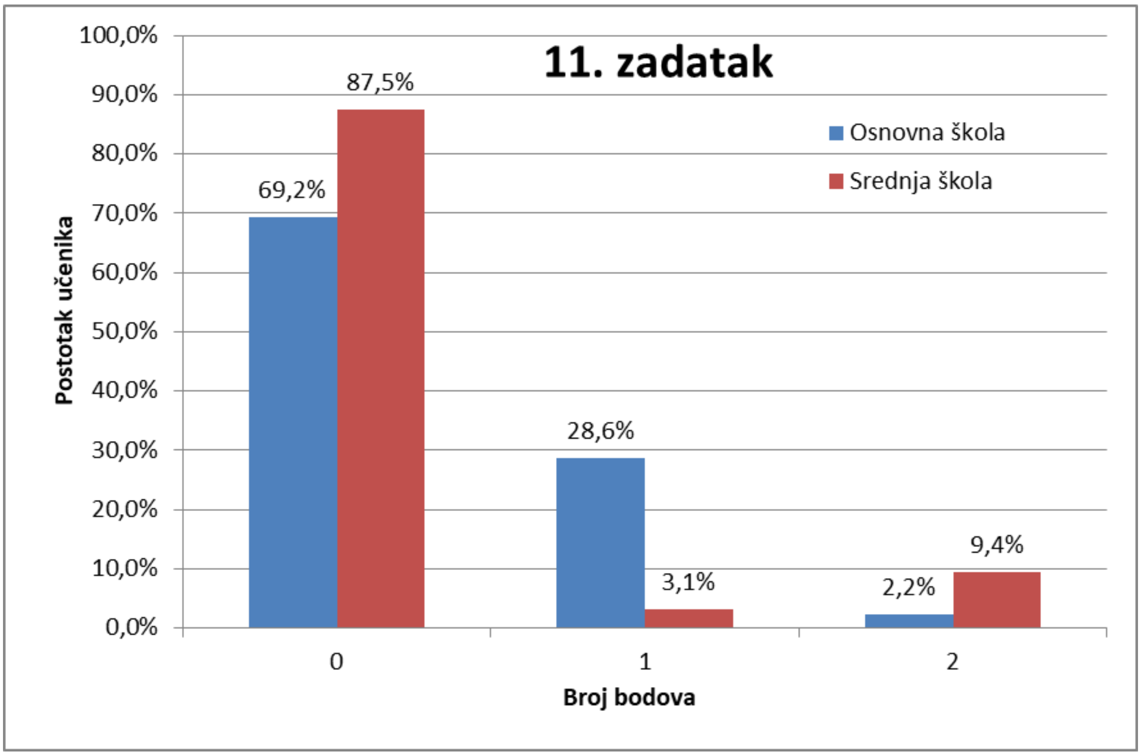
Veliki broj učenika su omjer prepoznali kao gustoću tvari te su u daljnjem računu koristili formulu gustoće tvari. Za navedene učenike možemo reći da s konkretnim brojevima mogu računati i zaključivati, ali još nisu dosegli fazu proporcionalnog rasuđivanja u kojoj bi mogli apstraktnije misliti i zaključivati o vrijednostima veličina pomoću funkcionalne ovisnosti.

Zadatak 11.

Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

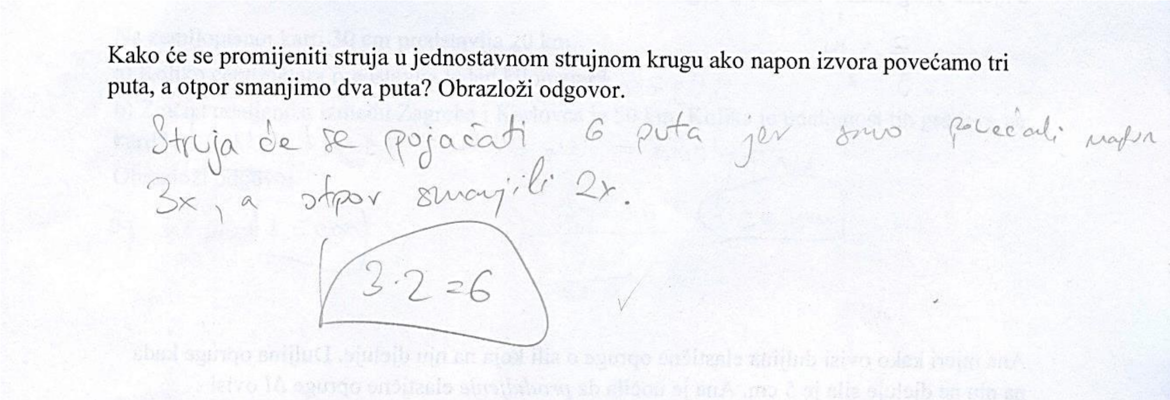
Ovim zadatkom ispituje se učeničko zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti ako se u izrazu mijenja više varijabli. U zadatku se primjenjuje Ohmov zakon. Pomoću Ohmovog zakona, $I = \frac{U}{R}$, gdje je I struja, U napon te R otpor u strujnom krugu, treba odrediti koliko će se promijeniti struja ako se promijene i napon i otpor. Struja je, prema Ohmovom zakonu, proporcionalna s naponom te obrnuto proporcionalna s otporom. Iz toga slijedi da povećanjem napona tri puta, zbog proporcionalnosti, dolazi i do povećanja struje tri puta. Isto tako, smanjenjem otpora dva puta, zbog obrnute proporcionalnosti, dolazi do povećanja struje dva puta. Kako se u ovom primjeru, mijenjaju obje varijable, iznos struje nakon promjene će biti jednak $I_{novo} = \frac{3U}{\frac{R}{2}} = \frac{6U}{R} = 6\frac{U}{R} = 6I$, odnosno struja će se povećati 6 puta, tri puta zbog promjene napona i dva puta zbog promjene otpora, a $3 \cdot 2 = 6$

Učenici osnovne škole su na ovom zadatku postigli (16 ± 26)% bodova, a učenici srednje škole (11 ± 30)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,22). Na Slici 3.88 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Slika 3.88 pokazuje da je vrlo veliki dio učenika srednje škole (88%) dobio nula bodova na ovom zadatku. Kao što vidimo na Slici 3.88 i prema rezultatima t-testa, nije došlo do napretka učenika srednje škole u odnosu na učenike osnovnih škola.



Slika 3.88: *Raspodjela učenika po broju bodova u 11. zadatku*

Učenici koji su postigli maksimalnih dva boda su se najčešće koristili strategijom funkcionalne ovisnosti, tj. pomoću proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti varijabli i poznavanjem Ohmovog zakona su došli do točnog rješenja (Slika 3.89). Od 8 učenika koji su postigli 2 boda, njih 5 (62,5%) se koristilo navedenom strategijom.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

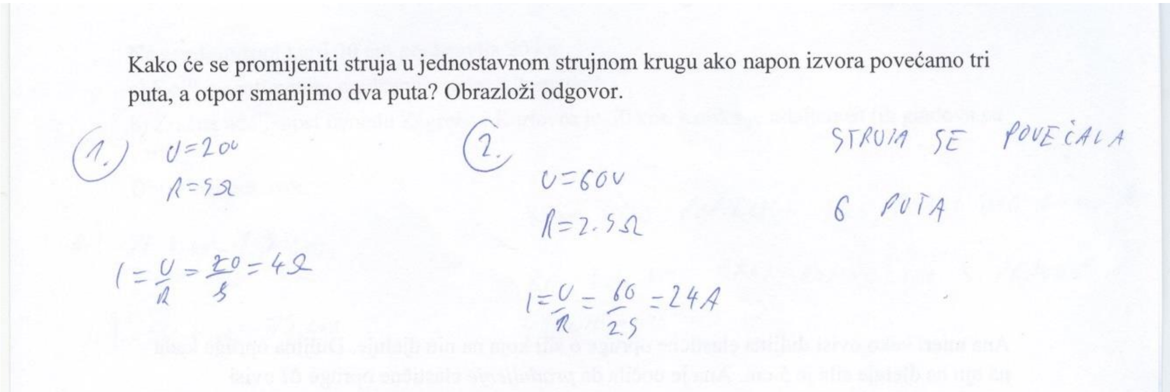
Struja će se pojačati 6 puta jer smo povećali napon 3x, a otpor smanjili 2x.

$3 \cdot 2 = 6$

Slika 3.89: *Primjer strategije funkcionalne ovisnosti za 2 boda u 11. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da su u stanju uočiti na koji način promjena jedne, a zatim i dvije veličine utječe na promjenu tražene veličine, odnosno da mogu prepoznati proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine i s lakoćom odrediti njihovu ovisnost.

Jedan učenik (12,5%) je zadatak riješio pomoću konkretnog primjera (Slika 3.90). Učenik je došao do točnog rješenja uspoređujući brojčane vrijednosti. Za navedenog učenika možemo reći da, iako je računom došao do točnog rješenja, ne barata suvereno sa svojstvima proporcionalnih i obrnuto proporcionalnih veličina i još uvijek je konkretni mislilac.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

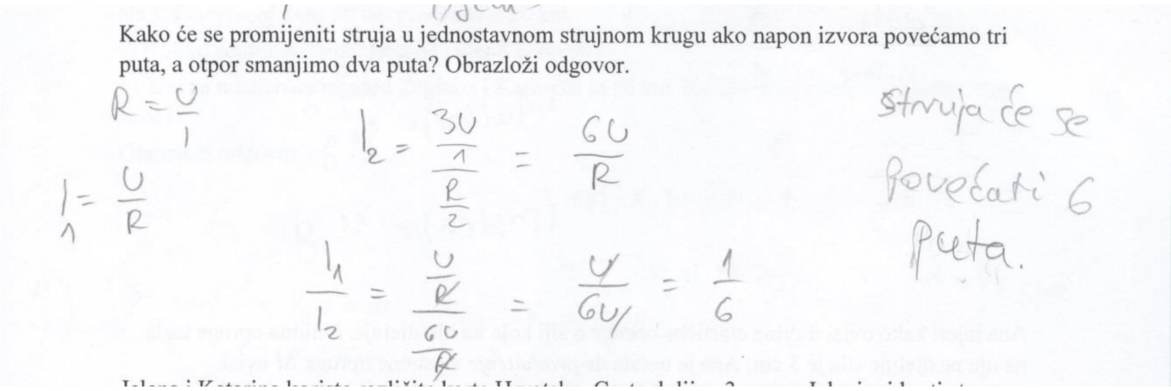
1. $U = 20V$, $R = 5\Omega$, $I = \frac{U}{R} = \frac{20}{5} = 4\Omega$

2. $U = 60V$, $R = 2.5\Omega$, $I = \frac{U}{R} = \frac{60}{2.5} = 24A$

STRUJA SE POVEĆALA 6 PUTA

Slika 3.90: *Primjer strategije korištenja konkretnog primjera za 2 boda u 11. zadatku*

Dvoje učenika (25%) je zadatak riješilo pomoću strategije određivanja vrijednosti omjera dviju struja (Slika 3.91). I za ove učenike ne možemo reći razumiju li svojstva proporcionalnih i obrnuto proporcionalnih veličina jer su do rješenja došli načinom u kojem ne primjenjuju navedena svojstva.



Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

$R = \frac{U}{I}$

$I_1 = \frac{U}{R}$

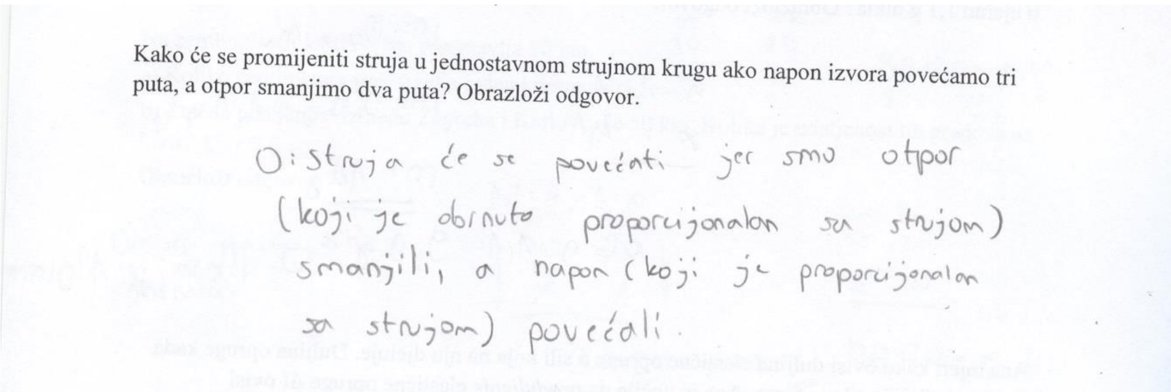
$I_2 = \frac{3U}{\frac{R}{2}} = \frac{6U}{R}$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R}}{\frac{6U}{R}} = \frac{U}{6U} = \frac{1}{6}$

Struja će se povećati 6 puta.

Slika 3.91: *Primjer strategije omjera za 2 boda u 11. zadatku*

Učenici koji su postigli jedan bod su se također koristili strategijom funkcionalne ovisnosti, ali nisu došli do točnog rješenja. 14 učenika (50,0%) je kvalitativno razmišljala te je samo napisala da se struja poveća zbog proporcionalnosti s naponom i obrnute proporcionalnosti s otporom (Slika 3.92)



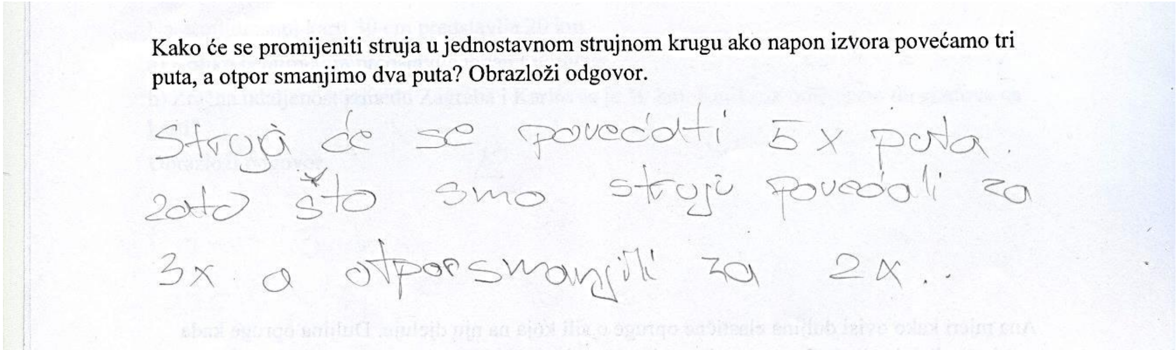
Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

O: struja će se povećati jer smo otpor (koji je obrnuto proporcijonalan sa strujom) smanjili, a napon (koji je proporcijonalan sa strujom) povećali.

Slika 3.92: *Primjer kvalitativnog razmišljanja za 1 bod u 11. zadatku*

Za navedene učenike, zbog kvalitativnog načina razmišljanja, ne možemo tvrditi da razlikuju multiplikativnu ovisnost, koja vrijedi za proporcionalne veličine, od aditivne ovisnosti veličina.

4 učenika (14,3%) se koristio aditivnom vezom umjesto multiplikativne te je zbog toga zbrojio povećanja struje uzrokovanom promjenom napona i otpora (Slika 3.93). Tom strategijom struja se povećala 5 puta (3 puta zbog proporcionalnosti s naponom i 2 puta zbog obrnute proporcionalnosti s otporom).



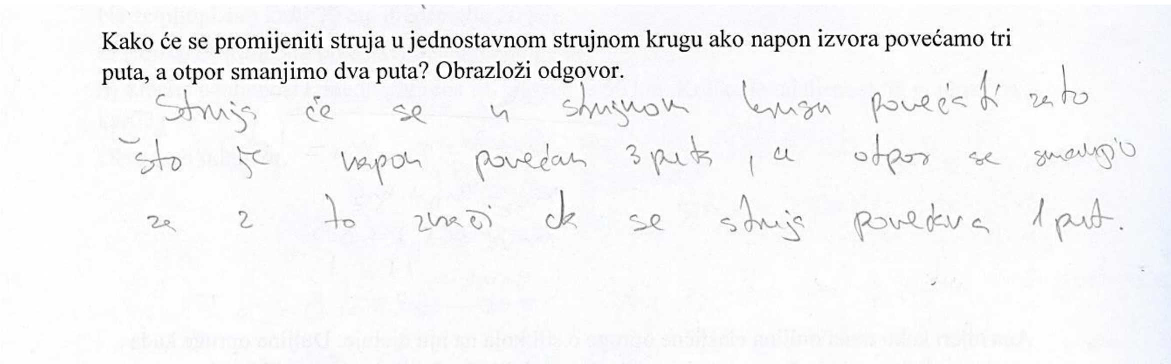
Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

Struja će se povećati 5x puta. zato što smo struji povećali za 3x a otpor smanjili za 2x..

Slika 3.93: *Primjer strategije aditivne veze za 1 bod u 11. zadatku*

10 učenika (35,7%), koji su postigli jedan bod, nisu kategorizirani. Iz njihovih odgovora se nije moglo razaznati kojom su se strategijom koristili da bi došli do rješenja. Većinom su to učenici koji su došli do zaključka da se struja poveća, ali bez obrazloženja ne možemo razaznati kojom su se strategijom koristili. Za ovu skupinu učenika ne možemo odrediti prepoznaju li proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine te koriste li se njihovim svojstvima.

Od 119 učenika koji nisu postigli niti jedan bod, njih 97 (81,5%) nije ništa napisalo u zadatku. 10 učenika (8,4%) nisu kategorizirani jer se iz njihovih odgovora nije moglo razaznati kojom se strategijom koriste. 12 učenika (10,1%) se koristilo strategijom aditivne veze pri rješavanju zadatka (Slika 3.94). Učenici su dolazili do rješenja da se struja povećava 1 put jer se napon *povećao* 3 puta, a otpor *smanjio* 2 puta te se tada navedene promjene oduzimaju. Također, učenici koji su samo napisali da se struja poveća 5 puta, bez obrazloženja, nisu postigli bodove, a za njih pretpostavljamo da su se koristili aditivnom vezom. Korištenjem ove strategije uočavamo da učenici ne razlikuju aditivnu i multiplikativnu vezu, posebice kod izraza „povećava se 1 put“.


Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.
Struja će se u strujnom krugu povećati zato što je napon povećan 3 puta, a otpor se smanjio za 2 to znači da se struja povećava 1 put.

Slika 3.94: *Primjer strategije aditivne veze za 0 bodova u 11. zadatku*

U Tablici 3.12 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	funkcionalna ovisnost	1	4
	određivanje vrijednosti omjera	1	1
	konkretni primjer	0	1
	ukupno	**2**	**6**
1 bod	kvalitativno razmišljanje, funkcionalna ovisnost	13	1
	aditivna veza	3	1
	nekategorizirano	10	0
	ukupno	**26**	**2**
0 boda	aditivna veza	7	5
	nekategorizirano	7	3
	ukupno	**14**	**8**

Tablica 3.12: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 11.zadatku*

62,6% ukupnog broja učenika nije ništa napisalo u zadatku. Jedan od razloga za to može biti nepoznavanje Ohmovog zakona, unatoč tome što se Ohmov zakon obrađuje i u

8. razredu osnovne škole i u 2. razredu srednje škole, zatim jedan od razloga može biti i nedostatak vremena, ali i izbjegavanje zadatka.

Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da učenici imaju problema s prepoznavanjem i razumijevanjem proporcionalnih i obrnuto proporcionalnih veličina i njihovim ovisnostima. Proporcionalno zaključivanje pomoću funkcionalne ovisnosti kada se mijenja više varijabli je jedna od najtežih sposobnosti vezanih za proporcionalno rasuđivanje jer uključuje korištenje mulitiplikativnih veza više varijabli. Samim time, možemo reći da učenici nisu u potpunosti usvojili multiplikativnu vezu, odnosno da nisu usvojili proporcionalno rasuđivanje, već da se neki od njih i dalje oslanjaju na aditivnu vezu i njena svojstva te je s time ovaj zadatak bio težak za učenike.

Zadatak 12.

Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena

b) Katarina

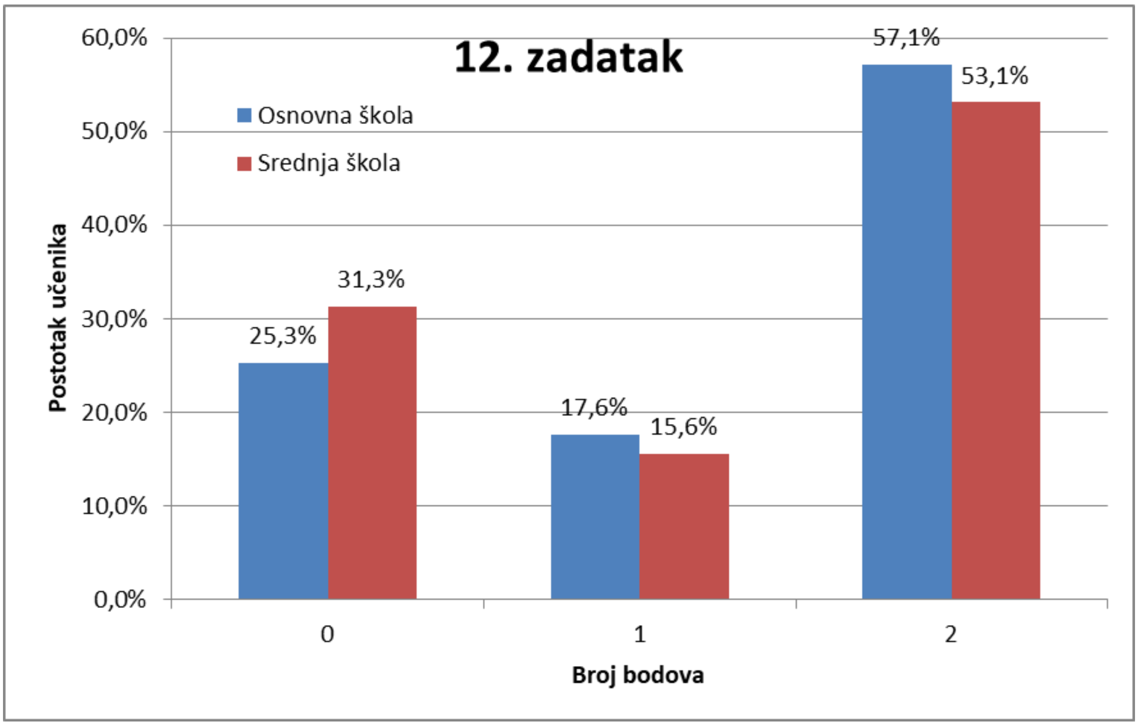
c) Obje karte su jednake veličine

d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

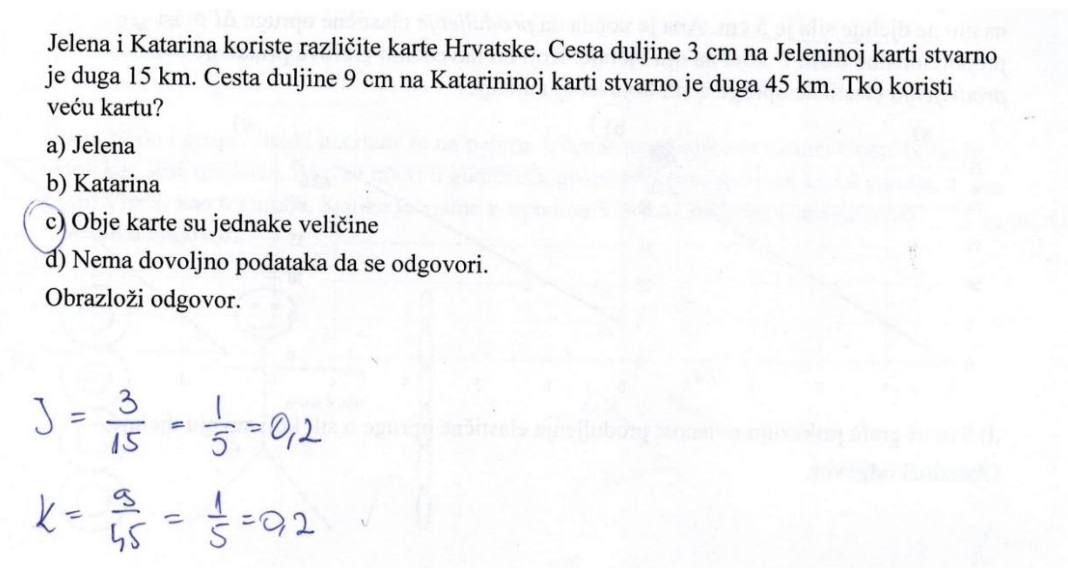
Ovim zadatkom ispituje se učenička sposobnost razumijevanja multiplikativnih ovisnosti dviju veličina, odnosno ispituje se prepoznaju li učenici vezu između različitih veličina umjesto da uspoređuju vrijednosti veličina. Zadatak se mogao riješiti korištenjem različitih strategija, ali sve strategije uključuju korištenje multiplikativne veze. Jedna od strategija je, npr., svođenje na jedinicu. Odredimo koliko kilometara predstavlja jedan centimetar u svakoj karti. Na Jeleninoj karti 1 cm predstavlja 15 km : 3 = 5 km, a na Katarininoj karti 45 km : 9 = 5 km. Dakle, na obje karte 1 cm predstavlja 5 km što znači da su obje karte jednake veličine pa je točan odgovor c).

Učenici osnovnih škola su na ovom zadatku postigli (66 ± 43)% bodova, a učenici srednjih škola (61 ± 45)% bodova. Razlika između učenika osnovne i srednje škole nije statistički značajna (p = 0,54). Na Slici 3.95 prikazana je raspodjela postotka učenika osnovne i srednje škole po bodovima. Kao što vidimo na Slici 3.95 i prema rezultatima t-testa, nije došlo do napretka učenika srednjih škola u odnosu na učenike osnovnih škola.



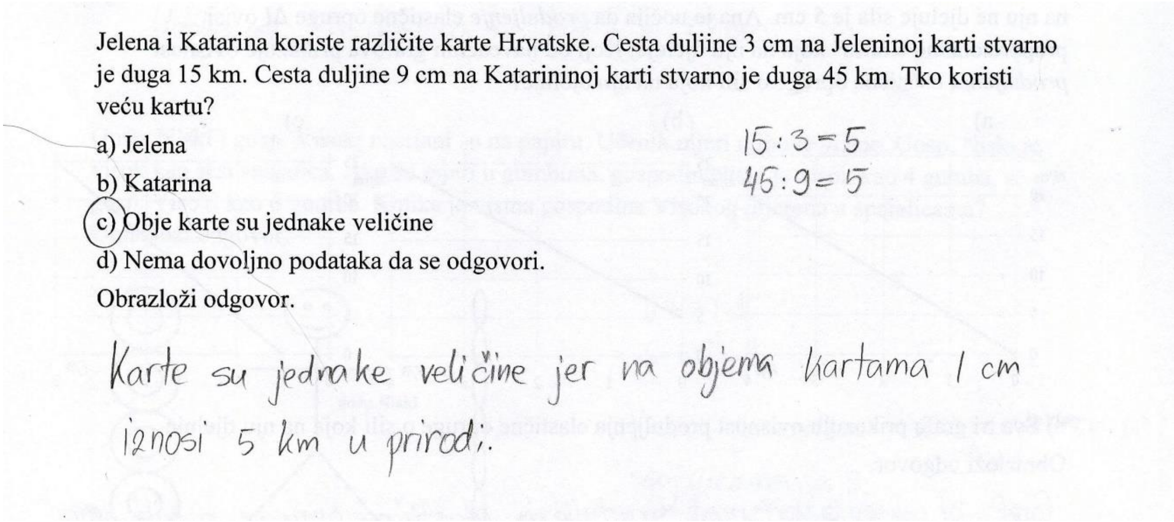
Slika 3.95: *Raspodjela učenika po broju bodova u 12 .zadatku*

Učenici koji su postigli maksimalnih dva boda su se najčešće koristili strategijom uspoređivanja vrijednosti omjera te postavljanja jednakosti omjera (Slika 3.96). Od 86 učenika koji su postigli 2 boda, njih 60 (69,7%) se koristilo navedenom strategijom.



Slika 3.96: *Primjer strategije usporedbe vrijednosti omjera za 2 boda u 12. zadatku*

25 učenika (29,1%), koji su postigli dva boda, se koristilo strategijom svođenja na jedinicu (Slika 3.97).


Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena

b) Katarina

c) Obje karte su jednake veličine

d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

15 : 3 = 5

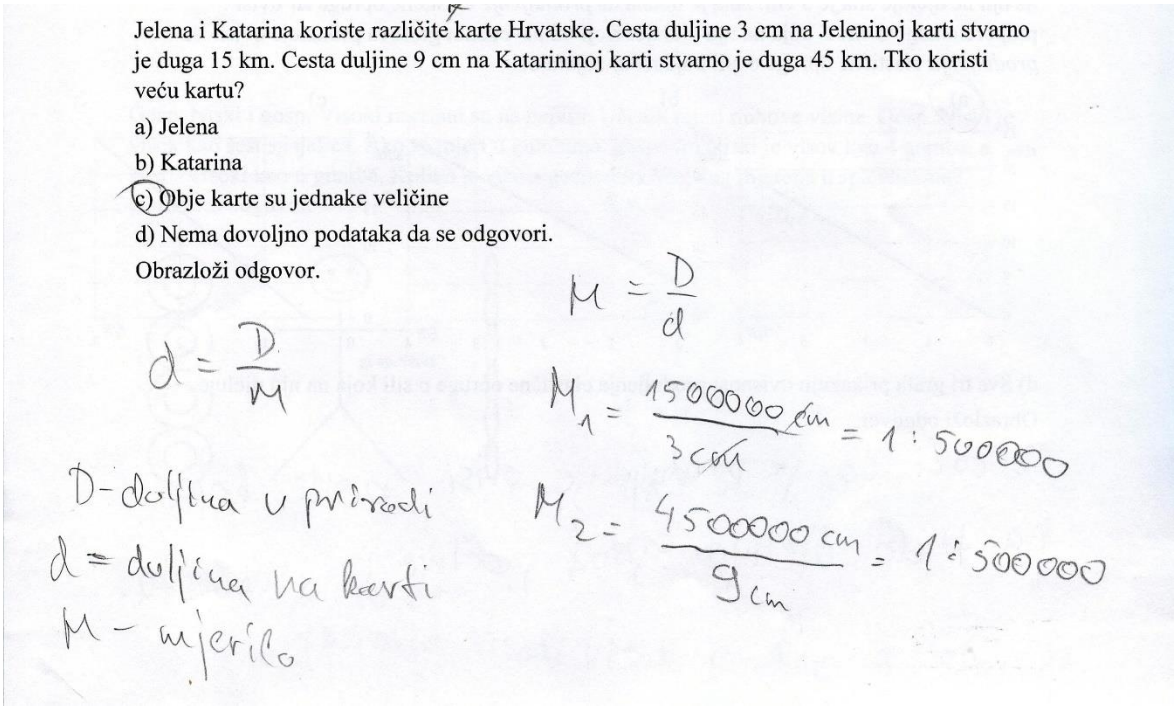
45 : 9 = 5

Karte su jednake veličine jer na objema kartama 1 cm iznosi 5 km u prirodi.

Slika 3.97: *Primjer strategije svođenja na jedinicu za 2 boda u 12. zadatku*

Za navedene učenike možemo reći da prepoznaju multiplikativne veze, odnosno proporcionalne veličine, odnosno da su učenici dostigli fazu proporcionalnog rasuđivanja u kojoj su sposobni prepoznati proporcionalne veličine u situacijama iz realnog svijeta.

Jedan učenik (1,2%), koji je postigao dva boda, je zadatak riješio pomoću formule (Slika 3.98). Za navedenog učenika možemo reći da, iako je koristeći formulu došao do točnog rješenja, ne barata suvereno sa svojstvima proporcionalnosti i još uvijek je konkretni mislilac.



Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena

b) Katarina

c) Obje karte su jednake veličine

d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

$$M = \frac{D}{d}$$

$$d = \frac{D}{M}$$

$$M_1 = \frac{1500000\ cm}{3\ cm} = 1:500000$$

D - duljina u prirodi

$$M_2 = \frac{4500000\ cm}{9\ cm} = 1:500000$$

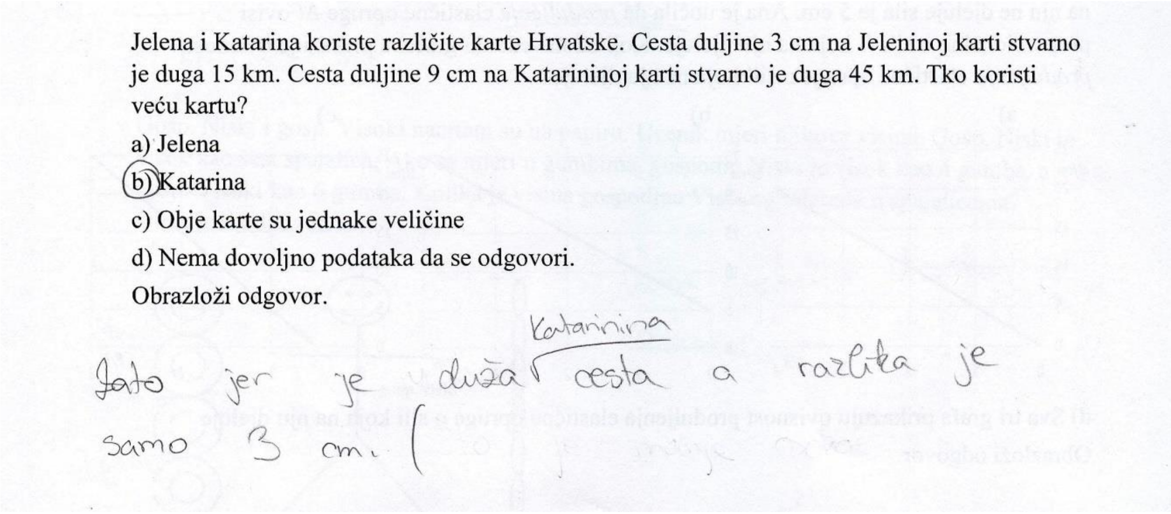
d = duljina na karti

M - mjerilo

Slika 3.98: *Primjer korištenja formule za 2 boda u 12. zadatku*

Od 26 učenika koji su postigli jedan bod na ovome zadatku, svi učenici nisu kategorizirani jer ne možemo odrediti kojom su se strategijom koristili. Učenici su zaokružili točan odgovor, ali nisu dali nikakvo obrazloženje na odabrani odgovor.

Od 43 učenika koji nisu postigli niti jedan bod na ovome zadatku, njih 25 (58,1%) nije ništa napisalo. 15 učenika (34,9%) nije kategorizirano jer su zaokružili netočan odgovor, a nisu dali obrazloženje. Dvoje učenika (4,7%) je usporedilo duljine cesta na kartama (Slika 3.99). Jedan učenik (2,3%) je odgovorio da su za odgovor potrebni podaci koliko 1 cm predstavlja kilometara (Slika 3.100) Za navedene učenike možemo reći da su još u fazi konkretnih mislilaca. Učenici nisu usvojili temelje proporcionalnosti kao što su razlikovanje ovisnosti dviju veličina umjesto uspoređivanja tih veličina.



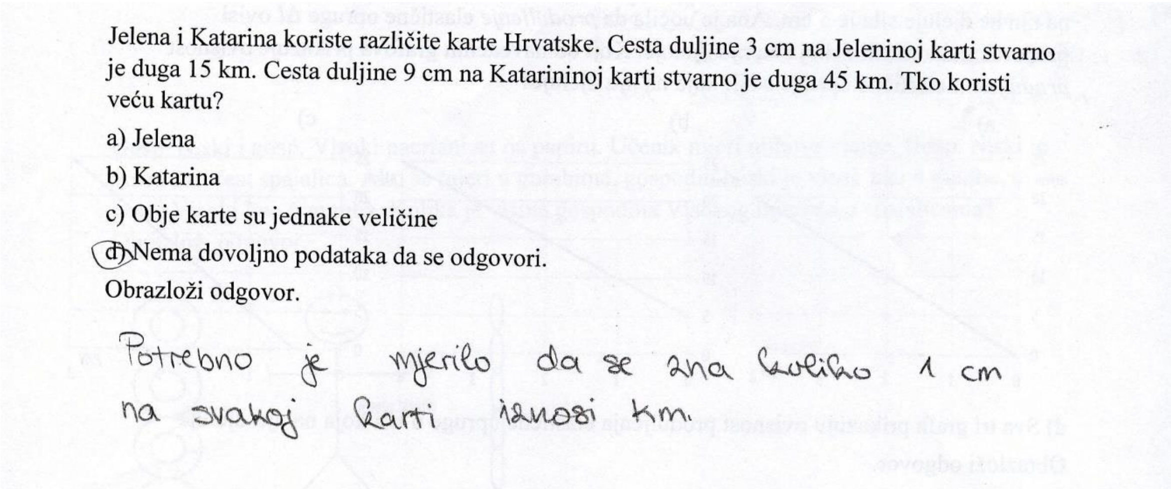
Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena
b) Katarina
c) Obje karte su jednake veličine
d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

Zato jer je duža Katarinina cesta a razlika je samo 3 cm.

Slika 3.99: *Primjer krivog učeničkog odgovora u 12. zadatku*



Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena
b) Katarina
c) Obje karte su jednake veličine
d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

Potrebno je mjerilo da se zna koliko 1 cm na svakoj karti iznosi km.

Slika 3.100: *Primjer krivog učeničkog odgovora u 12. zadatku*

U Tablici 3.13 su prikazane raspodjele učenika koji su se koristili navedenim strategijama podijeljenim po broju postignutih bodova.

	Strategija	Osnovna škola/ broj učenika	Srednja škola/ broj učenika
2 boda	uspoređivanje vrijednosti omjera	34	26
	svođenje na jedinicu	18	7
	korištenje formule	0	1
	ukupno	**52**	**34**
1 bod	nekategorizirano	16	10
	ukupno	**16**	**10**
0 boda	uspoređivanje duljina	0	2
	svođenje na jedinicu	1	0
	nekategorizirano	10	5
	ukupno	**11**	**7**

Tablica 3.13: *Raspodjela učenika po korištenim strategijama u 12. zadatku*

Iz dobivenih odgovora možemo zaključiti da veliki broj učenika (55,5%) nema problema s prepoznavanjem multiplikativne veze te njenim korištenjem. Možemo reći da ti učenici razumiju ovisnost dviju veličina koje promatramo. Učenici koji nisu postigli bodove na ovom zadatku ne prepoznaju multiplikativnu vezu među veličinama već uspoređuju vrijednosti veličina.

4 Implikacije za nastavu

Na temelju rezultata vidimo da je prosjek ostvarenih bodova na testu manji od očekivanoga. Budući da su svi zadaci bili, nastavnim gradivom, prilagođeni učenicima osnovne škole, i od učenika osnovne, a ponajviše od učenika srednje škole smo očekivali bolje rezultate. Učenici osnovnih škola su u prosjeku ostvarili 38% bodova, a učenici srednjih škola 47% bodova. Vidimo da su učenici srednjih škola pokazali napredak u odnosu na učenike osnovnih škola. Mogli bismo reći da su 13 učenika (8,4%), koji su postigli više od 16 bodova (66,7%) na testu, formalni mislioci, odnosno da su ti učenici sposobni apstraktno razmišljati, da prepoznaju proporcionalne veličine i njihove odnose te da pomoću njih modeliraju situacije iz realnog svijeta. Za učenike koji su postigli između 8 i 16 bodova (između 33,3% i 66,7%) možemo reći da se nalaze u prijelaznoj fazi između konkretnih i formalnih mislioca. Toj prijelaznoj fazi pripada 83 učenika (53,5%) učenika. To su učenici koji u nekim slučajevima prepoznaju multiplikativne veze te su im za rješavanje zadataka još uvijek potrebni konkretni primjeri. Za ostale učenike, njih 59 (38,1%), koji su postigli manje od 8 bodova (manje od 33,3%), možemo reći da su još uvijek u fazi konkretnih mislioca. U toj fazi učenici skoro nikada ne prepoznaju multiplikativnu vezu, već se učestalo koriste propisanim algoritmima rješavanja zadataka, tj. formulama te rješavaju zadatke samo pomoću konkretnih primjera.

Proporcionalno rasuđivanje započinje razumijevanjem multiplikativnih veza te njihovim razlikovanjem od aditivnih veza. Pomoću multiplikativnih veza učenici postavljaju omjere. Omjeri su odnosi dviju veličina. Jedan od ključnih koraka u razvoju proporcionalnog rasuđivanja je učenikova sposobnost razmišljanja o omjeru kao o vezi dviju veličina, a ne samo kao o dvije veličine koje uspoređujemo. Proporcionalno rasuđivanje dalje razvijamo pomoću aktivnosti koje uključuju omjere kao što su jednakost omjera ili razmjer, usporedba omjera te određivanje nepoznatog člana omjera u raznim kontekstima. Pomoću omjera i razmjera učenici dolaze do pojma proporcionalnih veličina.

Analizom rezultata testa došli smo do zaključka da učenici nemaju veliku sposobnost proporcionalnog rasuđivanja, budući da je prosječna vrijednost riješenosti testa bila ispod 50%. Vidi se da učenici poznaju različite strategije u rješavanju zadataka s proporcionalnošću (npr. strategija svođenja na jedinicu, postavljanje razmjera, uspoređivanje vrijednosti omjera) te ih koriste u nekim zadacima. Međutim, u drugim zadacima ne prepoznaju proporcionalnu ovisnost pa ni ne primjenjuju navedene strategije. Isto tako, rezultati pokazuju da učenici preferiraju korištenje formula u rješavanju zadataka. Čak i u zadacima koji nemaju propisani algoritam rješavanja, učenici su stvarali svoje formule. Iako takav način rješavanja nije loš, te su oni učenici koji su rješavali zadatke koristeći formulu dolazili do točnih rješenja, do problema je dolazilo ako se učenici nisu sjetili formule. Primjer takve poteškoće su zadaci u kojima se koristio Ohmov zakon. Do toga dolazi jer se u nastavi stavlja veliki naglasak na korištenje formula. Umjesto da učenici pamte formule bez ikakvog razumijevanja, trebalo bi uz korištenje formula, s učenicima raditi na prepoznavanju funkcionalnih ovisnosti i zaključivanja na temelju proporcionalnosti, odnosno obrnuto proporcionalnosti.

Učenicima treba pružiti mnogo prilika za rješavanje zadataka vezanih za omjere, te kasnije i proporcionalnost, u raznim kontekstima. Pomoću mnogo primjera treba potaknuti razvijanje razlikovanja proporcionalnih i neproporcionalnih veličina. Učenicima treba omogućiti mnogo primjera da ovladaju raznim metoda kao što su metoda svođenja na jedinicu, metoda koeficijenta proporcionalnosti. Kod svakog primjera treba zahtijevati da učenici navedu kakva je ovisnost veličina u primjeru. Također, od učenika treba zahtijevati ispravno korištenje terminologije, npr. izraze „ Ako se poveća jedna veličina, onda se poveća i druga veličina." treba mijenjati s „Koliko se puta promijeni jedna veličina, toliko se puta promijeni i druga veličina.". Učenike treba poticati na diskusiju o ovisnosti veličina te treba eksperimentirati s predviđanjem omjera i rezultata usporedbe vrijednosti omjera tako da učenici razvijaju kvantitativno razmišljanje te da razviju sposobnost prepoznavanja ovisnosti veličina bez konkretnog računa.

Jedna od metoda koja se često pojavljuje u udžbenicima, a koja ne potiče učenike na razmišljanje je metoda strelica kod postavljanja razmjera. Metoda strelica ne pridonosi razvoju proporcionalnog rasuđivanja. Ako učenicima na prvom susretu s proporcionalnosti prikažemo navedenu metodu, učenici će primjenjivati navedenu metodu bez ikakvog promišljanja o ovisnosti veličina koje se promatraju. Zbog toga simboličke i algoritamske metode kao što su metoda strelica i postavljanje razmjera nipošto ne treba uvoditi prije nego što učenici steknu iskustvo s konceptualnim i intuitivnim metodama. Najbolje bi bilo uopće ne uvoditi metodu strelica, ali može se uvesti nakon što se uvjerimo da učenici promišljaju o proporcionalnim veličinama te da prepoznaju ovisnosti veličina. Kod raznih problemskih zadataka, metoda strelica nije upotrebljiva te je i zbog toga bolje koristiti npr. metodu svođenja na jedinicu.

Literatura

[1] A. Watson, K. Jones, D. Pratt, *Key Ideas in teaching mathematics: research- based guidance for ages 9 – 19*, Oxford University Press, Oxford, 2013.

[2] Ontario Ministry of Education, *Paying Attention to Proportional Reasoning*, Ontario, 2012.

[3] S. McLaughlin, *Effect of Modeling Instruction on Development of Proportional Reasoning I: an empirical study of high school freshment*, Norwalk High School, Norwalk, Iowa, 2003.

Prilozi

Prilog 1. Test

Ime i prezime________________________Razred i škola___________________________

Marko i Nikola trče jednakom brzinom. Marko pretrči 4 km u 20 min. Koliko vremena treba Nikoli da pretrči 12 km? Obrazloži odgovor.

Maja i Ivan rade limunadu od limuna jednakih veličina. Maja je iscijedila dva limuna i dodala tri čaše vode, a Ivan je iscijedio tri limuna i dodao četiri čaše vode. Jesu li te limunade jednakog okusa ili je neka od njih „jačeg“ okusa?

a) Limunade su jednakog okusa.

b) Majina limunada je „jačeg“ okusa.

c) Ivanova limunada je „jačeg“ okusa.

Obrazloži odgovor.

U jednostavnom strujnom krugu otpornik je spojen s izvorom (baterijom). Kako će se promijeniti struja u tom strujnom krugu ako napon izvora smanjimo pet puta, a otpor ostane isti? Obrazloži odgovor.

Dječak mase 20 kg sjedi na udaljenosti 2 m od oslonca klackalice. Gdje treba sjediti otac mase 80 kg da budu u ravnoteži?

Obrazloži odgovor.

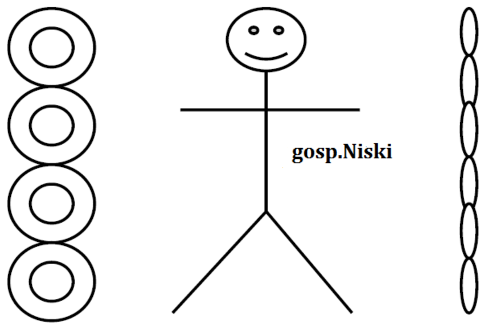
Na zemljopisnoj karti 30 cm predstavlja 20 km.

a) Koliko centimetara predstavlja jedan kilometar?

b) Zračna udaljenost između Zagreba i Karlovca je 50 km. Kolika je udaljenost tih gradova na karti?

Obrazloži odgovor.

Gosp. Niski i gosp. Visoki nacrtani su na papiru. Učenik mjeri njihove visine. Gosp. Niski je visok kao šest spajalica. Ako se mjeri u gumbima, gospodin Niski je visok kao 4 gumba, a gosp. Visoki kao 6 gumba. Kolika je visina gospodina Visokog mjerena u spajalicama? Obrazloži odgovor.

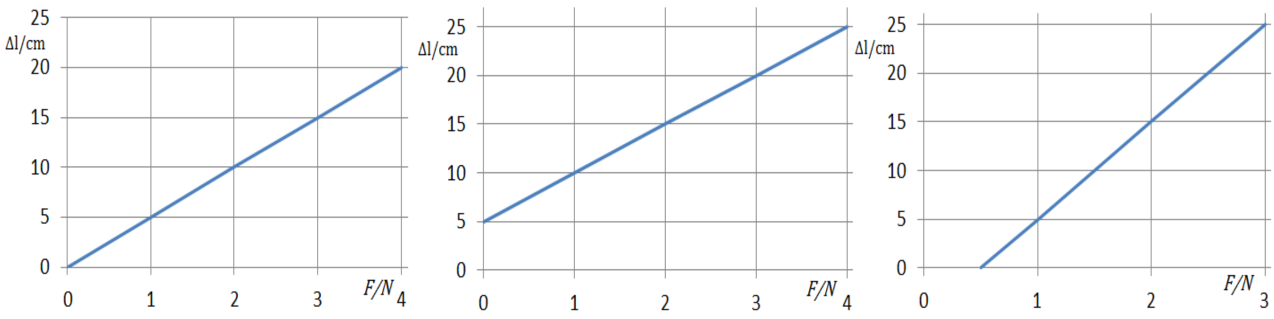


Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako otpor povećamo tri puta, a napon izvora ostane isti? Obrazloži odgovor.

Bijelo zlato je legura zlata i nikla u omjeru 9:1. Kolika je masa prstena od bijelog zlata ako je u njemu 1,1 g nikla? Obrazloži odgovor.

Ana mjeri kako ovisi duljina elastične opruge o sili koja na nju djeluje. Duljina opruge kada na nju ne djeluje sila je 5 cm. Ana je uočila da *produljenje* elastične opruge Δl ovisi proporcionalno o sili F koja na nju djeluje. Koji od navedenih grafova prikazuje ovisnost *produljenja* elastične opruge o sili koja na nju djeluje?

a) b) c)



d) Sva tri grafa prikazuju ovisnost produljenja elastične opruge o sili koja na nju djeluje

Obrazloži odgovor.

Metalni predmet ima masu 800 g i volumen 200 cm^3.

a) Koje je značenje omjera $\frac{800\ \mathrm{g}}{200\ \mathrm{cm}^3}$? Obrazloži odgovor.

b) Koliki je volumen 500 g tog metala?

Kako će se promijeniti struja u jednostavnom strujnom krugu ako napon izvora povećamo tri puta, a otpor smanjimo dva puta? Obrazloži odgovor.

Jelena i Katarina koriste različite karte Hrvatske. Cesta duljine 3 cm na Jeleninoj karti stvarno je duga 15 km. Cesta duljine 9 cm na Katarininoj karti stvarno je duga 45 km. Tko koristi veću kartu?

a) Jelena

b) Katarina

c) Obje karte su jednake veličine

d) Nema dovoljno podataka da se odgovori.

Obrazloži odgovor.

Sažetak

U ovom diplomskom radu provedeno je istraživanje o učeničkom razumijevanju proporcionalnosti. Radi potrebe istraživanja konstruiran je test koji provjerava učeničko razumijevanje proporcionalnih veličina i operacija s njima. U istraživanju je sudjelovalo 155 učenika, od čega 91 učenik osnovne škole te 64 učenika srednje škole. Zadaci su, nastavnim gradivom, prilagođeni učenicima osmog razreda osnovne škole. Učenici srednjih škola su test riješili s (47 ± 19)% bodova što je bolje od učenika osnovnih škola koji su postigli (38 ± 21)% bodova. Slabi rezultati na ovom testu ukazuju na to da većina učenika, i u osnovnoj i u srednjoj školi, nije dostigla razinu formalnih mislioca, odnosno da većina učenika ne barata multiplikativnim vezama te proporcionalnošću. Uočene su velike razlike u rezultatima kod pojedinih grupa zadataka. Zadaci u kojima se mogu koristiti formule su najbolje riješeni, npr. zadaci u kojima se spominje brzina i gustoća tvari, a zadaci koji se rješavaju zaključivanjem pomoću funkcionalne ovisnosti imaju vrlo nizak broj točnih odgovora (manje od 10%). Rezultati ovog istraživanja mogu pomoći u razumijevanju učeničkih poteškoća te boljem poučavanju proporcionalnosti u nastavi matematike i fizike.

Summary

In this diploma thesis, a research study on student understanding of proportionality was conducted. For the purpose of the research, a test on student understanding of proportional variables and related operations has been constructed. 155 students participated in the study, of which 91 participants were elementary school students, and 64 participants were high school students. The test items are adjusted for elementary school students, according their curriculum. The test score of a high school students was (47 ± 19) %, which is better than the test score of the elementary school students of (38 ± 21) %. Poor test results indicate that majority of students, in elementary and in high school, did not reach level of formal thinkers, i.e. that majority of students do not understand multiplicative relationships and proportionality. Large differences in results, for different groups of test items, were found. Test items in which students could use formulas are best solved, for example, test items referring to the velocity and density of substance. Test items in which students are supposed to use functional dependence have very low number of correct answers (less than 10%). Results of this research study can help to understand student difficulties and to lead to better teaching of the proportionality in mathematics and physics classes.

Životopis

Ivana Benković rođena je 25. lipnja 1993. godine u Karlovcu gdje je pohađala osnovnu školu Banija. 2007. godine je pozvana na državno natjecanje iz matematike, a te i sljedeće godine na državnu smotru i natjecanje hrvatskih GLOBE škola. 2008. godine upisala je prirodoslovno- matematički smjer u Gimnaziji Karlovac. 2012. godine upisala je integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij matematike i fizike, nastavničkog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.