SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Biočić

SLUČAJNE ŠETNJE NA SLUČAJNIM I NESLUČAJNIM OKOLINAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U diplomskom radu bavit ćemo se problemom jednodimenzionalne slučajne šetnje s kolačićima. U engleskoj literaturi problem se naziva *multi-excited random walk on integers* (multi-ERW) [11], ili popularnije *cookie random walk* i *brownie motion*. To je klasa slučajnih šetnji na $\mathbb{Z}$ s pomacima za jedno mjesto ulijevo ili udesno i to u slučajnim i neslučajnim okolinama takvim da se u svakoj točki slučajni šetač kreće nadesno s većom ili jednakom vjerojatnošću nego nalijevo s time da ta vjerojatnost ovisi o okolini u kojem se šetač nalazi, tj. na kojem se točno mjestu nalazi i koliko je puta tamo već bio. Cilj rada je doći do kriterija za povratnost i prolaznost šetnje i reći nešto o brzini šetnje. Rad se temelji na članku Martina Zernera [11] iz 2005. godine. Da bismo jasnije prikazali problematiku, krenut ćemo s ilustrativnim primjerom.

Primjer 0.1. *Promatramo slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$ takvu da na svakom mjestu imamo dva kolačića. Šetač kreće iz ishodišta i kad god na trenutnoj poziciji postoji barem jedan kolačić, šetač pojede točno jednog i skače nezavisno od prošlosti nadesno s vjerojatnosti p, a nalijevo s vjerojatnosti $1-p$, gdje je $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ fiksan. Ako na trenutnoj poziciji šetača više nema kolačića, onda skače nezavisno od prošlosti nadesno i nalijevo s vjerojatnosti $\frac{1}{2}$.*
Kroz rad ćemo pokazati da postoji fazni prijelaz između povratnosti i prolaznosti u ovisnosti o p. Preciznije, ako je $p \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, šetnja je povratna, tj. šetač će se gotovo sigurno vratiti u ishodište beskonačno mnogo puta. Ako je pak $p > \frac{3}{4}$, šetnja je prolazna, tj. šetač će se gotovo sigurno vratiti u ishodište samo konačno mnogo puta. Također, zaključit ćemo da je vjerojatnost da se šetač nikada ne vrati u ishodište $\left(2 - \frac{1}{2p-1}\right)_+ = \max\left\{2 - \frac{1}{2p-1}, 0\right\}$. I konačno, zaključit ćemo da je za $p < 1$ brzina šetnje 0, čak i kada je šetnja prolazna.

Ovaj primjer želimo formalizirati i generalizirati.

Definicija 0.2. *Okolina s kolačićima (ili samo okolina) je element*

$$\omega = (\omega(z))_{z\in\mathbb{Z}} = (\omega(z,i)_{i\in\mathbb{N}})_{z\in\mathbb{Z}} \in \Omega_+ := \left([1/2, 1]^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Z}}.$$

Za $\omega(z,i)$ ćemo reći da je snaga i-tog kolačića u z. To je vjerojatnost slučajnog šetača da skoči iz z u $z+1$ ako se trenutačno i-ti put nalazi u z. Neki autori zato govore o kolačićima

kao o mitu koje inače nepristranog šetača potiče na kretanje nadesno.
Definirajmo formalno *multi*-ERW. Neka je $x \in \mathbb{Z}$ i neka je $\omega \in \Omega_+$. Promatramo cjelobrojni slučajni proces $(X_n)_{n\geq 0}$ na nekom prikladnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P_{x,\omega})$ i slučajni proces njegove povijesti $(H_n)_{n\geq 0}$ definiran s $H_n := (X_m)_{0\leq m\leq n} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tako da vrijedi $P_{x,\omega}$-g.s.

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}(X_0 = x) &= 1, \\ P_{x,\omega}(X_{n+1} = X_n + 1|H_n) &= \omega(X_n, \#\{m \leq n|X_m = X_n\}), \\ P_{x,\omega}(X_{n+1} = X_n - 1|H_n) &= 1 - \omega(X_n, \#\{m \leq n|X_m = X_n\}). \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{Z}$ zovemo početnom pozicijom slučajne šetnje. Primijetimo da je proces povijesti $(H_n)_n$ Markovljev lanac. Naime, u izrazu

$$P_{x,\omega}(H_{n+1} = (j_m)_{m=0}^{m=n+1}|H_n = (i_m^n)_{m=0}^{m=n}, \dots, H_0 = i_0^0)$$

je uvjetna vjerojatnost dobro definirana samo u slučaju kada je $H_n = (i_m^n)_{m=0}^{m=n}$, $H_{n-1} = (i_m^n)_{m=0}^{m=n-1}, \dots, H_0 = i_0^n$, za $i_0^n, \dots, i_n^n \in \mathbb{Z}$ koji su susjedni (i_1^n je susjedan i_0^n, i_2^n je susjedan i_1^n, itd.). Posebno, to znači da se povijest procesa mora podudarati što znači da je cijela informacija na koju uvjetujemo sadržana u H_n. Time smo dobili da je

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}(H_{n+1} = (j_m)_{m=0}^{m=n+1}|H_n = (i_m^n)_{m=0}^{m=n}, \dots, H_0 = i_0^0) = \\ = P_{x,\omega}(H_{n+1} = (j_m)_{m=0}^{m=n+1}|H_n = (i_m^n)_{m=0}^{m=n}). \end{aligned}$$

kad god su uvjetne vjerojatnosti dobro definirane, tj. $(H_n)_n$ je Markovljev lanac.
Naravno, sam proces $(X_n)_{n\geq 0}$ nije Markovljev lanac jer mu prijelazne vjerojatnosti ovise o prošlosti. U terminima gornjih oznaka u Primjeru 0.1 uzimamo $x = 0$ kao početnu poziciju i $\omega \in \Omega_+$ definiran s $\omega(z) = (p, p, 1/2, 1/2, 1/2, \dots)$ za svaki $z \in \mathbb{Z}$.
Ovaj model generalizira jednodimenzionalne slučajne šetnje poznate kao *excited random walk* (ERW) [2] gdje je šetač pristran samo pri prvom posjetu mjesta, tj. u terminima gornjih oznaka, ERW je šetnja s okolinom $\omega \in \Omega_+$ tako da je $\omega(z) = (p, 1/2, 1/2, 1/2, \dots)$, za svaki $z \in \mathbb{Z}$, gdje je $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ fiksan. Za takvu ćemo šetnju pokazati da je povratna ako je $p < 1$.
Generalizirani model, tj. *multi*-ERW, dopušta višu razinu "uzbuđenja" u odnosu na ERW jer snaga kolačića može varirati pri svakom posjetu. Kao što smo vidjeli u Primjeru 0.1, to nam donosi novosti pri promatranju prolaznosti i povratnosti jer nastaju kompleksniji odnosi između tih pojmova.

Ostatak diplomskog rada organiziran je u dva poglavlja. U prvom poglavlju bavimo se slučajnim šetnjama na neslučajnim (determinističkim) okolinama, tj. kada za fiksni $\omega \in \Omega_+$

promatramo ponašanje slučajne šetnje. U drugom poglavlju bavimo se slučajnim šetnjama na slučajnim okolinama, tj. uvodimo genralizaciju u odnosu na neslučajne šetnje pa je tako u ovom poglavlju i $\omega \in \Omega_+$ slučajna veličina. Na kraju drugog poglavlja donosimo i glavne rezultate o samoj šetnji iz Primjera 0.1.

Poglavlje 1

Slučajne šetnje na neslučajnim (determinističkim) okolinama

1.1 Oznake i pripremni rezultati

Prije nego što se krenemo baviti samim slučajnim šetnjama s kolačićima, navedimo prvo poznate Borel-Cantellijeve zakone 0-1 iz opće teorije vjerojatnosti i uvedimo oznake kojima ćemo se kroz poglavlje i rad koristiti.

Teorem 1.1 (Borel-Cantellijev zakon 0-1)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz događaja.*

(a) Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$, *tada je* $P(\limsup_n A_n) = 0$.

(b) Ako je $(A_n)_{\in\mathbb{N}}$ *nezavisna familija i ako je* $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$, *tada je* $P(\limsup_n A_n) = 1$.

Dokaz. Vidjeti [8, Propozicija 2.3 i Lema 4.1]. □

Teorem 1.2 (Drugi Borel-Cantellijev zakon 0-1)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija na njemu,* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, *te* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz događaja takvih da je* $A_n \in \mathcal{F}_n$. *Tada vrijedi*

$$\{\limsup_n A_n\} = \{\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = +\infty\} \quad g.s.$$

Dokaz. Vidjeti [3, Theorem 5.3.2]. □

Definicija 1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P_{x,\omega})$ *vjerojatnostni prostor i* $(X_n)_n$ *multi-ERW na njemu. Vrijeme prvog posjeta mjestu k je*

$$T_k = \min\{n \geq 0 | X_n = k\},$$

gdje po dogovoru uzimamo $\min \emptyset = +\infty$.

Lema 1.4. *Za sve* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *takve da je* $x < y < z$ *i za svaki* $\omega \in \Omega_+$ *vrijedi*

$$P_{y,\omega}(T_x < T_z) \leq \frac{z-y}{z-x}.$$

Posebno, ako pustimo $x \to -\infty$, T_z *je* $P_{y,\omega}$*-g.s. konačno.*

Dokaz. Lemu ćemo dokazati metodom sparivanja. $(X_n)_{n\geq 0}$ sparujemo s jednostavnom simetričnom slučajnom šetnjom $(Y_n)_{n\geq 0}$ koja kreće iz y tako da bude $Y_n \leq X_n$ za sve $n \geq 0$. To ćemo napraviti na sljedeći način. Neka je $(U_n)_{n\geq 0}$ niz nezavisnih uniformno distribuiranih slučajnih varijabli na $[0, 1]$. Pomoću $(U_n)_n$ definiramo šetnje $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$. Očito je $X_0 := y$ i $Y_0 := y$, a dalje nastavljamo induktivno:

$$X_{n+1} := \begin{cases} X_n + 1, & U_{n+1} < \omega(X_n, \#\{m \leq n | X_m = X_n\}) \\ X_n - 1, & U_{n+1} \geq \omega(X_n, \#\{m \leq n | X_m = X_n\}) \end{cases} \quad \text{i}$$
$$Y_{n+1} := \begin{cases} Y_n + 1, & U_{n+1} < 1/2 \\ Y_n - 1, & U_{n+1} \geq 1/2 \end{cases}.$$

Iz definicija procesa $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ slijedi da su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ cjelobrojni slučajni procesi. Također, za $x \in \mathbb{Z}$, kada god postoje sljedeće uvjetne vjerojatnosti, vrijedi

$$P_{y,\omega}(Y_{n+1} = x + 1 | Y_n = x) = P_{y,\omega}(U_{n+1} < 1/2) = 1/2 \quad \text{i}$$
$$P_{y,\omega}(Y_{n+1} = x - 1 | Y_n = x) = P_{y,\omega}(U_{n+1} \geq 1/2) = 1/2$$

pa je proces $(Y_n)_n$ zaista jednostavna simetrična slučajna šetnja.
Nadalje, za $x, x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ za koje sljedeća uvjetna vjerojatnost ima smisla imamo

$$\begin{aligned} P_{y,\omega}(X_{n+1} = x + 1 | H_n = (x_0, \ldots, x_n)) &= P_{y,\omega}(U_{n+1} < \omega(x, \#\{m \leq n | x_m = x_n\})) \\ &= \omega(x, \#\{m \leq n | x_m = x_n\}) \quad \text{i} \\ P_{y,\omega}(X_{n-1} = x + 1 | H_n = (x_0, \ldots, x_n)) &= P_{y,\omega}(U_{n+1} \geq \omega(x, \#\{m \leq n | x_m = x_n\})) \\ &= 1 - \omega(x, \#\{m \leq n | x_m = x_n\}) \end{aligned}$$

pa je $(X_n)_n$ *multi*-ERW.
Sada smo sparili šetnje $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ pomoću $(U_n)_n$ i gornji prikazi šetnji znače sljedeće: ako šetnja $(X_n)_n$ u trenutku n posjeti točku x j-ti put, tada se ona pomiče nadesno ako i

samo ako $U_{n+1} < \omega(x, j)$, a $(Y_n)_n$ se pomiče nadesno ako i samo ako je $U_{n+1} < 1/2$. Primijetimo da je $\omega(x, j) \geq 1/2$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ i za svaki $j \in \mathbb{N}$ (po definiciji od ω). Dokazujemo da je $Y_n \leq X_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito je $X_0 = Y_0$. Ako se šetnja $(Y_n)_n$ u koraku k pomakne udesno, onda je $U_k < 1/2 \leq \omega(x, j)$, za sve x i j pa se i šetnja $(X_n)_n$ u koraku k pomakne udesno. Time smo dobili da $(Y_n)_n$ ne može preskočiti $(X_n)_n$, tj. $Y_n \leq X_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ $P_{y,\omega}$-g.s. Iz toga slijedi da ako $(X_n)_n$ izađe iz intervala $\langle x, z\rangle$ u x, tada to napravi i $(Y_n)_n$, a vjerojatnost da $(Y_n)_n$ dođe u x prije nego posjeti z je

$$P_{y,\omega}(T_x^Y < T_z^Y) = \frac{z-y}{z-x}, \tag{1.1}$$

gdje je $T_x^Y = \min\{n \geq 0 | Y_n = x\}$. Iz $Y_n \leq X_n$ i (1.1) slijedi

$$P_{y,\omega}(T_x < T_z) \leq \frac{z-y}{z-x}.$$

□

Očekivani pomak šetača koji pojede kolačić snage p je $2p - 1$. Zato je ukupan otklon pohranjen u x u okolini ω

$$\delta^x := \sum_{i=1}^{\infty}(2\omega(x, i) - 1).$$

Ukupan otklon pohranjen u kolačićima koji su u točki x, a bili su pojedeni prije vremena $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ označavamo s

$$D_n^x := \sum_{i=1}^{\#\{m<n|X_m=x\}} (2\omega(x, i) - 1).$$

Također, razlikovat ćemo kolačiće na nenegativnim i negativnim mjestima pa uvodimo i oznake:

$$D_n^+ := \sum_{x\geq 0} D_n^x, \quad D_n^- := \sum_{x<0} D_n^x, \quad \text{i} \quad D_n = D_n^+ + D_n^-.$$

Primijetimo da je D_n otklon pohranjen u svim kolačićima koji su pojedeni strogo prije trenutka n i da je $D_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.5. *Neka je $\omega \in \Omega_+$ takav da je*

$$\liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i} \sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y, 1) - 1) > 0. \tag{1.2}$$

Tada za sve $x, k \in \mathbb{Z}$ takve da je $k \geq x$ vrijedi

$$E_{x,\omega}[D_{T_k}] = k - x. \tag{1.3}$$

Dokaz. Primijetimo da ukoliko vrijedi (1.2), onda je i $\liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{x}(2\omega(y,1)-1) > 0$ za bilo koji $x \in \mathbb{Z}$ jer izostavljanjem ili dodavanjem konačno mnogo indeksa u sumu ne utječe na pozitivnost limes inferiora. Naime, za pozitivne $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{x}(2\omega(y,1)-1) &= \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\left(\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) + \sum_{y=1}^{x}(2\omega(y,1)-1)\right) \\
&\geq \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) + \underbrace{\liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=1}^{x}(2\omega(y,1)-1)}_{=0} \\
&= \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) > 0.
\end{aligned}$$

Za negativne $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{x}(2\omega(y,1)-1) &= \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\left(\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) - \sum_{y=x+1}^{0}(2\omega(y,1)-1)\right) \\
&\geq \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) + \underbrace{\liminf_{i\to+\infty} -\frac{1}{i}\sum_{y=x+1}^{0}(2\omega(y,1)-1)}_{=0} \\
&= \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) > 0.
\end{aligned}$$

Zbog toga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x = 0$ pa je $k \geq 0$. Definirajmo proces $(M_n)_{n\geq 0}$ s $M_n := X_n - D_n$. Taj proces je očito integrabilan ($|X_n| \leq n$, $D_n \leq n$) i on je $P_{0,\omega}$-martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ generiranu s $(X_n)_n$. Da bismo dokazali martingalno svojstvo, treba pokazati da vrijedi $E_{0,\omega}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathcal{F}_n = \sigma(H_n)$, tj. $\mathcal{F}_n$ je generirana prebrojivom familijom događaja, dovoljno je provjeriti jednakost uvjetnih očekivanja uvjetovano na atome σ-algebre $\mathcal{F}_n$, tj. dovoljno je provjeriti da vrijedi

$$E_{0,\omega}[M_n|H_{n-1} = (i_0,\dots,i_{n-1})] = E_{0,\omega}[M_{n-1}|H_{n-1} = (i_0,\dots,i_{n-1})]$$

za sve $i_{n-1},\dots,i_0$ za koje uvjetno očekivanje ima smisla. Imamo

$$\begin{aligned}
E_{0,\omega}[X_n|H_{n-1} = (i_0,\dots,i_{n-1})] &= (i_{n-1}+1)\omega(i_{n-1},\alpha) + (i_{n-1}-1)(1-\omega(i_{n-1},\alpha)) \\
&= 2\omega(i_{n-1},\alpha) - 1 + i_{n-1}, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

gdje je $\alpha := \#\{m < n | i_m = i_{n-1}\}$. Primijetimo da je D_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva varijabla pa je

$$\begin{aligned}
E_{0,\omega}[D_n | H_{n-1} = (i_0, \dots, i_{n-1})] &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\#\{m<n | i_m = x\}} (2\omega(x,i) - 1) \\
&= \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\#\{m<n-1 | i_m = x\}} (2\omega(x,i) - 1) \right) + 2\omega(i_{n-1}, \alpha) - 1 \\
&= E_{0,\omega}[D_{n-1} | H_{n-1} = (i_0, \dots, i_{n-1})] + 2\omega(i_{n-1}, \alpha) - 1. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Budući da je $E_{0,\omega}[X_{n-1} | H_{n-1} = (i_0, \dots, i_{n-1})] = i_{n-1}$, iz (1.4) i (1.5) dobivamo da je

$$E_{0,\omega}[M_n | H_{n-1} = (i_0, \dots, i_{n-1})] = E_{0,\omega}[M_{n-1} | H_{n-1} = (i_0, \dots, i_{n-1})],$$

tj. $(M_n)_n$ je $P_{0,\omega}$-martingal. Sada ćemo na martingalu $(M_n)_n$ iskoristiti Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju za ograničeno vrijeme zaustavljanja $T_k \wedge n$ (vidi [10, Teorem 1.71]). Imamo za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 = E_{0,\omega}[M_{T_k \wedge n}] &= E_{0,\omega}[X_{T_k \wedge n}] - E_{0,\omega}[D_{T_k \wedge n}] \\
&= E_{0,\omega}[X_{T_k \wedge n}; T_k \le n] + E_{0,\omega}[X_{T_k \wedge n}; n < T_k] - E_{0,\omega}[D_{T_k \wedge n}] \\
&= kP_{0,\omega}(T_k \le n) + E_{0,\omega}[X_n; n < T_k] - E_{0,\omega}[D_{T_k \wedge n}]
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$E_{0,\omega}[D_{T_k \wedge n}] = kP_{0,\omega}(T_k \le n) + E_{0,\omega}[X_n; n < T_k]. \qquad (1.6)$$

Ako u (1.6) pustimo $n \to +\infty$, onda po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji za lijevu stranu i po Lemi 1.4 za prvi član na desnoj strani imamo

$$E_{0,\omega}[D_{T_k}] = k + \lim_{n \to +\infty} E_{0,\omega}[X_n; n < T_k], \qquad (1.7)$$

uz uvjet da limes u (1.7) postoji. Dakle, da bismo dokazali tvrdnju leme, potrebno je još samo dokazati da limes u (1.7) postoji i da vrijedi

$$\lim_{n \to +\infty} E_{0,\omega}[X_n; n < T_k] = 0. \qquad (1.8)$$

Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\min_{m \le T_k} X_m \le X_n \mathbf{1}_{\{n < T_k\}} \le k \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.} \qquad (1.9)$$

Kako je $\lim_{n \to +\infty} X_n \mathbf{1}_{\{n < T_k\}} = 0$ $P_{0,\omega}$-g.s., (1.8) će slijediti korištenjem Lebesgueovog teorema dominirane konvergencije ukoliko pokažemo da su ograde u (1.9) integrabilne u odnosu na $E_{0,\omega}$. Gornja ograda je konstanta k pa je trivijalno integrabilna. Za donju možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je nepozitivna jer je odozgo omeđena s k pa pozitivan dio te slučajne varijable neće imati utjecaja na njenu integrabilnost. Označimo s γ izraz dan u (1.2), tj.

$$\gamma := \liminf_{i\to+\infty} \frac{1}{i} \sum_{y=-i}^{0} (2\omega(y,1)-1) > 0.$$

Imamo

$$E_{0,\omega}[-\min_{m\leq T_k} X_m] \leq E_{0,\omega}[2D_{T_k}/\gamma] \tag{1.10}$$

$$+ E_{0,\omega}[-\min_{m\leq T_k} X_m; -\min_{m\leq T_k} X_m > 2D_{T_k}/\gamma] \tag{1.11}$$

Desna strana od (1.10) je konačna jer je $D_{T_k} \geq 0$ i jer (1.7) i (1.9) daju da je $E_{0,\omega}[D_{T_k}] \leq 2k$, a (1.11) je jednako

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, P_{0,\omega}(-\min_{m\leq T_k} X_m = i, i > 2D_{T_k}/\gamma). \tag{1.12}$$

Primijetimo da za $i \in \mathbb{N}$ na događaju $\{T_{-i} < T_k\}$ šetač pojede sve prve kolačiće između $-i$ i 0 prije negoli dođe do k pa je na $\{T_{-i} < T_k\}$

$$D_{T_k} \geq \sum_{y=-i}^{0} (2\omega(y,1)-1).$$

Budući da je $\{-\min_{m\leq T_k} X_m = i\} \subseteq \{T_{-i} < T_k\}$, zajedno s prethodnim slijedi da je

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(-\min_{m\leq T_k} X_m = i, i > 2D_{T_k}/\gamma) &\leq P_{0,\omega}(T_{-i} < T_k, i > 2D_{T_k}/\gamma) \\ &\leq P_{0,\omega}(T_{-i} < T_k, \frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) < \frac{\gamma}{2}) \\ &\leq \mathbf{1}_{\{\frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) < \frac{\gamma}{2}\}}. \end{aligned}$$

Sada imamo da je (1.12) manje ili jednako od

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, \mathbf{1}_{\{\frac{1}{i}\sum_{y=-i}^{0}(2\omega(y,1)-1) < \frac{\gamma}{2}\}} \tag{1.13}$$

što je konačno jer je zbog definicije od γ samo konačno mnogo indikatorskih funkcija različito od nul-funkcije. Time je dokaz završen jer smo pokazali da je $E_{0,\omega}[-\min_{m\leq T_k} X_m] <$

$+\infty$ pa možemo u (1.7) iskoristiti Lebesgueov teorem dominirane konvergencije i dobiti $E_{0,\omega}[D_{T_k}] = k$.

□

Napomena 1.6. *Pretpostavka (1.2) u gornjoj lemi ne može se odbaciti jer ako promatramo jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$, onda je $\omega(x,i) = \frac{1}{2}$, za svaki $x \in \mathbb{Z}$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je $D_{T_k} = 0$ $P_{x,\omega}$-g.s. te tvrdnja leme očito ne vrijedi.*

Napomena 1.7. *Pogledajmo što nam prethodna lema govori o Primjeru 0.1. To će nam dati ideju za dokaz o povratnosti i prolaznosti šetnje iz Primjera 0.1. Grubo govoreći, zbog toga što je otklon pohranjen u jednom kolačiću $2p-1$, (1.3) nam kaže da šetnja opisana u Primjeru 0.1 koja kreće iz 0 treba pojesti $k/(2p-1)$ kolačića prije negoli dođe do k. Usporedimo to s ukupnim brojem kolačića između 0 i $k-1$ što je $2k$. Ako je $2k < k/(2p-1)$, onda šetač treba posjetiti ponekad i kolačiće s negativne strane osi kako bi došao do potrebnog broja kolačića koje treba pojesti što onda čini šetnju povratnom. Dakle, grubo govoreći, šetnja bi bila povratna za $p < 3/4$. S druge strane, ako je $2k > k/(2p-1)$, onda si šetač ne može priuštiti prečesto vraćanje u 0 jer kada bi primjerice došao do $k-1$ i vratio se u 0, onda bi pojeo sve kolačiće između 0 i $k-1$. Tada bi ih ukupno pojeo $2k$ što bi bilo više od onoga koliko treba pojesti prije negoli dođe do k pa u slučaju $2k > k/(2p-1)$, grubo govoreći, šetnja mora biti prolazna, tj. u slučaju $p > 3/4$.*

U nastavku ćemo koristiti i sljedeće oznake:

$$R_k := \{X_n = k \quad \text{b.m.p.}\} = \limsup_{n\to+\infty}\{X_n = k\} = \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m = k\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

tj. R_k je događaj na kojem je mjesto k posjećeno beskonačno mnogo puta. Također uvodimo i nizove $(\tau_{k,m})_{m\geq 0}$ $(k \in \mathbb{Z})$ definirane s

$$\tau_{k,0} = -1 \quad i \quad \tau_{k,m+1} = \min\{n > \tau_{k,m} | X_n \geq k\}$$

koji označavaju vremena n u kojima je $X_n \geq k$. To su vremena zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ generiranu s $(X_n)_n$ i zbog Leme 1.4 su $P_{x,\omega}$-g.s. konačna za svaki $x \in \mathbb{Z}$. Naime, $T_r < +\infty$ $P_{x,\omega}$-g.s. za svaki $r \in \mathbb{Z}$ takav da je $r \geq x$.

Lema 1.8. *Neka su $x_1, x_2 \leq k$ i $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_+$ takvi da $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ za svaki $x \geq k$. Tada $(X_{\tau_{k,m}})_{m\geq 1}$ ima istu distribuciju s obzirom na vjerojatnosti P_{x_1,ω_1} i P_{x_2,ω_2}. Posebno, vrijedi i*

$$P_{x_1,\omega_1}(R_k) = P_{x_2,\omega_2}(R_k). \tag{1.14}$$

Dokaz. Potrebno je dokazati da za proizvoljne $A_i \subseteq \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$P_{x_1,\omega_1}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{X_{\tau_{k,i}} \in A_i\}\right) = P_{x_2,\omega_2}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{X_{\tau_{k,i}} \in A_i\}\right).$$

Za to je dovoljno uzeti proizvoljne $a_i \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$ i pokazati da je

$$P_{x_1,\omega_1}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{X_{\tau_{k,i}} = a_i\}\right) = P_{x_2,\omega_2}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{X_{\tau_{k,i}} = a_i\}\right)$$

jer su varijable $X_{\tau_{k,i}}$ diskretne. Po neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na padajuće događaje dovoljno je pokazati gornje za konačne presjeke, tj. da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$P_{x_1,\omega_1}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_{\tau_{k,i}} = a_i\}\right) = P_{x_2,\omega_2}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_{\tau_{k,i}} = a_i\}\right). \tag{1.15}$$

Ako su sljedeće uvjetne vjerojatnosti dobro definirane, onda vrijedi

$$\begin{aligned} P_{x_1,\omega_1}\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X_{\tau_{k,i}} = a_i\}\right) = P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,m}} =a_m|X_{\tau_{k,m-1}} = a_{m-1}, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1)\cdot \\ \cdot P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,m-1}} = a_{m-1}, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Primijetimo da su uvjetne vjerojatnosti dobro definirane samo za $a_1 = k$. Ako uvjetne vjerojatnosti nisu dobro definirane, onda tvrdnja (1.15) trivijalno vrijedi. Dakle, zbog (1.16) je dovoljno dokazati da za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,m}} = a_m|X_{\tau_{k,m-1}} = a_{m-1}, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) = \\ P_{x_2,\omega_2}(X_{\tau_{k,m}} = a_m|X_{\tau_{k,m-1}} = a_{m-1}, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) \end{aligned} \tag{1.17}$$

kad god su uvjetne vjerojatnosti definirane, a onda će induktivnom primjenom postupka kao u (1.16) slijediti (1.15) jer je po Lemi 1.4

$$P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,1}} = k) = 1 = P_{x_2,\omega_2}(X_{\tau_{k,1}} = k).$$

Računamo: ako je $a_{m-1} = k$, onda $X_{\tau_{k,m}}$ iznosi ili $k + 1$ ili k i vrijedi

$$\begin{aligned} P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,m}} = k + 1|X_{\tau_{k,m-1}} = k, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) = \omega_1(k, \#\{n < m|a_n = k\}) \\ P_{x_2,\omega_2}(X_{\tau_{k,m}} = k + 1|X_{\tau_{k,m-1}} = k, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) = \omega_2(k, \#\{n < m|a_n = k\}) \\ P_{x_1,\omega_1}(X_{\tau_{k,m}} = k|X_{\tau_{k,m-1}} = k, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) = 1 - \omega_1(k, \#\{n < m|a_n = k\}) \\ P_{x_2,\omega_2}(X_{\tau_{k,m}} = k|X_{\tau_{k,m-1}} = k, ..., X_{\tau_{k,1}} = a_1) = 1 - \omega_2(k, \#\{n < m|a_n = k\}). \end{aligned}$$

Po pretpostavci je $\omega_1(x) = \omega_2(x)\ \forall x \geq k$ pa su gornje prve dvije i zadnje dvije vjerojatnosti jednake. Slično za $a_{m-1} > k$. Dakle, (1.17) vrijedi pa smo time dokazali i cijelu lemu. Posljednja tvrdnja leme vrijedi jer je R_k iz σ-algebre generirene s $(X_{\tau_{k,m}})_m$.

□

Napomena 1.9. *Suština dokaza prethodne leme leži u tome što se šetnja* $(X_{\tau_{k,m}})_{m\geq 1}$ *odvija u* $k_+ := \{l \in \mathbb{Z} | l \geq k\}$ *pa sve ono što šetnja* $(X_n)_n$ *napravi u* $k_- := \{l \in \mathbb{Z} | l < k\}$ *ne utječe na ponašanje od* $(X_{\tau_{k,m}})_{m\geq 1}$ *jer ta šetnja pamti samo što se događalo u* k_+.

Za buduće potrebe uvodimo oznaku za okolinu djelomično posjećenu šetnjom. Za $\omega \in \Omega_+$ i konačan niz cijelih brojeva $(x_n)_{0\leq n\leq m}$ definiramo okolinu $\psi(\omega, (x_n)_{0\leq n\leq m}) \in \Omega_+$ s

$$\psi(\omega, (x_n)_{0\leq n\leq m})(x, i) := \omega(x, i + \#\{n < m | x_n = x\}). \tag{1.18}$$

To je okolina dobivena iz ω tako da pratimo šetnju $(x_n)_{0\leq n<m}$ i odstranjujemo na svakom mjestu koje posjetimo gornji kolačić (pri svakom posjetu odstranjujemo trenutno gornji kolačić). Također, primijetimo da u definiciji od ψ ne odstranjujemo kolačić u posljednjem koraku m kada smo u mjestu x_m.

U dokazima ćemo često koristiti neke specifične σ-algebre i filtracije pa ćemo zato uvesti i neke oznake za njih. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P_{x,\omega})$ vjerojatnostni prostor na kojem promatramo *multi*-ERW $(X_n)_n$ i neka je $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_n$ filtracija generirana s $(X_n)_n$. Neka je T vrijeme zaustavljanja s obzirom na $\mathbb{F}$. Definiramo σ-algebru $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$ i definiramo σ-algebru generiranu vremenom zaustavljanja T s $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty | A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Napomena 1.10. *Neka su* S *i* T *vremena zaustavljanja s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_n$. *Tada vrijede sljedeća dva svojstva vezana za* σ*-algebre generirane vremenima zaustavljanja.*

(a) Ako vrijedi $S \leq T$, *onda je* $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Dokaz. Za $A \in \mathcal{F}_S$ zbog $S \leq T$ imamo

$$A \cap \{T \leq n\} \overset{S\leq T}{=} \bigcup_{l=1}^{n} \left(\underbrace{A \cap \{S \leq l\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right) \in \mathcal{F}_n$$

pa je $A \in \mathcal{F}_T$. □

(b) $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S$ *i* $\{S < T\} \in \mathcal{F}_T$.

Dokaz. $\{S < T\} \in \mathcal{F}_\infty$ jer vrijedi

$$\{S < T\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{\{S < n\}}_{\in \mathcal{F}_\infty} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_\infty} \right) \bigcup (\{S < \infty\} \cap \{T = +\infty\}) . \quad (*)$$

Kako je $\{S < \infty\} = \bigcup_{n\geq 0}\{T < n\}$ i $\{T = \infty\} = \bigcap_{n\geq 0}\{T > n\}$, svi skupovi u izrazu $(*)$ su iz $\mathcal{F}_\infty$ pa je i $\{S < T\} \in \mathcal{F}_\infty$. Nadalje,

$$\{S < T\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{l=1}^{n} \left(\underbrace{\{S < l\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T = l\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right) \in \mathcal{F}_n,$$

$$\{S < T\} \cap \{S \leq n\} = \bigcup_{l=1}^{n} \left(\underbrace{\{l < T\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S = l\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right) \in \mathcal{F}_n.$$

Dakle, $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S$ i $\{S < T\} \in \mathcal{F}_T$. □

1.2 Povratnost i prolaznost u neslučajnim (determinističkim) okolinama

U ovoj cjelini iznosimo neke rezultate o prolaznosti i povratnosti šetnje na neslučajnim, tj. determinističkim okolinama. Iskazat ćemo i jedan dovoljan uvjet za povratnost.

Lema 1.11. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da je $y < z$ i $\omega \in \Omega_+$. Tada je $R_y \subseteq R_z$ $P_{x,\omega}$-g.s.*

Dokaz. Da bismo dokazali da je $R_y \subseteq R_z$ $P_{x,\omega}$-g.s., potrebno je dokazati da vrijedi

$$P_{x,\omega}(R_y \cap R_z) = P_{x,\omega}(R_y).$$

Ako je $P_{x,\omega}(R_y) = 0$, to znači da je $R_y = \emptyset$ $P_{x,\omega}$-g.s. pa onda za svaki $B \in \mathcal{F}$ vrijedi $R_y \subseteq B$ $P_{x,\omega}$-g.s., a onda posebno vrijedi i $R_y \subseteq R_z$ $P_{x,\omega}$-g.s.
Ako je $P_{x,\omega}(R_y) > 0$, dovoljno je dokazati da je

$$P_{x,\omega}(R_z | R_y) = 1.$$

Uvedimo oznaku $P_{x,\omega,R_y}(\cdot) := P_{x,\omega}(\cdot | R_y)$. Definirajmo sljedeća vremena zaustavljanja:

$$\begin{aligned} T_y^{(1)} &:= T_y, \\ T_y^{(k)} &:= \min\{n > T_y^{(k-1)} | X_n = y\}, \quad k > 1, \end{aligned}$$

uz konvenciju $\min \emptyset = +\infty$. Dakle, $T_y^{(k)}$ je vrijeme k-tog posjeta mjestu y. Primijetimo da su sva vremena $T_y^{(k)}$ P_{x,ω,R_y}-g.s. konačna. Definiramo filtraciju $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_{T_y^{(n)}})_n$, i za $n \geq 1$ promatrajmo sljedeće događaje:

$$A_{n+1} := \{\text{nakon } n\text{-tog dolaska u } y \text{ šetnja dolazi prije u } z \text{ nego što se vrati u } y\}.$$

Očito je $A_n \in \mathcal{F}_{T_y^{(n)}}$ te zbog konačnosti vremena $T_y^{(n)}$ vrijedi

$$P_{x,\omega,R_y}(A_{n+1}) \geq 2^{y-z}$$

jer šetač može uvijek izabrati direktan put od y do z s time da se kreće nadesno s vjerojatnosti barem $1/2$. Po monotonosti uvjetnog očekivanja imamo

$$P_{x,\omega,R_y}(A_{n+1}|\mathcal{F}_{T_y^{(n)}}) \geq 2^{y-z} \quad P_{x,\omega,R_y} - g.s.$$

te onda vrijedi i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_{x,\omega,R_y}(A_{n+1}|F_{T_y^{(n)}}) = +\infty \quad P_{x,\omega,R_y} - g.s.$$

Drugi Borel-Cantellijev zakon (Teorem 1.2) povlači da je $P_{x,\omega,R_y}(A_n \text{ b.m.p.}) = 1$, tj.

$$1 = P_{x,\omega,R_y}(A_n \text{ b.m.p.}) = \frac{P_{x,\omega}((A_n \text{ b.m.p.}) \cap R_y)}{P_{x,\omega}(R_y)}.$$

Budući da je $(A_n \text{ b.m.p.}) \cap R_y = R_z \cap R_y$, slijedi

$$P_{x,\omega,R_y}(R_z) = \frac{P_{x,\omega}(R_z \cap R_y)}{P_{x,\omega}(R_y)} = \frac{P_{x,\omega}((A_n \text{ b.m.p.}) \cap R_y)}{P_{x,\omega}(R_y)} = 1.$$

□

Definicija 1.12. *Neka je $y \in \mathbb{Z}$ i $\omega \in \Omega_+$. Kažemo da je y ω-povratan ako je $P_{x,\omega}(R_y) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$.*
Kažemo da je y ω-prolazan ako je $P_{x,\omega}(R_y) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.13. *Neka je $\omega \in \Omega_+$ i $y \in \mathbb{Z}$. Tada je $P_{x,\omega}(R_y) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ ili je $P_{x,\omega}(R_y) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ako postoji neki $x \in \mathbb{Z}$ takav da je $P_{x,\omega}(R_y) > 0$, onda vrijedi

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad P_{k,\omega}(R_y) = 1. \tag{1.19}$$

Neka je $x \in \mathbb{Z}$ takav da je $P_{x,\omega}(R_y) > 0$. Po Lemi 1.11 za svaki $z > y$ vrijedi

$$0 < P_{x,\omega}(R_y) = P_{x,\omega}(R_y \cap R_z) \leq P_{x,\omega}((X_n, X_{n+1}) = (z, z-1) \text{ b.m.p.}). \tag{1.20}$$

Slijedi da je $\sum_i (1 - \omega(z,i)) = \infty$ za svaki $z > y$. Pretpostavimo da vrijedi suprotno, tj. $\sum_i (1 - \omega(z,i)) < \infty$. Budući da je $P_{x,\omega}(R_y) > 0$, onda je po Lemi 1.11 i $P_{x,\omega}(R_z) > 0$

pa možemo promatrati vjerojatnost uz dano R_z. Za uvjetnu vjerojatnost uvodimo oznaku kao i prije, tj. $P_{x,\omega,R_z}(\cdot) := P_{x,\omega}(\cdot|R_z)$. Na R_z su za svaki $n \in \mathbb{N}$ vremena zaustavljanja $T_z^{(n)}$ P_{x,ω,R_z}-g.s. konačna pa su onda događaji $(A_n)_{n\geq 1}$ definirani s

$$A_n := \{X_{T_z^{(n)}+1} = z-1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

dobro definirani. Imamo $P_{x,\omega,R_z}(A_n) = 1-\omega(z,n)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\sum_{n\geq 1} P_{x,\omega,R_z}(A_n) = \sum_{n\geq 1}(1-\omega(z,n)) < \infty$. Sada po prvoj tvrdnji Borel-Cantellijevog zakona (Teorem 1.1) imamo da je

$$\begin{aligned} 0 = P_{x,\omega,R_z}(\limsup_n A_n) &= \frac{P_{x,\omega}((\limsup_n A_n) \cap R_z)}{P_{x,\omega}(R_z)} \\ &= \frac{P_{x,\omega}((X_n, X_{n+1}) = (z, z-1) \ \text{b.m.p.})}{P_{x,\omega}(R_z)}. \end{aligned}$$

Dobili smo da je $P_{x,\omega}((X_n, X_{n+1}) = (z, z-1) \ \text{b.m.p.}) = 0$ što je kontradikcija s (1.20). Time smo dokazali $\sum_i (1-\omega(z,i)) = \infty$ za svaki $z > y$.

Neka je $k \in \mathbb{Z}$. Ako je $P_{k,\omega}(R_z) = 0$, onda je $P_{k,\omega}$-g.s. $R_z \subseteq R_{z-1}$ jer je $R_z = \emptyset$ $P_{k,\omega}$-g.s. Ako je $P_{k,\omega}(R_z) > 0$, onda je dobro definirana vjerojatnost uz dano R_z te je familija događaja $(A_n)_n$ nezavisna s obzirom na P_{k,ω,R_z}. Budući da je $P_{k,\omega,R_z}(A_n) = 1-\omega(z,n)$, imamo i $\sum_{n=1}^{\infty} P_{k,\omega,R_z}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\omega(z,n)) = \infty$. Po drugom dijelu Borel-Cantellijevog zakona (Teorem 1.1) slijedi

$$1 = P_{k,\omega,R_z}(A_n \ \text{b.m.p.}) = \frac{P_{k,\omega}((A_n \ \text{b.m.p.}) \cap R_z)}{P_{k,\omega}(R_z)} = \frac{P_{k,\omega}(R_z \cap R_{z-1})}{P_{k,\omega}(R_z)},$$

tj. $R_z \subseteq R_{z-1}$ $P_{k,\omega}$-g.s.

Time smo dobili da je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ i svaki $z > y$ $P_{k,\omega}$-g.s. $R_z \subseteq R_{z-1}$. Obratna inkluzija vrijedi po Lemi 1.11 pa imamo

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall z \geq y \quad R_z \overset{P_{k,\omega}}{=} R_y. \tag{1.21}$$

Nadalje, očito je da je $R_y \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$. Također je i $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n \subseteq \sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$. Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{F}_n \subseteq \sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$ jer za sve $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \in \mathcal{F}_{T_{\max\{0,\max_k(i_k)+1\}}}$ pa su svi atomi σ-algebre $\mathcal{F}_n$ u $\sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$. Time smo dokazali $\mathcal{F}_n \subseteq \sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$ pa je onda i $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n \subseteq \sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$. Zato imamo da je $R_y \in \sigma\left(\bigcup_{z\geq 0}\mathcal{F}_{T_z}\right)$.

Teorem o konvergenciji martingala primijenjen na martingal $(P_{x,\omega}(R_y|\mathcal{F}_{T_z}))_{z\geq 0}$ povlači

$$\mathbf{1}_{R_y} = \lim_{z\to+\infty} P_{x,\omega}(R_y|\mathcal{F}_{T_z}) \overset{(1.21)}{=} \lim_{z\to+\infty} P_{x,\omega}(R_z|\mathcal{F}_{T_z}) \quad P_{x,\omega} - g.s. \tag{1.22}$$

(vidi [10, Korolar 1.90]). Budući da je za sve $z > x$ vrijeme zaustavljanja T_z $P_{x,\omega}$-g.s. konačno, po jakom Markovljevom svojstvu za Markovljev lanac $(H_n)_n$ iz (1.22) imamo

$$\mathbf{1}_{R_y} = \lim_{z\to+\infty} P_{x,\omega}(R_z|H_{T_z}) = \lim_{z\to+\infty} P_{z,\psi(\omega,H_{T_z})}(R_z) \quad P_{x,\omega}\text{-g.s.}$$

Sada ćemo u dva koraka eliminirati z iz gornjeg limesa. Primijetimo sada da se okoline ω i $\psi(\omega, H_{T_z})$ podudaraju na svim mjestima većim ili jednakim od z pa je po (1.14) $\lim_z P_{z,\psi(\omega,H_{T_z})}(R_z) = \lim_z P_{z,\omega}(R_z)$, a to je po (1.21) jednako $\lim_z P_{k,\omega}(R_y) = P_{k,\omega}(R_y)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Time smo pokazali da vrijedi

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{1}_{R_y} = P_{k,\omega}(R_y) \quad P_{x,\omega}\text{-g.s.} \tag{1.23}$$

Primijenimo li (1.23) na $k = x$, dobivamo $\mathbf{1}_{R_y} = P_{x,\omega}(R_y)$ $P_{x,\omega}$-g.s., tj. $P_{x,\omega}(R_y) = 1$ jer je po pretpostavci $P_{x,\omega}(R_y) > 0$. Primijetimo da to znači

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad 1 = P_{k,\omega}(R_y) \quad P_{x,\omega}\text{-g.s.}$$

što je točno (1.19). □

Napomena 1.14. *U Definiciji 1.12 nije rečeno kako nazivamo $y \in \mathbb{Z}$ za koji je $P_{x,\omega}(R_y) \in \langle 0, 1\rangle$ za neki $x \in \mathbb{Z}$. Iz Propozicije 1.13 slijedi da taj slučaj zapravo ne postoji jer je svaki $y \in \mathbb{Z}$ ili ω-povratan ili ω-prolazan.*

Napomena 1.15. *Tehnike iz dokaza Propozicije 1.13 možemo iskoristiti kako bismo dokazali nekoliko korisnih tvrdnji za praktičnu provjeru ω-prolaznosti.*

(a) Ako je $\sum_i (1 - \omega(z, i)) < \infty$ za neki $z \in \mathbb{Z}$, onda je svaki $y \in \mathbb{Z}$ takav da je $y < z$ ω-prolazan.

Dokaz. Ako je z ω-prolazan, onda je po Lemi 1.11 i svaki $y < z$ ω-prolazan. Ako je z ω-povratan, onda za niz događaja $(A_n)_n$ kao u dokazu Propozicije 1.13 imamo da je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ zbog $\sum_i (1 - \omega(z, i)) < \infty$

$$P_{k,\omega}(A_n \text{ b.m.p.}) = 0,$$

tj. iz z ćemo otići u $z - 1$ samo konačno mnogo puta. Budući da je po pretpostavci $P_{k,\omega}(R_z) = 1$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, onda je

$$P_{k,\omega}(R_{z-1}) = P_{k,\omega}(R_{z-1} \cap R_z) = P_{k,\omega}(A_n \text{ b.m.p.}) = 0.$$

Dakle, $z - 1$ je ω-prolazan. Sada nam Lema 1.11 kaže da je i svaki y takav da je $y \leq z - 1$ ω-prolazan. □

(b) *Ako je neki $z \in \mathbb{Z}$ ω-povratan, onda je i svaki $y \in \mathbb{Z}$ takav da je $y \geq z$ ω-povratan.*

Dokaz. Za svaki $y \geq z$ imamo po Lemi 1.11

$$P_{k,\omega}(R_y) \geq P_{k,\omega}(R_z) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

□

(c) *Ako je $\sum_i (1 - \omega(z,i)) = \infty$ i ako je z ω-povratan, onda za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$P_{k,\omega}((X_n, X_{n+1}) = (z, z-1) \ \ b.m.p.) = 1,$$

tj. i $z - 1$ je ω-povratan.

Dokaz. Familija događaja $(A_n)_n$ iz Propozicije 1.13 je nezavisna pa možemo iskoristiti drugi dio Borel-Cantellijevog zakona (Teorem 1.1) kako bismo dobili $1 = P_{k,\omega}(A_n \ \text{b.m.p.}) = P_{k,\omega}((X_n, X_{n+1}) = (z, z-1) \ \text{b.m.p.})$. □

Primjer 1.16. *Neka je $x \in \mathbb{Z}$ i definirajmo $\omega \in \Omega_+$ s $\omega(y,i) = 1/2$ ako je $y \neq 0$ i $\omega(0,i) = 1 - (i+1)^{-2}$ za sve $i \geq 1$. Budući da je $\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^{-2} < +\infty$, po prethodnoj napomeni zaključujemo da su svi negativni cijeli brojevi ω-prolazni. S druge strane, nenegativni cijeli brojevi su ω-povratni jer je jednostavna simetrična slučajna šetnja povratna.*

Napomena 1.17. *Vidimo da je divergencija reda $\sum_i (1 - \omega(z,i))$ nužna za ω-povratnost od $z - 1$, ali ona nije dovoljna jer smo u prethodnom primjeru imali da je $\sum_i (1 - \omega(z,i)) = \infty$ za svaki negativni $z \in \mathbb{Z}$, a svi negativni brojevi su bili prolazni zbog prolaznosti od 0.*
Primijetimo i još jedan zanimljiv slučaj - jednostavnu nesimetričnu slučajnu šetnju. To je šetnja u kojoj se nadasno krećemo s vjerojatnošću p, a nalijevo $1 - p$, gdje je $p \neq 1/2$. U okvirima multi-ERW-a, to je šetnja s $\omega \in \Omega_+$ tako da je $\omega \equiv p$ (zbog simetrije kretanja bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je p>1/2). Za tu šetnju vrijedi $\sum_i (1 - \omega(z,i)) = \infty$ za svaki $z \in \mathbb{Z}$. Međutim, šetnja je prolazna (vidi [7, Example 1.6.1]).

Lema 1.18. *Neka je $\omega \in \Omega_+$ takav da je 0 ω-prolazna. Tada je*

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{E_{0,\omega}[D^+_{T_k}]}{K} = 1.$$

Dokaz. Po definiciji je

$$D^+_{T_k} = \sum_{x \geq 0} \sum_{i=1}^{\#\{m < T_k | X_m = x\}} (2\omega(x,i) - 1)$$

pa je $D^+_{T_k}$ funkcija od $(X_{\tau_{0,m}})_{m\geq 1}$ i $(\omega(x))_{x\geq 0}$. Nadalje, R_0 ovisi o $(X_{\tau_{0,m}})_{m\geq 1}$ i možemo pisati

$$\mathbf{1}_{R_0} = \mathbf{1}_{\{\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_{\tau_{0,m}}=0\}}=\infty\}}$$

pa je $\mathbf{1}_{R_0}$ funkcija od $(X_{\tau_{0,m}})_{m\geq 1}$. Prema Lemi 1.8 možemo promijeniti ω na negativnim mjestima bez da utječemo na ω-prolaznost od 0 i vrijednost izraza $E_{0,\omega}[D^+_{T_K}]$. Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ω zadovoljava (1.2).
Za $k \geq 1$ promotrimo moguće beskonačno vrijeme zaustavljanja

$$\sigma_k := \min\{n > T_{k-1} | X_n = 0\} \quad \text{i događaj} \quad A_k := \{\sigma_k < T_k\}$$

na kojem se šetač nakon prvog posjeta mjestu $k-1$ prije vrati u 0 nego što dođe do k. Primijetimo da je $A_k \in \mathcal{F}_{T_k}$ po Napomeni 1.10 (b).
Budući da je 0 ω-prolazna, A_k se $P_{0,\omega}$-g.s. dogodi samo konačno mnogo puta pa je zato po Teoremu 1.2

$$\sum_{k\geq 1} P_{0,\omega}(A_k | \mathcal{F}_{T_{k-1}}) < \infty \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.} \tag{1.24}$$

Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Ako u (1.24) izostavimo k-ove koji nisu u skupu $S_\varepsilon := \{k \geq 1 | Y_k > \varepsilon/k\}$, gdje je $Y_k := P_{0,\omega}(A_k|\mathcal{F}_{T_{k-1}})$, dobivamo

$$\sum_{k\in S_\varepsilon} \frac{1}{k} < \infty \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.} \tag{1.25}$$

Iz (1.25) slijedi da S_ε ima $P_{0,\omega}$-g.s. asimptotsku gustoću 0, tj.

$$r_K := card(\{1,\dots,K\} \cap S_\varepsilon)/K \to 0 \text{ kada } K \to +\infty.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\delta > 0$ takav da je $\limsup_K r_K > 2\delta$, specijalno postoji rastući niz $(K_m)_m$ takav da je $r_{K_m} > 2\delta$ i $K_{m+1} > K_m/\delta$ za svaki m. Podijelimo S_ε u međusobno disjunktne skupove:

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon,0} &:= \{k \in S_\varepsilon | k \leq K_1\}, \\ S_{\varepsilon,m} &:= \{k \in S_\varepsilon | K_m < k \leq K_{m+1}\}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Imamo

$$2\delta < r_{K_{m+1}} = \frac{card(\{1,\dots,K_{m+1}\} \cap S_\varepsilon)}{K_{m+1}} = \frac{card(\{1,\dots,K_m\} \cap S_\varepsilon) + card(S_{\varepsilon,m})}{K_{m+1}}.$$

Slijedi da je

$$2\delta K_{m+1} < card(\{1,\dots,K_m\} \cap S_\varepsilon) + card(S_{\varepsilon,m}) \leq K_m + card(S_{\varepsilon,m}).$$

Kako je $K_{m+1} > K_m/\delta$, onda je i $K_m + \delta K_{m+1} < 2\delta K_{m+1}$ te zato imamo

$$K_m + \delta K_{m+1} < 2\delta K_{m+1} \leq K_m + card(S_{\varepsilon,m}),$$

tj. $\delta K_{m+1} \leq card(S_{\varepsilon,m})$. Dobili smo da je $\sum_{S_{\varepsilon,m}} \frac{1}{k} \geq \sum_{S_{\varepsilon,m}} \frac{1}{K_{m+1}} \geq \delta$ pa sumiranjem po m dobivamo kontradikciju s (1.25). Dakle, $r_K := card(\{1, \ldots, K\} \cap S_\varepsilon)/K \to 0$ $P_{0,\omega}$-g.s. Primijetimo da je $0 \leq r_K \leq 1$ i da vrijedi $card(\{1, \ldots, K\} \cap S_\varepsilon) = \mathbf{1}_{\{Y_1 > \varepsilon/1\}} + \ldots + \mathbf{1}_{\{Y_K > \varepsilon/K\}}$. Lebesgueov teorem dominirane konvergencije povlači

$$0 = \lim_{K\to+\infty} E_{0,\omega}[r_K] = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} P_{0,\omega}(Y_k > \varepsilon/k). \tag{1.26}$$

Budući da je T_{k-1} $P_{0,\omega}$-g.s. konačno za svaki $k \geq 1$, zbog jakog Markovljevog svojstva primijenjenog na Markovljev lanac $(H_n)_n$ dobivamo

$$Y_k = P_{k-1,\psi(\omega,H_{T_{k-1}})}(A_k) \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.}$$

Ako šetnja kreće iz $k-1$, onda vrijedi $A_k = \{T_0 < T_k\}$. Zato imamo po Lemi 1.4

$$Y_k = P_{k-1,\psi(\omega,H_{T_{k-1}})}(T_0 < T_k) \leq 1/k \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.}$$

Slijedi da je

$$E_{0,\omega}[Y_k] = E_{0,\omega}[Y_k, Y_k > \varepsilon/k] + E_{0,\omega}[Y_k, Y_k \leq \varepsilon/k] \leq \frac{1}{k} P_{0,\omega}(Y_k > \varepsilon/k) + \frac{\varepsilon}{k},$$

a iz toga

$$P_{0,\omega}(Y_k > \varepsilon/k) \geq kE_{0,\omega}[Y_k] - \varepsilon.$$

Uvrštavajući posljednje u (1.26) dobivamo

$$0 \geq \limsup_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (kE_{0,\omega}[Y_k] - \varepsilon) = -\varepsilon + \limsup_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} kP_{0,\omega}(A_k),$$

gdje smo koristili

$$E_{0,\omega}[Y_k] = E_{0,\omega}[P_{0,\omega}(A_k|\mathcal{F}_{T_{k-1}})] = P_{0,\omega}(A_k).$$

Puštanjem $\varepsilon \searrow 0$ zaključujemo da je

$$0 = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} kP_{0,\omega}(A_k). \tag{1.27}$$

Uvedimo oznaku $\Delta_k^- := D_{T_k}^- - D_{T_{k-1}}^-$ za $k \geq 1$. Ona označava otklon pohranjen u kolačićima na negativnoj strani koji su bili pojedeni između vremena T_{k-1} i T_k. Očito je da je $\Delta_k^- = 0$ na A_k^c jer na A_k^c šetnja neće posjetiti negativne brojeve poslije posjeta $k-1$. Također je $A_k \in \mathcal{F}_{\sigma_k}$ po Napomeni 1.10 (b).
Zbog te dvije činjenice imamo

$$E_{0,\omega}[\Delta_k^-] = E_{0,\omega}[\Delta_k^-, A_k] = E_{0,\omega}[E_{0,\omega}[\Delta_k^- | \mathcal{F}_{\sigma_k}], A_k]. \tag{1.28}$$

Primijetimo da je

$$\Delta_k^- = D_{T_k}^- - D_{T_{k-1}}^- = \sum_{x<0}(D_{T_k}^x - D_{T_{k-1}}^x) = \sum_{x<0} \sum_{i=T_{k-1}}^{\#\{m<T_k | X_m = x\}} (2\omega(x,i) - 1).$$

σ_k je na A_k $P_{0,\omega}$-g.s. konačan pa po jakom Markovljevom svojstvu za Markovljev lanac $(H_n)_n$ i zbog definicije od Δ_k^- imamo

$$E_{0,\omega}[\Delta_k^- | \mathcal{F}_{\sigma_k}] = E_{0,\psi(\omega, H_{\sigma_k})}[D_{T_k}^-] \quad P_{0,\omega}\text{-g.s. na } A_k$$

(jer na A_k između vremena T_{k-1} i σ_k nije pojeden nijedan kolačić na negativnoj strani). Primijetimo da je $\psi(\omega, H_{\sigma_k})$ dobro definirano na A_k jer je na A_k $\sigma_k < +\infty$. Dobili smo da je (1.28) jednako

$$E_{0,\omega}[E_{0,\psi(\omega,H_{\sigma_k})}[D_{T_k}^-], A_k]. \tag{1.29}$$

Također, primijetimo da se na A_k $\psi(\omega, H_{\sigma_k})$ razlikuje od ω samo na konačno mnogo mjesta pa je (1.2) zadovoljeno. Iskoristimo Lemu 1.5 i $D_{T_k}^- \leq D_{T_k}$ kako bismo iz (1.28) i (1.29) zaključili da je

$$\begin{aligned} E_{0,\omega}[\Delta_k^-] &\overset{(1.29)}{=} E_{0,\omega}[E_{0,\psi(\omega,H_{\sigma_k})}[D_{T_k}^-], A_k] \leq E_{0,\omega}[E_{0,\psi(\omega,H_{\sigma_k})}[D_{T_k}], A_k] \overset{\text{Lema 1.5}}{=} \\ &= E_{0,\omega}[k, A_k] = kP_{0,\omega}(A_k). \end{aligned}$$

Iz prethodne relacije i relacije (1.27) uz činjenicu $E_{0,\omega}[D_{T_0}^-] = 0$ sada dobivamo

$$0 = \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} E_{0,\omega}[\Delta_{T_k}^-] = \lim_{K\to+\infty} \frac{E_{0,\omega}[D_{T_K}^-]}{K}.$$

Tvrdnja leme sada slijedi iz $E_{0,\omega}[D_{T_K}] = K$ (po Lemi 1.5) i $D_{T_K} = D_{T_K}^+ + D_{T_K}^-$. □

Sada možemo iskazati jedan relativno lako provjerljiv dovoljan uvjet za ω-povratnost.

Korolar 1.19. 0 *je* ω*-povratna ako je*

$$\liminf_{K\to+\infty} \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} \delta^x(\omega) < 1.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Leme 1.18 i $D^+_{T_K} \le \sum_{x=0}^{K-1} \delta^x(\omega)$ $P_{0,\omega}$-g.s. □

Napomena 1.20. *Vratimo se nakratko Primjeru 0.1 u kojem vrijedi* $\delta^x = 4p - 2$, *za svaki* $x \in \mathbb{Z}$. *Prethodni Korolar kaže da je šetnja iz Primjera 0.1 povratna ako je* $p < 3/4$. *Ostaje nam još samo vidjeti što vrijedi kada je* $p \ge 3/4$, *a to ćemo razlučiti u narednom poglavlju.*

Sada ćemo pokazati da je vjerojatnost da se nikad ne vratimo u početno mjesto pozitivna ukoliko je početno mjesto ω-prolazno. U nekim slučajevima ćemo tu vjerojatnost kasnije i eksplicitno izračunati.

Napomena 1.21. *Prije nego krenemo dalje, primijetimo da vrijedi*

$$P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n \neq 0) = P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0),$$

tj. vjerojatnosti da se nikad ne vratimo na početak jednake su vjerojatnostima da se šetnja odvija samo na desnoj strani početnog mjesta. Naime, ako uzmemo $(Y_n)_n$ *simetričnu slučajnu šetnju kao u dokazu Leme 1.4, onda zbog* $Y_n \le X_n$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$, *imamo da je*

$$P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n < 0) \le P_{0,\omega}(\forall n > 0 : Y_n < 0) = 0$$

jer je simetrična slučajna šetnja povratna.

Lema 1.22. *Ako je* 0 ω*-prolazna, tada je* $P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) > 0$.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja. Ako je mjesto 1 ω-prolazno i ako je mjesto 1 ω-povratno. Ako je mjesto 1 ω-povratno, onda slijedi da je $\sum_i (1 - \omega(1, i)) < \infty$ jer je 0 ω-prolazna po pretpostavci leme. Naime, u suprotnom bi bilo $\sum_i (1 - \omega(1, i)) = \infty$ pa iz Napomene 1.15(c) zaključujemo da je i 0 ω-povratna, što je kontradikcija s pretpostavkom Leme. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) &= \omega(0, 1) P_{1,\omega}(\forall n \ge 0 : (X_n = 1 \Rightarrow X_{n+1} = 2)) && (1.30)\\ &= \omega(0, 1) \prod_{i \ge 0} \omega(1, i) > 0 && (1.31) \end{aligned}$$

jer je $\sum_i (1 - \omega(1, i)) < \infty$ ako i samo ako je $\prod_i \omega(1, i) > 0$ (vidi [10, Zadatak 2.11]) pa smo dobili traženo.
Ako je mjesto 1 ω-prolazno, tada postoji $K \in \mathbb{N}$ i put $(x_n)_{n=0}^K$ po susjednim mjestima takav da je $x_0 = 0$ i $x_K = 2$ i da vrijedi

$$0 < P_{0,\omega}(H_K = (x_n)_{n=0}^K, \forall m \ge K : X_m \ge 2) \overset{(\Delta)}{=} UV,$$

gdje su

$$U := P_{0,\omega}(H_K = (x_n)_{n=0}^K) \quad \text{i} \quad V := P_{2,\psi(\omega,(x_n)_{n\le K})}(\forall n \ge 0 : X_n \ge 2)).$$

Naime, u suprotnom, tj. kada ne bi postojao $K \in \mathbb{N}$ i put $(x_n)_{n=0}^K$ kao gore, onda bi mjesto 1 bilo ω-povratno što je kontradikcija. Dakle, $U > 0$ i $V > 0$. Primijetimo da jednakost (Δ) zaista vrijedi jer smo prvo uvjetovali na događaj $\{H_K = (x_n)_{n=0}^K\}$ te potom iskoristili Markovljevo svojstvo. Sada ćemo iz puta $(x_n)_{n=0}^K$ ukloniti sve korake iz 1 u 0. Neka $n_1, \ldots, n_{k-1}$ označuju vremena $1 \leq n < K$ takva da je $x_n \geq 2$ ili $x_{n+1} \geq 2$ i stavimo $n_k := K$. Definiramo $y_0 := 0$ i $y_i := x_{n_i}$ za $i = 1, \ldots, k$. Dobili smo put po susjednim mjestima koji kreće iz 0 i završava u 2, ali je striktno pozitivan između. Imamo

$$P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) \geq P_{0,\omega}(H_k = (y_n)_{n=0}^k, \forall n \geq k : X_n \geq 2) = uv$$

gdje su u i v dobiveni analogno kao U i V, tj.

$$u := P_{0,\omega}(H_k = (y_n)_{n=0}^k) \quad \text{i} \quad v := P_{2,\psi(\omega,(y_n)_{n\leq k})}(\forall n \geq 0 : X_n \geq 2)).$$

Da bismo dokazali lemu, dovoljno je dokazati da su $u > 0$ i $v > 0$.
Budući da po konstrukciji niz $(y_n)_{n\leq k}$ posjeti svako mjesto veće ili jednako od 2 jednako puta kao i $(x_n)_{n\leq K}$, imamo da je $\psi(\omega, (y_n)_{n\leq k})(z) = \psi(\omega, (x_n)_{n\leq K})(z)$ za $z \geq 2$. Sada po Lemi 1.8 slijedi $V = v$. Budući da je $V > 0$, dobili smo da je i $v > 0$.
Primijetimo da su U i u produkti konačno mnogo faktora oblika $\omega(x, i)$ i $1 - \omega(x, i)$. Dovoljno je pokazati da nijedan od tih faktora u u nije jednak 0. Budući da je $\omega(x, i) \geq 1/2$, kritični su samo faktori oblika $1-\omega(x, i)$ i primijetimo da oni označavaju da je šetač skočio ulijevo nakon i-tog dolaska u x. Pretpostavimo da postoji faktor $1-\omega(x, i) = 0$ u u. Kako u $(y_n)_{n\leq k}$ nema skokova iz 1 u 0, onda mora biti $x \geq 2$. Međutim, za svaki $x \geq 2$ svi koraci u $(y_n)_{n\leq k}$ iz x u $x+1$ ili iz x u $x-1$ događaju se i u $(x_n)_{n\leq K}$ i to u istom redosljedu kao u $(y_n)_{n\leq k}$ pa bi onda faktor $1 - \omega(x, i)$ trebao biti i u U što je kontradikcija jer je $U > 0$. Dakle, takav faktor ne postoji pa je i $u > 0$ što daje $P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) > 0$. □

Poglavlje 2

Slučajne šetnje u slučajnim okolinama

U nastavku uvodimo poopćenje problema kojeg smo promatrali. Do sada smo fiksirali $\omega \in \Omega_+$ i $x \in \mathbb{Z}$ i promatrali smo što se događa sa slučajnom šetnjom u okviru vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P_{x,\omega})$, a u nastavku više ne promatramo šetnju za fiksan ω nego je i on slučajan. Dakle, imamo i vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$ na Ω_+ s kanonskom σ-algebrom (u smislu konstrukcije vjerojatnosti pomoću Kolmogorovljevog teorema primijenjenog na $[1/2, 1]^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$).
Ovakvu novu šetnju promatramo u okviru novih vjerojatnosnih mjera. Za svaki $x \in \mathbb{Z}$ promatramo semidirektan produkt $P_x := \mathbb{P} \times P_{x,\omega} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definiran s $P_x[\,\cdot\,] := \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\,\cdot\,)]$, gdje je $\mathbb{E}$ operator očekivanja za $\mathbb{P}$. Može se pokazati da je funkcija $\omega \mapsto P_{x,\omega}(A)$ izmjeriva za svaki $A \in \mathcal{F}$ pa je P_x dobro definirana. Intuitivno, $P_{x,\omega}(A)$ je prebrojiva suma prebrojivih umnožaka faktora $\omega(z, i)$.
Očito je da je P_x nenegativna funkcija i da vrijedi $P_x[\emptyset] = 0$ i $P_x[\Omega] = 1$. Za niz međusobno disjunktnih skupova $(A_n)_{n\geq 0}$ u $\mathcal{F}$ imamo

$$\begin{aligned} P_x\left[\bigcup_n A_n\right] &= \mathbb{E}\left[P_{x,\omega}\left(\bigcup_n A_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_n P_{x,\omega}(A_n)\right] \\ &= \sum_n \mathbb{E}[P_{x,\omega}(A_n)] = \sum_n P_x(A_n), \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili σ-aditivnost vjerojatnosne mjere $P_{x,\omega}$, a u trećoj jednakosti Beppo Levijev teorem zamjene sume i očekivanja kod pozitivnih funkcija. Time smo dokazali da je P_x σ-aditivna pa je P_x zaista vjerojatnost. Očekivanje vezano za vjerojatnost P_x označujemo prirodno s E_x.
U engleskoj literaturi često se mjera P_x naziva *annealed measure* (u prijevodu *kaljena* mjera) jer je dobivena usrednjavanjem mjere $P_{x,\omega}$ po mjeri $\mathbb{P}$ (tj. kalimo mjeru $P_{x,\omega}$ po mjeri $\mathbb{P}$).

U ovom poglavlju glavni nam je cilj ispitati povratnost i prolaznost šetnje u okvirima gornjih vjerojatnosnih mjera. Glavni rezultat poglavlja, a i diplomskog rada je Teorem 2.14 koji donosi nužne i dovoljne uvjete za povratnost šetnje. Na kraju poglavlja vraćamo se i na Primjer 0.1 gdje dokazujemo da je brzina šetnje 0 za $p < 1$. Rezultate donosimo samo za okoline $(\omega(x))_{x\geq 0}$ koje su stacionarne i ergodske po $\mathbb{P}$ s obzirom na operator jednostranog pomaka udesno na $\mathbb{Z}$. O općenitim okolinama se ne može puno reći.
Stacionarnost od $(\omega(x))_{x\geq 0}$ promatramo na sljedeći način: za svaki $x \in \mathbb{Z}$ definiramo funkciju $\theta^x : \Omega_+ \to \Omega_+$ s $(\theta^x(\omega))(z) := \omega(z + x)$, i neka je funkcija $f : \Omega_+ \to \Omega_+$ definirana s

$$(f(\omega))(x) := \begin{cases} \omega(x), & x \geq 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & x < 0. \end{cases}$$

Kažemo da je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran ako distribucija od $f(\theta^x(\omega))$ po $\mathbb{P}$ ne ovisi o $x \geq 0$.
Ova definicija stacionarnosti bit će korisna u računanju i tumačenju izraza, ali možemo primijetiti da je definicija zapravo ekvivalentna sa zahtjevom da su konačnodimenzionalne distribucije niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$ jednake.

Ergodičnost po $\mathbb{P}$ promatramo s obzirom na jednostrani pomak. To znači da za svaki izmjerivi skup A u Ω_+ (tj. skup iz kanonske sigma algebre na Ω_+) za kojeg postoji izmjeriv skup B u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ (tj. skup iz kanonske sigma algebre na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$) takav da vrijedi

$$A = \{\omega(x)_{x\geq K} \in B\}, \quad \forall K \geq 0, \tag{2.1}$$

nužno slijedi da je $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Skupove A nazivamo invarijantnima na jednostrani pomak. Analogno ćemo promatrati i ergodske nizove po bilo kojoj vjerojatnosti P. Ova definicija pomalo odudara od općenitog pojma ergodičnosti kojeg promatramo za preslikavanja koja čuvaju mjeru (vidi §7. u [3]). Kasnije ćemo vidjeti kako se ta dva različita pojma ergodičnosti povezuju uz korištenje stacionarnosti niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$.

Napomena 2.1. *Specijalan slučaj ovakve šetnje sa slučajnom okolinom je kada je $\omega(x, i)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ konstanta u i (ili $\mathbb{P}$-g.s. konstanta), tj. za sve $x \in \mathbb{Z}$ je $\omega(x, i) = \omega(x, j)$, za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Takva šetnja naziva se slučajna šetnja u slučajnoj okolini s nenegativnim otklonom (u engleskoj literaturi ime joj je Random walk in random environment ili RWRE). Generalni model za RWRE u jednoj dimenziji, koji je počeo proučavati Solomon još 1975. [9], bio bi kada bismo umjesto Ω_+ promatrali $\Omega_\pm := ([0, 1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$, tj. otklon može biti i negativan, a ostaje vrijediti da je $\omega(x, i)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ konstanta u i s time da ne trebamo imati stacionarnost ili ergodičnost okoline. Ova zamijena je značajna i dokazi koji slijede ne mogu se primijeniti na $\Omega_\pm$ čak i uz stacionarnost i ergodičnost.*

2.1 Tehnički rezultati i napomene

Prije nego što se uputimo u dokazivanje glavnih rezultata ovog poglavlja, upoznajmo se pobliže s alatima koje koristimo.

Napomena 2.2. *Primijetimo svojstva pomaka θ^x:*

$$\begin{aligned}\theta^x(\omega)(-x) &= \omega(0),\\ \theta^x(\omega)(0) &= \omega(x).\end{aligned}$$

Kao što ime govori, okolinu ω smo pomaknuli za x mjesta ulijevo, tj. ono što je bilo u $z \in \mathbb{Z}$, sada je u $z - x$. Iz svojstava slijedi da ako promatramo neki događaj $A_y \in \mathcal{F}$ koji je ovisan o nekom $y \in \mathbb{Z}$ (npr. R_y), onda je sljedeće istovjetno:

1. *Šetnja kreće iz z u okolini ω i promatramo događaj A_y.*
2. *Šetnja kreće iz $z - x$ u okolini $\theta^x(\omega)$ i promatramo događaj A_{y-x}.*

Ovo svojstvo ćemo više puta koristiti u dokazima.

Napomena 2.3. *Primijetimo da kada govorimo o stacionarnosti niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$, onda nam ponašanje od $\omega(z)$ za $z < 0$ ne utječe ni na koji način na stacionarnost. Zaista distribuciju od $f(\theta^x(\omega))$ promatramo samo za $x \geq 0$ pa vrijedi*

$$\begin{aligned}(f(\theta^x(\omega)))(y) :&= \begin{cases} \theta^x(\omega)(y), & y \geq 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & y < 0 \end{cases}\\ &= \begin{cases} \omega(x+y), & y \geq 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & y < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Dakle, na distribuciju od $f(\theta^x(\omega))$ utječu samo $\omega(x)$ za $x \geq 0$, a to znači da na negativnim mjestima možemo po volji mijenjati ω uz očuvanje stacionarnosti.

Napomena 2.4. *Pitamo se kako izračunati očekivanje slučajne varijable s obzirom na mjeru P_x. Tvrdimo da je $E_x[\,\cdot\,] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[\,\cdot\,]]$.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{F}$. Tada je

$$E_x[\mathbf{1}_A] = P_x[A] = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(A)] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[\mathbf{1}_A]]$$

pa tvrdnja vrijedi za karakteristične funkcije.
Neka je sada X nenegativna jednostavna izmjeriva funkcija. Ona se može prikazati kao

$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}$. Iz linearnosti očekivanja $\mathbb{E}$ i $E_{x,\omega}$ imamo

$$\begin{aligned} E_x[X] &= \sum_{i=1}^{n} x_i E_x[\mathbf{1}_{A_i}] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{E}[E_{x,\omega}[\mathbf{1}_{A_i}]] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_{x,\omega}[\mathbf{1}_{A_i}]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[E_{x,\omega}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}\right]\right] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X]] \end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi i za nenegativne jednostavne funkcije.
Neka je sada $X \geq 0$ i neka je $(X_n)_n$ niz nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija koje rastu prema X. Primijetimo da su po Fubinijevom teoremu $E_{x,\omega}[X_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) izmjerive funkcije na Ω_+ (vidi [8, Teorem 10.16.]) i zbog nenegativnosti od X_n vrijedi $E_{x,\omega}[X_n] \nearrow E_{x,\omega}[X]$. Zato imamo

$$\begin{aligned} E_x[X] &\overset{\text{LTMK}}{=} \lim_n E_x[X_n] = \lim_n \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X_n]] \overset{\text{LTMK}}{=} \mathbb{E}[\lim_n E_{x,\omega}[X_n]] \\ &= \mathbb{E}[E_{x,\omega}[\lim_n X_n]] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X]], \end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti također koristili Lebesgueov teorem monotone konvergencije jer i za svaki fiksni $\omega \in \Omega_+$ $X_n \nearrow X$. Dakle, tvrdnja vrijedi i za nenegativne slučajne varijable.
Neka je sada X proizvoljna slučajna varijabla. Zbog toga što su X^+ i X^- također slučajne varijable, $E_{x,\omega}[X^+]$ i $E_{x,\omega}[X^-]$ su slučajne varijable na Ω_+ pa vrijedi

$$\begin{aligned} E_x[X] &= E_x[X^+] - E_x[X^-] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X^+]] - \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X^-]] \\ &= \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X^+] - E_{x,\omega}[X^-]] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X^+ - X^-]] = \mathbb{E}[E_{x,\omega}[X]]. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju napomene. □

Teorem 2.5. *Neka je $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ izmjeriva. Ako je niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\geq 0}$ stacionaran (ergodski), tada je i niz $(Y_k)_{k\geq 0}$ definiran s $Y_k := g(X_k, X_{k+1,\ldots})$ stacionaran (ergodski).*

Dokaz. Pogledati [3, Theorem 7.1.1 i Theorem 7.1.3]. □

Teorem 2.6. *Neka je Y slučajna varijabla na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je niz varijabli $(Y)_{n\geq 0}$ ergodski s obzirom na jednostrani pomak, tada je Y konstanta $\mathbb{P}$-g.s.*

Dokaz. Pretpostavnimo suprotno, tj. da postoji slučajna varijabla Y koja je $\mathbb{P}$-g.s. različita od konstante i takva da je niz $(Y)_{n\geq 0}$ ergodski. Neka je B izmjeriv podskup od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ takav da je

$$A = \{(Y)_{n\geq K} \in B\}, \quad \forall K \geq 0.$$

Za svaki ovakav A po pretpostavci ergodičnosti vrijedi $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Budući da Y nije konstanta, postoji $C \in \mathcal{F}$ takav da je $0 < \mathbb{P}(Y \in C) < 1$. Skup $B' := C \times C \times C \times \cdots$ je izmjeriv u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ i invarijantan je na pomake jer je $\{(Y)_{n \geq K} \in B'\} = \{Y \in C\}$ za svaki $K \geq 0$. Budući da je

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((Y)_{n \geq K} \in B') = \mathbb{P}(Y \in C) \in \langle 0, 1 \rangle,$$

imamo kontradikciju s ergodičnosti. Dakle, svaki konstantni ergodski proces s obzirom na jednostrani pomak mora biti deterministički proces. □

Napomena 2.7. *Vrijedi i svojevrsni obrat gornje tvrdnje. Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ konstantan deterministički niz, onda je $(X_n)_{n \geq 0}$ ergodski s obzirom na jednostrani pomak. Naime, budući da je niz $(X_n)_{n \geq 0}$ konstantan i deterministički, za neki $c \in \mathbb{R}$ imamo da je $X_n = c$, za svaki $n \geq 0$. Sada za svaki niz $(B_n)_{n \geq 0}$ izmjerivih skupova u $\mathcal{F}$ vrijedi*

$$\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots\} = \{c \in B_1, c \in B_2, \dots\} = \{c \in \cap_{n=0}^{\infty} B_n\} \in \{\emptyset, \Omega\}$$

pa za svaki invarijantan skup A vrijedi $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Napomena 2.8. *Gornja dva teorema vrijede i za opće slučajne veličine, a u našim problemima to znači da će niz dobiven iz stacionaranog i ergodskog $(\omega(x))_{x \geq 0}$ pod djelovanjem neke izmjerive funkcije kao u Teoremu 2.5 ostati stacionaran i ergodski.*

2.2 Povratnost i prolaznost u slučajnim okolinama

U prošlom dijelu smo iznijeli glavne tehničke stvari vezane za alate koje ćemo koristiti u dokazima i sada krećemo na esencijalni dio ovog diplomskog rada.

Teorem 2.9. *Ako je $(\omega(x))_{x \geq 0}$ stacionaran i ergodski po $\mathbb{P}$, tada je svaki $x \geq 0$ ω-povratan za $\mathbb{P}$-gotovo sve realizacije od ω ili je svaki $x \geq 0$ ω-prolazan za $\mathbb{P}$-gotovo sve realizacije od ω.*

Dokaz. Neka je $x \geq 0$ i neka je $\omega \in \Omega_+$. Tada redom po Lemi 1.8, Napomeni 2.2 i Lemi 1.11 imamo

$$P_{0,\omega}(R_0) \leq P_{0,\omega}(R_x) = P_{-x,\theta^x(\omega)}(R_0) = P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0), \tag{2.2}$$

gdje Lemu 1.11, tj. (1.14), koristimo jer je $(\theta^x(\omega))(z) = (f(\theta^x(\omega)))(z)$ za sve $z \geq 0$.
Ako djelujemo očekivanjem $\mathbb{E}$ na (2.2), koristeći stacionarnost od $(\omega(x))_{x \geq 0}$ dobijemo

$$P_0[R_0] \leq \mathbb{E}[P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0)] \overset{\text{stac.}}{=} \mathbb{E}[P_{0,f(\omega)}(R_0)] \overset{(1.14)}{=} \mathbb{E}[P_{0,\omega}(R_0)] = P_0[R_0].$$

Dobili smo da je nejednakost u (2.2) zapravo $\mathbb{P}$-g.s. jednakost, tj. $P_{0,\omega}(R_0) = P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0)$ $\mathbb{P}$-g.s. Dakle, $P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0)$ $\mathbb{P}$-g.s. ne ovisi o x.
Budući da je $P_{0,f(\omega)}(R_0)$ izmjerivo preslikan $f(\omega)$, pa onda i izmjerivo preslikan $(\omega(x))_{x\geq 0}$, slijedi da je niz $(P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0))_{x\geq 0}$ forme $\left(g((\omega(y+x))_{y\geq 0})\right)_{x\geq 0}$, gdje je g izmjerivo preslikavanje. Posebno, po Teoremu 2.5 to znači da je niz $(P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski. Budući da je $(P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0))_{x\geq 0}$ konstantan za $\mathbb{P}$-gotovo svaku realizaciju od ω, iz Teorema 2.6 dobivamo da je niz $\mathbb{P}$-g.s konstanta c, tj. za svaki $x \geq 0$ je $P_{0,f(\theta^x(\omega))}(R_0) = c$ $\mathbb{P}$-g.s. Iz Propozicije 1.13 imamo da je c ili 0 ili 1, tj. kad se vratimo u (2.2) imamo da je za svaki $x \geq 0$ $P_{0,\omega}(R_x)$ ili 0 $\mathbb{P}$-g.s. ili 1 $\mathbb{P}$-g.s., što smo trebali i dokazati. $\square$

Definicija 2.10. *Slučajnu šetnju $(X_n)_n$ nazivamo povratnom (prolaznom) ako je svaki $x \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s ω-povratan (prolazan).*

Napomena 2.11. *Primijetimo da je po prethodnom teoremu šetnja $(X_n)_n$ ili povratna ili prolazna pa prethodna definicija obuhvaća sve mogućnosti vezane za šetnju.*

Sljedeća lema govori o tome da možemo promatrati zajednički okoline i dijelove šetnje tako da i dalje imamo stacionarni i ergodski niz.

Lema 2.12. *Ako je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran (ergodski) po $\mathbb{P}$, onda je i*

$$\xi = (\xi_k)_{k\geq 0} := \left((\omega(x+k))_{x\geq 0}, (X_{\tau_{k,m+1}} - k)_{m\geq 0}\right)_{k\geq 0}$$

stacionaran (ergodski) po P_0.
Nadalje, ako je g izmjeriva funkcija s $([1/2,1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ u neki izmjerivi prostor, onda je niz $(g(\xi_k))_{k\geq 0}$ stacionaran (ergodski) po P_0 ako je i $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran (ergodski) po $\mathbb{P}$.

Dokaz. Za dokazati stacionarnost od ξ dovoljno je dokazati da niz $(\xi)_{k\geq K}$ ima istu distribuciju za svaki $K \geq 0$. Za to je dovoljno dokazati da je za svaki B, izmjeriv podskup kodomene od ξ, vjerojatnost $P_0[(\xi_k)_{k\geq K} \in B]$ jednaka za svaki $K \geq 0$.
U dokazima stacionarnosti i ergodičnosti koristit ćemo se sljedećim identitetima. Neka su $\omega \in \Omega_+$, $K \geq 0$ i B kao gore. Po jakom Markovljevom svojstvu imamo $P_{0,\omega}$-g.s.

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}((\xi_k)_{k\geq K} \in B|\mathcal{F}_{T_K}) &= P_{K,\psi(\omega,H_{T_K})}((\xi_k)_{k\geq K} \in B) \\ &= P_{0,\theta^K(\psi(\omega,H_{T_K}))}((\xi_k)_{k\geq 0} \in B), \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje zadnju jednakost imamo po Napomeni 2.2. Budući da se okoline $\theta^K(\psi(\omega, H_{T_K}))$ i $f(\theta^K(\omega))$ $P_{0,\omega}$-g.s. podudaraju na svim $z \geq 0$, po Lemi 1.8 imamo da je (2.3) $P_{0,\omega}$-g.s. jednako

$$P_{0,f(\theta^K(\omega))}((\xi_k)_{k\geq 0} \in B) =: \eta_K(\omega). \tag{2.4}$$

Uzimanjem očekivanja $E_{0,\omega}$ na relaciju (2.3) i uvažavajući (2.4) dobijemo

$$P_{0,\omega}((\xi_k)_{k\geq K} \in B) = \eta_K(\omega). \tag{2.5}$$

Ukoliko sada u relaciji (2.5) uzmemo očekivanje $\mathbb{E}$, dobijemo

$$\begin{aligned} P_0[(\xi_k)_{k\geq K} \in B] &= \mathbb{E}[\eta_K] = \mathbb{E}[P_{0,f(\theta^K(\omega))}((\xi_k)_{k\geq 0} \in B)] \\ &= \mathbb{E}[P_{0,f(\omega)}((\xi_k)_{k\geq 0} \in B)], \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdje posljednju jednakost dobijemo iz stacionarnosti od $(\omega(x))_{x\geq 0}$ po $\mathbb{P}$. Dakle, iz (2.6) čitamo da $P_0[(\xi_k)_{k\geq K} \in B]$ ne ovisi o K pa smo dobili da je ξ stacionaran.

Za dokaz ergodičnosti potrebno je dokazati da je $P_0[A] \in \{0, 1\}$ kad god postoji izmjerivi B (podskup kodomene od ξ) takav da je

$$A = \{(\xi_k)_{k\geq K} \in B\} \quad \forall K \geq 0. \tag{2.7}$$

Pretpostavimo da imamo skupove A i B kao u (2.7). Iz računa za stacionarnost vidimo da sve do (2.5) nismo koristili stacionarnost pa sve do toga vrijedi i općenito. Zato iz (2.5) vidimo

$$P_{0,\omega}(A) = P_{0,\omega}((\xi_k)_{k\geq K} \in B) = \eta_K(\omega), \quad \forall K \geq 0,$$

pa η_K ne ovisi o K, tj. $(\eta_K)_{K\geq 0}$ je niz istih varijabli. Primijetimo da se η_K zbog svoje definicije može prikazati u obliku $g((\omega(x + K))_{x\geq 0})$, gdje je g izmjeriva, pa je zbog ergodičnosti niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$ po Teoremu 2.5 i niz $(\eta_K)_{K\geq 0}$ ergodski. Nadalje, kako smo pokazali da je $(\eta_K)_{K\geq 0}$ niz istih varijabli i da je ergodski, po Teoremu 2.6 slijedi da je η_K $\mathbb{P}$-g.s. konstanta c za svaki $K \geq 0$. Ukoliko se sada vratimo iz (2.5) u (2.3) dobijemo da je za $\mathbb{P}$-gotovo svaki $\omega \in \Omega_+$

$$c = P_{0,\omega}(A|\mathcal{F}_{T_K}), \quad P_{0,\omega}\text{-g.s.} \tag{2.8}$$

Primijenom teorema o konvergenciji martingala (vidi [10, Korolar 1.90]) imamo da za $\mathbb{P}$-gotovo svaki ω vrijedi $P_{0,\omega}$-g.s

$$P_{0,\omega}(A|\mathcal{F}_{T_K}) \to P_{0,\omega}\left(A \middle| \sigma\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{T_k}\right)\right) = \mathbf{1}_A \quad \text{kada } K \to \infty.$$

Budući da (2.8) vrijedi za svaki $K \geq 0$, imamo da je za $\mathbb{P}$-gotovo svaki ω $\mathbf{1}_A = c$ $P_{0,\omega}$-g.s., tj. imamo da je c ili 0 ili 1. Dakle, za $\mathbb{P}$-gotovo svaki ω je ili $P_{0,\omega}(A|\mathcal{F}_{\mathcal{T}_K}) = 1$ $P_{0,\omega}$-g.s. ili $P_{0,\omega}(A|\mathcal{F}_{\mathcal{T}_K}) = 0$ $P_{0,\omega}$-g.s. Uzimanjem očekivanja $E_{0,\omega}$ iz prethodnog dobijemo $P_{0,\omega}(A) = 1$ $\mathbb{P}$-g.s. ili $P_{0,\omega}(A) = 0$ $\mathbb{P}$-g.s. Sada uzimanjem očekivanja $\mathbb{E}$ dobijemo traženo, tj. $P_0[A] \in \{0, 1\}$.
Drugi dio leme slijedi iz prvog dijela i Teorema 2.5. □

Sljedeća lema govori o tome koliki otklon u prosjeku stvara jedno mjesto u šetnji i bit će nam korisna u dokazu glavnog rezultata o povratnosti i prolaznosti. Primijetimo da je u tvrdnji leme tražena samo stacionarnost niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$.

Lema 2.13. *Ako je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran po $\mathbb{P}$, onda je $E_0[D^x_\infty] \leq 1$ za sve $x \geq 0$.*

Dokaz. Neka je $x \geq 0$. Prisjetimo se

$$D^x_\infty = \sum_{i=1}^{\#\{m\in\mathbb{N}_0 | X_m = x\}} (2\omega(x,i) - 1).$$

Vidimo da distribucija od D^x_∞ ovisi samo o $(X_{\tau_{0,m}})_{m\geq 1}$ i $\omega(x)$. Prema Napomeni 2.3 bez gubljenja stacionarnosti možemo promijeniti ω na negativnim točkama tako da je $\mathbb{P}$-g.s. zadovoljeno (1.2). Ovim postupkom nismo promijenili $E_0[D^x_\infty]$ zbog Leme 1.8. Zaista, neka je ω' promijenjeni ω. Tada je po konstrukciji $\omega(x) = \omega'(x)$ $\mathbb{P}$-g.s. na svim $x \geq 0$. Po Lemi 1.8 za svaki fiksni ω imamo da je distribucija od D^x_∞ jednaka po $P_{0,\omega}$ i po $P_{0,\omega'}$, a time je i $E_{0,\omega}[D^x_\infty] = E_{0,\omega'}[D^x_\infty]$. Dobili smo $E_{0,\omega}[D^x_\infty] = E_{0,\omega'}[D^x_\infty]$ $\mathbb{P}$-g.s., tj. $E_0[D^x_\infty]$ se nije promijenio pa promjena nije smanjila općenitost. Dalje nastavljamo uz pretpostavku da (1.2) vrijedi $\mathbb{P}$-g.s.
Neka je $0 \leq k < K$. Tada P_0-g.s. vrijedi

$$D_{T_K} \geq D^+_{T_K} = \sum_{y=0}^{K-1} D^y_{T_K} \geq \sum_{y=0}^{K-1-k} D^y_{T_K} \geq \sum_{y=0}^{K-1-k} D^y_{T_{y+k}} \tag{2.9}$$

jer je $T_{y+k} < T_K$ P_0-g.s. za sve $y < K - k$. Primijetimo da je po Napomeni 2.4 i po Lemi 1.5 $E_0[D_{T_K}] = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[D_{T_K}]] = \mathbb{E}[K] = K$. Zato uzimanjem očekivanja E_0 u (2.9) imamo

$$K = E_0[D_{T_K}] \geq \sum_{y=0}^{K-1-k} E_0[D^y_{T_{y+k}}] = (K-k)E_0[D^x_{T_{x+k}}], \tag{2.10}$$

gdje smo zadnju jednakost dobili iz stacionarnosti niza $(D^y_{T_{y+k}})_{y\geq 0}$. Naime, za svaki $k \geq 0$ definiramo funkciju g_k na $([1/2, 1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ s

$$g_k((w(x))_{x\geq 0}, (x_m)_{m\geq 0}) := \sum_{i=1}^{\#\{m<T_k((x_n)_n) | x_m = 0\}} (2w(0,i) - 1),$$

gdje je $T_k((x_n)_n) = \min\{n \geq 0 | x_n = k\}$. Sada P_0-g.s. imamo

$$\begin{aligned} g_k(\xi_y) &= g((\omega(x+y))_{x\geq 0}, (X_{\tau_{y,m+1}} - y)_{m\geq 0}) \\ &= \sum_{i=0}^{\#\{m<T_k((X_{\tau_{y,m+1}}-y)_{m\geq 0}) | X_{\tau_{y,m+1}}-y=0\}} (2\omega(y,i)-1) \\ &= \sum_{i=0}^{\#\{m<T_{y+k} | X_m=y\}} (2\omega(y,i)-1) = D^y_{T_{y+k}}. \end{aligned}$$

Iz prethodnog po Lemi 2.12 slijedi da je niz $(D^y_{T_{y+k}})_{y\geq 0}$ stacionaran za svaki $k \geq 0$ pa (2.10) zaista vrijedi.
Iz (2.10) slijedi $E_0[D^x_{T_{x+k}}] \leq K/(K-k)$ pa puštanjem $K \to \infty$ dobijemo $E_0[D^x_{T_{x+k}}] \leq 1$ za svaki $k \geq 0$. Budući da $D^x_{T_{x+k}} \nearrow D^x_{T_\infty}$ kada $k \to \infty$, po Lebesgueovom teoremu monotone konvergencije imamo $E_0[D^x_\infty] \leq 1$. □

Sada ćemo iskazati i dokazati glavni teorem ovog poglavlja. Drugi dio teorema donosi nužan i dovoljan uvjet za prolaznost šetnje.

Teorem 2.14. *Pretpostavimo da je niz $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski po $\mathbb{P}$. Tada je*

$$E_0[D^x_\infty] = \min\{1, \mathbb{E}[\delta^0]\} \quad \forall x \geq 0. \tag{2.11}$$

Nadalje, ako je

$$\mathbb{P}[\omega(0) = (1, 1/2, 1/2, 1/2, \dots)] < 1, \tag{2.12}$$

onda je

$$(X_n)_{n\geq 0} \textit{ povratan ako i samo ako je } \mathbb{E}[\delta^0] \leq 1. \tag{2.13}$$

Dokaz. Neka je g funkcija na $([1/2,1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ dana s

$$g((w(x))_{x\geq 0}, (x_m)_{m\geq 0}) := \sum_{i=1}^{\#\{m\in\mathbb{N}_0 | x_m=0\}} (2w(0,i)-1).$$

Slično kao u Lemi 2.13 pokaže se da je $g(\xi_k) = D^k_\infty$ pa je niz $(D^k_\infty)_{k\geq 0}$ stacionaran po Lemi 2.12. Zaključujemo da je dovoljno pokazati tvrdnju teorema samo za $x = 0$. Nadalje, $\mathbf{1}_{R_0}$ i D^0_∞ su funkcije od $(\omega(x))_{x\geq 0}$ i $(X_{\tau_{0,m}})_{m\geq 1}$ (vidi početak Leme 1.18) pa možemo, s opravdanjem kao u prethodnoj lemi, pretpostaviti da vrijedi (1.2) $\mathbb{P}$-g.s.

Po Teoremu 2.9 šetnja je ili prolazna ili povratna. Ako je povratna, onda će svi kolačići na mjestu 0 biti pojedeni P_0-g.s. pa u tom slučaju vrijedi $D^0_\infty = \delta^0$ P_0-g.s., tj. $E_0[D^0_\infty] = E_0[\delta^0]$. Budući da je za fiksni $\omega \in \Omega_+$ δ^0 konstanta $P_{0,\omega}$-g.s., imamo

$$\mathbb{E}[\delta^0] = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[\delta^0]] = E_0[\delta^0] = E_0[D^0_\infty] \overset{\text{Lema 2.13}}{\leq} 1.$$

Zbog toga je $E_0[D^0_\infty] = \min\{1, \mathbb{E}[\delta^0]\}$. Dakle, ako je šetnja povratna, dokazali smo (2.11) i da je $\mathbb{E}[\delta^0] \leq 1$ nužan uvjet za povratnost, tj. dokazali smo jedan smjer tvrdnje (2.13).

Pretpostavimo sada da je šetnja prolazna. Za svaki $K \in \mathbb{N}$ zbog stacionarnosti niza $(D^k_\infty)_{k\geq 0}$ po P_0 imamo

$$\begin{aligned} E_0[D^0_\infty] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} E_0[D^k_\infty] &\overset{\text{Nap.2.4}}{=} \mathbb{E}\left[\frac{1}{K}E_{0,\omega}\left[\sum_{k=0}^{K-1} D^k_\infty\right]\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\frac{E_{0,\omega}[D^+_{T_K}]}{K}\right], \end{aligned} \tag{2.14}$$

gdje zadnju nejednakost dobijemo iz očite činjenice $D^+_{T_K} \leq \sum_{k=0}^{K-1} D^k_\infty$ P_0-g.s.
Nadalje, zbog $D^+_{T_K} \leq D_{T_K}$ i zbog Leme 1.5 (jer uvjet (1.2) po pretpostavci vrijedi $\mathbb{P}$-g.s.) imamo

$$\frac{E_{0,\omega}[D^+_{T_K}]}{K} \leq \frac{E_{0,\omega}[D_{T_K}]}{K} = 1, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \tag{2.15}$$

Budući da smo pretpostavili da je šetnja prolazna, imamo da je uvjet Leme 1.18 $\mathbb{P}$-g.s. zadovoljen pa je

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{E_{0,\omega}[D^+_{T_k}]}{K} = 1, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Dakle, niz $(E_{0,\omega}[D^+_{T_k}]/K)_{K\geq 1}$ konvergira $\mathbb{P}$-g.s. i po (2.15) je omeđen odozgo s 1. Sada možemo u (2.14) pustiti $K \to \infty$ i po Lebesgueovom teoremu dominirane konvergencije dobiti $E_0[D^0_\infty] \geq 1$. Budući da je po prethodnoj lemi $E_0[D^0_\infty] \leq 1$, dobili smo

$$E_0[D^0_\infty] = 1. \tag{2.16}$$

Primijetimo da je $\delta^0 \geq D^0_\infty$ P_0-g.s. pa je $\mathbb{E}[\delta^0] = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[\delta^0]] = E_0[\delta^0] \geq E_0[D^0_\infty]$. Dakle, $E_0[D^0_\infty] = \min\{1, \mathbb{E}[\delta^0]\}$ pa smo tvrdnju (2.11) dokazali i za prolaznu šetnju.
Dokažimo sada dovoljnost uvjeta (2.13). Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $\mathbb{E}[\delta^0] \leq 1$ i da je šetnja prolazna. Po netom dokazanom je zbog prolaznosti šetnje $1 = E_0[D^0_\infty] = \mathbb{E}[\delta^0]$.
Promotrimo događaj

$$S := \left\{\sum_{i=2}^{\infty}(2\omega(0,i) - 1) > 0\right\}$$

koji označuje da sav otklon nije pohranjen u prvom kolačiću. Tvrdimo da je $\mathbb{P}[S] > 0$. U suprotnom je, zbog toga što su članovi sume nenegativni, $(2\omega(0,i) - 1) = 0$ $\mathbb{P}$-g.s, za svaki $i \geq 2$, tj. $\omega(0,i) = 1/2$ $\mathbb{P}$-g.s, za svaki $i \geq 2$. Budući da pretpostavka $\mathbb{P}[\omega(0) = (1, 1/2, 1/2, 1/2, \dots)] < 1$ sada isključuje mogućnost $\omega(0,1) = 1$ $\mathbb{P}$-g.s., imamo da je

$$\mathbb{E}[\delta^0] = \mathbb{E}[\underbrace{2\omega(0,1) - 1}_{<1\ \mathbb{P}\text{-g.s.}}] < 1$$

Naime, ako bi bilo $\mathbb{E}[2\omega(0,1) - 1] = 1$, tj. $\mathbb{E}[\omega(0,1)] = 1$, onda bi zbog $1 - \omega(0,1) > 0$ $\mathbb{P}$-g.s. i $\mathbb{E}[1 - \omega(0,1)] = 0$ slijedilo da je $\omega(0,1) = 1$ $\mathbb{P}$-g.s., a to je kontradikcija. Dakle, $\mathbb{E}[\delta^0] < 1$, no zbog pretpostavke o prolaznosti šetnje imamo

$$1 = E_0[D^0_\infty] = \min\{1, \mathbb{E}[\delta^0]\} = \mathbb{E}[\delta^0] < 1,$$

što je kontradikcija. Dakle, $\mathbb{P}[S] > 0$.
Zbog prolaznosti šetnje je uvjet Leme 1.22 $\mathbb{P}$-g.s. zadovoljen te je zato $P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) > 0$ ispunjen $\mathbb{P}$-g.s. Neka je $A = \{\forall n > 0 : X_n > 0\}$. Zbog $\mathbb{P}[S] > 0$ slijedi

$$\begin{aligned}
0 &< \mathbb{E}[P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0); S] = \mathbb{E}[P_{0,\omega}(A)\mathbf{1}_S] \\
&= \mathbb{E}[E_{0,\omega}[\mathbf{1}_A]\mathbf{1}_S] = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[\mathbf{1}_A\mathbf{1}_S]] = P_0[A \cap S] \\
&= P_0\left[\{D^0_\infty = 2\omega(0,1) - 1\} \cap S\right] \\
&\leq P_0[D^0_\infty < \delta^0]. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Budući da je uvijek $D^0_\infty \leq \delta^0$, iz (2.17) imamo $1 = E_0[D_\infty] < E_0[\delta^0] = \mathbb{E}[\delta^0]$, tj. $\mathbb{E}[\delta^0] > 1$. Dobili smo kontradikciju s $\mathbb{E}[\delta^0] \leq 1$, tj. vrijedi i dovoljnost uvjeta (2.13). □

Napomena 2.15. *Primijetimo da ako uvjet* (2.12) *nije zadovoljen, onda je* $X_n = n$ P_0*-g.s. za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$ *i šetnja je prolazna iako je* $\mathbb{E}[\delta^0] = 1$*. Nadalje, ako je* $\mathbb{E}[\delta^0] \neq 1$*, onda uvjet* (2.12) *ne može biti ispunjen. Naime, da vrijedi* (2.12)*, onda bi bilo* $1 \neq \mathbb{E}[\delta^0] = \sum_i \mathbb{E}[2\omega(0,i) - 1] = 1$*, što je kontradikcija.*
Primijetimo da smo u iskazu prethodnog teorema mogli zamijeniti $\mathbb{E}[\delta^0]$ *s* $E_0[\delta^0]$ *jer su te dvije vrijednosti jednake kao što smo pokazali u dokazu.*

Primjeri

Sada ćemo na par primjera primijeniti Teorem 2.14. Prije nego krenemo s primjerima, primijetimo da ako je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ jednako distribuiran i $\mathbb{P}$-g.s. konstantan, tj. $\omega(0)$ je $\mathbb{P}$-g.s. konstanta i vrijedi $\omega(x) = \omega(y)$ $\mathbb{P}$-g.s., za sve $x, y \geq 0$, onda je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski. Zato za jednako distribuirane i konstante nizove možemo primjenjivati Teorem 2.14. Po Teoremu 2.14 imamo: ako je $\omega(0) \neq (1, 1/2, 1/2, \cdots)$, onda zbog $\mathbb{E}[\delta^0] = \delta^0$ vrijedi

$$(X_n)_{n\geq 0} \text{ povratan ako i samo ako je } \delta^0 \leq 1. \qquad (2.18)$$

Primjer 2.16. *Vratimo se Primjeru 0.1 s početka rada koji nas je motivirao za promatranje šetnji s kolačićima. Dakle, u šetnji imamo okolinu $\omega(x) = (p, p, 1/2, 1/2, \cdots)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$, gdje je $p \in [1/2, 1]$. Imamo da je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ jednako distribuiran i konstantan niz. Budući da je $\omega(x) = (p, p, 1/2, 1/2, \cdots)$, nemoguće je da bude $\omega(x) = (1, 1/2, 1/2, \cdots)$ pa je uvjet* (2.12) *iz Teorema 2.14 ispunjen. Iz* (2.18) *slijedi da je šetnja iz Primjera 0.1 povratna ako i samo ako je*

$$\delta^0 = \sum_{i=1}^{\infty}(2\omega(0, i) - 1) \leq 1 \iff 2(2p - 1) \leq 1 \iff p \leq 3/4.$$

Ovime smo razriješili pitanje o prolaznosti i povratnosti šetnje iz Primjera 0.1.

Primjer 2.17. *Na početku smo se dotakli i šetnje excited random walk (ERW [2]), šetnje kod koje je šetač pristran samo pri prvom posjetu nekom mjestu. Za tu šetnju imamo okolinu $\omega(x) = (p, 1/2, 1/2, \cdots)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$, gdje je $p \in [1/2, 1]$. Isto kao i ranije, zbog jednako distribuiranog i konstantnog ω, zaključujemo da možemo primijeniti Teorem 2.14. Vidjeli smo po Napomeni 2.15 da je za $p = 1$ šetnja prolazna. Ako promatramo šetnju za $p < 1$, zadovoljen je uvjet* (2.12) *i vrijedi da je $(X_n)_n$ povratna ako i samo ako je $p < 1$. Naime, zbog $\delta^0 = 2p - 1$ imamo da je*

$$(\delta^0 \leq 1) \wedge (p < 1) \iff (2p - 1 \leq 1) \wedge (p < 1) \iff p < 1.$$

Dakle, ERW je povratna za svaki $p < 1$.

Primjer 2.18. *Ako nastavimo dalje u smislu prethodna dva primjera, možemo promatrati šetnju gdje imamo kolačiće jačine p na prvih $k \geq 3$ posjeta mjestu. Tada je okolina dana s*

$$\omega(x) = (\underbrace{p, \dots, p}_{k\ puta}, 1/2, 1/2, \dots), \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

gdje je $p \in [1/2, 1]$. Imamo opet stacionaran i ergodski niz zbog jednake distribuiranosti i konstantnosti te zbog $k \geq 3$ vrijedi i uvjet (2.12) *za svaki p. Iz $\delta^0 = k(2p - 1)$ i* (2.13) *dobivamo da je ovakva šetnja povratna ako i samo ako je $k(2p - 1) \leq 1$, tj. ako i samo ako je $p \leq \frac{k+1}{2k}$.*

Primjer 2.19. *U Napomeni 2.15 pokazali smo da je šetnja prolazna ako imamo okolinu $\omega(0) = (1, 1/2, 1/2, \dots)$ $\mathbb{P}$-g.s. bez obzira što je $\mathbb{E}[\delta^0] = 1$. Promatrajmo sada šetnju takvu da je $\omega(x) = (1/2, 1, 1/2, 1/2, \dots)$ $\mathbb{P}$-g.s., za svaki $x \geq 0$. To je šetnja u kojoj se netom nakon drugog posjeta nekom mjestu sigurno krećemo udesno. Po Teoremu 2.14 šetnja je povratna jer je $\mathbb{E}[\delta^0] \leq 1$. Dakle, ukoliko obavezan korak nadesno maknemo s prvog kolačića na drugi, dobijemo povratnu šetnju.*

Neka je $\varepsilon \in \langle 0, 1/2\rangle$ proizvoljan. Ako u šetnji na prozvoljno mjesto $i \in \mathbb{N}$ stavimo $\omega(x, i) = 1/2 + \varepsilon$ (za svaki $x \in \mathbb{Z}$), po Teoremu 2.14 imamo da je šetnja prolazna jer je $\mathbb{E}[\delta^0] = 1 + \varepsilon > 1$. Dakle, koliko god početnu šetnju daleko i malo uzburkali, tj. koliko god veliki bio $i \in \mathbb{N}$ i koliko god mali bio $\varepsilon > 0$, šetnja postaje prolazna.

Dolazak po repete

Pretpostavimo da je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski. Po Teoremu 2.9 šetnja $(X_n)_{n\geq 0}$ je ili povratna ili prolazna, a Teorem 2.14 nam kaže kakva je.

Pretpostavimo da je šetnja $(X_n)_{n\geq 0}$ prolazna. Šetnja će tada svako mjesto $x \in \mathbb{Z}$ posjetiti P_0-g.s. samo konačno mnogo puta. Slijedi da je P_0-g.s. dobro definirana okolina $\omega_2 := \psi(\omega, (X_n)_{n\geq 0})$ koju dobijemo proširivanjem definicije (1.18) na beskonačne nizove, tj.

$$\psi(\omega, (X_n)_{n\geq 0})(x, i) := \omega(x, i + \#\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n = x\}),$$

gdje primjećujemo da je za svaki $x \in \mathbb{Z}$ zbog prolaznosti šetnje $\#\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n = x\} < \infty$ P_0-g.s. Zbog definicije od ω_2 možemo promatrati novu šetnju $(X_n^{(2)})_{n\geq 0}$ koja se kreće po ω_2, tj. druga šetnja jede kolačiće koje prva šetnja nije pojela. Primijetimo da drugu šetnju ima smisla promatrati samo kada je prva prolazna. Naime, u slučaju da je prva šetnja povratna, šetnja svako mjesto $x \in \mathbb{N}_0$ P_0-g.s. posjećuje beskonačno mnogo puta i zato ne bismo mogli definirati novu okolinu ω_2 na nenegativnim mjestima na gornji način. Da bismo mogli nešto reći o drugoj šetnji, potrebno nam je da je $(\omega_2(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski. Budući da je $(\omega(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski, po Lemi 2.12 pomoću funkcije

$$g((w(x))_{x\geq 0}, (x_m)_{m\geq 0}) := (w(0, i + \#\{m \geq 0 | x_m = 0\}))_{i\geq 1}$$

imamo da je $(\omega_2(x))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski. Naime, za $k \geq 0$ imamo

$$\begin{aligned} g(\xi_k) &= g((\omega(x + k))_{x\geq 0}, (X_{\tau_{k,m+1}} - k)_{m\geq 0}) \\ &= (\omega(k, i + \#\{m \geq 0 | X_{\tau_{k,m+1}} - k = 0\}))_{i\geq 1} \\ &= \omega(k, i + \#\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n = k\})_{i\geq 1} \\ &= \omega_2(k) \end{aligned}$$

pa zbog toga što je $(g(\xi_k))_{x\geq 0}$ stacionaran i ergodski, imamo da je i $(\omega_2(k))_{k\geq 0}$ stacionaran i ergodski.
Sada možemo zaključivati isto kao na početku, tj. šetnja $(X_n^{(2)})_{n\geq 0}$ je ili povratna ili prolazna. Štoviše, na osnovu ukupnog otklona u 0 iz prve šetnje, možemo reći je li druga šetnja prolazna ili povratna. Naime, ukupan otklon sadržan u 0 za prvu šetnju je δ^0, a ukupan otklon sadržan u 0 za drugu šetnju je $\delta^0_{(1)} := \delta^0 - D^0_\infty$, tj. ukupan otklon u 0 za drugu šetnju

je ukupan otklon sadržan u 0 za prvu šetnju umanjen za otklon onih kolačića koje je prva šetnja pojela na mjestu 0. Budući da je $(X_n)_{n\geq 0}$ prolazna, iz Teorema 2.14 imamo

$$E_0[\delta^0_{(1)}] = E_0[\delta^0 - D^0_\infty] = E_0[\delta^0] - E_0[D^0_\infty] = E_0[\delta^0] - 1,$$

tj. prva šetnja je očekivani ukupni otklon u 0 smanjila za 1. Po Teoremu 2.14 (i Napomeni 2.15) sada zaključujemo da ako je $E_0[\delta^0_{(1)}] < 1$, onda je $(X_n^{(2)})_{n\geq 0}$ povratna. Ako je $E_0[\delta^0_{(1)}] > 1$, druga šetnja je prolazna pa možemo definirati novu stacionarnu i ergodsku okolinu $\omega_3 := \psi(\omega_2, (X_n^{(2)})_{n\geq 0})$ na kojoj možemo promatrati treću šetnju $(X_n^{(3)})_{n\geq 0}$.
Ovaj postupak možemo ponavljati sve dok ne dobijemo povratnu šetnju. Posebno, ako je $\mathbb{E}[\delta^0]$ konačno i nije cijeli broj (ovime izbjegavamo degenerirane šetnje s okolinama poput $\omega(0) = (1, 1, \dots, 1, 1/2, 1/2, \dots)$, gdje je broj jedinica na početku konačan), onda je prvih $\lfloor \mathbb{E}[\delta^0] \rfloor$ šetnji P_0-g.s. prolazno, a sljedeća šetnja je P_0-g.s. povratna te tada stajemo s procesom. Naime, ako je $\mathbb{E}[\delta^0]$ konačno i nije cijeli broj, onda svaka šetnja smanjuje ukupni očekivani otklon u 0 za 1, a to možemo napraviti $\lfloor \mathbb{E}[\delta^0] \rfloor$ puta prije nego što se ukupni očekivani otklon smanji na vrijednost strogo manju od 1. Tada zbog (2.13) sljedeća šetnja postaje povratna jer uvjet (2.12) ne može biti ispunjen.

2.3 Jaki zakon velikih brojeva za *multi*-ERW

U ovom poglavlju reći ćemo nešto o brzini šetnje, tj. o jakom zakonu velikih brojeva za šetnju. Brzinu šetnje gledamo kao omjer pomaka i vremena, a ako krećemo iz 0, onda je to omjer X_n/n. Zanima nas granično ponašanje brzine, tj. zanima nas $\lim_n \frac{X_n}{n}$.
S druge strane, slučajnu šetnju možemo shvatiti kao sumu slučajnih varijabli, tj. promatramo šetnju za koju je X_0 i vrijedi $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, gdje su Y_k varijable koje poprimaju vrijednosti -1 i 1 (te nisu općenito jednako distribuirane i nezavisne kao u slučaju jednostavne slučajne šetnje). Ako s ove strane promatramo šetnju, onda je

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

pa ako nas zanima granična brzina šetnje, zapravo nas zanima vrijedi li neki oblik zakona velikih brojeva za niz varijabli $(Y_k)_{k\geq 1}$.
Prije nego iskažemo i dokažemo tvrdnju koja odgovara na gornja pitanja, iskazat ćemo najavljenu vezu između opće ergodičnosti i naše ergodičnosti sa stacionarnosti. Treba nam posljedica centralnog rezultata vezanog za ergodske nizove, tj. posljedica tzv. Birkhoff-Hinčinovog ergodskog teorema.

Teorem 2.20 (Ergodski teorem)**.** *Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ niz u $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je on stacionaran i ergodski s obzirom na operator jednostranog pomaka. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva takva* *da je* $\mathbb{E}[|f(X_0)|] < \infty$. *Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \mathbb{E}[f(X_0)] \quad \mathbb{P}\text{-}g.s.\ i\ u\ L^1.$$

Dokaz. Vidi [5, Korolar 3.37]. □

Sada možemo odgovoriti na pitanja koja smo postavili na početku poglavlja. Primijetimo da sljedeći teorem posljedično pokazuje i da je brzina *multi*-ERW šetnje na stacionarnim i ergodskim okolinama uvijek dobro definirana.

Teorem 2.21. *Neka je* $(\omega(x))_{x\geq 0}$ *stacionaran i ergodski po* $\mathbb{P}$. *Tada je* P_0*-g.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = v := \frac{1}{u}, \quad gdje\ je\ u := \sum_{j=1}^{\infty} P_0[T_{j+1} - T_j \geq j] \in [1, \infty].$$

Prije nego krenemo s dokazom, napomenimo jednu tehničku stvar. Kada ćemo u dokazu govoriti o jednakostima i nejednakostima među varijablama (npr. $T_2 \geq T_1$), onda zapravo mislimo na P_0-g.s. jednakosti i nejednakosti ($T_2 \geq T_1$ P_0-g.s.).

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_k}{k} = u \quad P_0\text{-g.s.} \tag{2.19}$$

Budući da je $T_0 = 0$, teleskopskim sumiranjem imamo da je

$$T_k = \sum_{i=0}^{k-1} (T_{i+1} - T_i). \tag{2.20}$$

Neka je $t \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan. Primijetimo da zbog $T_{i+1} - T_i \geq 0$ vrijedi $T_{i+1} - T_i \geq (T_{i+1} - T_i) \wedge t \geq 0$. Sada pomoću (2.20) imamo

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \frac{T_k}{k} &= \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (T_{i+1} - T_i) \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} ((T_{i+1} - T_i) \wedge t) \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=t}^{k-1} ((T_{i+1} - T_i) \wedge t),
\end{aligned}$$

i to vrijedi za svaki $t \in \mathbb{N}_0$. Uzimanjem supremuma imamo

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{T_k}{k} \geq \sup_{t\geq 0} \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=t}^{k-1} ((T_{i+1} - T_i) \wedge t). \tag{2.21}$$

Za svaki $t \in \mathbb{N}_0$, koristeći Lemu 2.12 i funkcije

$$g_t((w(x))_{x\geq 0}, (x_m)_{m\geq 0}) = (T_{t+1} - T_t)((x_m)_{m\geq 0}) \wedge t,$$

dobijemo da je niz $((T_{i+1} - T_i) \wedge t)_{i\geq t}$ ergodski i stacionaran. Naime, za $t \in \mathbb{N}_0$ i $i \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\begin{aligned} g_t(\xi_i) &= g_t((\omega(x+i))_{x\geq 0}, (X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \\ &= (T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \wedge t. \end{aligned}$$

Sada želimo pokazati da je $(T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \wedge t = (T_{t+i+1} - T_{t+i}) \wedge t$. Ako se šetnja $(X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}$ između vremena $T_t((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ i $T_{t+1}((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ odvija na strogo većim mjestima od 0, onda se šetnja $(X_n)_{n\geq 0}$ između vremena T_{t+i} i T_{t+i+1} podudara sa šetnjom $(X_{\tau_{i,m+1}})_{m\geq 0}$ između $T_t((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ i $T_{t+1}((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$. Dakle, u tom slučaju je $(T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) = T_{t+i+1} - T_{t+i}$ pa onda i $(T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \wedge t = (T_{t+i+1} - T_{t+i}) \wedge t$.
Ako šetnja $(X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}$ ipak dostigne 0 u vremenu između $T_t((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ i $T_{t+1}((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$, onda je $(T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \geq t$. Zaista, od mjesta t do 0 treba barem t koraka, a povratak iz 0 do mjesta $t+1$ traje barem $t+1$ i time je vrijeme putovanja između $T_t((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ i $T_{t+1}((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ barem $2t+1$, a zbog $t \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $2t+1 \geq t$. Primijetimo da to znači da i šetnja $(X_n)_{n\geq 0}$ nakon vremena T_{t+i} dođe do i prije nego dođe u $t+i+1$ čime je i $T_{t+i+1} - T_{t+i} \geq t$. Dakle, i u ovom slučaju je $(T_{t+1} - T_t)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \wedge t = (T_{t+i+1} - T_{t+i}) \wedge t$. Time smo dokazali da je $g_t(\xi_i) = (T_{t+i+1} - T_{t+i}) \wedge t$ iz čega po Lemi 2.12 imamo da je

$$((T_{i+1} - T_i) \wedge t)_{i\geq t} \text{ stacionaran i ergodski za svaki } t \in \mathbb{N}_0. \tag{2.22}$$

Iz (2.22) po ergodskom teoremu imamo P_0-g.s. za svaki t

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=t}^{k-1} ((T_{i+1} - T_i) \wedge t) = E_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge t]$$

pa je desna strana od (2.21) P_0-g.s. jednaka

$$\sup_{t\geq 0} E_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge t] = \sup_{t\geq 0} \sum_{j=1}^{t} P_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge t \geq j], \tag{2.23}$$

gdje zadnju jednakost imamo jer je $(T_{t+1} - T_t) \wedge t$ diskretna varijabla pa joj se očekivanje može izraziti preko sume na gornji način.
Sada ćemo eliminirati t iz sumanada u (2.23). Prvo primijetimo da za $j \le t$ vrijedi $\{(T_{t+1} - T_t) \wedge t \ge j\} = \{(T_{t+1} - T_t) \wedge j \ge j\}$ pa je za $j \le t$

$$P_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge t \ge j] = P_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge j \ge j].$$

Nadalje, iz (2.22) slijedi da je niz $((T_{i+1} - T_i) \wedge j)_{i \ge j}$ stacionaran za svaki $j \ge 0$ pa za $j \le t$ vrijedi

$$P_0[(T_{t+1} - T_t) \wedge j \ge j] = P_0[(T_{j+1} - T_j) \wedge j \ge j] = P_0[T_{j+1} - T_j \ge j].$$

Dakle, (2.23) je jednako

$$\sup_{t \ge 0} \sum_{j=1}^{t} P_0[T_{j+1} - T_j \ge j] = \sum_{j=1}^{\infty} P_0[T_{j+1} - T_j \ge j] = u,$$

gdje pretposljednju jednakost imamo jer su sumandi neneagtivni. Ovime smo dokazali nejednakost $\liminf_k \frac{T_k}{k} \ge u$ P_0-g.s.
Za drugu potrebnu nejednakost primijetimo da su varijable $T_{i+1} - T_i$ diskretne pa vrijedi

$$T_{i+1} - T_i = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}}.$$

Iz (2.20) sada imamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{k \to \infty} \frac{T_k}{k} &= \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}} \\
&= \limsup_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}} \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Nadalje, primijetimo da je za svaki $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}} &\le \underbrace{\limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}}}_{=0} + \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}} \\
&= \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1} - T_i \ge j\}}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Iz (2.24) i (2.25) slijedi

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{T_k}{k} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1}-T_i \geq j\}}. \tag{2.26}$$

Po Lemi 2.12 primijenjenoj na funkcije

$$g_j((w(x))_{x\geq 0}, (x_m)_{m\geq 0}) = \mathbf{1}_{\{(T_{j+1}-T_j)((x_m)_{m\geq 0})\geq j\}}$$

dobivamo da su nizovi $(\mathbf{1}_{\{T_{i+1}-T_i\geq j\}})_{i\geq j}$, za $j \geq 1$, stacionarni i ergodski. Zaista, za $j \in \mathbb{N}$ i $i \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\begin{aligned} g_j(\xi_i) &= g_j((\omega(x+i))_{x\geq 0}, (X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \\ &= \mathbf{1}_{\{(T_{j+1}-T_j)((X_{\tau_{i,m+1}}-i)_{m\geq 0})\geq j\}}. \end{aligned}$$

Sada želimo pokazati da je $\{(T_{j+1} - T_j)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \geq j\} = \{T_{j+i+1} - T_{j+i} \geq j\}$. Isto kao i prije, ako se šetnja $(X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}$ između vremena $T_j((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ i $T_{j+1}((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0})$ odvija na strogo većim mjestima od 0, onda je $(T_{j+1} - T_j)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) = T_{j+i+1} - T_{j+i}$. Ako pak šetnja $(X_{\tau_{i,m+1}}-i)_{m\geq 0}$ dostigne 0 u vremenu između $T_j((X_{\tau_{i,m+1}}-i)_{m\geq 0})$ i $T_{j+1}((X_{\tau_{i,m+1}}-i)_{m\geq 0})$, onda je $(T_{j+1} - T_j)((X_{\tau_{i,m+1}} - i)_{m\geq 0}) \geq j$, ali je i $T_{j+i+1} - T_{j+i} \geq j$. Dakle, imamo

$$g_j(\xi_i) = \mathbf{1}_{\{T_{j+i+1}-T_{j+i}\geq j\}},$$

tj. nizovi $(\mathbf{1}_{\{T_{i+1}-T_i\geq j\}})_{i\geq j}$, za $j \geq 1$, jesu zaista stacionarni i ergodski.
Po ergodskom teoremu za $j \in \mathbb{N}$ zbog upravo dokazane ergodičnosti imamo da je P_0-g.s.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{k-1} \mathbf{1}_{\{T_{i+1}-T_i\geq j\}} = E_0[\mathbf{1}_{\{T_{j+1}-T_j\geq j\}}] = P_0[T_{j+1} - T_j \geq j]$$

pa je desna strana od (2.26) P_0-g.s. jednaka

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_0[T_{j+1} - T_j \geq j] = u.$$

Ovime smo dokazali $\limsup_k \frac{T_k}{k} \leq u$ P_0-g.s., a onda zbog već dokazanog $\liminf_k \frac{T_k}{k} \geq u$ P_0-g.s. imamo da je $\lim_k \frac{T_k}{k} = u$ P_0-g.s., tj. (2.19).

Sada ćemo tvrdnju teorema dokazati pomoću (2.19). Neka je slučajan niz $(k_n)_{n\geq 0}$ dan sljedećom konstrukcijom. Za $l \in \mathbb{N}_0$ i za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ takav da je $T_l \leq m < T_{l+1}$ stavljamo $k_m = l$. Za ovako zadan niz vrijedi

$$T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}. \tag{2.27}$$

Naime, za $n \geq 0$ takav da je $T_l \leq n < T_{l+1}$ imamo

$$T_{k_n} = T_l \leq n < T_{l+1} = T_{k_n+1}$$

jer je $k_n = l$. Primijetimo da je niz neopadajući i nenegativan. Također, zbog toga što je $T_k < \infty$ P_0-g.s., za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, iz konstrukcije slijedi $\lim_n k_n = \infty$ P_0-g.s. Koristeći relaciju (2.27) imamo

$$\frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{n}{k_n} \leq \frac{T_{k_n+1}}{k_n} = \frac{T_{k_n+1}}{k_n+1}\frac{k_n+1}{k_n} \tag{2.28}$$

pa zbog $\lim_n k_n = \infty$ P_0-g.s. iz (2.19) i (2.28) po teoremu o sendviču imamo da je $\lim_n n/k_n = u$ P_0-g.s. Nadalje, iz definicije T_k i (2.27) slijedi da je $X_n < k_n + 1$, tj. $X_n \leq k_n$. S druge strane, zbog toga što se šetnja odvija po susjednim mjestima, šetač od trenutka kad je prvi put posjetio mjesto k_n do trenutka n može najviše za $n - T_{k_n}$ mjesta otići ulijevo. Dakle, vrijedi i $k_n - (n - T_{k_n}) \leq X_n$, tj. dobili smo da je

$$\frac{k_n - (n - T_{k_n})}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{k_n}{n}. \tag{2.29}$$

Desna nejednakost nam odmah povlači

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{u} = v \quad P_0\text{-g.s.} \tag{2.30}$$

Pretpostavimo sada da je $u < \infty$. Lijeva nejednakost u (2.29) povlači

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n - (n - T_{k_n})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{(n - T_{k_n})}{n} \\
&= \frac{1}{u} - 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{T_{k_n}}{n} = \frac{1}{u} - 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_{k_n}}{k_n} \frac{k_n}{n} \right) \\
&= \frac{1}{u} - 1 + u \cdot \frac{1}{u} = v \quad P_0\text{-g.s.}
\end{aligned}$$

Dakle, ako je $u < \infty$, dobili smo $\lim_n \frac{X_n}{n} = v$ P_0-g.s.
Pretpostavimo da je $u = \infty$. Tada je $v = 0$ pa je zbog (2.30) dovoljno pokazati da je $\liminf_n \frac{X_n}{n} \geq 0$. Sjetimo se Leme 1.4 i jednostavne simetrične slučajne šetnje $(Y_n)_{n\geq 0}$ takve da je $Y_n \leq X_n$, za svaki $n \geq 0$. Sada imamo

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}. \tag{2.31}$$

Međutim, $(Y_n)_{n\geq 0}$ je jednostavna simetrična slučajna šetnja i može se zapisati kao zbroj nezavisnih Rademacherovih varijabli (poprimaju vrijednosti 1 i -1 s vjerojatnosti 1/2), tj. $Y_0 = 0$ i

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} R_k,$$

gdje su R_k nezavisne Rademacherove slučajne varijable. Po jakom zakonu velikih brojeva sada slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_k = E_0[R_1] = 0 \quad P_0\text{-g.s.} \tag{2.32}$$

Iz (2.31) i (2.32) sada slijedi $\liminf_n \frac{X_n}{n} \geq 0$ P_0-g.s., a time zbog (2.30) i $\lim_n \frac{X_n}{n} = 0$ P_0-g.s. Time smo dokazali tvrdnju teorema i u slučaju $u = \infty$. □

2.4 Monotonost

Sljedećih nekoliko tvrdnji govori o monotonosti nekih zanimljivih događaja s obzirom na početno mjesto šetnje i s obzirom na "monotonost" okoline koju ćemo kasnije jasnije definirati.

Sljedeća tvrdnja ugrubo govori da na fiksnoj okolini što desnije krećemo, to je veća vjerojatnost da prije dođemo do nekog desnog zacrtanog cilja, nego da dođemo do lijevog zacrtanog cilja. Tvrdnja je intuitivno potpuno jasna jer se krećemo u okolini koja nas potiče na kretanje udesno, a počinjemo se kretati sve bliže i bliže željenom desnom cilju.

Lema 2.22 (Monotonost s obzirom na početno mjesto)**.** *Neka je $\omega \in \Omega_+$ i neka su $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ i $x, z \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ te neka je $t \in [0, \infty]$. Ako je $x \leq y_1 \leq y_2 \leq z$, onda je*

$$P_{y_1,\omega}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \leq P_{y_2,\omega}(T_z \leq (T_x \wedge t)), \tag{2.33}$$

gdje definiramo $T_{-\infty} = T_\infty = \infty$.

Dokaz. Tvrdnju je dovoljno dokazati za $z < \infty$. Naime, ukoliko tvrdnja vrijedi za sve $z < \infty$, onda iz $\lim_{z\to\infty} T_z = T_\infty$ po neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajući niz događaja imamo

$$\begin{aligned} P_{y_1,\omega}(T_\infty \leq (T_x \wedge t)) &= \lim_{z\to\infty} P_{y_1,\omega}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \\ &\leq \lim_{z\to\infty} P_{y_2,\omega}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \\ &= P_{y_2,\omega}(T_\infty \leq (T_x \wedge t)). \end{aligned}$$

Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x < y_1 < y_2 < z$. U slučaju $y_1 = y_2$ tvrdnja je trivijalna. Dakle, dokazujemo za $y_1 < y_2$. U slučaju $x = y_1$ lijeva strana od (2.33) jednaka je 0 pa nejednakost očito vrijedi. Sličnim argumentom možemo pretpostaviti da je $y_2 < z$ jer je za $y_2 = z$ desni izraz u (2.33) jednak 1 pa tvrdnja vrijedi. Nadalje, dovoljno je pretpostaviti da je $y_2 = y_1 + 1$. Zaista, ukoliko tvrdnja vrijedi za $y_2 = y_1 + 1$, onda za općenite y_1 i y_2 imamo

$$P_{y_1,\omega}(T_z \le (T_x \wedge t)) \le P_{y_1+1,\omega}(T_z \le (T_x \wedge t)) \le \cdots \le P_{y_2,\omega}(T_z \le (T_x \wedge t)).$$

Dakle, tvrdnju dokazujemo za $z < \infty$, $x \neq y_1$, $y_2 \neq z$ i $y_2 = y_1 + 1$.

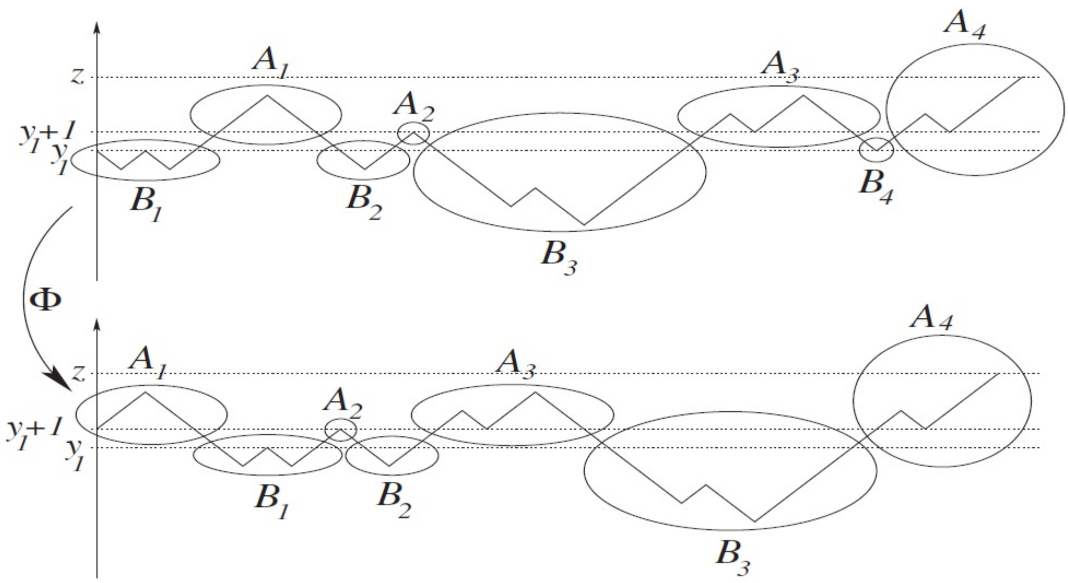
Označimo s $\Pi^z_{y_1}$ skup svih konačnih šetnji po susjednim mjestima koje kreću iz y_1, završavaju u z i ne posjećuju z negdje u sredini šetnje. Dakle, za $\pi \in \Pi^z_{y_1}$ vrijedi $\pi = (x_n)_{n\le m}$ za neki $m \in \mathbb{N}$, gdje je $(x_n)_{n\le m}$ susjedni niz brojeva takvih da vrijedi $x_0 = y_1$, $x_m = z$, i $x_n \neq z$, za $0 \le n < m$. Svaka takava šetnja π može se jedinstveno zapisati kao ulančanje (konkatenacija)

$$\pi = (B_1, A_1, B_2, A_2, \dots, B_{j(\pi)}, A_{j(\pi)}), \quad \text{za neki } j(\pi) \in \mathbb{N},$$

gdje su A_i i B_i manji putevi po susjednim mjestima takvi da A_i sadrži samo mjesta strogo veća od y_1, a B_i sadrži samo mjesta koja su manja ili jednaka y_1. Naime, B_1 je šetnja od y_1 sve dok ne dođemo do $y_1 + 1$ (bez $y_1 + 1$). U $y_1 + 1$ počinje A_1 i traje sve dok se ne vratimo u y_1 (bez y_1). Tada počinje B_2 i tako dalje. Taj proces traje sve dok ne dođe šetnja $A_{j(\pi)}$, za neki $j(\pi) \in \mathbb{N}$, koja se ne vrati u y_1, nego dođe u z i time je završeno ulančavanje (za grafički prikaz pogledati gornji dio Slike 2.1).
Definirajmo funkciju $\Phi : \Pi^z_{y_1} \to \Pi^z_{y_1+1}$ s

$$\Phi(B_1, A_1, B_2, A_2, \dots, B_j, A_j) := (A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{j-1}, B_{j-1}, A_j).$$

Zbog jednistvenosti prikaza od $\pi \in \Pi^z_{y_1}$ u smislu ulančavanja funkcija, Φ je dobro definirana, a zbog definicija od A_i i B_i šetnja $(A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{j-1}, B_{j-1}, A_j)$ počinje u $y_1 + 1$, ide po susjednim mjestima, završava u z i nigdje u sredini ne posjeti z, tj. slika joj je zaista u $\Pi^z_{y_1+1}$. Pogledajmo na Slici 2.1 kako djeluje Φ.



Slika 2.1: Slika prikazuje djelovanje funkcije Φ (Izvor: [11])

Nadalje, svaki $\pi' \in \Pi^z_{y_1+1}$ također možemo zapisati kao $\pi' = (A_1, B_1, \ldots, B_{j-1}, A_j)$ pa za svaki $\pi \in \Pi^z_{y_1}$ takav da je $\pi = (B_1, A_1 \ldots, B_{j-1}, A_{j-1}, B, A_j)$, gdje je B proizvoljna šetnja na mjestima manjim ili jednakim od y_1 koja počinje i završava u y_1, vrijedi $\Phi(\pi) = \pi'$. Primijetimo da je zaista $\pi \in \Pi^z_{y_1}$ jer B_i-ovi počinju i završavaju u y_1, A_i-ovi počinju i završavaju u $y_1 + 1$, osim A_j koji završava u z. U sredini se ne dolazi do z jer je B šetnja ispod $y_1 < z$, i očuvano je svojstvo šetanja po susjednim mjestima. Dakle, $\pi \in \Pi^z_{y_1}$. Time smo dobili da je Φ surjekcija.
Primijetimo da funkcija Φ prvo izbacuje posljednji dio šetnje π na mjestima manjim ili jednakim od y_1, tj. izbacuje B_j, a na ostalim dijelovima šetnje preostalim od π mijenja poredak šetnji A_i i B_i za sve $i < j$.
Promatrajmo vjerojatnost $P_{y_1,\omega}(H_{T_z} = \pi)$ što je umnožak faktora $\omega(x, i)$ i $(1 - \omega(x, i))$. Poslužimo se Slikom 2.1 da bismo izračunali tu vjerojatnost. Tu vjerojatnost možemo izračunati tako da redom množimo faktore iz šetnje B_1, a zatim množimo s $\omega(y_1, b_1)$ jer idemo iz y_1 u $y_1 + 1$, gdje b_1 označava koliko smo puta dosada bili u y_1. Nakon toga množimo faktorima iz šetnje A_1, i zatim s $(1 - \omega(y_1 + 1, a_1))$ (a_1 označuje koliko smo puta dosada bili u $y_1 + 1$) jer prelazimo iz $y_1 + 1$ u y_1. Tako radimo analogno sve do $B_{j(\pi)}$ i $A_{j(\pi)}$. Međutim, možemo i drugačije, tj. možemo pratiti put šetnje $\Phi(\pi)$. Prvo množimo s faktorima iz šetnje A_1, pa onda s $\omega(y_1 + 1, a_1)$ (primijetimo da se a_1 nije promijenio), zatim množimo s faktorima iz šetnje B_1, zatim s $\omega(y_1, b_1)$ (b_1 je također isti), zatim faktore iz A_2,

i tako sve dok ne pomnožimo s faktorima iz šetnje $A_{j(\pi)}$. Sada još samo moramo množiti s odgovarajućim faktorima iz šetnje $B_{j(\pi)}$ jer je ona izbrisana u $\Phi(\pi)$. Za ovaj način množenja ključno je da funkcija Φ čuva relativni poredak mjesta u izletima ispod y_1 (što su B_i-ovi) i čuva relativni poredak mjesta u izletima strogo iznad y_1 (što su A_i-ovi). Ovakvo tumačenje vjerojatnosti $P_{y_1,\omega}(H_{T_z} = \pi)$ može se formalno zapisati kao

$$P_{y_1,\omega}(H_{T_z} = \pi) = P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} = \Phi(\pi)) \cdot P_{y_1,\omega'}(H_{T_{y_1+1}} = (B_{j(\pi)}, y_1 + 1)), \tag{2.34}$$

gdje je $\omega' = \psi(\omega, (B_1, A_1, \ldots, B_{j(\pi)-1}, A_{j(\pi)-1}, y_1))$ i to vrijedi za svaki $\pi \in \Pi^z_{y_1}$. U (2.34) smo prvim izrazom s desne strane pokupili dijelove šetnje π u redoslijedu $(A_1, B_1, \ldots, B_{j(\pi)-1}, A_{j(\pi)})$, a drugi faktor nam označuje izbačenu šetnju $(B_{j(\pi)})$ i njenu vjerojatnost iz originalnog niza.

Nadalje, primijetimo da je skup $\Pi^z_{y_1}$ prebrojiv. Naime, za svaki $m \in \mathbb{N}$ definirajmo $\Pi^z_{y_1}[m] := \{\pi \in \Pi^z_{y_1} | \text{duljina od } \pi \text{ je } m\}$ i oni su očito konačni jer se šetnja odvija po susjednim mjestima. Imamo

$$\Pi^z_{y_1} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Pi^z_{y_1}[m]$$

pa je $\Pi^z_{y_1}$ prebrojiv. Zbog toga možemo prosumirati izraz (2.34) po svim mogućim šetnjama $B_{j(\pi)}$ koje počinju i završavaju u y_1 (njih ima također prebrojivo jer su to dijelovi šetnji u $\Pi^z_{y_1}$) te dobiti

$$P_{y_1,\omega}\left(H_{T_z} \in \Phi^{-1}(\{\Phi(\pi)\})\right) = P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} = \Phi(\pi)), \quad \forall \pi \in \Pi^z_{y_1}.$$

Budući da je Φ surjektivna, za sve $\pi \in \Pi^z_{y_1+1}$ iz prethodne jedndžbe imamo

$$P_{y_1,\omega}\left(H_{T_z} \in \Phi^{-1}(\pi)\right) = P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} = \pi). \tag{2.35}$$

Označimo s $\Pi^z_{y_1}(x,t)$ sve šetnje $\pi \in \Pi^z_{y_1}$ koje ne posjećuju x i traju najviše t koraka. U novim oznakama (2.33) može biti zapisan kao

$$P_{y_1,\omega}(H_{T_z} \in \Pi^z_{y_1}(x,t)) \leq P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} \in \Pi^z_{y_1+1}(x,t)). \tag{2.36}$$

Zato desna strana od (2.33) može biti napisana kao

$$P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} \in \Pi^z_{y_1+1}(x,t)) = P_{y_1,\omega}\left(H_{T_z} \in \Phi^{-1}(\Pi^z_{y_1}(x,t))\right), \tag{2.37}$$

gdje jednakost dobijemo iz (2.35) i prebrojivnosti skupa $\Pi^z_{y_1}(x,t)$. Budući da djelovanje funkcije Φ ne čini šetnju dužom niti šetnja postane takva da posjeti x u sredini šetnje imamo

$$\Phi\left(\Pi^z_{y_1}(x,t)\right) \subseteq \Pi^z_{y_1+1}(x,t). \tag{2.38}$$

Sada iz (2.38) slijedi

$$\Pi^z_{y_1}(x,t) \subseteq \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\Pi^z_{y_1}(x,t)\right)\right) \subseteq \Phi^{-1}\left(\Pi^z_{y_1+1}(x,t)\right), \tag{2.39}$$

gdje smo prvu skupovnu nejednakost dobili iz činjenice da za svaku funkciju f i A podskup domene od f vrijedi $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
Iz (2.39) sada slijedi

$$\begin{aligned} P_{y_1,\omega}(H_{T_z} \in \Pi^z_{y_1}(x,t)) &\leq P_{y_1,\omega}\left(H_{T_z} \in \Phi^{-1}\left(\Pi^z_{y_1+1}(x,t)\right)\right) \\ &\overset{(2.37)}{=} P_{y_1+1,\omega}(H_{T_z} \in \Pi^z_{y_1}(x,t)), \end{aligned}$$

a zbog (2.36) to je upravo ono što smo trebali dokazati. □

Definicija 2.23. *Neka su $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_+$. Kažemo da je ω_1 manja ili jednaka od ω_2 i pišemo $\omega_1 \leq \omega_2$ ako vrijedi $\omega_1(x,i) \leq \omega_2(x,i)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$ i svaki $i \in \mathbb{N}$.*

Sljedeća lema ugrubo govori da povećavanjem okoline u smislu prethodne definicije šetnja ne usporava, tj. povećavanjem okoline s većom vjerojatnosti prije dođemo do desnog cilja, nego do lijevog.

Lema 2.24 (Monotonost s obzirom na okolinu)**.** *Neka su $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_+$ takvi da je $\omega_1 \leq \omega_2$. Neka su $x, z \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ i $y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x \leq y \leq z$ i neka je $t \in [0, \infty]$. Tada vrijedi*

$$P_{y,\omega_1}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \leq P_{y,\omega_2}(T_z \leq (T_x \wedge t)). \tag{2.40}$$

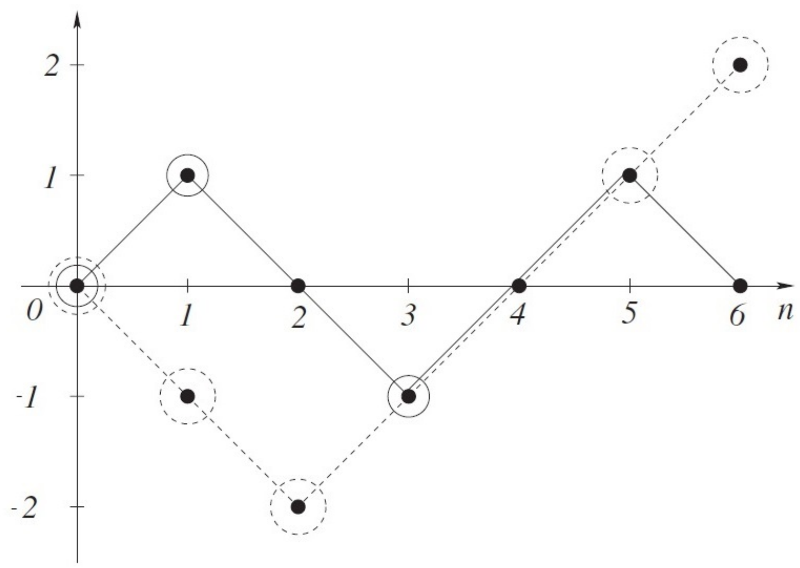
Tvrdnja ove leme intuitivno je jasna kao i tvrdnja prošle leme. Međutim, vidjet ćemo da nije lagana za dokazati. Klasična tehnika sparivanja, slična onoj iz Leme 1.4, ne daju traženi rezultat. Prije nego dokažemo lemu, uvjerimo se da tehnika sparivanja ne daje ploda.

Primjer 2.25. *Neka su $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_+$ takve da je $\omega_j(x,1) = p_j$ i $\omega_j(x,i) = 1/2$ ($j = 1,2$), za sve $x \in \mathbb{Z}$ i sve $i \geq 2$, s time da je $1/2 < p_1 < p_2 < 1$. Dakle, vrijedi $\omega_1 \leq \omega_2$. Pokušajmo kao i prije upariti šetnje na ω_1 i ω_2.*
Neka je $(U_n)_{n\geq 0}$ niz nezavisnih uniformno distribuiranih slučajnih varijabli na $[0,1]$. Slično kao i u Lemi 1.4 definiramo šetnje $(X^{(1)}_n)_{n\geq 0}$ na ω_1 i $(X^{(2)}_n)_{n\geq 0}$ na ω_2 na sljedeći način. Stavimo $X^{(1)}_0 = X^{(2)}_0 = 0$. Ako šetnja $(X^{(j)}_n)_{n\geq 0}$ ($j = 1,2$) u trenutku n prvi put posjeti mjesto na kojem se nalazi, onda se kreće za jedno mjesto udesno ako i samo ako je $U_n < p_j$ (u suprotnom se kreće za jedno mjesto ulijevo). Ako je šetnja već bila na mjestu na kojem se nalazi, onda se kreće za jedno mjesto udesno ako i samo ako je $U_n < 1/2$ (u suprotnom se kreće za jedno mjesto ulijevo). Ovime smo očito definirali dvije multi-ERW šetnje na

okolinama ω_1 i ω_2. Međutim, ne vrijedi $X_n^{(1)} \leq X_n^{(2)}$ gotovo sigurno. Naime, vrijedi da je $X_6^{(1)} > X_6^{(2)}$ na događaju

$$\left\{ (U_n)_{n=0}^5 \in \langle p_1, p_2 \rangle \times \langle p_2, 1 \rangle \times \langle \frac{1}{2}, p_1 \rangle \times \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \times \langle \frac{1}{2}, p_1 \rangle \right\},$$

koji ima pozitivnu vjerojatnost (i ona iznosi $\frac{1}{4}(p_2 - p_1)(1 - p_2)(p_1 - 1/2)(p_1 - 1/2)$). Pogledajmo Sliku 2.2 da vidimo kako se šetnje kreću na gornjem događaju.



Slika 2.2: Na slici je prikazan put šetnji iz Primjera 2.25. $(X_n^{(1)})_n$ je prikazan iscrtkanim linijama, a $(X_n^{(2)})_n$ punim linijama (Izvor: [11])

Dokaz Leme 2.24. Slično kao i u prethodnoj lemi, kada je $y = z$ ili $y = x$, tvrdnja očito vrijedi. Zato pretpostavljamo da je $x < y < z$. Nadalje, tvrdnju je dovoljno dokazati kada je $t < \infty$ jer za $t = \infty$ tvrdnja slijedi iz neprekidnosti vjerojatnosti po konačnim t. Dakle, tvrdnju dokazujemo za konačni t. Primijetimo da do vremena t šetač može doći do mjesta koja su za najviše $\lfloor t \rfloor$ koraka udaljena od početnog y. Također, na mjestu koje je udaljeno za manje od $\lfloor t \rfloor$ koraka od y šetač može pojesti najviše $\lfloor t \rfloor$ kolačića. Dakle utjecaj

na vjerojatnosti u (2.40) ima samo konačno mnogo kolačića iz ω_1 i ω_2 i zato možemo pretpostaviti da se ω_1 i ω_2 razlikuju samo na konačno mnogo kolačića.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi kada se ω_1 i ω_2 razlikuju za jedan kolačić. Neka se ω_1 i ω_2 razlikuju za m kolačića i neka je dan niz okolina $\omega_1 = \omega_{1,0} \leq \omega_{1,1} \leq \omega_{1,2} \leq \cdots \leq \omega_{1,m} = \omega_2$ tako da se $\omega_{1,i}$ i $\omega_{1,i+1}$ razlikuju u samo jednom kolačiću. Budući da po pretpostavci tvrdnja leme vrijedi za okoline koje se razlikuju u jednom kolačiću, imamo

$$\begin{aligned} P_{y,\omega_1}(T_z \leq (T_x \wedge t)) &\leq P_{y,\omega_{1,1}}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \leq \dots \\ &\leq P_{y,\omega_{1,m-1}}(T_z \leq (T_x \wedge t)) \\ &\leq P_{y,\omega_2}(T_z \leq (T_x \wedge t)). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnju je dovoljno dokazati kada se okoline ω_1 i ω_2 razlikuju na jednom kolačiću što u nastavku i pretpostavljamo. Neka je (v, j) mjesto i broj kolačića na kojem se okoline eventualno razlikuju. Taj kolačić nazivamo u nastavku kritični kolačić. Budući da nas zanima vjerojatnost događaja $\{T_z \leq (T_x \wedge t)\}$ (a ta je vjerojatnost suma vjerojatnosti svih mogućih šetnji iz y koje posjete z prije vremena t i prije posjeta mjestu x), bitni su kolačići samo između x i z pa možemo pretpostaviti da vrijedi $x < v < z$.
Neka je S vrijeme j-tog dolaska na mjesto v. S je očito vrijeme zaustavljanja i označuje vrijeme kada šetač dolazi do kritičnog kolačića. Za $i = 1, 2$ imamo

$$\begin{aligned} P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t)) &= P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t), S < T_z) + P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t), S \geq T_z) \\ &= P_{y,\omega_i}(S < T_z \leq (T_x \wedge t)) + P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S)) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Primijetimo da $P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S))$ iz gornjeg izraza ne ovisi o $\omega_i(v, j)$ pa vrijedi $P_{y,\omega_1}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S)) = P_{y,\omega_2}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S))$. Naime, slično kao i prije $P_{y,\omega_i}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S))$ je suma vjerojatnosti svih šetnji iz y takvih da posjete mjesto z prije vremena t, prije nego dođu do x, i prije nego dođu j-ti put u v. Iz toga slijedi da $\omega_i(v, j)$ nije član vjerojatnosti takvih šetnji te zaista vrijedi $P_{y,\omega_1}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S)) = P_{y,\omega_2}(T_z \leq (T_x \wedge t \wedge S))$.
Zbog toga i zbog (2.41) je dovoljno dokazati da je $P_{y,\omega_i}(S < T_z \leq (T_x \wedge t))$ monotono po i.

Koristeći Markovljevo svojstvo i činjenicu da su S, T_x i T_z vremena zaustavljanja računamo

$$
\begin{aligned}
P_{y,\omega_i}(S < T_z \le (T_x \wedge t)) &= \sum_{s=0}^{t-1} P_{y,\omega_i}(S < T_z \le (T_x \wedge t), S = s) \\
&= \sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[P_{y,\omega_i}(s < T_z \le (T_x \wedge t), S = s|\mathcal{F}_s)] \\
&= \sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[E_{y,\omega_i}[\mathbf{1}_{\{s<T_z\le(T_x\wedge t)\}} \underbrace{\mathbf{1}_{\{S=s\}}}_{\in\mathcal{F}_s} |\mathcal{F}_s]] \\
&= \sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[E_{y,\omega_i}[\mathbf{1}_{\{s<T_z\le(T_x\wedge t)\}}|\mathcal{F}_s]\mathbf{1}_{\{S=s\}}] \\
&= \sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[P_{y,\omega_i}(s < T_z \le (T_x \wedge t)|H_s); S = s] \\
&= \sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[P_{v,\psi(\omega_i,H_s)}(T_z \le (T_x \wedge (t-s))); S = s],
\end{aligned}
$$

gdje zadnju jednakost imamo jer na $\{S = s\}$ H_s završava u v. Dakle, potrebno je dokazati da je izraz

$$\sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_i}[P_{v,\psi(\omega_i,H_s)}(T_z \le (T_x \wedge (t-s))); S = s] \tag{2.42}$$

monoton po i.
Primijetimo da na $\{S = s\}$ za $i \in \{1,2\}$ P_{y,ω_1}-g.s. vrijedi

$$
\begin{aligned}
P_{v,\psi(\omega_i,H_s)}(T_z \le (T_x \wedge (t-s))) =& (1-\omega_i(v,j))\, P_{v-1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))) \\
&+ \omega_i(v,j)\, P_{v+1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))),
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

gdje zbog definicije od ψ možemo pisati $\psi(\omega_i, H_{s+1})$ umjesto izraza $\psi(\omega_i,(H_s, v-1))$ i $\psi(\omega_i,(H_s, v+1))$ jer zadnji korak u šetnji nema utjecaja na promjenu okoline. Nadalje, (2.43) se može raspisati kao

$$
\begin{aligned}
&P_{v-1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))) \\
&\quad + \omega_i(v,j)\,[P_{v+1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))) \\
&\qquad - P_{v-1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1)))].
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

Po Lemi 2.22 s $y_1 = v-1$ i $y_2 = v+1$ imamo P_{y,ω_1}-g.s. (za $i = 1,2$)

$$P_{v-1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))) \le P_{v+1,\psi(\omega_i,H_{s+1})}(T_z \le (T_x \wedge (t-s-1))) \tag{2.45}$$

pa $\omega_i(v, j)$ množi nešto pozitivno u izrazu (2.44).
Primijetimo da je na $\{S = s\}$

$$\psi(\omega_1, H_{s+1}) = \psi(\omega_2, H_{s+1}) \tag{2.46}$$

jer je u trenutku $S = s$ šetač j-ti put u v i nakon toga pojede kritični kolačić i time briše jedinu razliku između ω_1 i ω_2. Budući da je $\omega_1(v, j) \leq \omega_2(v, j)$, na $\{S = s\}$ zbog (2.44) uvažavajući (2.46) vrijedi P_{y,ω_1}-g.s.

$$P_{v,\psi(\omega_1,H_s)}(T_z \leq (T_x \wedge (t-s))) \leq P_{v,\psi(\omega_2,H_s)}(T_z \leq (T_x \wedge (t-s))).$$

Posljedično, (2.42) za $i = 1$ je manje ili jednako od

$$\sum_{s=0}^{t-1} E_{y,\omega_1}[P_{v,\psi(\omega_2,H_s)}(T_z \leq (T_x \wedge (t-s))); S = s]. \tag{2.47}$$

Međutim, na $\{S = s\}$ je distribucija od H_s po P_{y,ω_1} jednaka distribuciji od H_s po P_{y,ω_2} jer kritični kolačić nema utjecaja. Isto vrijedi i za funkciju $\mathbf{1}_{\{S=s\}}$ pa time dobivamo da je izraz

$$P_{v,\psi(\omega_2,H_s)}(T_z \leq (T_x \wedge (t-s)))\mathbf{1}_{\{S=s\}}$$

jednako distribuiran po P_{y,ω_1} i po P_{y,ω_2}. Zato u (2.47) možemo zamijeniti E_{y,ω_1} s E_{y,ω_2} bez da promijenimo vrijednost samog izraza. Dakle, (2.42) za $i = 1$ je manje ili jednako od (2.42) za $i = 2$ i time smo pokazali tvrdnju leme. □

Napomena 2.26. *Iz prethodne leme direktno slijedi sljedeća tvrdnja. Neka su kao i u prethodnoj lemi $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_+$ takvi da je $\omega_1 \leq \omega_2$. Također, $x, z \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ i $y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x \leq y \leq z$ i neka je $t \in [0, \infty]$. Tada vrijedi*

$$P_{y,\omega_1}(T_z > (T_x \wedge t)) \geq P_{y,\omega_2}(T_z > (T_x \wedge t)).$$

Tvrdnju smo dobili komplementiranjem tvrdnje iz prethodne leme i te dvije tvrdnje su očito ekvivalentne. Ova verzija će nam također biti korisna u tvrdnjama koje ćemo dokazati.

Sljedeća dva teorema koja dokazujemo zapravo su korolari prethodnih lema. Prvi teorem govori da je vjerojatnost povratka u 0 monotona s obzirom na okolinu.

Teorem 2.27. *Vjerojatnost $P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)$ monotono je rastuća s obzirom na okolinu ω.*

Dokaz. Za svaki $\omega \in \Omega_+$ imamo

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) &= P_{0,\omega}(X_1 = 1)P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0 | X_1 = 1) \\ &= \omega(0,1)P_{1,\psi(\omega,(0,1))}(\forall n > 0 : X_n > 0) \\ &= \omega(0,1)P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0), \end{aligned} \tag{2.48}$$

gdje zadnju jednakost imamo po Lemi 1.8 jer je $\omega(x) = \psi(\omega, (0,1))(x)$, za sve $x \geq 1$, i jer vrijedi

$$\{X_0 = 1\} \cap \{\forall n > 0 : X_n > 0\} = \underbrace{\{X_0 = 1\} \cap \{(X_{\tau_{1,m}}, X_{\tau_{1,m+1}}) \neq (1,1), \forall m > 0\}}_{\in \sigma((X_{\tau_{1,m}})_{m\geq 1})}.$$

Primijetimo da je $P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) = P_{1,\omega}(T_\infty \leq (T_0 \wedge \infty))$, a to je po Lemi 2.24 za $x = 0$, $y = 1$, $z = t = \infty$ monotono po ω što s monotonosti faktora $\omega(0,1)$ daje tvrdnju teorema. □

Sljedeći teorem tvrdi da je brzina šetnje monotona s obzirom na okolinu.

Teorem 2.28. *Neka je $\bar{\mathbb{P}}$ vjerojatnost na $\Omega_+ \times \Omega_+$ takva da je*

$$\bar{\mathbb{P}}\left(\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_+ \times \Omega_+ | \omega_1 \leq \omega_2\}\right) = 1$$

i neka su $(\omega_i(x))_{x\geq 0}$ stacionarni i ergodski za $i = 1,2$. Ako s v_i ($i = 1,2$) označimo $\bar{\mathbb{P}} \times P_{0,\omega_i}$-g.s. limes $\lim_n X_n/n$ (iz Teorema 2.21), onda je $v_1 \leq v_2$.

Dokaz. Prisjetimo se prvo pomoćne tvrdnje. Ako je X nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tada vrijedi

$$E[X] = \int_0^\infty P(X \geq t)dt. \tag{$\star$}$$

Ako je X omeđena s C, onda je $P(X \geq t) = 0$ za $t > C$ pa za omeđene nenegativne varijable vrijedi slična relacija u kojoj gornju granicu integrala u (☆) mijenjamo s C.

Sada dokazujemo tvrdnju teorema. Primijetimo da je $|X_n/n| \leq 1$ $\bar{\mathbb{P}} \times P_{0,\omega_i}$-g.s. ($i = 1,2$) pa za $i = 1,2$ po Lebesgueovom teoremu dominirane konvergencije imamo

$$\begin{aligned}
v_i &= \bar{\mathbb{E}}[E_{0,\omega_i}[\lim_{n\to\infty} X_n/n]] = \bar{\mathbb{E}}[E_{0,\omega_i}[\lim_{k\to\infty} X_{T_k}/T_k]] \\
&= \lim_{k\to\infty} \bar{\mathbb{E}}[E_{0,\omega_i}[X_{T_k}/T_k]] = \lim_{k\to\infty} \bar{\mathbb{E}}[E_{0,\omega_i}[k/T_k]] \\
&\overset{(☆)}{=} \lim_{k\to\infty} \bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^1 P_{0,\omega_i}\left(\frac{k}{T_k} \geq t\right) dt\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \bar{\mathbb{E}}\left[\int_0^1 P_{0,\omega_i}\left(T_k \leq k/t\right) dt\right] \qquad (\bigstar)
\end{aligned}$$

Po Lemi 2.24 za $y = 0, x = -\infty$ i $z = k$ za svaki $t \in \langle 0, 1\rangle$ slijedi

$$\begin{aligned} P_{0,\omega_1}(T_k \le k/t) &= P_{0,\omega_1}\left(T_k \le \left(T_{-\infty} \wedge \frac{k}{t}\right)\right) \\ &\le P_{0,\omega_2}\left(T_k \le \left(T_{-\infty} \wedge \frac{k}{t}\right)\right) \\ &= P_{0,\omega_2}(T_k \le k/t)\,. \end{aligned}$$

Ako primijenimo prethodnu nejedakost u (★), dobijemo $v_1 \le v_2$. □

2.5 Šetnje bez uzbuđenja nakon drugog kolačića

Na kraju ovog diplomskog rada vraćamo se Primjeru 0.1, tj. šetnji u kojoj je okolina dana s $\omega(x) = (p, p, 1/2, 1/2, \dots)$, za svaki $x \in \mathbb{Z}$, gdje je $p \in [1/2, 1]$. Budući da šetnja u primjeru ima specifičnu okolinu, može se reći nešto više o brzini šetnje i o vjerojatnosti da se nikada ne vratimo u početno mjesto.

U Primjeru 2.16 izveli smo zaključak da je šetnja iz Primjera 0.1 povratna ako i samo ako je $p \le 3/4$. Očito, za $p \le 3/4$ vjerojatnost da se nikada ne vratimo u početno mjesto jednaka je 0. Također, ako je $p = 1$, onda znamo da je vjerojatnost da se nikada ne vratimo u početno mjesto jednaka 1 jer je to degenerirana šetnja u kojoj se stalno krećemo nadesno. Pitamo se što vrijedi u slučaju $p \in \langle 3/4, 1\rangle$. Sljedeći teorem, koji je u općenitijoj formulaciji, daje odgovor na to pitanje.

Teorem 2.29. *Neka je niz $(\omega(x))_{x\ge 0}$ niz nezavisan i jednako distribuiran po $\mathbb{P}$. Ako je $\omega(0, i) = 1/2$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $i \ge 3$ i ako je $\mathbb{P}(\omega(0, 2) = 1/2) < 1$, onda vrijedi*

$$P_0[\forall n > 0 : X_n > 0] = \frac{\mathbb{E}[\omega(0, 1)](\mathbb{E}[\delta^0] - 1)_+}{\mathbb{E}[\omega(0, 1)(2\omega(0, 2) - 1)]}, \tag{2.49}$$

gdje je $(x)_+ := \max\{x, 0\}$.

Prije nego krenemo s dokazom, treba primijetiti da je nezavisan i jednako distribuiran niz $(\omega(x))_{x\ge 0}$ stacionaran i ergodski. Naime, stacionarnost dobijemo odmah iz nezavisnosti i jednake distribuiranosti. Za ergodičnost primijetimo da za svaki invarijantan skup A, koji je po (2.1) oblika

$$A = \{\omega(x)_{x\ge K} \in B\}, \quad \forall K \ge 0, \quad \text{za neki izmjerivi } B,$$

vrijedi $A \in \mathcal{F}^K := \sigma(\omega(K), \omega(K+1), \omega(K+2), \dots)$, za svaki $K \geq 0$. To znači da je

$$A \in \mathcal{F}^\infty := \bigcap_{K=0}^{\infty} \mathcal{F}^K.$$

$\mathcal{F}^\infty$ zovemo repnom σ-algebrom niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$. Ukoliko je niz $(\omega(x))_{x\geq 0}$ nezavisan, za njega vrijedi tzv. Kolmogorovljev zakon 0-1 koji kaže da je svaki $A \in \mathcal{F}^\infty$ vrijedi $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ (vidi [8, Teorem 12.5.]). Posebno, svaki invarijantan skup je vjerojatnosti ili 0 ili 1, a to znači da je niz $(\omega(x))_{x\geq 0}$ ergodski.
Dakle, nezavisan i jednako distribuiran niz $(\omega(x))_{x\geq 0}$ je stacionaran i ergodski pa možemo primjenjivati rezultate koje smo prije dokazali.

Dokaz Teorema 2.29. Promatrajmo izraz $\delta^0 - D^0_\infty$ koji označuje otklon spremljen u svim kolačićima na mjestu 0 koji nisu pojedeni u šetnji. S jedne strane, iz (2.11) imamo da je $E_0[D^0_\infty] = \min\{\mathbb{E}[\delta^0], 1\}$ pa slijedi

$$E_0[\delta^0 - D^0_\infty] = \mathbb{E}[\delta^0] - \min\{\mathbb{E}[\delta^0], 1\} = (\mathbb{E}[\delta^0] - 1)_+. \tag{2.50}$$

S druge strane, zbog toga što je prvi kolačić na mjestu 0 pojeden P_0-g.s. odmah na početku i zbog toga što samo prva dva kolačića na mjestu 0 imaju utjecaja na δ^0, imamo P_0-g.s.

$$\delta^0 - D^0_\infty = (2\omega(0,2) - 1)\mathbf{1}_{\{\forall n>0: X_n>0\}}.$$

Ako djelujemo očekivanjem E_0 na prošlu relaciju, dobijemo

$$\begin{aligned} E_0[\delta^0 - D^0_\infty] &= E_0[(2\omega(0,2) - 1)\mathbf{1}_{\{\forall n>0: X_n>0\}}] \\ &= \mathbb{E}[(2\omega(0,2) - 1)E_{0,\omega}[\mathbf{1}_{\{\forall n>0: X_n>0\}}]] \\ &= \mathbb{E}[(2\omega(0,2) - 1)P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Kombinirajući relacije (2.50) i (2.51), imamo

$$(\mathbb{E}[\delta^0] - 1)_+ = \mathbb{E}[(2\omega(0,2) - 1)P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)]. \tag{2.52}$$

Prisjetimo se relacije (2.48) koja kaže

$$P_{0,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0) = \omega(0,1)P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0). \tag{2.53}$$

Primijetimo da je $P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)$ funkcija od $(\omega(x))_{x\geq 1}$. Naime, događaj $\{\forall n > 0 : X_n > 0\}$ je iz σ-algebre generirane s $(X_{\tau_{1,m}})_{m\geq 1}$, tj. bitno je samo što se događa na mjestima iznad 1. Zato je $P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)$ izmjerivo preslikan $(\omega(x))_{x\geq 1}$. Zbog ove činjenice i zbog pretpostavke nezavisnosti niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$ sada zaključujemo da su $\omega(0)$ i $P_{1,\omega}(\forall n > 0 : X_n > 0)$ nezavisne po $\mathbb{P}$.

Imamo dvije posljedice ove nezavisnosti. Prva posljedica je da se desna strana od (2.52) može napisati pomoću (2.53) kao

$$\mathbb{E}[(2\omega(0,2)-1)\omega(0,1)P_{1,\omega}(\forall n>0 : X_n>0)]$$
$$= \mathbb{E}[(2\omega(0,2)-1)\omega(0,1)]\, P_1[\forall n>0 : X_n>0]$$

iz čega imamo

$$P_1[\forall n>0 : X_n>0] = \frac{(\mathbb{E}[\delta^0]-1)_+}{\mathbb{E}[(2\omega(0,2)-1)\omega(0,1)]}. \tag{2.54}$$

Druga posljedica nezavisnosti je da ako uzmemo očekivanje $\mathbb{E}$ u (2.53), dobijemo

$$P_0[\forall n>0 : X_n>0] = \mathbb{E}[\omega(0,1)]P_1[\forall n>0 : X_n>0]. \tag{2.55}$$

Sada kombiniranjem (2.54) i (2.55) dobivamo

$$P_0[\forall n>0 : X_n>0] = \frac{\mathbb{E}[\omega(0,1)]\,(\mathbb{E}[\delta^0]-1)_+}{\mathbb{E}[\omega(0,1)(2\omega(0,2)-1)]}.$$

□

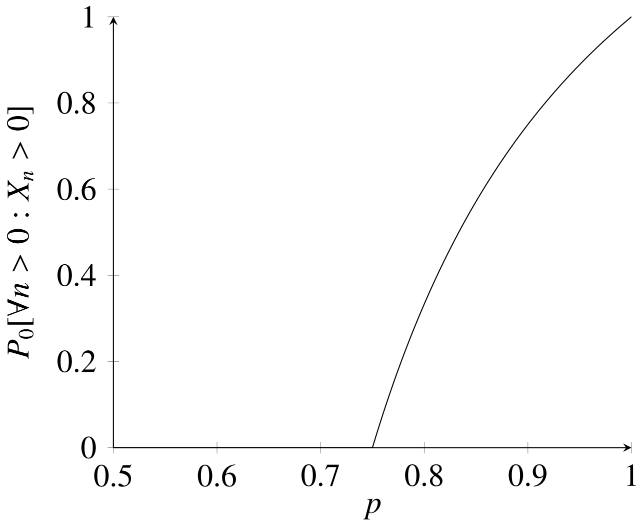
Primjer 2.30. *Pomoću prethodnog teorema sada možemo izračunati vjerojatnost da se nikada ne vratimo u početno mjestu u šetnji opisanoj u Primjeru 0.1. Dakle, imamo da je* $\omega(x) = (p,p,1/2,1/2,\dots)$ $\mathbb{P}$*-g.s., za svaki* $x \geq 0$ *i neki* $p \in [1/2,1]$. *Za* $p = 1/2$ *šetnja je jednostavna simetrična slučajna šetnja pa je vjerojatnost da se nikada ne vratimo na početno mjesto jednaka 0. Iz* (2.49) *za* $p > 1/2$ *sada slijedi*

$$P_0[\forall n>0 : X_n>0] = \frac{\mathbb{E}[\omega(0,1)](\mathbb{E}[\delta^0]-1)_+}{\mathbb{E}[\omega(0,1)(2\omega(0,2)-1)]} = \frac{p(4p-3)_+}{p(2p-1)} = \frac{(4p-3)_+}{2p-1}.$$

Primijetimo da zbog $p > 1/2$ *vrijedi* $2p-1>0$, *zato se prethodno može napisati kao*

$$P_0[\forall n>0 : X_n>0] = \left(\frac{4p-3}{2p-1}\right)_+ = \left(2-\frac{1}{2p-1}\right)_+$$

što je izraz kojeg smo izrekli u Primjeru 0.1. Pogledajmo na Slici 2.3 kako u ovoj šetnji izgleda odnos parametra p i vjerojatnosti $P_0[\forall n>0 : X_n>0]$.



Slika 2.3: Slika prikazuje ovisnost parametra p i vjerojatnosti da se nikada ne vratimo na početno mjesto u šetnji iz Primjera 0.1

Sljedeći teorem daje nam odgovor na pitanje koja je brzina šetnje u Primjeru 0.1, ali tvrdnja vrijedi i za nešto općenitije okoline.

Teorem 2.31. *Neka je* $(\omega(x))_{x\geq 0}$ *stacionaran i ergodski po* $\mathbb{P}$*. Neka je* $\omega(0,i) = 1/2$ $\mathbb{P}$*-g.s. za svaki* $i \geq 3$ *i neka je* $\mathbb{P}(\omega(0,1) < 1,\ \omega(1,1) < 1) > 0$*. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad P_0\text{-}g.s.$$

Dokaz. Prema pretpostavci $\mathbb{P}(\omega(0,1) < 1,\ \omega(1,1) < 1) > 0$ slijedi da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\mathbb{P}(\omega(0,1) < 1-\varepsilon,\ \omega(1,1) < 1-\varepsilon) > 0$. Naime, iz

$$\{\omega(0,1) < 1,\ \omega(1,1) < 1\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{\omega(0,1) < 1 - \frac{1}{n},\ \omega(1,1) < 1 - \frac{1}{n}\right\},$$

gdje je unija rastuća, slijedi da je

$$0 < \mathbb{P}(\omega(0,1) < 1,\ \omega(1,1) < 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega(0,1) < 1 - \frac{1}{n},\ \omega(1,1) < 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Iz toga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathbb{P}\left(\omega(0,1) < 1 - \frac{1}{n_0},\ \omega(1,1) < 1 - \frac{1}{n_0}\right) > 0$. Sada možemo uzeti $\varepsilon = 1/n_0$.
Neka je ε takav da vrijedi $\mathbb{P}(\omega(0,1) < 1-\varepsilon,\ \omega(1,1) < 1-\varepsilon) > 0$. Za svaki $j \in \mathbb{N}$ definirajmo skup s

$$A_j := \{\omega(j-1,1) < 1-\varepsilon,\ \omega(j,1) < 1-\varepsilon\}.$$

Zbog stacionarnosti niza $(\omega(x))_{x\geq 0}$, imamo da je $\mathbb{P}(A_j) =: \alpha > 0$, za sve $j \in \mathbb{N}$.
Da bismo dokazali tvrdnju teorema, po Teoremu 2.21 dovoljno je dokazati da je $u = \sum_{j=1}^{\infty} P_0[T_{j+1} - T_j \geq j] = \infty$. Ovo ćemo dokazati analizom najgoreg slučaja na sljedeći način. Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definirajmo $\overline{\omega_j}$ s

$$\overline{\omega_j}(x) := \begin{array}{llll} (1, & 1/2, & 1/2, 1/2, \ldots), & x < j-1 \\ (1/2, & 1/2, & 1/2, 1/2, \ldots), & x = j-1 \\ (1-\varepsilon, & 1, & 1/2, 1/2, \ldots), & x = j \\ (1, & 1, & 1/2, 1/2, \ldots), & x > j. \end{array}$$

Neka je sada $j \geq 1$. Koristeći jako Markovljevo svojstvo imamo

$$\begin{aligned} & P_0[T_{j+1} - T_j \geq j] \\ & \quad \geq \mathbb{E}[P_{0,\omega}(T_{j+1} - T_j \geq j)\mathbf{1}_{A_j}] \\ & \quad \geq \mathbb{E}[P_{0,\omega}(T_{j+1} - T_j \geq j, X_{T_{j-1}+1} = j-2)\mathbf{1}_{A_j}] \\ & \quad = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{0,\omega}(T_{j+1} - T_j \geq j, \underbrace{X_{T_{j-1}+1} = j-2}_{\in \mathcal{F}_{T_j}} | \mathcal{F}_{T_j})]\mathbf{1}_{A_j}] \\ & \quad = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{0,\omega}(T_{j+1} - T_j \geq j | \mathcal{F}_{T_j}); X_{T_{j-1}+1} = j-2]\mathbf{1}_{A_j}] \\ & \quad = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{j,\psi(\omega,H_{T_j})}(T_{j+1} \geq j); X_{T_{j-1}+1} = j-2]\mathbf{1}_{A_j}] \\ & \quad = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{j,\psi(\omega,H_{T_j})}(T_{j+1} \geq j); X_{T_{j-1}+1} = j-2, A_j]]. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Primijetimo da je

$$P_{j,\psi(\omega,H_{T_j})}(T_{j+1} \geq j) = P_{j,\omega_j'}(T_{j+1} \geq j), \tag{2.57}$$

gdje je $\omega_j'(x) := \psi(\omega, H_{T_j})(x)$ za $x \geq 0$, a $\omega_j'(x) := \overline{\omega}_j(x)$ za $x < 0$. Zaista, $P_{j,\psi(\omega,H_{T_j})}(T_{j+1} < j)$ ovisi samo o okolini na mjestima većim 0. Naime, ako smo posjetili mjesto $j+1$ strogo prije vremena j, onda krećući iz j nismo nikako mogli doći do 0 i vratiti se u $j+1$, a da to traje kraće od j koraka. Budući da se okoline $\psi(\omega, H_{T_j})$ i ω_j' podudaraju na mjestima većim od 0, imamo $P_{j,\psi(\omega,H_{T_j})}(T_{j+1} < j) = P_{j,\omega_j'}(T_{j+1} < j)$, a onda iz komplementa dobijemo i (2.57).
Nadalje, primijetimo da je

$$\omega_j' \leq \overline{\omega}_j \quad P_0\text{-g.s. na događaju } \{\omega(j,1) < 1-\varepsilon, X_{T_{j-1}+1} = j-2\}. \tag{2.58}$$

Zaista, odmah iz definicije od ω_j' slijedi da je $\omega_j'(x) = \overline{\omega}_j(x)$ za $x < 0$ pa (2.58) vrijedi za $x < 0$. Budući da je $j \geq 1$ i da vrijedi $\overline{\omega}_j(x) = (1, 1, 1/2, 1/2, \ldots)$ za $x > j$, iz definicije od ω_j' slijedi $\omega_j'(x) = \psi(\omega, H_{T_j})(x) \leq \overline{\omega}_j(x)$, za sve $x > j$ pa (2.58) vrijedi i za $x > j$. Za $x = j$, koristeći da smo na događaju gdje je $\omega(j, 1) < 1 - \varepsilon$, imamo

$\omega_j'(j) = \psi(\omega, H_{T_j})(j) = \omega(j) \le \overline{\omega}_j(j)$. Za $0 \le x < j-1$ primijetimo da šetač prilikom šetnje od 0 do j pojede sve prve kolačiće na mjestima između 0 i $j-1$ (uključujući i mjesta 0 i $j-1$) i time ostavlja najviše po jedan kolačić na svakom mjestu koji je jači od $1/2$ (a to je onda, ako postoji, sljedeći kolačić). Zbog $\overline{\omega}_j(x) = (1, 1/2, 1/2, \dots)$, za $0 \le x < j-1$, sada imamo $\omega_j'(j) = \psi(\omega, H_{T_j})(j) \le \overline{\omega}_j(j)$, za $0 \le x < j-1$. Konačno, za $x = j-1$, zbog toga što smo na događaju $\{X_{T_{j-1}+1} = j-2\}$, mjesto $j-1$ bude posjećeno barem dvaput prije nego šetnja dođe do j (prvi put u vremenu T_{j-1}, nakon kojeg se krećemo ulijevo, a posljednji put netom prije T_j). Time smo dobili da je i $\omega_j'(j-1) = \overline{\omega}_j(j-1)$ pa tvrdnja (2.58) vrijedi za sve $x \in \mathbb{Z}$.

Iz (2.57), (2.58) i Napomene 2.26 za $x = -\infty$, $y = j$, $z = j+1$ i $t = j-1$ slijedi da je (2.56) veće ili jednako od

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j); X_{T_{j-1}+1} = j-2, A_j]] \\ = \mathbb{E}[E_{0,\omega}[P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j); X_{T_{j-1}+1} = j-2]; A_j].\end{aligned}$$

Budući da $\overline{\omega}_j$ ne ovisi o $P_{0,\omega}$ ni o $\mathbb{P}$, $P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j)$ je konstanta i prethodni izraz jednak je

$$P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j)\, \mathbb{E}[P_{0,\omega}(X_{T_{j-1}+1} = j-2); A_j].$$

Po pretpostavci o okolini ω znamo da je $P_{0,\omega}(X_{T_{j-1}+1} = j-2) = 1 - \omega(j, 1) \ge \varepsilon$ na A_j. Iz definicije skupa A_j znamo da je $\mathbb{P}(A_j) = \alpha$, a po Napomeni 2.2 imamo da je $P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j) = P_{0,\overline{\omega}_0}(T_1 \ge j)$. Dakle,

$$P_{j,\overline{\omega}_j}(T_{j+1} \ge j)\, \mathbb{E}[P_{0,\omega}(X_{T_{j-1}+1} = j-2); A_j] \ge P_{0,\overline{\omega}_0}(T_1 \ge j)\, \varepsilon\, \alpha.$$

Ovim računom dobili smo da je $P_0[T_{j+1} - T_j \ge j] \ge P_{0,\overline{\omega}_0}(T_1 \ge j)\, \varepsilon\, \alpha$. Budući da želimo dokazati da je $u = \infty$, dovoljno je dokazati da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{0,\overline{\omega}_0}(T_1 \ge j) = E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] = \infty.$$

Promotrimo jedan od mogućih načina zapisivanja varijable T_1:

$$T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{-k-1} \wedge T_1 - T_{-k}) \mathbf{1}_{\{T_{-k} < T_1\}}. \tag{2.59}$$

Dokažimo gornju jednakost. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da krećemo iz 0, a ne da krećemo P_0-g.s. iz 0. Neka je $w \in \Omega$. Budući da krećemo iz 0, postoji jedinstveni $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $T_{-k}(w) < T_1(w) < T_{-k-1}(w)$. $T_1(w)$, tj. vrijeme koje šetnja provede između početka u 0 sve do prvog dolaska u 1, možemo izračunati tako da zbrojimo vrijeme koje šetnja provede između prvih dolazaka na mjesta 0 i -1, zatim zbrojimo vrijeme između prvih dolazaka u -1 i -2, zatim -2 i -3, sve do $-k+1$ i $-k$. Posljedenje vrijeme koje zbrojimo treba biti vrijeme koje provedemo između prvih dolazaka na mjesta $-k$ i 1. Znači da vrijedi

$$T_1(w) = (T_{-1}(w) - T_0(w)) + \cdots + (T_{-k}(w) - T_{-k+1}(w)) + (T_1(w) - T_{-k}(w)).$$

Budući da je $T_1(w) > T_{-l}(w)$ za $l \leq k$ i $T_1(w) < T_{-l}(w)$ za $l > k$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
(T_{-l-1}(w) - T_{-l}(w)) &= (T_{-l-1}(w) \wedge T_1(w) - T_{-l}(w))\mathbf{1}_{\{T_{-l}(w)<T_1(w)\}} && \text{za } l \leq k-1,\\
(T_1(w) - T_{-k}(w)) &= (T_{-l-1}(w) \wedge T_1(w) - T_{-l}(w))\mathbf{1}_{\{T_{-l}(w)<T_1(w)\}} && \text{za } l = k,\\
0 &= (T_{-l-1}(w) \wedge T_1(w) - T_{-l}(w))\mathbf{1}_{\{T_{-l}(w)<T_1(w)\}} && \text{za } l > k.
\end{aligned}$$

Time smo dobili

$$T_1(w) = \sum_{l=0}^{\infty}(T_{-l-1}(w) \wedge T_1 - T_{-l}(w))\mathbf{1}_{\{T_{-l}(w)<T_1(w)\}},$$

tj. (2.59) zaista vrijedi.
Sada zbog nenegativnosti sumanada u (2.59) imamo

$$\begin{aligned}
E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{0,\overline{\omega}_0}[(T_{-k-1} \wedge T_1 - T_{-k}); T_{-k} < T_1]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E_{0,\overline{\omega}_0}[E_{0,\overline{\omega}_0}[(T_{-k-1} \wedge T_1 - T_{-k})|\mathcal{F}_{T_{-k}}]; T_{-k} < T_1]. \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

Za $k \geq 2$, uvjetno očekivanje $E_{0,\overline{\omega}_0}[(T_{-k-1} \wedge T_1 - T_{-k})|\mathcal{F}_{T_{-k}}]$ na $\{T_{-k} < T_1\}$ je po jakom Markovljevom svojstvu jednako

$$\begin{aligned}
E_{-k,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}})}[T_{-k-1} \wedge T_1] &= 1 + E_{-k+1,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}+1})}[T_{-k-1} \wedge T_1] \qquad (2.61)\\
&\geq E_{-k+1,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}+1})}[T_{-k-1} \wedge T_1]\\
&= 2(k-1). \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

(2.61) vrijedi jer je po definiciji $\overline{\omega}_0(-k, 1) = 1$. Da bismo opravdali (2.62), primijetimo da šetnja od vremena 0 do vremena $T_{-k} + 1$ pojede sve prve kolačiće između 0 i $-k$, a to su jedini kolačići između 0 i $-k$ koji su jači od $1/2$. Zato je okolina $\psi(\overline{\omega}_0, H_{T_{-k}+1})$ na mjestima između 0 i $-k$ zapravo okolina jednostavne simetrične slučajne šetnje, a izraz $E_{-k+1,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}+1})}[T_{-k-1} \wedge T_1]$ označuje očekivano vrijeme dolaska u 1 ili $-k-1$ za jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju koja kreće iz $-k+1$ i ono iznosi $2(k-1)$ (vidi [4, Chapter 14.3

(3.5)]).
Ukoliko (2.62) uvrstimo u (2.60), dobijemo

$$E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] \geq \sum_{k=2}^{\infty} 2(k-1) P_{0,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_1). \tag{2.63}$$

Primijetimo da za svaki $k \geq 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} P_{0,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_1) = P_{0,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_1 | X_1 = -1) \underbrace{(1 - \overline{\omega}_0(0,1))}_{=\varepsilon} \\ + \underbrace{P_{0,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_1 | X_1 = 1)}_{=0} \overline{\omega}_0(0,1). \end{aligned} \tag{2.64}$$

i da je

$$\begin{aligned} P_{0,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_1 | X_1 = -1) &= P_{-1,\psi(\overline{\omega}_0,(0,-1))}(T_{-k} < T_1) \\ &= P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_0), \end{aligned} \tag{2.65}$$

gdje zadnju jednakost imamo jer je $\overline{\omega}_0(0,2) = 1$. Naime, okoline $\overline{\omega}_0$ i $\psi(\overline{\omega}_0,(0,-1))$ se podudaraju na negativnim mjestima. Ako krećući iz -1 na okolini $\psi(\overline{\omega}_0,(0,-1))$ dođemo u 0, onda zbog $\overline{\omega}_0(0,2) = 1$ idemo sigurno desno u 1. To je jednako vjerojatno tome da krećemo iz -1 na okolini $\overline{\omega}_0$ i dođemo u 0.
Uvrštavajući (2.64) i (2.65) u (2.63) imamo

$$E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] \geq 2\varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_0).$$

Budući da harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, da bismo dobili $E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] = \infty$, dovoljno je pokazati da za svaki $k \geq 2$ vrijedi

$$P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_0) = \frac{1}{(k-1)k}. \tag{2.66}$$

Dokazujemo indukcijom po k. Zbog $P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-2} < T_0) = 1 - \omega(-1,1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$ pa (2.66) vrijedi za $k = 2$. Pretpostavimo da (2.66) vrijedi za neki k. Budući da je $\{T_{-k} < T_0\} \subseteq \{T_{-k-1} > T_0\}$, koristeći jako Markovljevo svojstvo imamo

$$\begin{aligned} P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k-1} < T_0) &= P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k-1} < T_0, T_{-k} < T_0) \\ &= E_{-1,\overline{\omega}_0}[P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k-1} < T_0, \underbrace{T_{-k} < T_0}_{\in \mathcal{F}_{T_{-k}}} | \mathcal{F}_{T_{-k}})] \\ &= E_{-1,\overline{\omega}_0}[P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k-1} < T_0 | \mathcal{F}_{T_{-k}}); T_{-k} < T_0] \\ &= E_{-1,\overline{\omega}_0}[P_{-k,\psi(\overline{\omega}_0, H_{T_{-k}})}(T_{-k-1} < T_0); T_{-k} < T_0]. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Budući da je $\overline{\omega}_0(-k, 1) = 1$, imamo

$$P_{-k,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}})}(T_{-k-1} < T_0) = P_{-k+1,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}+1})}(T_{-k-1} < T_0) = \frac{k-1}{k+1}, \tag{2.68}$$

gdje za zadnju jednakost argumentiramo isto kao i prije. Naime, šetnja od vremena 0 do vremena $T_{-k}+1$ pojede sve prve kolačiće između 0 i $-k$, a time i sve kolačiće koji su jači od $1/2$. Dakle, imamo šetnju na okolini koja je između mjesta $-k$ i 0 jednaka kao okolina za jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju. Zato je po (1.1) $P_{-k+1,\psi(\overline{\omega}_0,H_{T_{-k}+1})}(T_{-k-1} < T_0) = \frac{k-1}{k+1}$. Uvrštavajući (2.68) u (2.67) i koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$\begin{aligned} P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k-1} < T_0) &= E_{-1,\overline{\omega}_0}\left[\frac{k-1}{k+1}; T_{-k} < T_0\right] \\ &= \frac{k-1}{k+1} P_{-1,\overline{\omega}_0}(T_{-k} < T_0) \\ &= \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{(k-1)k} \\ &= \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije sada imamo da (2.66) vrijedi za svaki $k \geq 2$. Time smo dokazali da je $E_{0,\overline{\omega}_0}[T_1] = \infty$, a onda i $u = \infty$ pa slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad P_0\text{-g.s.}$$

□

Napomena 2.32. *Prošli teorem povlači da je brzina šetnje iz Primjera 0.1 0 za $p < 1$. Očito, za $p = 1$ je $X_n = n$ P_0-g.s. za sve $n \in \mathbb{N}_0$ pa je brzina šetnje u tom slučaju 1.*
Možemo ići i korak dalje, tj. pitati se što možemo reći o brzini šetnje za šetnju iz Primjera 2.18. Okolina u toj šetnji dana je s

$$\omega(x) = (\underbrace{p, \ldots, p}_{k \text{ puta}}, 1/2, 1/2, \ldots), \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

gdje je $k \geq 3$ i $p \in [1/2, 1]$. Primijetimo da je za ovakvu šetnju $\delta^0 = k(2p-1)$. Ukoliko izbacimo degenerirani slučaj kada je $p = 1$, pitamo se možemo li naći $k \in \mathbb{N}_0$ i $p \in [1/2, 1\rangle$ tako da je brzina šetnje strogo pozitivna. Prvo su Mountford, Pimentel i Valle u [6] pokazali da za svaki $p \in [1/2, 1\rangle$ postoji k_0 takav da je za svaki $k > k_0$ brzina šetnje strogo pozitivna. Također, pokazali su i da je brzina šetnje 0 ako je $k(2p-1) < 2$. Nakon toga Basdevant i Singh su u [1] (u nešto općenitijoj formulaciji) pokazali da je brzina šetnje strogo veća od 0 ako i samo ako je $k(2p-1) > 2$.

Bibliografija

[1] A. L. Basdevant i A. Singh, *On the speed of a cookie random walk*, Probability Theory and Related Fields **141** (2008), 625–645.

[2] I. Benjamini i D.B. Wilson, *Excited random walk*, Electron. Comm. Probab **8** (2003), 86–92.

[3] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, Cambridge university press, 2010.

[4] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications: volume I*, John Wiley & Sons New York, 1968.

[5] E. Šimon, *Ergodski teorem i stacionarni procesi*, diplomski rad, PMF - matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2016.

[6] T. Mountford, L.P.R. Pimentel i G. Valle, *On the speed of the one-dimensional excited random walk in the transient regime*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **2** (2006), 279–296.

[7] J.R. Norris, *Markov chains*, Cambridge university press, 1998.

[8] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[9] Fred Solomon, *Random walks in a random environment*, Ann. Probability **3** (1975), 1–31.

[10] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, 2010, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp17-predavanja.html`, posjećena 19.6.2017.

[11] M. Zerner, *Multi-excited random walks on integers*, Probability theory and related fields **133** (2005), 98–122.

Sažetak

U diplomskom radu bavili smo se vrstom slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$ u neslučajnim i slučajnim okolinama. Šetnja se u engleskoj literaturi naziva *multi-excited random walk on integers* ili popularnije *cookie random walk*. To je šetnja s pomacima za jedno mjesto udesno ili ulijevo u kojoj vjerojatnost smjera kretanja ovisi o tome koliko puta smo se do tog trenutka našli u trenutnom mjestu. Također, zahtijevamo da je vjerojatnost pomaka nadesno veća nego vjerojatnost pomaka nalijevo. U radu je glavni cilj bio pokazati nužne i dovoljne uvjete za povratnost šetnje, dati izraz za brzinu šetnje i pokušati te rezultate primijeniti na šetnji iz Primjera 0.1. U prvom poglavlju uveli smo glavne oznake u radu i bavili smo se svojstvima šetnje na fiksoj okolini. Ovo poglavlje je zapravo priprava za glavne rezultate u slučajnim okolinama. U drugom poglavlju bavili smo se šetnjama u slučajnim okolinama, tj. okolinama u kojima su i vjerojatnosti smjera kretanja slučajne. Ipak, ograničili smo se na stacionarne i ergodske okoline. U Teoremu 2.14 dokazujemo glavnu tvrdnju rada, nužne i dovoljne uvjete za povratnost i prolaznost šetnje te zatim koristimo teorem na specifičnim šetnjama. Također, bavimo se i brzinom slučajne šetnje koju definiramo kao limes omjera pomaka i vremena (tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$) te pokazujemo da je brzina gotovo sigurno dobro definirana za svaku šetnju. Na samom kraju rada vraćamo se šetnji iz Primjera 0.1 te računamo točnu formulu za vjerojatnost da se nikada ne vratimo u početno mjesto (Teorem 2.29) i dokazujemo da je brzina šetnje za $p < 1$ jednaka 0 (Teorem 2.31).

Summary

This master's thesis deals with a special class of random walks on $\mathbb{Z}$ in random and non-random media called *multi-excited random walks on integers*, more popularly known as *cookie random walks*. In this walk a nearest neighbor random walk on $\mathbb{Z}$ is launched in such a way that at each site the random walker has a drift to the right, the strength of which depends on the environment at that site and how many times the walker has visited the site before. The main goal of the thesis is to give necessary and sufficient conditions for recurrence of the walk, to give expression for the speed of the walk, and to apply those results to the walk described in Example 0.1. In Chapter 1 the basic notations are introduced and the properties of the walk in fixed environment are analyzed. This chapter is a preparation for the main results in random environments. The second chapter deals with walks in random environments, i.e. the probability of moving to the right also has some distribution. It is assumed that the environments are stationary and ergodic. Theorem 2.14 contains the proof of the main result of the thesis, a criterion for recurrence and transience, and this result is applied to some specific random walks. The next topic of this thesis is the existence of speed of random walks, which is defined as a limit of the ratio of the displacement from the starting position and current running time of a walk, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$ if we start from 0. It is proven that such speed exists almost surely for every walk (Theorem 2.21). The last part of the thesis returns to the walk from Example 0.1. The exact formula for the probability that the walker will never return to 0 (Theorem 2.29) is computed and it is proven that the walk in Example 0.1 has zero speed when $p < 1$, even when the walk is transient (Theorem 2.31).

Životopis

Rođen sam 9.10.1993. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završio sam u Brckovljanima, a opću gimnaziju u Sesvetama. Tijekom srednjoškolskog školovanja uspješno sam se natjecao u matematici, poznavanju hrvatskoga jezika, fizici, i dr., ali i u sportskim aktivnostima. Paralelno s osnovnom i srednjom školom završio sam osnovnu glazbenu školu u Sesvetama i srednju glazbenu školu GU Elly Bašić u Zagrebu u klasi prof. Ante Čaglja gdje sam osvajao i međunarodne nagrade. Godine 2012. upisujem preddiplomski studij inženjerske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, a pri kraju studija nagrađen sam od Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh. Godine 2015. nastavljam školovanje na diplomskom studiju Matematičke statistike, a pri završetku studija nagrađen sam za izniman uspjeh od Matematičkog odsjeka i Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Tijekom studija bio sam sudionik međunarodne matematičke ljetne škole (*Modern Mathematics: International Summer School for Students*). Također, držao sam demonstrature iz Diskretne matematike i Mjere i integrala, a predstavljao sam i fakultet na sveučilišnim natjecanjima u plivanju.