Topološke baze normiranih prostora

Bobinac, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2017

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Bobinac

TOPOLOŠKE BAZE NORMIRANIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U radu će biti prikazani glavni rezultati o topološkim bazama normiranih, odnosno Banachovih prostora. Kako je svaki Banachov prostor ujedno vektorski prostor, za njega postoji Hamelova baza. No, ona bi nas ograničila na korištenje konačnih linearnih kombinacija vektora, što nije pogodno kada radimo sa beskonačnodimenzionalnim prostorima. U beskonačnodimenzionalnom Banachovom prostoru X prirodnije je raditi sa topološkom bazom, koju ćemo skraćeno nazivati samo bazom, odnosno nizom $(x_n)_n$ iz X za koji vrijedi da za svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(a_n(x))_n$ takav da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$. Nadalje, proučavat ćemo topološke baze u Banachovim prostorima umjesto u normiranima jer u njima svaki Cauchyjev niz konvergira dok, s druge strane, ništa ne gubimo jer svaki normirani prostor ima jedinstveno upotpunjenje koje je Banachov prostor.

Rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju će biti navedene osnovne definicije te osnovni rezultati iz teorije normiranih prostora pomoću kojih će biti pokazane tvrdnje u kasnijim poglavljima. U drugom poglavlju će biti izložene osnovne činjenice o bezuvjetnoj konvergenciji redova te će biti dana karakterizacija bezuvjetne konvergencije redova. U trećem poglavlju će biti definiran pojam topološke baze u Banachovim prostorima te će biti pokazana osnovna svojstva topoloških baza, poput neprekidnosti koeficijentnih funkcionala. Zatim će biti definiran trigonometrijski sustav, te slabe i slabe* baze u Banachovim prostorima. Potom će biti opisani različiti oblici nezavisnosti nizova, nakon toga osnovna svojstva biortogonalnih nizova te će na kraju biti pokazana dualnost između topoloških baza i njima biortogonalnih nizova. U četvrtom poglavlju će biti opisana važna klasa topoloških baza, a to su bezuvjetne baze. Bit će pokazana njihova osnovna svojstva i karakterizacija. Također, bit će definiran Schauderov sustav, koji je uvjetna baza za prostor $C[0, 1]$. U petom poglavlju će biti opisani bazama slični sustavi u Hilbertovim prostorima, odnosno Rieszove baze. Također će biti dana njihova karakterizacija, koja je ujedno i karakterizacija ograničenih bezuvjetnih baza u Hilbertovim prostorima.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i rezultati

1.1 Oznake

U radu su korištene standardne oznake. Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. $\mathbb{F}$ označava polje skalara, odnosno $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Za nizove ili redove sa nenavedenim granicama pretpostavlja se da su indeksirani po skupu $\mathbb{N}$, odnosno

$$(x_n) = (x_n)_n = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \ \sum x_n = \sum_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Korišten je i Kroneckerov delta simbol, koji je definiran sa

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } m = n, \\ 0, & \text{ako je } m \neq n. \end{cases}$$

1.2 Osnovni pojmovi teorije normiranih prostora

Definicija 1.2.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ *se naziva normiran prostor.*

Definicija 1.2.2. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0,\ \forall x \in X$;

(ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall x, y \in X$;

(iv) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,\ \forall x_1, x_2, y \in X$;

(v) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},\ \forall x, y \in X$

Uređen par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se naziva unitaran prostor.

Napomena 1.2.3. *Svaki unitaran prostor je normiran prostor. Naime, ako je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitaran prostor, može se pokazati da skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducira normu na X; preciznije, funkcija $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je norma na X.*

Definicija 1.2.4. *Polunorma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $p : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $p(x) \geq 0, \forall x \in X$;

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

Definicija 1.2.5. *Kažemo da su norme $\|\cdot\|$ i $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$, definirane na vektorskom prostoru X, ekvivalentne ako postoje $m, M > 0$ takvi da vrijedi $m\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq M\|x\|,\ \forall x \in X$.*

Definicija 1.2.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*

(a) Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq n \implies \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

U tom slučaju koristimo i oznaku $x_n \to x$, gdje se podrazumijeva da $n \to \infty$.

(b) Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq m, n \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definicija 1.2.7. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*

(a) *Kažemo da red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira (obično) i da mu je suma jednaka* $x \in X$ *ako parcijalne sume* $s_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$ *konvergiraju k* x*, odnosno preciznije, ako vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \|x - s_N\| = \lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{N} x_k\| = 0.$$

(b) *Kažemo da red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Definicija 1.2.8. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor zove se još i Hilbertov prostor.*

Definicija 1.2.9. *Kažemo da je normiran prostor* X *separabilan ako postoji prebrojiv skup* $S \subseteq X$ *čiji zatvarač, u oznaci* $\overline{S}$*, je jednak čitavom skupu* X*, to jest, takav da vrijedi* $\overline{S} = X$*. Tada se kaže još i da je* S *gust u (na)* X*.*

Propozicija 1.2.10. *Svaki normiran prostor* X *s topološkom bazom* $(b_n)_n$ *je separabilan.*

Dokaz. [1], Propozicija 1.4.9. □

Definicija 1.2.11. *Neka je* X *normiran prostor. Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na* X*,* $\mathbb{B}(X, \mathbb{F})$*, zove se dualni prostor prostora* X *i označava se s* X'*.*

Definicija 1.2.12. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori, te neka je* $L : X \to Y$ *operator. Djelovanje operatora* L *na elementu* $x \in X$ *označavamo sa* Lx *ili* $L(x)$*. Kažemo:*

- L *je linearan ako vrijedi:* $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),\ \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$*;*
- L *je antilinearan ako vrijedi:* $L(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} L(x) + \overline{\beta} L(y),\ \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$*;*
- L *je neprekidan u točki* $x_0 \in X$ *ako vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tako da } \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Lx - Lx_0\|_Y < \varepsilon;$$

- *Jezgra operatora* L *je* $KerL = \{x \in X : Lx = 0\}$*;*
- *Rang operatora* L *je dimenzija njegove slike, to jest,* $r(L) = dim(ImL)$*;*
- L *je funkcional ako je* $Y = \mathbb{F}$.

Nadalje pretpostavimo da je L *linearan. Kažemo:*

- L *je ograničen ako postoji konačan* $K \geq 0$ *tako da vrijedi:* $\|Lx\|_Y \leq K\|x\|_X,\ \forall x \in X$*;*

- *Operatorska norma, ili samo norma, operatora L je $||L|| = sup_{||x||_X=1}||Lx||_Y$;*
- *L je izometrija, ili L 'čuva normu', ako vrijedi: $||Lx||_Y = ||x||_X, \ \forall x \in X$;*
- *L je izometrički izomorfizam ako je linearan, bijektivan, i izometrija;*
- *X i Y su izometrički izomorfni, oznaka $X \cong Y$, ako postoji izometrički izomorfizam $L : X \to Y$.*

Propozicija 1.2.13. *Neka su X i Y normirani prostori i $L : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) L je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$;

(b) L je neprekidan na X;

(c) L je uniformno neprekidan na X;

(d) L je ograničen.

Dokaz. [1], Propozicija 1.3.2. □

Definicija 1.2.14. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(a) Kažemo da je linearan operator $T : X \to Y$ topološki izmorfizam ako je T bijekcija te ako su i T i T^{-1} neprekidni.

(b) Kažemo da su X i Y topološki izomorfni ako postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$.

Teorem 1.2.15. *Neka je X normiran prostor te neka je za svaki $x \in X$ definirano preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ sa*

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x), \ \ x^* \in X'.$$

Tada je $\hat{x}$ ograničen linearni funkcional na X', i njegova je operatorska norma dana sa

$$||\hat{x}||_{X''} = ||x||_X.$$

Nadalje, preslikavanje $\hat{}: X \to X''$, $x \mapsto \hat{x}$, je linearna izometrija prostora X i X''.

Dokaz. [2], Teorem 2.6. □

Definicija 1.2.16. *Neka je X Banachov prostor i X'' njegov bidual. Preslikavanje $\hat{}: X \to X''$ definirano sa $\hat{x}(x^*) = x^*(x), \forall x \in X, \forall x^* \in X'$, zovemo kanonsko ulaganje X u X''.*

Definicija 1.2.17. *Kaže se da je normiran prostor X refleksivan ako je $Im\hat{} = X$.*

Definicija 1.2.18. *Upotpunjenje normiranog prostora X je uređen par (Y, φ) pri čemu je Y Banachov prostor, a $\varphi : X \to Y$ je linearna izometrija takva da je $\overline{Im\varphi} = Y$.*

Teorem 1.2.19. *Neka je X normiran prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Postoji upotpunjenje od X.

(b) Ako je X unitaran prostor, njegovo upotpunjenje je Hilbertov prostor.

(c) Ako su (Y_1, φ_1) i (Y_2, φ_2) dva upotpunjenja od X, onda postoji jedinstven izometrički izomorfizam $\psi : Y_1 \to Y_2$ takav da vrijedi $\psi\varphi_1 = \varphi_2$.

Dokaz. [1], Teorem 1.4.2. □

Definicija 1.2.20. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T : X \to Y$ ograničen linearan operator. Operator $T^* \in \mathbb{B}(Y', X')$ za koji vrijedi*

$$\nu(Tx) = T^*\nu(x), \ \forall x \in X, \forall \nu \in Y', \tag{1.1}$$

zovemo adjungirani operator operatora T.

Teorem 1.2.21. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T : X \to Y$ ograničen linearan operator. Tada postoji jedinstven operator $T^* \in \mathbb{B}(Y', X')$ koji je adjungirani operator operatora T i vrijedi $\|T\| = \|T^*\|$.*

Dokaz. Fiksirajmo $\nu \in Y'$ i definirajmo $\mu : X \to \mathbb{F}$ sa

$$\mu(x) = \nu(Tx), x \in X,$$

to jest, $\mu = \nu \circ T$. Kako su ν i T linearni, slijedi da je i μ linearan. Nadalje, vrijedi

$$|\mu(x)| = |\nu(Tx)| \leq \|\nu\|_{Y'}\|Tx\|_Y \leq \|T\| \ \|x\|_X\|\nu\|_{Y'}$$

pa je

$$\|\mu\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X=1} |\mu(x)| \leq \|T\| \ \|\nu\|_{Y'} < \infty. \tag{1.2}$$

Dakle μ je ograničen, to jest, vrijedi $\mu \in X'$. Time je pokazano da smo za svaki $\nu \in Y'$ definirali funkcional $\mu \in X'$. Stoga možemo definirati operator $T^* : Y' \to X'$ formulom

$$T^*\nu = \mu.$$

T^* je očito linearan i prema 1.2 imamo

$$\|T^*\nu\|_{X'} = \|\mu\|_{X'} \leq \|T\| \ \|\nu\|_{Y'}.$$

Uzimanjem supremuma po svim jediničnim vektorima $\nu \in Y'$ dobivamo da je T^* ograničen i vrijedi $\|T^*\| \leq \|T\|$. Odaberimo sada proizvoljan $x \in X$ takav da je $\|x\|_X = 1$. Prema Korolaru 1.4.5 vrijedi

$$\|Tx\|_Y = \sup_{\|\nu\|_{Y'}=1} |\nu(Tx)|,$$

pri čemu se supremum postiže. Neka je $\nu \in Y'$ neki funkcional jedinične norme u kojem se postiže supremum. Tada imamo

$$\|Tx\|_Y = |\nu(Tx)| = |\mu(x)| = |T^*\nu(x)| \leq \|x\|_X \|T^*\nu\|_{X'} \leq \|x\|_X \|T^*\| \, \|\nu\|_{Y'} = \|x\|_X \|T^*\|.$$

Kako to vrijedi za svaki $x \in X$, slijedi da je $\|T\| \leq \|T^*\|$. Dakle, vrijedi $\|T\| = \|T^*\|$. Pretpostavimo sada da je $C \in \mathbb{B}(Y', X')$ neki drugi operator koji je također adjungirani operator operatora T. Tada vrijedi

$$T^*\nu(x) = C\nu(x), \forall x \in X, \forall \nu \in Y'$$

odakle slijedi da je $T^* = C$, to jest, adjungirani operator operatora T je jedinstven. □

1.3 Osnovni rezultati o Hilbertovim prostorima

Definicija 1.3.1. *Kažemo da su skalarni produkti $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i $(\cdot, \cdot)$ na Hilbertovom prostoru H ekvivalentni ako su norme inducirane njima, $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ i $|||\cdot|||^2 = (\cdot, \cdot)$, ekvivalentne norme.*

Definicija 1.3.2. *Neka je H Hilbertov prostor i $(e_n)_n$ niz u H.*

(a) $(e_n)_n$ je ortogonalan niz ako vrijedi $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ kad je $m \neq n$.

(b) $(e_n)_n$ je ortonormiran niz ako vrijedi $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

(c) Ortonormiran niz $(e_n)_n$ je ortonormirana baza za H ako svaki vektor $x \in H$ dopušta prikaz oblika $x = \sum \alpha_n e_n$ (obična konvergencija u normi prostora H), gdje je (α_n) niz skalara.

Teorem 1.3.3. *Neka je H unitaran prostor i $(e_n)_n$ ortonormiran niz u H. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(e_n)_n$ ortonormirana baza za H;

(b) $(e_n)_n$ fundamentalan niz u H;

(c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \ \forall x \in H$;

(d) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle, \ \forall x, y \in H$.

Dokaz. [1], Teorem 2.1.7. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je H Hilbertov prostor i $(e_n)_n$ ortonormiran niz u H, te neka je (α_n) niz skalara. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) Red $\sum \alpha_n e_n$ konvergira u H;

(b) Red $\sum \alpha_n e_n$ konvergira bezuvjetno u H;

(c) $(\alpha_n) \in \ell^2$, odnosno vrijedi $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Leftrightarrow (c)}$ [1], Propozicija 2.1.11.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Trivijalno.

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da red $\sum \alpha_n e_n$ konvergira u H. Pokazali smo da je to ekvivalentno sa $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Kako je to apsolutno konvergentan red realnih brojeva, po Teoremu 2.2.3 slijedi da on konvergira bezuvjetno. Neka je sada σ proizvoljna permutacija skupa $\mathbb{N}$. Vrijedi $\sum |\alpha_{\sigma(n)}|^2 < \infty$. Pokazali smo da je to ekvivaletno sa tvrdnjom da $\sum \alpha_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$ konvergira u H. Zbog proizvoljnosti permutacije σ, slijedi da red $\sum \alpha_n e_n$ konvergira bezuvjetno u H. Dakle, vrijedi tvrdnja (b). □

Teorem 1.3.5. *Svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu. Svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor je izometrički izomorfan s ℓ^2.*

Dokaz. [1], Teorem 2.1.9. □

Definicija 1.3.6. *Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $A \in \mathbb{B}(H)$ kažemo da je pozitivno semidefinitan i pišemo $A \geq 0$ ako je A hermitski i ako vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H$. Za $A, B \in \mathbb{B}(H)$ definiramo uređaj s $A \leq B \Leftrightarrow B - A \geq 0$.*

Teorem 1.3.7. *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathbb{B}(H)$, $A \geq 0$. Tada postoji jedinstven operator $B \in \mathbb{B}(H)$ takav da je $B \geq 0$ i $B^2 = A$. Ako za operator $C \in \mathbb{B}(H)$ vrijedi $AC = CA$, onda je i $BC = CB$.*

Dokaz. [1], Teorem 5.5.3. □

Teorem 1.3.8 (Orlicz)**.** *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ niz u H. Ako $\sum x_n$ konvergira bezuvjetno, onda je $(\|x_n\|)_n$ ℓ^2-niz, to jest, vrijedi $\sum \|x_n\|^2 < \infty$.*

Dokaz. [2], Teorem 3.16. □

Propozicija 1.3.9. *Neka je X unitaran prostor i $a \in X$. Tada je formulom $f_a(x) = \langle x, a\rangle,\ \forall x \in X$, zadan ograničen linearan funkcional na X.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i proizvoljne $x, y \in X$. Vrijedi

$$f_a(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, a \rangle = \langle \alpha x, a \rangle + \langle \beta y, a \rangle = \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle = \alpha f_a(x) + \beta f_a(y).$$

Dakle, f_a je linearan. Nadalje, za proizvoljan $x \in X$ vrijedi

$$|f_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \, \|a\|,$$

odakle slijedi $\|f_a\| \leq \|a\|$. Dakle, f_a je ograničen linearan funkcional na X. □

Teorem 1.3.10 (Rieszov teorem o reprezentaciji)**.** *Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H'$. Tada postoji jedinstven vektor $a \in H$ takav da vrijedi $f(x) = \langle x, a \rangle$, $\forall x \in H$, to jest, $f = f_a$.*

Dokaz. [1], Teorem 2.2.7. □

Korolar 1.3.11. *Neka je H Hilbertov prostor. Preslikavanje $\varphi : H \to H'$ definirano sa $\varphi(a) = f_a$ je antilinearan izometrički izomorfizam.*

Dokaz. [1], Korolar 2.2.9. □

Napomena 1.3.12. *Iz Teorema 1.3.10 slijedi da, ako je H Hilbertov prostor, možemo identificirati prostore H i H'.*

1.4 Hahn-Banachov teorem

Teorem 1.4.1 (Hahn - Banachov teorem za normirane prostore)**.** *Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki ograničen linearan funkcional $f_0 \in Y'$ postoji ograničen linearan funkcional $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Dokaz. [1], Teorem 4.1.5. □

Korolar 1.4.2. *Neka je X normiran prostor. Pretpostavimo da vrijedi:*

(i) *M je zatvoren potprostor od X;*

(ii) *$x_0 \in X \setminus M$;*

(iii) *$d = d(x_0, M) = inf\{\|x_0 - m\| : m \in M\}$.*

Tada postoji $f \in X'$ takav da je

$$f(x) = 1, \; f|_M = 0, \; i \; \|f\|_{X'} = \frac{1}{d}.$$

Dokaz. [2], Korolar 2.4. □

Korolar 1.4.3. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Tada je $(x_n)_n$ fundamentalan niz u X ako i samo ako vrijedi*

$$f \in X' \ i \ f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \implies f = 0.$$

Dokaz. [1], Korolar 4.2.5. □

Napomena 1.4.4. *Neka je X normiran prostor i $x^* \in X'$. Tada je operatorska norma od x^* dana sa*

$$\|x^*\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} |x^*(x)|.$$

Korolar 1.4.5 (Hahn - Banach)**.** *Neka je X Banachov prostor i $x \in X$. Tada vrijedi*

$$\|x\|_X = \sup_{x^* \in X', \|x^*\|_{X'} = 1} |x^*(x)|,$$

pri čemu se supremum postiže.

Dokaz. [2], Korolar 2.3. □

1.5 Princip uniformne ograničenosti

Teorem 1.5.1 (Princip uniformne ograničenosti)**.** *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$ proizvoljna familija operatora s X u Y. Pretpostavimo da za svaki $x \in X$ vrijedi $sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$. Tada je i $sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Dokaz. [1], Teorem 5.3.2. □

Teorem 1.5.2 (Banach - Steinhaus)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $A_n \in \mathbb{B}(X, Y)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ postoji za svaki $x \in X$, onda je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ i vrijedi $\|A\| \leq \sup_n \|A_n\| < \infty$.*

Dokaz. Kako je za svaki $x \in X$ $(A_n x)_n$ konvergentan niz u Banachovom prostoru Y, slijedi da je on ograničen. Stoga za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup_n \|A_n x\| < \infty$. Prema Teoremu 1.5.1, slijedi da je $\sup_n \|A_n\| < \infty$. Sada za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$\|Ax\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \sup_n \|A_n x\| \leq \sup_n \|A_n\| \, \|x\|.$$

Odavde slijedi tvrdnja. □

1.6 Teoremi o otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu

Teorem 1.6.1 (Teorem o inverznom preslikavanju)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ bijekcija. Tada je i A^{-1} ograničen operator.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.3. □

Teorem 1.6.2 (Teorem o otvorenom preslikavanju)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ surjekcija. Tada je A otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.3. □

Teorem 1.6.3 (Teorem o zatvorenom grafu)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ linearan operator sa zatvorenim grafom. Tada je A ograničen.*

Dokaz. [1], Teorem 6.1.3. □

1.7 Ostali pomoćni rezultati

Teorem 1.7.1 (Carathéodory)**.** *Konveksna ljuska skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$, u oznaci $conv(S)$, sastoji se od svih konveksnih kombinacija $n+1$ vektora iz S, to jest, vrijedi*

$$conv(S) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k : t_1, ..., t_{n+1} \geq 0, \sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1, x_1, ..., x_{n+1} \in S \Big\}.$$

Dokaz. [5], Teorem 10.3. □

Korolar 1.7.2. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka su $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve $n \in \{1, ..., N\}$. Tada postoje realni brojevi $c_k \geq 0$ i predznaci $\varepsilon_k^n = \pm 1$, za $k = 1, ..., N+1$ i $n = 1, ..., N$, takvi da vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1 \ i \ \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k^n c_k = \lambda_n \ za \ n = 1, ..., N.$$

Dokaz. Uzmimo $n = N$, $S = \{(\varepsilon^1, ..., \varepsilon^N) : \varepsilon^i = \pm 1, i = 1, ..., N\}$ i označimo $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$. Kako je $|\lambda_i| \leq 1$, vrijedi $\lambda \in conv(S)$. Prema Teoremu 1.7.1, postoje nenegativni realni brojevi $c_1, ..., c_{N+1}$ takvi da vrijedi $\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1$ i $\lambda = \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k c_k$, odnosno po komponentama, $\lambda_n = \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k^n c_k$, za $n = 1, ..., N$. □

Poglavlje 2

Sumabilnost i konvergencija redova

2.1 Sumabilne familije u normiranim prostorima

Definicija 2.1.1. *Usmjeren skup je uređen par* $(A, \leq)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije* $\leq$ *definirane na A za koju vrijedi:*

(i) $\alpha \leq \alpha, \forall \alpha \in A$;

(ii) $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma$;

(iii) Za sve $\alpha, \beta \in A$ *postoji* $\gamma \in A$ *sa svojstvom* $\alpha \leq \gamma$ *i* $\beta \leq \gamma$.

Primjer 2.1.2. *(a) Skup* $\mathbb{N}$ *sa svojim prirodnim uređajem je usmjeren skup.*

(b) Neka je S neprazan skup. Partitivni skup $\mathcal{P}(S)$ *je usmjeren relacijom* $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(c) Neka ja X normiran prostor, $x \in X$, *i* $\mathcal{O}(x)$ *skup svih otvorenih okolina točke x (dakle, svih otvorenih skupova u X koji sadrže točku x). Skup* $\mathcal{O}(x)$ *je usmjeren relacijom* $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$.

Definicija 2.1.3. *Neka je* $(A, \leq)$ *usmjeren skup. Svako preslikavanje* $x : A \to X$ *se naziva hiperniz u X. Običaj je, kao i kod nizova, da umjesto* $x(\alpha)$ *pišemo* x_α *i da hiperniz označavamo s* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Ako je X normiran prostor, kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *u X konvergira ako postoji* $x \in X$ *takav da*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \implies \|x - x_\alpha\| < \varepsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.
Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *u normiranom prostoru X je Cauchyjev ako vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \implies \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \varepsilon.$$

Propozicija 2.1.4. *U Banachovom prostoru svaki Cauchyjev hiperniz konvergira.*

Dokaz. [1], Propozicija 3.1.5. □

Napomena 2.1.5. *U daljnjem je J beskonačni indeksni skup. Za svaku danu familiju vektora x_j, $j \in J$, u normiranom prostoru X promatramo familiju $\mathcal{F}$ svih konačnih podskupova od J usmjerenu inkluzijom: za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ pisat ćemo $F_1 \leq F_2$ ako vrijedi $F_1 \subseteq F_2$. Za tako usmjeren skup $(\mathcal{F}, \leq)$ prirodno je gledati hiperniz $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$, gdje je $s_F = \sum_{j \in F} x_j$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je dana funkcija $x : J \to X$ pri čemu je J proizvoljan beskonačan skup, a X normiran prostor. Kažemo da je familija $\{x(j) = x_j : j \in J\}$ sumabilna te da je njezina suma vektor $x_0 \in X$ ako je x_0 limes hiperniza $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$. U tom slučaju pišemo $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.*

2.2 Bezuvjetna konvergencija

Definicija 2.2.1. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno u X ako red $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ konvergira (obično) u X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Napomena 2.2.2. *U definiciji bezuvjetne konvergencije se ne zahtijeva da suma permutiranog reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ bude neovisna o permutaciji σ no pokazat ćemo kasnije da jest.*

Teorem 2.2.3. *Neka je $(c_n)_n$ niz u polju $\mathbb{F}$. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Dokaz. [1], Teorem 3.2.2. □

Korolar 2.2.4. *Ako u Banachovom prostoru red konvergira apsolutno, onda konvergira i bezuvjetno.*

Dokaz. [1], Korolar 3.2.3. □

Teorem 2.2.5. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno;

(b) Familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je sumabilna;

(c) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N > 0$ tako da vrijedi

$$\forall F \in \mathcal{F},\ min(F) > N \implies \Big\| \sum_{n \in F} x_n \Big\| < \varepsilon;$$

(d) $\sum x_{n_j}$ *konvergira za svaki rastući niz* $0 < n_1 < n_2 < ...$ *;*

(e) $\sum \varepsilon_n x_n$ *konvergira za svaki izbor predznaka* $\varepsilon_n = \pm 1$*;*

(f) $\sum \lambda_n x_n$ *konvergira za svaki ograničeni niz skalara* (λ_n)*;*

(g) $\sum |x^*(x_n)|$ *konvergira uniformno obzirom na jediničnu kuglu u* X'*, odnosno preciznije*

$$\lim_{N\to\infty} sup\Big\{\sum_{n=N}^{\infty} |x^*(x_n)| : x^* \in X', \|x^*\| \leq 1\Big\} = 0.$$

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Neka red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno; stavimo $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Pokazat ćemo da vrijedi i $x = \lim_{F\in\mathcal{F}} s_F$, to jest, $x = \lim_{F\in\mathcal{F}} \sum_{k\in F} x_k$.
Pretpostavimo suprotno. To znači da postoji $\varepsilon > 0$ sa sljedećim svojstvom:

$$\forall F_0 \in \mathcal{F}\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ tako da } F_0 \subseteq F \text{ i } \Big\|x - \sum_{k\in F} x_k\Big\| \geq \varepsilon. \tag{2.1}$$

S druge strane, za isti ε postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_1$ povlači $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Sad ćemo pokazati da ovo vodi na kontradikciju tako što ćemo konstruirati permutaciju u kojoj polazni red neće konvergirati.
Stavimo $F_1 = \{1, 2, ..., n_1\} \in \mathcal{F}$. Koristeći 2.1 nađimo $G_1 \in \mathcal{F}$ za koji vrijedi $F_1 \subseteq G_1$ i $\|x - \sum_{k\in G_1} x_k\| \geq \varepsilon$. Neka je sad $n_2 = \max(G_1)$ i $F_2 = \{1, 2, ..., n_2\}$. Sad opet prema 2.1 postoji $G_2 \in \mathcal{F}$ tako da vrijedi $F_2 \subseteq G_2$ i $\|x - \sum_{k\in G_2} x_k\| \geq \varepsilon$. Nastavimo induktivno. Na taj način dobivamo niz skupova u $\mathcal{F}$ za koji vrijedi $F_1 \subseteq G_1 \subseteq F_2 \subseteq G_2 \subseteq ...$, te $\|x - \sum_{k\in F_n} x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\|x - \sum_{k\in G_n} x_k\| \geq \varepsilon$. Odavde je

$$\Big\|\sum_{k\in G_n\setminus F_n} x_k\Big\| = \Big\|\sum_{k\in G_n} x_k - \sum_{k\in F_n} x_k\Big\| \geq \Big\|x - \sum_{k\in G_n} x_k\Big\| - \Big\|x - \sum_{k\in F_n} x_k\Big\| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uočimo sada permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$ koju dobijemo tako da, slijedeći niz inkluzija $F_1 \subseteq G_1 \subseteq F_2 \subseteq G_2 \subseteq ...$, redom ispišemo skupove $F_1, G_1 \setminus F_1, F_2 \setminus G_1, G_2 \setminus F_2, ...$ Ako s $|F_n|$ i $|G_n|$ označimo redom kardinalne brojeve skupova F_n i G_n, onda imamo

$$\Big\|\sum_{k=|F_n|+1}^{|G_n|} x_{\sigma(k)}\Big\| = \Big\|\sum_{k\in G_n\setminus F_n} x_k\Big\| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ovo pokazuje da niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ nije Cauchyjev i stoga ne može biti konvergentan. Dakle, došli smo do kontradikcije; vrijedi tvrdnja (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ Pretpostavimo da je familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna, odnosno da postoji $x = \lim_F \sum_{n\in F} x_n$, i odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Po definiciji, mora postojati konačan skup $F_0 \subseteq \mathbb{N}$ takav da

$$\forall F \in \mathcal{F} \text{ t.d. } F_0 \subseteq F \text{ vrijedi } \Big\| x - \sum_{n\in F} x_n \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $N = \max(F_0)$, i pretpostavimo da je G bilo koji podskup od $\mathbb{N}$ za koji vrijedi $\min(G) > N$. Kako je $F_0 \cap G = \emptyset$, imamo

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n\in G} x_n \Big\| &= \Big\| \Big(x - \sum_{n\in F_0} x_n\Big) - \Big(x - \sum_{n\in F_0\cup G} x_n\Big) \Big\| \\
&\le \Big\| x - \sum_{n\in F_0} x_n \Big\| - \Big\| x - \sum_{n\in F_0\cup G} x_n \Big\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (c).

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\mathbb{N}$. Želimo pokazati da je $\sum x_{\sigma(n)}$ Cauchyjev.
Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ onaj koji postoji po pretpostavci, odnosno po tvrdnji (c). Definirajmo

$$N_0 = \max\{\sigma^{-1}(1), ..., \sigma^{-1}(N)\}.$$

Neka su $L, K \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $L > K \ge N_0$, i stavimo $F = \{\sigma(K+1), ..., \sigma(L)\}$. Ako je $k \ge K+1$, onda je i $k > N_0$ pa vrijedi $k \ne \sigma^{-1}(1), ..., \sigma^{-1}(N)$; stoga vrijedi $\sigma(k) \ne 1, ..., N$. Sada vidimo da vrijedi

$$\min(F) = \min\{\sigma(K+1), ..., \sigma(L)\} > N.$$

Tvrdnja (c) sada povlači da vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=K+1}^{L} x_{\sigma(n)} \Big\| = \Big\| \sum_{n\in F} x_n \Big\| < \varepsilon.$$

Dakle, $\sum x_{\sigma(n)}$ je Cauchyjev, pa i konvergentan, odnosno vrijedi tvrdnja (a).

$\boxed{(c) \Rightarrow (g)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ onaj koji postoji po pretpostavci, odnosno po tvrdnji (c). Neka su dani $L, K \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $L \ge K > N$ i neka je dan $x^* \in X'$ takav da vrijedi $\|x^*\| \le 1$. Definirajmo

$$\begin{aligned}
F^+ &= \{n \in \mathbb{N} : K \le n \le L \text{ i } Re(x^*(x_n)) \ge 0\}, \\
F^- &= \{n \in \mathbb{N} : K \le n \le L \text{ i } Re(x^*(x_n)) < 0\}.
\end{aligned}$$

Kako je $\min(F^+) \geq K > N$, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n\in F^+} |Re(x^*(x_n))| &= \sum_{n\in F^+} Re(x^*(x_n)) = Re\Big(\sum_{n\in F^+} x^*(x_n)\Big)\\ &= Re\Big(x^*\Big(\sum_{n\in F^+} x_n\Big)\Big) \leq \Big|x^*\Big(\sum_{n\in F^+} x_n\Big)\Big| \leq \|x^*\| \, \Big\|\sum_{n\in F^+} x_n\Big\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Analogna nejednakost vrijedi i za F^-. Kako je $F^+ \cup F^- = \{K, ..., L\}$ i $F^+ \cap F^- = \emptyset$, imamo

$$\sum_{n=K}^{L} |Re(x^*(x_n))| = \sum_{n\in F^+} |Re(x^*(x_n))| + \sum_{n\in F^-} |Re(x^*(x_n))| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

U slučaju da je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, analogno se dobiju ocjene za imaginarne dijelove. Tada imamo $\sum_{n=K}^{L} |x^*(x_n)| < 4\varepsilon$. Kako to vrijedi za svaki $x^* \in X'$ takav da je $\|x^*\| \leq 1$, imamo

$$\sup\{\sum_{n=K}^{L} |x^*(x_n)| : x^* \in X', \ \|x^*\| \leq 1\} < 4\varepsilon, \ \forall L \geq K > N.$$

Puštanjem $L \to \infty$, potom uzimanjem limesa kad $K \to \infty$, te, napokon, puštanjem $\varepsilon \to 0$, dobivamo tvrdnju (g).

$\boxed{(g) \Rightarrow (f)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (g). Neka je (λ_n) proizvoljan niz skalara takav da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za dani $\varepsilon > 0$, po pretpostavci postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\forall K \geq N_0, \ \sup\{\sum_{n=K}^{\infty} |x^*(x_n)| : x^* \in X', \ \|x^*\| \leq 1\} < \varepsilon.$$

Neka su $N, M \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $N > M \geq N_0$. Prema Korolaru 1.4.5, možemo naći $x^* \in X'$ takav da je $\|x^*\| = 1$ i

$$\Big\|\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\Big\| = x^*\Big(\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\Big).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\Big\| &= x^*\Big(\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\Big) = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x^*(x_n)\\ &\leq \sum_{n=M+1}^{N} |\lambda_n| \, |x^*(x_n)| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |x^*(x_n)|\\ &\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Dakle, $\sum \lambda_n x_n$ je Cauchyjev, pa je i konvergentan; vrijedi tvrdnja (f).

$\boxed{(f) \Rightarrow (e)}$ Trivijalno.

$\boxed{(e) \Rightarrow (d)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (e). Neka je $(n_j)_j \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan rastući niz. Definirajmo $\varepsilon_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i stavimo

$$\gamma_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = n_j \text{ za neki } j, \\ -1, & \text{ako je } n \neq n_j \text{ za sve } j. \end{cases}$$

Po pretpostavci, i $\sum \varepsilon_n x_n$ i $\sum \gamma_n x_n$ konvergiraju. Stoga konvergira i

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x_n\Big)$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (d).

$\boxed{(d) \Rightarrow (c)}$ Ovu implikaciju ćemo dokazati po kontrapoziciji. Pretpostavimo da ne vrijedi tvrdnja (c). Dakle, vrijedi

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ takav da } \forall N \in \mathbb{N}\ \exists \text{ konačan } F_N \subseteq \mathbb{N} \text{ takav da je } \min(F_N) > N \text{ i } \|\sum_{n \in F_N} x_n\| \geq \varepsilon.$$

Neka je $G_1 = F_1$ i $N_1 = \max(G_1)$. Zatim, neka je $G_2 = F_{N_1}$ i $N_2 = \max(G_2)$. Nastavljajući induktivno, dobivamo niz konačnih skupova G_K takvih da za svaki $K \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\max(G_K) < \min(G_{K+1}) \text{ i } \Big\|\sum_{n \in G_K} x_n\Big\| \geq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Neka je sada $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ niz svih elemenata od $\bigcup G_K$. Kada bi $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ bio Cauchyjev, onda bi postojao $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $M, N \in \mathbb{N}$ takve da je $M > N \geq N_0$ vrijedi $\|\sum_{N+1}^{M} x_{n_j}\| < \varepsilon$. No, postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da je $N_0 \in G_K$. Kako je po konstrukciji $\min(G_{K+1}) > N_0$, vrijedi $\|\sum_{j \in G_{K+1}} x_{n_j}\| < \varepsilon$. To je kontradikcija sa 2.2 pa slijedi da $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ nije Cauchyjev. Stoga nije niti konvergentan, odnosno ne vrijedi tvrdnja (d). □

Korolar 2.2.6. *Neka je X Banachov prostor i* $(x_n)_n$ *niz u X. Ako red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira bezuvjetno, onda je* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *za svaku permutaciju* σ *skupa* $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira bezuvjetno. Prema Teoremu 2.2.5 slijedi da je $x = \lim_{F \in \mathcal{F}} s_F$, to jest, $x = \lim_{F \in \mathcal{F}} \sum_{k \in F} x_k$. Neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\mathbb{N}$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Po definiciji postoji konačan $F_0 \subseteq \mathbb{N}$ takav da za svaki $F \in \mathcal{F}$, $F_0 \subseteq F$ vrijedi $\|x - \sum_{k \in F} x_k\| < \varepsilon$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi $F_0 = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_0)\}$. Odaberimo proizvoljan $n \geq n_0$ i definirajmo $F = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. Kako je $F_0 \subseteq F$, vrijedi $\|x - \sum_{k \in F} x_k\| < \varepsilon$, to jest, $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}\| < \varepsilon$. Dakle, vrijedi $x = \sum x_{\sigma(n)}$ za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. □

Definicija 2.2.7. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ niz u X, $F \subseteq \mathbb{N}$ konačan skup, $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in F}$ niz skalara takvih da vrijedi $\varepsilon_n = \pm 1$ za sve n, te neka je $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in F}$ niz skalara takvih da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve n. Definiramo*

$$\mathcal{R} = \sup_F \Big\| \sum_{n\in F} x_n \Big\|,$$
$$\mathcal{R}_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} \Big\| \sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n \Big\|,$$
$$\mathcal{R}_\Lambda = \sup_{F,\Lambda} \Big\| \sum_{n\in F} \lambda_n x_n \Big\|.$$

Napomena 2.2.8. *Očito je $0 \leq \mathcal{R}$. Nadalje, vrijedi $\mathcal{R} = \sup_F \| \sum_{n\in F} x_n\| = \sup_F \| \sum_{n\in F} \varepsilon_n^{\mathcal{R}} x_n\|$, gdje je $\varepsilon_n^{\mathcal{R}} = 1$ za sve n. Kako je $(\varepsilon_n^{\mathcal{R}}) \subseteq \{(\varepsilon_n) : \varepsilon_n = \pm 1, n \in F\}$, vrijedi $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}_\varepsilon$. Također vrijedi $\mathcal{R}_\varepsilon \leq \mathcal{R}_\Lambda$ jer je $\{(\varepsilon_n) : \varepsilon_n = \pm 1, n \in F\} \subseteq \{(\lambda_n) : |\lambda_n| \leq 1, n \in F\}$. Stoga, općenito vrijedi*

$$0 \leq \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_\varepsilon \leq \mathcal{R}_\Lambda \leq \infty. \tag{2.3}$$

Propozicija 2.2.9. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}_\varepsilon \leq 2\mathcal{R}$.

(b) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, onda je $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}_\Lambda$.

(c) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, onda je $\mathcal{R}_\varepsilon \leq \mathcal{R}_\Lambda \leq 2\mathcal{R}_\varepsilon$.

Dokaz. (a) Prema 2.3, vrijedi $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}_\varepsilon$. Pokazujemo da vrijedi i $\mathcal{R}_\varepsilon \leq 2\mathcal{R}$.
Neka je $F \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan konačan skup i neka je $(\varepsilon_n)_{n\in F}$ proizvoljan niz skalara takvih da vrijedi $\varepsilon_n = \pm 1$ za sve n. Definirajmo

$$F^+ = \{n : \varepsilon_n = 1\},$$
$$F^- = \{n : \varepsilon_n = -1\}.$$

Kako je $F^+ \cup F^- = F$ i $F^+ \cap F^- = \emptyset$, imamo

$$\Big\| \sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n \Big\| = \Big\| \sum_{n\in F^+} \varepsilon_n x_n - \sum_{n\in F^-} \varepsilon_n x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n\in F^+} \varepsilon_n x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n\in F^-} \varepsilon_n x_n \Big\| \leq 2\mathcal{R}.$$

Sada uzimanjem supremuma po $F \subseteq \mathbb{N}$, dobivamo traženu nejednakost.

(b) Prema 2.3, vrijedi $\mathcal{R}_\varepsilon \leq \mathcal{R}_\Lambda$. Pokazujemo da vrijedi i $\mathcal{R}_\Lambda \leq \mathcal{R}_\varepsilon$.
Neka je $F \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan konačan skup i neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz realnih skalara takvih da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve n. Označimo sa N kardinalni broj skupa

F. Prema Korolaru 1.7.2, postoje realni skalari $c_k \geq 0$ i predznaci $\varepsilon_k^n = \pm 1$, za $k = 1, ..., N+1$ i $n \in F$, takvi da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1 \text{ i } \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k^n c_k = \lambda_n \text{ za } n \in F.$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{n \in F} \lambda_n x_n \Big\| &= \Big\| \sum_{n \in F} \sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k^n c_k x_n \Big\| = \Big\| \sum_{k=1}^{N+1} c_k \sum_{n \in F} \varepsilon_k^n x_n \Big\| \leq \sum_{k=1}^{N+1} \Big\| c_k \sum_{n \in F} \varepsilon_k^n x_n \Big\| \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} |c_k| \Big\| \sum_{n \in F} \varepsilon_k^n x_n \Big\| = \sum_{k=1}^{N+1} c_k \Big\| \sum_{n \in F} \varepsilon_k^n x_n \Big\| = \sum_{k=1}^{N+1} c_k \, \mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon.\end{aligned}$$

Sada uzimanjem supremuma po $F \subseteq \mathbb{N}$, dobivamo traženu nejednakost.

(c) Prema 2.3, vrijedi $\mathcal{R}_\varepsilon \leq \mathcal{R}_\Lambda$. Pokazujemo da vrijedi i $\mathcal{R}_\Lambda \leq 2\mathcal{R}_\varepsilon$.
Neka je $F \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan konačan skup i neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz kompleksnih skalara takvih da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve n. Svaki λ_n možemo zapisati u obliku $\lambda_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$, gdje su α_n i β_n realni. Analogno kao u dijelu (b) se dobiju ocjene

$$\Big\| \sum_{n \in F} \alpha_n x_n \Big\| \leq \mathcal{R}_\varepsilon,$$

i

$$\Big\| \sum_{n \in F} \beta_n x_n \Big\| \leq \mathcal{R}_\varepsilon.$$

Stoga je

$$\Big\| \sum_{n \in F} \lambda_n x_n \Big\| = \Big\| \sum_{n \in F} (\alpha_n + \mathrm{i}\beta_n) x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n \in F} \alpha_n x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n \in F} \mathrm{i}\beta_n x_n \Big\| \leq \mathcal{R}_\varepsilon + \mathcal{R}_\varepsilon = 2\mathcal{R}_\varepsilon.$$

Sada uzimanjem supremuma po $F \subseteq \mathbb{N}$, dobivamo traženu nejednakost.

□

Propozicija 2.2.10. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Ako $\sum x_n$ konvergira bezuvjetno, onda su i $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}_\varepsilon$ i $\mathcal{R}_\Lambda$ konačni.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.2.9, dovoljno je pokazati da je jedan od $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\varepsilon$, $\mathcal{R}_\Lambda$ konačan. Pokažimo da vrijedi $\mathcal{R} < \infty$.
Pretpostavimo da $\sum x_n$ konvergira bezuvjetno. Tada, prema Teoremu 2.2.5, možemo naći $N > 0$ takav da vrijedi

$$\forall \text{ konačan } G \subseteq \mathbb{N}, \ \min(G) > N \implies \Big\| \sum_{n \in G} x_n \Big\| < 1.$$

Definirajmo $F_0 = \{1, ..., N\}$ i stavimo

$$M = \max_{F \subseteq F_0} \Big\| \sum_{n \in F} x_n \Big\|.$$

Kako je F_0 konačan, vrijedi $M < \infty$.
Odaberimo sada proizvoljan $F \subseteq \mathbb{N}$. Vrijedi $F = (F \cap F_0) \cup (F \setminus F_0)$ i $(F \cap F_0) \cap (F \setminus F_0) = \emptyset$ pa imamo

$$\Big\| \sum_{n \in F} x_n \Big\| = \Big\| \sum_{n \in F \cap F_0} x_n + \sum_{n \in F \setminus F_0} x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n \in F \cap F_0} x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n \in F \setminus F_0} x_n \Big\| \leq M + 1.$$

Sada uzimanjem supremuma po $F \subseteq \mathbb{N}$ dobivamo $\mathcal{R} \leq M + 1 < \infty$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Poglavlje 3

Topološke baze

3.1 Koeficijentni funkcionali i Schauderova baza

Definicija 3.1.1. *Niz $(x_n)_n$ u Banachovom prostoru X se naziva (topološka) baza za X ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(a_n(x))_n$ takav da vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n \tag{3.1}$$

(pri čemu se ovdje podrazumijeva obična konvergencija navedenoga reda u normi prostora X).

Definicija 3.1.2. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Kažemo da je:*

(a) *$(x_n)_n$ bezuvjetna baza ako red u 3.1 konvergira bezuvjetno za svaki $x \in X$. Za bazu koja nije bezuvjetna kažemo da je uvjetna baza.*

(b) *$(x_n)_n$ apsolutno konvergentna baza ako red u 3.1 konvergira apsolutno za svaki $x \in X$.*

(c) *$(x_n)_n$ ograničena baza ako je $(x_n)_n$ ograničen odozdo i odozgo; preciznije, ako vrijedi: $0 < inf\|x_n\| \leq sup\|x_n\| < \infty$.*

(d) *$(x_n)_n$ normirana baza ako je $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 3.1.3. *Neka je X Banchov prostor. Niz $(x_n)_n$ u X je bazni niz u X ako je on baza za $\overline{span}\{x_n\}$.*

Definicija 3.1.4. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Niz linearnih funkcionala $(a_n)_n$ definiran jednadžbom 3.1 zove se pridruženi niz koeficijentnih funkcionala, ili samo koeficijentni funkcionali, za $(x_n)_n$.*

Napomena 3.1.5. *Linearnost koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$ nije trivijalna, no lagano slijedi iz uvjeta jedinstvenosti niza skalara u definiciji baze; neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, x, y \in X$ proizvoljni. Vrijedi*

$$\alpha x + \beta y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha x + \beta y) x_n.$$

S druge strane, kako je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n, \ y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) x_n,$$

imamo

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n(x) + \beta a_n(y)) x_n.$$

Sada, zbog jedinstvenosti zapisa od $\alpha x + \beta y$, mora vrijediti

$$a_n(\alpha x + \beta y) = \alpha a_n(x) + \beta a_n(y),$$

i to za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, x, y \in X$.

Definicija 3.1.6. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ baza za X i $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Kažemo da je $(x_n)_n$ Schauderova baza za X ako je svaki koeficijentni funkcional a_n neprekidan.*

Napomena 3.1.7. *Teorem 3.1.16 pokazuje da je svaka baza za Banachov prostor Schauderova baza.*

Napomena 3.1.8. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Odaberimo proizvoljan $m \in \mathbb{N}$. x_m možemo zapisati na dva načina:*

$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_m) x_n,$$
$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{mn} x_n.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza u bazi mora vrijediti

$$a_n(x_m) = \delta_{mn}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Definicija 3.1.9. *Neka je X Banachov prostor. Za nizove $(x_n)_n \subseteq X$ i $(a_n)_n \subseteq X'$ kažemo da su biortogonalni ako je $a_n(x_m) = \delta_{mn}$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$. U tom slučaju kažemo da je $(a_n)_n$ biortogonalni sustav, ili dualni sustav, za $(x_n)_n$.*

Definicija 3.1.10. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X sa koeficijentnim funkcionalima $(a_n)_n$. Operatori parcijalne sume pridruženi nizu $(x_n)_n$ su preslikavanja $S_N : X \to X$ definirana sa:*

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n, \, x \in X. \tag{3.2}$$

Napomena 3.1.11. *Linearnost operatora parcijalne sume S_N slijedi iz linearnosti funkcionala a_n. Također, vrijedi*

$$a_n \text{ je neprekidan za svaki } n \Leftrightarrow S_N \text{ je neprekidan za svaki } N.$$

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Ovaj smjer vrijedi odmah iz definicije S_N.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je pokazan u Teoremu 3.1.16. □

Teorem 3.1.12. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ niz u X, te pretpostavimo da je $x_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je*

$$Y = \Big\{(c_n) : \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira u } X\Big\},$$

te neka je

$$\|(c_n)\|_Y = \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Tada vrijedi sljedeće:

(a) Y je Banachov prostor.

(b) Ako je $(x_n)_n$ baza za X, onda je Y topološki izomorfan sa X; topološki izomorfizam je dan preslikavanjem $T : (c_n) \mapsto \sum c_n x_n$.

Dokaz. (a) Y je vektorski prostor. Nadalje, uzmimo proizvoljan $(c_n) \in Y$. Po definiciji od Y, vrijedi da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ konvergira. Kako su konvergentni nizovi ograničeni, slijedi da je $\|(c_n)\|_Y < \infty$. Zbog proizvoljnosti početnog niza, to vrijedi za sve $(c_n) \in Y$. Dakle, $\| \cdot \|_Y$ je dobro definirano. Pokažimo sada da je to norma na Y.

Neka su $(c_n), (d_n) \in Y, \alpha \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|(c_n) + (d_n)\|_Y = \|(c_n + d_n)\|_Y &= \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} (c_n + d_n) x_n \Big\| \\
&= \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n + \sum_{n=1}^{N} d_n x_n \Big\| \\
&\leq \sup_N \Big(\Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=1}^{N} d_n x_n \Big\| \Big) \\
&= \sup_N \Big(\Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \Big) + \sup_N \Big(\Big\| \sum_{n=1}^{N} d_n x_n \Big\| \Big) \\
&= \|(c_n)\|_Y + \|(d_n)\|_Y,
\end{aligned}$$

$$\|\alpha(c_n)\|_Y = \|(\alpha c_n)\|_Y = \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} \alpha c_n x_n \Big\| = |\alpha| \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| = |\alpha| \; \|(c_n)\|_Y.$$

Pretpostavimo da je $\|(c_n)\|_Y = 0$. Tada je $\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| = 0$ za sve N. Posebno je $\|c_1 x_1\| = 0$. Kako je $x_1 \neq 0$, slijedi da je $c_1 = 0$. Sada je $\|c_2 x_2\| = \| \sum_{n=1}^{2} c_n x_n\| = 0$ pa analogno slijedi da je $c_2 = 0$, itd. Dakle, vrijedi da je $c_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, ako je $c_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda vrijedi da je $\|(c_n)\|_Y = \sup_N \| \sum_{n=1}^{N} 0\| = 0$.
Dakle, pokazali smo da je $\| \cdot \|_Y$ norma na Y, odnosno da je Y normiran prostor. Trebamo još pokazati da je Y potpun u odnosu na normu $\| \cdot \|_Y$.
Pretpostavimo da je $A_N = (c_N(n))_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ i $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u Y. Za svaki fiksirani $n \geq 2$ te za sve $M, N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|c_M(n) - c_N(n)| \; \|x_n\| &= \|(c_M(n) - c_N(n)) x_n\| \\
&= \Big\| \sum_{k=1}^{n} \big(c_M(k) - c_N(k)\big) x_k - \sum_{k=1}^{n-1} \big(c_M(k) - c_N(k)\big) x_k \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{k=1}^{n} \big(c_M(k) - c_N(k)\big) x_k \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n-1} \big(c_M(k) - c_N(k)\big) x_k \Big\| \\
&\leq 2\|A_M - A_N\|_Y.
\end{aligned}$$

Za $n = 1$ imamo $|c_M(n) - c_N(n)| \; \|x_1\| \leq \|A_M - A_N\|_Y$.
Kako je $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y, te kako je $\|x_n\| \neq 0$ za sve n, zaključujemo da je $(c_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz skalara. Stoga on konvergira prema nekom skalaru $c(n) \in \mathbb{F}$ kada $N \to \infty$.

Želimo pokazati da A_N konvergira prema $A = (c(n))_{n\in\mathbb{N}}$ u $\|\cdot\|_Y$ kada $N \to \infty$. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Znamo da

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}\ t.d.\ \forall M, N \geq N_0\ \|A_M - A_N\|_Y = \sup_L \| \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n))x_n\| < \varepsilon.$$

Neka je $L > 0$ fiksan. Definiramo

$$y_{M,N} = \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n))x_n,$$

i

$$y_N = \sum_{n=1}^{L} (c(n) - c_N(n))x_n.$$

Uočimo da je $\|y_{M,N}\| < \varepsilon$ za sve $M, N \geq N_0$. Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|y_{M,N} - y_N\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n) - c(n) + c_N(n))x_n \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c(n))x_n \Big\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{L} |c_M(n) - c(n)|\ \|x_n\|.
\end{aligned}$$

Kako $c_M(n) \to c(n)$ kada $M \to \infty$, slijedi da $y_{M,N} \to y_N$ kada $M \to \infty$. Sada slijedi da za sve $N \geq N_0$ imamo

$$\|y_N\| = \lim_{M\to\infty} \|y_{M,N}\| \leq \varepsilon.$$

Odnosno, iz definicije y_N, za sve $N \geq N_0$ imamo

$$\Big\| \sum_{n=1}^{L} (c(n) - c_N(n))x_n \Big\| \leq \varepsilon.$$

Uzimanjem supremuma po L, za sve $N \geq N_0$ imamo

$$\sup_L \Big\| \sum_{n=1}^{L} (c(n) - c_N(n))x_n \Big\| \leq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Sada uočimo da je $(c_{N_0}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in Y$. Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} c_{N_0}(n)x_n$ konvergira po definiciji prostora Y pa postoji $M_0 > 0$ tako da za svaki $N > M \geq M_0$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| < \varepsilon.$$

Stoga, ako je $N > M \geq M_0, N_0$, imamo

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c(n)x_n \Big\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{N}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n + \sum_{n=1}^{M}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n + \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=1}^{M}(c(n) - c_{N_0}(n))x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} c_{N_0}(n)x_n \Big\| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} c(n)x_n$ konvergira u X pa je $A = (c(n)) \in Y$. Sada iz 3.3 zaključujemo da $A_N \to A$ (kad $N \to \infty$) u normi prostora Y, odnosno da je Y potpun.

(b) Želimo pokazati da je $T : Y \to X$ linearna bijekcija takva da su T i T^{-1} neprekidni. Po pretpostavci je X Banachov prostor te je pokazano da je i Y Banachov prostor. Stoga je, prema Teoremu 1.6.1, dovoljno pokazati da je T neprekidna linearna bijekcija. Tada će slijediti da je i T^{-1} neprekidan.
Za $(c_n) \in Y$ vrijedi $T(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n < \infty$ po definiciji prostora Y, odnosno $T : Y \to X$. Kako je $(x_n)_n$ baza za X, za svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara (c_n) tako da je $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, odnosno $x = T(c_n)$. Dakle, T je bijekcija. Nadalje, za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, (c_n), (d_n) \in Y$ vrijedi

$$T(\alpha(c_n)+\beta(d_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha(c_n)+\beta(d_n))x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty}(c_n)x_n+\beta \sum_{n=1}^{\infty}(d_n)x_n = \alpha T(c_n)+\beta T(d_n),$$

pa je T linearna bijekcija. Također, za $(c_n) \in Y$ vrijedi

$$\|T(c_n)\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \Big\| = \| \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \| = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| = \|(c_n)\|_Y.$$

Dakle, T je neprekidna linearna bijekcija te je tvrdnja dokazana.

□

Korolar 3.1.13. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ baza za X, te neka je $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Neka su, kao u prethodnom teoremu,*

$$Y = \Big\{(c_n) : \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira u } X\Big\},$$

$$\|(c_n)\|_Y = \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|,$$

$$T(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Tada vrijedi sljedeće:

(a) Operatori parcijalne sume su ograničeni, i vrijedi $\|S_N\| \leq \|T^{-1}\|$, za sve $N \in \mathbb{N}$.

(b) $C = \sup_N \|S_N\| < \infty$.

(c) $|||x||| = \sup_N \|S_N x\|$ je norma na X i ekvivalentna je normi $\|\cdot\|$; vrijedi

$$\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \leq C\|\cdot\|.$$

Dokaz. (a) Za fiksirani $x \in X$ je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n.$$

Kako su skalari $a_n(x)$ jedinstveni, T^{-1} je dan sa

$$T^{-1}x = (a_n(x)).$$

Stoga imamo:

$$\sup_N \|S_N x\| = \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \Big\| = \|(a_n(x))\|_Y = \|T^{-1}x\|_Y \leq \|T^{-1}\| \, \|x\| < \infty.$$

Dakle, S_N je ograničen i vrijedi $\|S_N\| \leq \|T^{-1}\|$.

(b) Iz dijela (a) vidimo da je $C = \sup_N \|S_N\| \leq \|T^{-1}\| < \infty$.

(c) U (a) dijelu je pokazano da je $|||x||| = \|(a_n(x))\|_Y$, a u prethodnom teoremu je pokazano da je $\|\cdot\|_Y$ norma na Y. Iz toga vidimo da je $|||\cdot|||$ norma na X. Nadalje, za proizvoljan $x \in X$ vrijedi

$$|||x||| = \sup_N \|S_N x\| \leq \sup_N \|S_N\| \, \|x\| = C\|x\|,$$

i također

$$\|x\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n \Big\| = \| \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \| = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \Big\|$$
$$= \lim_{N\to\infty} \|S_N x\| \leq \sup_N \|S_N x\| = |||x|||.$$

Dakle, $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ su ekvivalentne norme i vrijedi navedena nejednakost.

□

Definicija 3.1.14. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Konačan broj $C = \sup_N \|S_N\|$ zovemo bazna konstanta. Ako je bazna konstanta $C = 1$, kažemo da je baza monotona.*

Napomena 3.1.15. *Iz Korolara 3.1.13 vidimo da vrijedi $1 \leq C < \infty$.*

Teorem 3.1.16. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X sa pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$. Tada je $(x_n)_n$ Schauderova baza za X i vrijedi*

$$1 \leq \|a_n\| \, \|x_n\| \leq 2C, \; n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, $(a_n)_n \subseteq X'$ je biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$.

Dokaz. Za $n \geq 2$ imamo

$$a_n(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)x_k = S_n x - S_{n-1}x.$$

Stoga je

$$|a_n(x)| \, \|x_n\| = \|a_n(x)x_n\| = \|S_n x - S_{n-1}x\| \leq \|S_n x\| + \|S_{n-1}x\| \leq 2C\|x\|.$$

Kako je $(x_n)_n$ baza, vrijedi $x_n \neq 0, \forall n$. Stoga imamo

$$\|a_n\| \leq \frac{2C}{\|x_n\|} < \infty.$$

Za $n = 1$ imamo $a_1(x)x_1 = S_1 x$ pa vrijedi ista ocjena.
Dakle, a_n je ograničen za sve n, odnosno $(x_n)_n$ je Schauderova baza za X, te je pokazana tražena gornja ocjena. Iz Napomene 3.1.8 slijedi biortogonalnost nizova $(a_n)_n$ i $(x_n)_n$. Stoga imamo

$$1 = a_n(x_n) \leq \|a_n\| \, \|x_n\|.$$

□

Napomena 3.1.17. *U Lemi 3.5.2 je pokazana jedinstvenost biortogonalnog niza $(a_n)_n$.*

Teorem 3.1.18. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Tada je $(x_n)_n$ monotona baza za X obzirom na ekvivalentnu normu $|||x||| = \sup_N \|S_N x\|$.*

Dokaz. Želimo pokazati da vrijedi $\sup_N |||S_N||| = 1$. Znamo da za baznu konstantu C uvijek vrijedi $C \geq 1$. Stoga trebamo pokazati da je $\sup_N |||S_N||| \leq 1$. Pokažimo najprije pomoćnu tvrdnju: za kompoziciju operatora parcijalne sume S_M i S_N vrijedi

$$S_M S_N = S_{min\{M,N\}}.$$

Odaberimo proizvoljan $x \in X$ i $M, N \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} S_M S_N x &= S_M\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} S_M\Big(a_n(x)x_n\Big) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_m(a_n(x)x_n)x_m \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n(x)a_m(x_n)x_m = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n(x)\delta_{mn}x_m = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)\sum_{m=1}^{M}\delta_{mn}x_m \\ &= \sum_{n=1}^{min\{M,N\}} a_n(x)x_n = S_{min\{M,N\}}x. \end{aligned}$$

Time je pomoćna tvrdnja pokazana i imamo

$$|||S_N x||| = \sup_M \|S_M S_N x\| = sup\{\|S_1 x\|, ..., \|S_N x\|\}.$$

Stoga je

$$\sup_N |||S_N x||| = \sup_N \|S_N x\| = |||x|||,$$

odakle slijedi $\sup_N |||S_N||| = 1$. □

3.2 Ekvivalentne baze

Lema 3.2.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori, $(x_n)_n$ baza za X, te neka je $T : X \to Y$ topološki izomorfizam. Tada je $(Tx_n)_n$ baza za Y.*

Dokaz. Za svaki $y \in Y$ vrijedi

$$T^{-1}y \in X.$$

Stoga postoji jedinstven niz skalara (c_n) tako da vrijedi

$$T^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Kako je T neprekidan, vrijedi

$$y = T(T^{-1}y) = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T x_n.$$

Da bi pokazali da je $(Tx_n)_n$ baza za Y, trebamo pokazati jedinstvenost gornjeg zapisa. Pretpostavimo da za neki drugi niz skalara, (b_n), vrijedi

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T x_n.$$

Kako je T^{-1} neprekidan, vrijedi

$$T^{-1}y = T^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n T x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^{-1} T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n.$$

Stoga je $b_n = c_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer je $(x_n)_n$ baza za X. Dakle, $(Tx_n)_n$ je baza za Y. □

Definicija 3.2.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Kažemo da je baza $(x_n)_n$ za X ekvivalentna bazi $(y_n)_n$ za Y ako postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$ takav da je $Tx_n = y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*
Ako je $X = Y$, pišemo $(x_n)_n \sim (y_n)_n$.

Teorem 3.2.3. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $(x_n)_n$ baza za X, a $(y_n)_n$ baza za Y, onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je ekvivalentna* $(y_n)_n$*;*

(b) $\sum c_n x_n$ *konvergira u X ako i samo ako* $\sum c_n y_n$ *konvergira u Y.*

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ ekvivalentna $(y_n)_n$. To znači da postoji topološki izomorfizam $T : X \to Y$ takav da vrijedi $Tx_n = y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Želimo pokazati

$$\sum c_n x_n \textit{ konvergira u } X \Leftrightarrow \sum c_n y_n \textit{ konvergira u } Y.$$

Kako je $(x_n)_n$ baza za X, postoji $x \in X$ tako da vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n < \infty.$$

Iz definicije od T sada imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^{-1} y_n < \infty.$$

Kako je T neprekidan, vrijedi

$$Tx = T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n T^{-1} y_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T T^{-1} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$$

i

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| < \infty,$$

odakle slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n < \infty.$$

Obrat slijedi analogno iz činjenica da je $(y_n)_n$ baza za Y i da je T^{-1} neprekidan.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi

$$\sum c_n x_n \textit{ konvergira u } X \Leftrightarrow \sum c_n y_n \textit{ konvergira u } Y.$$

Neka su $(a_n)_n \subseteq X'$ koeficijentni funkcionali za $(x_n)_n$ i neka su $(b_n)_n \subseteq Y'$ koeficijentni funkcionali za $(y_n)_n$. Neka je dan $x \in X$. Tada

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$$

konvergira u X. Stoga

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) y_n$$

konvergira u Y. T je dobro definiran zbog jedinstvenosti prikaza x u bazi. Pokažimo da je T linearan. Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x, z \in X$ vrijedi

$$T(\alpha x+\beta z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha x+\beta z) y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n(x)+\beta a_n(z)) y_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) y_n+\beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) y_n = \alpha Tx+\beta Tz.$$

Ako je $Tx = 0$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 y_n = 0 = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) y_n.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza u bazi slijedi $a_n(x) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, T je injekcija. Odaberimo proizvoljan $y \in Y$. Tada

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) y_n$$

konvergira u Y. Stoga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) x_n$$

konvergira u X.
S druge strane, imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$$

i $(x_n)_n$ je baza za X pa slijedi $b_n(y) = a_n(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. To povlači $Tx = y$. Dakle, T je surjekcija.
Pokažimo još i da je T neprekidan.
Za $N \in \mathbb{N}$ definirajmo $T_N : X \to Y$ sa

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)y_n.$$

Kako je a_n neprekidan za sve $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je i T_N neprekidan za sve $N \in \mathbb{N}$. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} T_N x = Tx.$$

Sada po Teoremu 1.5.2 slijedi da je T neprekidan. □

Korolar 3.2.4. *Sve ortonormirane baze Hilbertovog prostora su međusobno ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su $(e_n)_n$ i $(f_n)_n$ dvije proizvoljne ortonormirane baze Hilbertovog prostora H i neka je (c_n) proizvoljan niz skalara. Ako pretpostavimo da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira, onda, prema Propoziciji 1.3.4, vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Prema istoj propoziciji, to je ekvivalentno činjenici da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konvergira. Analogno, ako pretpostavimo da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konvergira, dobivamo da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira. Prema Teoremu 3.2.3, to je ekvivalentno tvrdnji da su $(e_n)_n$ i $(f_n)_n$ ekvivalentne baze. Kako su $(e_n)_n$ i $(f_n)_n$ odabrane proizvoljno, slijedi tvrdnja. □

3.3 Trigonometrijski sustav

Definicija 3.3.1. *Trigonometrijski sustav je niz* 1*-periodičkih funkcija* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *definiranih sa*

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t}, \ t \in \mathbb{T},$$

gdje $\mathbb{T}$ *označava torus.*

Napomena 3.3.2.

$$C(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \textit{ je } 1\textit{-periodička}\},$$

$$L^p(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \textit{ je } 1\textit{-periodička i } \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty\}, \ \textit{za } 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \textit{ je } 1\textit{-periodička i } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Definicija 3.3.3. *Za $f \in L^1(\mathbb{T})$ su sa*

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{2\pi i n t} \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt, \ n \in \mathbb{Z},$$

definirani Fourierovi koeficijenti funkcije f. Nadalje, niz definiran sa

$$\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

se naziva Fourierova transformacija funkcije f.

Teorem 3.3.4. *(a) $(e^{2\pi i n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{T})$. Stoga se svaki $f \in L^2(\mathbb{T})$ može zapisati u obliku*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t},$$

gdje navedeni red konvergira bezuvjetno u L^2-normi i vrijedi

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

(b) $(e^{2\pi i n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ je uvjetna baza za $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$ i $2 < p < \infty$, obzirom na poredak $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\} = \{k_1, k_2, ...\}$. Posebno, za svaki od navedenih p se $f \in L^p(\mathbb{T})$ može jedinstveno zapisati u obliku

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(k_n) e^{2\pi i k_n t},$$

gdje navedeni red konvergira u L^p-normi, ali konvergira uvjetno za neki $f \in L^p(\mathbb{T})$.

(c) $(e^{2\pi i n t})_{n\in\mathbb{Z}}$ je fundamentalan niz, ali nije baza za $L^1(\mathbb{T})$ i $C(\mathbb{T})$, no svaka funkcija iz $L^1(\mathbb{T})$ je jedinstveno određena pripadnom Fourierovom transformacijom $\hat{f}$.

Dokaz. Dokaz teorema može se pogledati u [2]. □

3.4 Slabe i slabe* baze u Banachovim prostorima

Definicija 3.4.1. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Kažemo da je $(x_n)_n$ slaba baza za X ako za svaki $x \in X$ postoje jedinstveni skalari $a_n(x)$ takvi da vrijedi $x = \sum a_n(x) x_n$, gdje navedeni red konvergira u slaboj topologiji, to jest,*

$$\forall x^* \in X', \ \lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n, x^* \Big\rangle = \langle x, x^* \rangle. \tag{3.4}$$

Kažemo da je slaba baza slaba Schauderova baza ako je svaki koeficijentni funkcional a_m slabo neprekidan na X.

Definicija 3.4.2. *Neka je X Banachov prostor. Niz funkcionala $(x_n^*)_n$ u X' je slaba* baza za X' ako za svaki $x^* \in X'$ postoje jedinstveni skalari $a_n^*(x^*)$ takvi da vrijedi $x^* = \sum a_n^*(x^*)x_n^*$, gdje navedeni red konvergira u slabo* topologiji, to jest,*

$$\forall x \in X, \ \lim_{N\to\infty} \Big\langle x, \sum_{n=1}^{N} a_n^*(x^*)x_n^* \Big\rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Kažemo da je slaba baza slaba* Schauderova baza ako je svaki koeficijentni funkcional a_m^* slabo* neprekidan na X'.*

Teorem 3.4.3. *Neka je X Banachov prostor. Ako je $(x_n)_n$ baza za X, onda je $(x_n)_n$ slaba baza za X. Nadalje, u tom slučaju je $(x_n)_n$ slaba Schauderova baza za X sa koeficijentnim funkcionalima koji su neprekidni na X obzirom na normu.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ baza za X te neka je $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Prema Teoremu 3.1.16, $(x_n)_n$ je Schauderova baza za X, odnosno pridruženi koeficijentni funkcionali a_n su jako neprekidni. To povlači da su i slabo neprekidni. Nadalje, za svaki $x \in X$ vrijedi $x = \sum a_n(x)x_n$, gdje navedeni red konvergira u normi, odnosno vrijedi

$$\Big\| x - \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n \Big\| \to 0, \ \textit{kad } N \to \infty.$$

Želimo pokazati da navedeni red konvergira i u slaboj topologiji, odnosno da za svaki $x^* \in X'$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n, x^* \Big\rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Za proizvoljni $x^* \in X'$ imamo

$$\begin{aligned} \Big| \Big\langle \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n, x^* \Big\rangle - \langle x, x^* \rangle \Big| &= \Big| \Big\langle \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n - x, x^* \Big\rangle \Big| \\ &\le \|x^*\| \, \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n - x \Big\|. \end{aligned}$$

Kako je $x^* \in X'$, vrijedi $\|x^*\| < \infty$, pa iz pretpostavke $\|x - \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\| \to 0$, *kad* $N \to \infty$, slijedi traženo. Pokažimo jedinstvenost zapisa u obliku $x = \sum a_n(x)x_n$, gdje navedeni red konvergira slabo.

Neka za neki drugi niz skalara (c_n) vrijedi $x = \sum c_n x_n$, gdje navedeni red konvergira slabo. Odaberimo proizvoljan $m \in \mathbb{N}$. Kako vrijedi $a_m \in X'$, imamo

$$a_m(x) = a_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \Big) = a_m\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n a_m(x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \delta_{nm} = c_m.$$

Zbog proizvoljnosti $m \in \mathbb{N}$, slijedi da je $a_m(x) = c_m,\ \forall m \in \mathbb{N}$, odnosno $(x_n)_n$ je slaba baza za X. Ranije je pokazano da su $(a_n)_n$ slabo neprekidni, pa stoga vrijedi da je $(x_n)_n$ slaba Schauderova baza za X. □

Teorem 3.4.4. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ niz u X, te pretpostavimo da je $x_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je*

$$Y = \Big\{(c_n) : \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira slabo u } X\Big\},$$

te neka je

$$\|(c_n)\|_Y = \sup_N \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) Y je Banachov prostor.

(b) Ako je $(x_n)_n$ slaba baza za X, onda je Y topološki izomorfan sa X; topološki izomorfizam je dan preslikavanjem $T : (c_n) \mapsto \sum c_n x_n$.

Dokaz. Uz činjenicu da su slabo konvergentni nizovi ograničeni, dokaz je analogan dokazu Teorema 3.1.12. □

Korolar 3.4.5. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ slaba baza za X i $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $\sup_N \|S_N x\| < \infty$ *za svaki* $x \in X$.

(b) Svaki S_N je (jako) neprekidan, i $C = \sup_N \|S_N\| < \infty$.

(c) $|||x||| = \sup_N \|S_N x\|$ *definira normu na X ekvivalentnu inicijalnoj normi* $\|\cdot\|$, *i vrijedi* $\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \leq C\|\cdot\|$.

(d) Svaki koeficijentni funkcional a_n je (jako) neprekidan, i vrijedi

$$1 \leq \|a_n\|\,\|x_n\| \leq 2C,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

(e) $(x_n)_n$ je slaba Schauderova baza za X.

Dokaz. Analogno Korolaru 3.1.13 i Teoremu 3.1.16. □

Teorem 3.4.6. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. $(x_n)_n$ je baza za X ako i samo ako je $(x_n)_n$ slaba baza za X.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Prema Teoremu 3.4.3, sve baze su slabe baze.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ slaba baza za X, te neka je $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Po Teoremu 3.4.3, vrijedi $a_n \in X'$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Štoviše, zbog jedinstvenosti zapisa u 3.4, mora vrijediti $a_n(x_m) = \delta_{mn}$. Dakle, niz $(a_n)_n$ je biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Nadalje, prema Korolaru 3.4.5, vrijedi $\sup_N \|S_N\| < \infty$. Stoga je, po Teoremu 3.6.1, dovoljno pokazati da je $(x_n)_n$ fundamentalan niz u X.
Neka je $x^* \in X'$ takav da vrijedi $x^*(x_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada iz definicije slabe baze, po 3.4, imamo

$$x^*(x) = \lim_{N\to\infty} x^*\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x^*(x_n) = 0.$$

Stoga je $x^* = 0$. Po Korolaru 1.4.3 slijedi da je $(x_n)_n$ fundamentalan niz. □

3.5 Biortogonalnost, minimalnost i nezavisnost

Definicija 3.5.1. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. $(x_n)_n$ je minimalan niz ako je $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$, za sve $m \in \mathbb{N}$.*
Za niz $(x_n)_n$ koji je i minimalan i fundamentalan kažemo da je egzaktan.

Lema 3.5.2. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Tada vrijedi sljedeće:*

(a) Postoji niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n \Leftrightarrow (x_n)_n$ je minimalan niz.

(b) Postoji jedinstven niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n \Leftrightarrow (x_n)_n$ je egzaktan niz.

Dokaz. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$. Za fiksni $m \in \mathbb{N}$ i $z \in span\{x_n\}_{n\neq m}$ je $z = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}$ i

$$a_m(z) = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} a_m(x_{n_j}) = 0$$

jer su svi $n_j \neq m$. Kako je a_m neprekidno preslikavanje, slijedi da je $a_m(z) = 0$, za sve $z \in \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. No, kako je $a_m(x_m) = 1$, slijedi da je $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$, odnosno da je $(x_n)_n$ je minimalan niz.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ minimalan niz. Kako je $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$, tada po Korolaru 1.4.2 postoji $a_m \in X'$ takav da je $a_m(x_m) = 1$ i $a_m(x_n) = 0, \forall n \neq m$. Napravimo li ovaj postupak za sve $m \in \mathbb{N}$, dobivamo biortogonalan niz $(a_n)_n$ nizu $(x_n)_n$.

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da postoji jedinstven niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Iz dijela (a) znamo da je $(x_n)_n$ minimalan. Da bi pokazali da je egzaktan, trebamo još pokazati da je fundamentalan, to jest, da vrijedi $\overline{span}\{x_n\} = X$. Uzmimo $a_n \in X'$. Zbog biortogonalnosti nizova $(x_n)_n$ i $(a_n)_n$ vrijedi da je $a_n(x_m) = \delta_{mn}$.
Neka je $x^* \in X'$ takav da je $x^*(x_n) = 0, \forall n$. Tada za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a_n + x^*)(x_m) = a_n(x_m) + x^*(x_m) = \delta_{mn}$, odakle slijedi da je $(a_n + x^*)_n$ biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$. Iz pretpostavke jedinstvenosti slijedi da je $x^* = 0$. Sada po Korolaru 1.4.3 slijedi tvrdnja.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ egzaktan niz, to jest, minimalan i fundamentalan niz. Iz dijela (a) znamo da postoji biortogonalan niz $(a_n)_n$ nizu $(x_n)_n$.
Pokazujemo jedinstvenost. Neka je $(b_n)_n$ neki drugi niz biortogonalan nizu $(x_n)_n$, to jest, takav da vrijedi $b_m(x_n) = \delta_{nm}$. Vrijedi da je $a_m - b_m \in X'$ i imamo

$$(a_m - b_m)(x_n) = a_m(x_n) - b_m(x_n) = \delta_{nm} - \delta_{nm} = 0, \forall n.$$

Po Korolaru 1.4.3 slijedi da je $a_m - b_m = 0$. Kako to vrijedi za sve $m \in \mathbb{N}$, vrijedi tvrdnja.

□

Teorem 3.5.3 (Müntz-Szász). *Neka je $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < ...$ rastući niz nenegativnih prirodnih brojeva.*

(a) Niz $(x^{n_k})_{k\geq 0}$ je fundamentalan u $C[0,1]$ ako i samo ako je $n_0 = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$.

(b) Ako je $0 < a < b < \infty$, onda je niz $(x^{n_k})_{k\geq 0}$ fundamentalan u $C[a,b]$ ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$.

Dokaz. [4], Teorem 15.26. □

Definicija 3.5.4. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Kažemo da je $(x_n)_n$:*

(a) konačno linearno nezavisan (ili, kraće, nezavisan) ako $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0$ povlači da je $c_1 = ... = c_N = 0$.

(b) $\ell^2(\ell^p)$-nezavisan ako $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira i suma mu je jednaka nuli za neki niz $(c_n)_n \in \ell^2(\ell^p)$ povlači da je $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) ω-nezavisan ako $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira i suma mu je jednaka nuli samo kada je $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorem 3.5.5. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Ako je $(x_n)_n$ bazni niz, onda je $(x_n)_n$ minimalan.

(b) Ako je $(x_n)_n$ minimalan, onda je $(x_n)_n$ ω-nezavisan.

(c) Ako je $(x_n)_n$ ω-nezavisan, onda je $(x_n)_n$ konačno nezavisan.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bazni niz u X. Tada je $(x_n)_n$ baza za $M = \overline{span}\{x_n\}$. Stoga postoji niz $(a_n)_n \subset M'$ koji je biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$ i definirajmo $E_m = span\{x_n\}_{n \neq m}$. Tada je $a_m(x_n) = 0, \forall x \in E_m$, a kako je a_m neprekidan, onda je $a_m(x) = 0, \forall x \in \overline{E_m}$. Kako je $a_m(x_m) = 1$, slijedi da je $x_m \notin \overline{E_m}$. Dakle, $(x_n)_n$ je minimalan.

(b) Neka je $(x_n)_n$ minimalan, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira i suma mu je jednaka nuli. Pretpostavimo da je $c_m \neq 0$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$x_m = -\frac{1}{c_m} \sum_{n \neq m} c_n x_n,$$

odakle slijedi da je $x_m \in \overline{span}\{x_n\}_{n \neq m}$ što je u kontradikciji s minimalnošću niza $(x_n)_n$. Dakle $(x_n)_n$ je ω-nezavisan.

(c) Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ ω-nezavisan. To znači da $\sum c_n x_n$ konvergira i suma mu je jednaka nuli samo ako je $c_n = 0$ za sve n. Posebno, za svaki fiksan $N \in \mathbb{N}$ je $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0$ i $c_1 = ... = c_N = 0$. Dakle, $(x_n)_n$ je konačno nezavisan.

$\square$

Napomena 3.5.6. *Obrati u prethodnom teoremu ne vrijede čak ni uz dodatne pretpostavke; na primjer, da je prostor Hilbertov ili da je niz fundamentalan. To je pokazano u sljedeća tri primjera.*

Primjer 3.5.7 (minimalan i fundamentalan $\not\Rightarrow$ baza)**.** *Neka je $(e_n)_n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H i stavimo $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k, n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da je $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n} e_n, n \geq 2$, i konstruirajmo niz $(y_n)_n$ biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Fiksirajmo $m \geq 2$ i neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{m, m+1\}$. Tada je*

$$0 = \langle y_m, x_n \rangle = \left\langle y_m, x_{n-1} + \frac{1}{n} e_n \right\rangle = \langle y_m, x_{n-1} \rangle + \frac{1}{n} \langle y_m, e_n \rangle = \frac{1}{n} \langle y_m, e_n \rangle.$$

Dakle, $\langle y_m, e_n \rangle = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{m, m+1\}$. Za $n = m$ imamo

$$1 = \langle y_m, x_m \rangle = \langle y_m, x_{m-1} + \frac{1}{m} e_m \rangle = \frac{1}{m} \langle y_m, e_m \rangle,$$

odakle slijedi da je $\langle y_m, e_m \rangle = m$. Također je

$$0 = \langle y_m, x_{m+1} \rangle = \langle y_m, x_m + \frac{1}{m+1} e_{m+1} \rangle = 1 + \frac{1}{m+1} \langle y_m, e_{m+1} \rangle,$$

odakle slijedi da je $\langle y_m, e_{m+1}\rangle = -(m+1)$. *Za* $m = 1$ *imamo sljedeće:*
za $n = 1$ *je*

$$1 = \langle y_1, x_1\rangle = \langle y_1, e_1\rangle;$$

za $n = 2$ *je*

$$0 = \langle y_1, x_2\rangle = \langle y_1, x_1\rangle + \langle y_1, \frac{1}{2}e_2\rangle = 1 + \frac{1}{2}\langle y_1, e_2\rangle,$$

odakle je $\langle y_1, e_2\rangle = -2$;
za $n \geq 3$ *je*

$$0 = \langle y_1, x_n\rangle = \langle y_1, x_{n-1}\rangle + \langle y_1, \frac{1}{n}e_n\rangle = \frac{1}{n}\langle y_1, e_n\rangle,$$

odakle slijedi da je $\langle y_1, e_n\rangle = 0$ *za sve* $n \geq 3$. *Dakle, vrijedi* $y_1 = e_1 - 2e_2$. *Sve skupa, dobili smo da je* $y_n = ne_n - (n+1)e_{n+1}, \forall n$. *Sada se lako provjeri da su nizovi* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *doista biortogonalni. Prema Lemi 3.5.2 slijedi da je* $(x_n)_n$ *minimalan niz.*
Da bismo dokazali da je $(x_n)_n$ *fundamentalan, pretpostavimo da je postoji* $a \in H$ *takav da je* $\langle x_n, a\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} \langle e_1, a\rangle &= 0, \\ \langle e_1, a\rangle + \frac{1}{2}\langle e_2, a\rangle &= 0, \\ \langle e_1, a\rangle + \frac{1}{2}\langle e_2, a\rangle + \frac{1}{3}\langle e_3, a\rangle &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Slijedi da je $\langle e_n, a\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *pa je* $a = 0$. *Prema Korolaru 1.4.3 sijedi da je* $(x_n)_n$ *fundamentalan niz.*
Sada pretpostavimo da se $x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e_k$ *može prikazati kao* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, *za neke skalare* $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$. *Neka je* $m \in \mathbb{N}$ *proizvoljan i pomnožimo zadnju jednakost skalarno sa* y_m. *Tada imamo*

$$\alpha_m = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, y_m \Big\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e_k, y_m \Big\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}e_k, me_m - (m+1)e_{m+1} \Big\rangle = 1 - 1 = 0.$$

Kako to vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$, *dobili smo da je* $x = \sum_{n=1}^{\infty} 0x_n = 0$ *što je kontradikcija. Dakle,* $(x_n)_n$ *nije topološka baza za* H.

Primjer 3.5.8 (ω-nezavisan i fundamentalan $\not\Rightarrow$ minimalan)**.** *Prema Teoremu 3.5.3, niz* $(x^k)_{k\geq 0}$ *je fundamentalan u* $C[0,1]$. *No, prema istom Teoremu je i niz* $(x^{2k})_{k\geq 0}$ *fundamentalan u istom prostoru. Stoga* $(x^k)_{k\geq 0}$ *nije minimalan.*
Pretpostavimo da je $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$, *gdje navedeni red konvergira uniformno na* $[0,1]$. *Tada je* $c_0 = f(0) = 0$. *Deriviranjem dobivamo da su i ostali koeficijenti jednaki 0. Dakle,* $(x^k)_{k\geq 0}$ *je* ω*-nezavisan.*

Primjer 3.5.9 (konačno nezavisan i fundamentalan $\not\Rightarrow$ ω-nezavisan)**.** *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Neka je $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$ i neka je $x \in X$ element takav da je $a_n(x) \neq 0, \forall n$; na primjer, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n\|x_n\|}$. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \neq x_n$ jer je $a_m(x_n) = 0$ za $m \neq n$. Tada je niz $(x_n)_n \cup (x)$ fundamentalan niz i vrijedi $-x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n = 0$ pa nije ω-nezavisan. Pokažimo da je konačno nezavisan. Pretpostavimo da je $c_0x + \sum_{n=1}^{N} c_nx_n = 0$. Uvrstimo li $x = \sum a_n(x)x_n$ dobivamo*

$$\sum_{n=1}^{N}(c_0a_n(x) + c_n)x_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_0a_n(x)x_n = 0.$$

No, $(x_n)_n$ je baza pa mora biti $c_0a_n(x) + c_n = 0$ za $n = 1, ..., N$ i $c_0a_n(x) = 0$ za $n > N$. Kako su svi $a_n(x) \neq 0$, mora biti $c_0 = 0$ pa slijedi da je $c_1 = ... = c_N = 0$. Dakle, $(x_n)_n \cup (x)$ je konačno nezavisan.

3.6 Karakterizacija Schauderovih baza i minimalnih nizova

Teorem 3.6.1. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *$(x_n)_n$ je baza za X;*

(b) *Postoji biortogonalan niz $(a_n)_n \subseteq X'$ nizu $(x_n)_n$ takav da je*

$$x = \lim_{N\to\infty} S_Nx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n, \ \forall x \in X;$$

(c) *$(x_n)_n$ je fundamentalan i postoji biortogonalan niz $(a_n)_n \subseteq X'$ nizu $(x_n)_n$ takav da red $\sum a_n(x)x_n$ konvergira za svaki $x \in X$;*

(d) *$(x_n)_n$ je egzaktan i $\sup_N \|S_Nx\| < \infty$ za sve $x \in X$;*

(e) *$(x_n)_n$ je egzaktan i $\sup_N \|S_N\| < \infty$.*

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X. Tvrdnja (b) slijedi iz definicije baze i Teorema 3.1.16.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Da bi pokazali da je $(x_n)_n$ baza za X, trebamo pokazati jedinstvenost prikaza $x = \sum a_n(x)x_n$ za sve $x \in X$.

Neka je $(c_n)_n$ neki drugi niz skalara takav da vrijedi $x = \sum c_n x_n$. Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$, zbog neprekidanosti funkcionala a_m, imamo:

$$a_m(x) = a_m(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_m(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} = c_m.$$

$\boxed{(e) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (e).
Odaberimo $x \in span\{x_n\}$, $x = \sum_{n=1}^{M} c_n x_n$. Tada, kako je S_N linearan za svaki $N \in \mathbb{N}$ te su $(x_n)_n$ i $(a_n)_n$ biortogonalni, za svaki $N \geq M$ vrijedi

$$S_N x = S_N\Big(\sum_{m=1}^{M} c_m x_m\Big) = \sum_{m=1}^{M} c_m S_N x_m = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m = x.$$

Stoga za svaki $x \in span\{x_n\}$ vrijedi

$$x = \lim_{N\to\infty} S_N x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n.$$

Neka je $C = \sup_N \|S_N\|$ te neka je $x \in X$ proizvoljan. Kako je $span\{x_n\}$ gusto u X, slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $y \in span\{x_n\}$ tako da vrijedi $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{1+C}$, $y = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m$. Sada za $N \geq M$ imamo

$$\begin{aligned} \|x - S_N x\| &\leq \|x - y\| + \|y - S_N y\| + \|S_N y - S_N x\| \\ &\leq \|x - y\| + 0 + \|S_N\| \, \|x - y\| \\ &\leq (1 + C) \, \|x - y\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Stoga je $x = \lim_{N\to\infty} S_N x = \sum a_n(x) x_n$ za proizvoljan $x \in X$. Dakle, vrijedi tvrdnja (b).

$\boxed{(a) \Rightarrow (c)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X. Tada za svaki $x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(c_n)_n$ takav da je $x = \sum c_n x_n$. Posebno, vrijedi $s_N = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \in span\{x_n\}$ i $\lim_{N\to\infty} s_N = x$. Stoga je $\overline{span}\{x_n\} = X$, odnosno $(x_n)_n$ je fundamentalan niz. Drugi dio tvrdnje (c) opet slijedi izravno iz definicije baze i Teorema 3.1.16.

$\boxed{(a) \Rightarrow (d)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X. Kao i maloprije, pokaže se da je $(x_n)_n$ fundamentalan niz. Osim toga, prema Teoremu 3.1.16, $(x_n)_n$ je Schauderova baza za X, odnosno $(x_n)_n$ je bazni niz. Sada iz Teorema 3.5.5 (a) slijedi da je i minimalan niz. Dakle, $(x_n)_n$ je egzaktan niz. Drugi dio tvrdnje (c) slijedi iz Korolara 3.1.13 (c).

$\boxed{(a) \Rightarrow (e)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X. Kao i maloprije, pokaže se da je $(x_n)_n$ egzaktan niz. Također, iz Korolara 3.1.13 (b) slijedi da je $\sup_N \|S_N\| < \infty$. Dakle, vrijedi tvrdnja (e).

$\boxed{(d) \Rightarrow (e)}$ Neka je $(x_n)_n$ egzaktan i vrijedi $\sup_N \|S_N x\| < \infty$ za sve $x \in X$. Tada iz Teorema 1.5.1 slijedi $\sup_N \|S_N\| < \infty$. Dakle, vrijedi tvrdnja (e).

$\boxed{(c) \Rightarrow (d)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Iz pretpostavke egzistencije biortogonalnog niza $(a_n)_n$ nizu $(x_n)_n$, po Lemi 3.5.2, slijedi da je $(x_n)_n$ minimalan. Kako je po pretpostavci niz $(x_n)_n$ i fundamentalan, slijedi da je egzaktan. Konvergencija reda $\sum a_n(x)x_n$ za svaki $x \in X$ je ekvivalentna konvergenciji niza $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}}$ za svaki $x \in X$. Stoga je niz $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}}$ ograničen za svaki $x \in X$, odnosno vrijedi $\sup_N \|S_N x\| < \infty$, za svaki $x \in X$. Dakle, vrijedi tvrdnja (d). □

Teorem 3.6.2. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X takav da je $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je minimalan niz;*

(b) $\forall M \in \mathbb{N}\ \exists C_M \geq 1$ *tako da* $\forall N \geq M\ \forall c_0, ..., c_N$ *vrijedi* $\| \sum_{n=1}^M c_n x_n\| \leq C_M \| \sum_{n=1}^N c_n x_n\|$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (a), odnosno da je $(x_n)_n$ minimalan niz. Iz Leme 3.5.2 slijedi da postoji niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Za dani $N \geq M$ i skalare $c_0, ..., c_N$ imamo

$$\Big\| \sum_{n=1}^M c_n x_n \Big\| = \Big\| S_M \Big(\sum_{n=1}^N c_n x_n \Big) \Big\| \leq \|S_M\| \, \Big\| \sum_{n=1}^N c_n x_n \Big\|.$$

Stavimo $C_M = \|S_M\|$ pa slijedi tvrdnja (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Neka je $E = span\{x_n\}$ i stavimo $C_0 = 0$. Nadalje, neka je dan $x = \sum_{n=1}^N c_n x_n \in E$ i $1 \leq M \leq N$. Imamo

$$\begin{aligned} |c_M| \, \|x_M\| = \|c_M x_M\| &\leq \Big\| \sum_{n=1}^M c_n x_n \Big\| + \Big\| \sum_{n=1}^{M-1} c_n x_n \Big\| \\ &\leq C_M \Big\| \sum_{n=1}^N c_n x_n \Big\| + C_{M-1} \Big\| \sum_{n=1}^N c_n x_n \Big\| \\ &= (C_M + C_{M-1}) \|x\|. \end{aligned}$$

Kako je $x_n \neq 0, \forall n$, imamo

$$|c_M| \leq \frac{C_M + C_{M-1}}{\|x_M\|} \|x\|, \ 1 \leq M \leq N. \tag{3.6}$$

Posebno, za $x = 0$ imamo $c_1 = ... = c_N = 0$ pa vrijedi da je $(x_n)_n$ konačno linearno nezavisan. Kako je E konačna linearna ljuska od $(x_n)_n$, slijedi da je $(x_n)_n$ Hamelova baza za E; dakle, za svaki $x \in E$ postoji jedinstveni prikaz oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$, gdje je samo konačno mnogo skalara $a_n(x)$ netrivijalno. Iz (3.6) imamo

$$|a_n(x)| \leq \frac{C_n + C_{n-1}}{\|x_n\|}\|x\|, \ x \in E. \tag{3.7}$$

Dakle, a_n su neprekidni na potprostoru E. Po Teoremu 1.4.1, a_n se mogu na jedinstven način proširiti po neprekidnosti na cijeli X (ostavimo iste oznake za proširenja). Kako je niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n \subseteq X$, slijedi da je $(x_n)_n$ minimalan, to jest, vrijedi tvrdnja (a). □

Teorem 3.6.3. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ niz u X. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ je baza za X;

(b) $(x_n)_n$ je fundamentalan, $x_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i postoji konstanta $C \geq 1$ takva da vrijedi

$$\forall N \geq M \ \forall c_1, ..., c_N \ \Big\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\Big\| \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|. \tag{3.8}$$

Nadalje, u slučaju kada to vrijedi, optimalna konstanta C u (3.8) je bazna konstanta $C = C = \sup_N \|S_N\|$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X. Kao u dokazu Teorema 3.6.1, pokaže se da je tada $(x_n)_n$ fundamentalan niz. Također, iz svojstva baze slijedi da je $x_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $N \geq M$ i skalare $c_1, ..., c_n$ vrijedi

$$\Big\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\Big\| = \Big\|S_M\Big(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big)\Big\| \leq \|S_M\| \ \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|,$$

gdje je $C = \sup_M \|S_M\|$. Iz Napomene 3.1.15 znamo da je $C \geq 1$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Iz Teorema 3.6.2 slijedi da je $(x_n)_n$ minimalan niz. Prema Lemi 3.5.2 postoji biortogonalan niz $(a_n)_n \subseteq X'$ nizu $(x_n)_n$. Po pretpostavci je niz $(x_n)_n$ fundamentalan. Stoga je, prema Teoremu 3.6.1, dovoljno pokazati da vrijedi $\sup_N \|S_N\| < \infty$.
Pretpostavimo da je $x = \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \in span\{x_n\}$. Sada, $N \leq M$ povlači

$$\|S_N x\| = \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \leq C\Big\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\Big\| = C\|x\|,$$

dok $N > M$ povlači

$$\|S_N x\| = \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \Big\| = \|x\|.$$

Kako je $C \geq 1$ imamo

$$\forall x \in span\{x_n\}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \|S_N x\| \leq C\|x\|.$$

Za svaki $N \in \mathbb{N}$ je S_N neprekidan i vrijedi da je $span\{x_n\}$ gust u X pa slijedi

$$\|S_N x\| \leq C\|x\|, \forall x \in X,\ \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

Odavde slijedi da je $\sup_N \|S_N\| \leq C < \infty$, i također, da je najmanja vrijednost za C upravo $C = C = \sup_N \|S_N\|$. □

3.7 Baze dualnih prostora

Lema 3.7.1. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ minimalan niz u X, te neka je niz $(a_n)_n \subseteq X'$ biortogonalan nizu $(x_n)_n$. Tada je $(a_n)_n$ minimalan niz u X' i niz $(\hat{x}_n)_n \subseteq X''$ je njemu biortogonalan niz.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ minimalan niz u X. Prema Lemi 3.5.2, postoji biortogonalan niz $(a_n)_n \subseteq X'$ nizu $(x_n)_n$. Za $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\hat{x}_n(a_m) = a_m(x_n) = \delta_{nm}.$$

Dakle, niz $(\hat{x}_n)_n \subseteq X''$ je biortogonalan niz nizu $(a_n)_n$ u X'. Prema Lemi 3.5.2, $(a_n)_n$ je minimalan niz u X'. □

Teorem 3.7.2. *Neka je X Banachov prostor.*

(a) Ako je $(x_n)_n$ baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$, onda je $(a_n)_n$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' te je $(\hat{x}_n)_n$ njemu pridruženi niz koeficijentnih funkcionala.

(b) Ako je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$, onda je $(a_n)_n$ bezuvjetna baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' te je $(\hat{x}_n)_n$ njemu pridruženi niz koeficijentnih funkcionala.

(c) Ako je $(x_n)_n$ ograničena baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$, onda je $(a_n)_n$ ograničena baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' te je $(\hat{x}_n)_n$ njemu pridruženi niz koeficijentnih funkcionala.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$. Prema Lemi 3.7.1, $(a_n)_n$ je minimalan niz u X' i $(\hat{x}_n)_n \subseteq X''$ je njemu biortogonalan niz. Dakle, niz $(a_n)_n$ je egzaktan niz u $\overline{span}\{a_n\}$. Stoga je, prema Teoremu 3.6.1, dovoljno pokazati da su operatori parcijalnih suma T_N, pridruženi nizu $(a_n)_n$, uniformno ograničeni u operatorskoj normi. Oni su sljedećeg oblika:

$$T_N x^* = \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n(x^*)a_n = \sum_{n=1}^{N} x^*(x_n)a_n,\ x^* \in \overline{span}\{a_n\}.$$

Neka su sa S_N označeni operatori parcijalnih suma pridruženi bazi $(x_n)_n$. Kako su S_N neprekidna linearna preslikavanja sa X u samog sebe, ona imaju adjungirana preslikavanja $S_N^* : X' \to X'$. Štoviše, za $x \in X$, $x^* \in X'$ i $N \in \mathbb{N}$ je sada, po definiciji adjungiranog preslikavanja,

$$\begin{aligned} S_N^* x^*(x) = x^*\Big(S_N x\Big) = x^*\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\Big) &= \sum_{n=1}^{N} a_n(x)x^*(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} x^*(x_n)a_n(x) = \Big(\sum_{n=1}^{N} x^*(x_n)a_n\Big)(x) \\ &= T_N x^*(x). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $S_N^* = T_N, \forall N \in \mathbb{N}$. Kako je $\|S_N^*\| = \|S_N\|$, slijedi $\|T_N\| = \|S_N^*\| = \|S_N\|$. Stoga je $\sup_N \|T_N\| = \sup_N \|S_N\| < \infty$.

(b) Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$. Iz dijela (a) znamo da je tada $(a_n)_n$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' te je $(\hat{x}_n)_n$ njemu pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Neka je $x^* \in \overline{span}\{a_n\}$ proizvoljan. Tada za njega postoji jedinstven prikaz oblika $x^* = \sum \hat{x}_n(x^*)a_n$. Pokazujemo da navedeni red konvergira bezuvjetno.
Neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\mathbb{N}$ i $x \in X$ proizvoljan. Imamo

$$\begin{aligned} x^*(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n(x^*)a_n\Big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n(x^*)a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)a_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^*(a_n(x)x_n) = x^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n\Big) = x^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}(x)x^*(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}(x)\hat{x}_{\sigma(n)}(x^*) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_{\sigma(n)})a_{\sigma(n)}\Big)(x). \end{aligned}$$

Kako je $x \in X$ bio proizvoljan, vrijedi da je $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_{\sigma(n)})a_{\sigma(n)}$. Kako je permutacija σ skupa $\mathbb{N}$ bila proizvoljna, slijedi da red $x^* = \sum \hat{x}_n(x^*)a_n$ konvergira bezuvjetno, a kako je i $x^* \in X'$ bio proizvoljan, slijedi da je $(a_n)_n$ bezuvjetna baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(\hat{x}_n)_n$.

(c) Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ ograničena baza za X s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(a_n)_n$. Iz dijela (a) znamo da je tada $(a_n)_n$ baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' te je $(\hat{x}_n)_n$ njemu pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Iz Teorema 3.1.16 znamo da vrijedi

$$1 \leq \|a_n\| \, \|x_n\| \leq 2C, \ \forall n,$$

gdje je C bazna konstanta baze $(x_n)_n$. Kako po definiciji ograničene baze vrijedi

$$0 < \inf \|x_n\| \leq \sup \|x_n\| < \infty,$$

posebno je

$$M_1 \leq \|x_n\| \leq M_2, \ \forall n,$$

za neke $0 < M_1, M_2 < \infty$. Stoga vrijedi

$$\frac{1}{M_2} < \|a_n\| \leq \frac{2C}{M_1}, \ \forall n.$$

Sada slijedi

$$0 < \inf \|a_n\| \leq \sup \|a_n\| < \infty,$$

odnosno, $(a_n)_n$ je ograničena baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X' s pridruženim nizom koeficijentnih funkcionala $(\hat{x}_n)_n$.

□

Korolar 3.7.3. *Neka je X refleksivan Banachov prostor i neka je $(x_n)_n$ baza ili bezuvjetna baza ili ograničena baza za X. Tada je niz $(a_n)_n$, koji je biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$, baza ili bezuvjetna baza ili ograničena baza za X', respektivno.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ baza ili bezuvjetna baza ili ograničena baza za X. Tada iz Teorema 3.7.2 slijedi da je $(a_n)_n$ baza ili bezuvjetna baza ili ograničena baza za $\overline{span}\{a_n\}$ u X', respektivno. Dakle, dovoljno je pokazati da je $(a_n)_n$ fundamentalan niz u X'.

Pretpostavimo da za $x^{**} \in X''$ vrijedi

$$x^{**}(a_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je X refleksivan, vrijedi $X'' = Im\,\hat{}$. Stoga je $x^{**} = \hat{x}$ za neki $x \in X$. Sada imamo

$$a_n(x) = \hat{x}(a_n) = x^{**}(a_n) = 0, \forall n.$$

Stoga je $x = \sum a_n(x)x_n = 0$, odakle slijedi da je $x^{**} = \hat{x} = 0$. Po Korolaru 1.4.3, $(a_n)_n$ je fundamentalan niz u X'. □

Korolar 3.7.4. *Neka je H Hilbertov prostor,* $(x_n)_n$ *baza za H i* $(a_n)_n$ *biortogonalan niz nizu* $(x_n)_n$*, te neka je* $(y_n)_n$ *baza za H i* $(b_n)_n$ *njemu biortogonalan niz. Ako je* $(x_n)_n \sim (y_n)_n$*, onda je* $(a_n)_n \sim (b_n)_n$*.*

Dokaz. Prema Napomeni 1.3.12, H je refleksivan. Stoga je, po Korolaru 3.7.3, $(a_n)_n$ baza za H i $(x_n)_n$ je biortogonalan nizu $(a_n)_n$, te je $(b_n)_n$ baza za H i $(y_n)_n$ je njemu biortogonalan niz.
Ako je $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, onda postoji topološki izomorfizam $T : H \to H$ takav da vrijedi $Tx_n = y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Njemu adjungirano preslikavanje T^* je također topološki izomorfizam sa H na samog sebe. Nadalje, za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$T^*b_n(x_m) = b_n(Tx_m) = b_n(y_m) = \delta_{mn} = a_n(x_m).$$

Kako je $(x_n)_n$ fundamentalan niz, slijedi da je $T^*b_n = a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi $(a_n)_n \sim (b_n)_n$. $\square$

Poglavlje 4

Bezuvjetne baze

4.1 Osnovna svojstva

Lema 4.1.1. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ baza za X. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ je bezuvjetna baza za X;

(b) $(x_{\sigma(n)})_n$ je baza za X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.

U tom slučaju, ako je $(a_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala baze $(x_n)_n$, onda je $(a_{\sigma(n)})_n$ niz koeficijentnih funkcionala od $(x_{\sigma(n)})_n$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Neka je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X. To znači da postoji jedinstven niz skalara $(a_n)_n$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi $x = \sum a_n(x)x_n$, gdje red $\sum a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno. Dakle, $\sum a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}$ konvergira i vrijedi $\sum a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)} = x$, za svaki $x \in X$ i svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. Odaberimo proizvoljnu permutaciju σ od $\mathbb{N}$. Da bi pokazali da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X, trebamo pokazati jedinstvenost zapisa $x = \sum a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}$ za svaki $x \in X$. Neka je $x \in X$ proizvoljan te neka je $(\alpha_n)_n$ neki drugi niz skalara takav da vrijedi $x = \sum \alpha_n x_{\sigma(n)}$. Tada je

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_{\sigma(n)}.$$

Za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} a_{\sigma(m)}(x) &= a_{\sigma(m)}\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_{\sigma(n)}\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \underbrace{a_{\sigma(m)}(x_{\sigma(n)})}_{=\delta_{\sigma(n)\sigma(m)}} \\ &= \alpha_{\sigma(m)}. \end{aligned}$$

Dakle, $a_{\sigma(n)} = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Nadalje, zbog proizvoljnosti $x \in X$ slijedi da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X; iz proizvoljnosti permutacije σ slijedi tvrdnja (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. Posebno, $(x_n)_n$ je baza za X. Dakle, svaki $x \in X$ ima jedinstven zapis oblika $x = \sum a_n(x)x_n$. Neka je σ proizvoljna permutacija od $\mathbb{N}$. Kako je po pretpostavci i $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X, za proizvoljan $x \in X$ vrijedi $x = \sum \alpha_n x_{\sigma(n)}$, gdje je $(\alpha_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Slično kao maloprije, pokaže se da vrijedi $\alpha_n = a_{\sigma(n)}(x), \forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, red $\sum a_{\sigma(n)}(x)x_{\sigma(n)}$ konvergira. Zbog proizvoljnosti permutacije σ, vrijedi da red $\sum a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno, odnosno da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X. □

Lema 4.1.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori, te neka je $T : X \to Y$ topološki izomorfizam.*

(a) Ako je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X, onda je $(Tx_n)_n$ bezuvjetna baza za Y.

(b) Ako je $(x_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za X, onda je $(Tx_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za Y.

Dokaz. (a) Neka je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X. Prema Lemi 4.1.1, to je ekvivalentno tvrdnji da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.
Neka je sada σ proizvoljna permutacija od $\mathbb{N}$ te neka je $(x_{\sigma(n)})$ baza za X. Prema Lemi 3.2.1, slijedi da je $(Tx_{\sigma(n)})_n$ baza za Y. Zbog proizvoljnosti odabira permutacije σ, to vrijedi za svaku permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$. Opet prema Lemi 4.1.1, to je ekvivalentno tvrdnji da je $(Tx_n)_n$ bezuvjetna baza za Y.

(b) Neka je $(x_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za X. Iz dijela (a) slijedi da je $(Tx_n)_n$ bezuvjetna baza za Y. Trebamo još pokazati da je i ograničena. Vrijedi $\|T\| < \infty$ i $\sup \|x_n\| < \infty$ pa imamo

$$0 < \inf \|Tx_n\| \leq \sup \|Tx_n\| \leq \sup \|T\|\,\|x_n\| = \|T\| \sup \|x_n\| < \infty.$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (b).

□

Definicija 4.1.3. *Neka je X Banachov prostor, $(x_n)_n$ baza za X, te $(a_n)_n$ niz biortogonalan nizu $(x_n)_n$.*

(a) Za svaki konačan skup $F \subseteq \mathbb{N}$ definiramo operator parcijalne sume $S_F : X \to X$ formulom

$$S_F(x) = \sum_{n \in F} a_n(x) x_n, \ \ x \in X.$$

(b) Za svaki konačan skup $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaki skup skalara $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in F}$ takav da vrijedi $\varepsilon_n = \pm 1$ za sve n, definiramo operator parcijalne sume $S_{F,\varepsilon} : X \to X$ formulom

$$S_{F,\varepsilon}(x) = \sum_{n \in F} \varepsilon_n a_n(x) x_n, \ \ x \in X.$$

(c) Za svaki konačan skup $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaku kolekciju skalara $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in F}$ takvu da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve n, definiramo operator parcijalne sume $S_{F,\Lambda} : X \to X$ formulom

$$S_{F,\Lambda}(x) = \sum_{n \in F} \lambda_n a_n(x) x_n, \ \ x \in X.$$

Teorem 4.1.4. *Neka je X Banachov prostor i $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned} |||x||| &= \sup_F \|S_F(x)\| < \infty, \\ |||x|||_\varepsilon &= \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}(x)\| < \infty, \\ |||x|||_\Lambda &= \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}(x)\| < \infty. \end{aligned}$$

(b) Vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sup_F \|S_F\| < \infty, \\ \mathcal{K}_\varepsilon &= \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}\| < \infty, \\ \mathcal{K}_\Lambda &= \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}\| < \infty. \end{aligned}$$

(c) Vrijedi:

$$|||\cdot||| \leq |||\cdot|||_\varepsilon \leq 2|||\cdot|||,$$

i

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_\varepsilon \leq 2\mathcal{K}.$$

(d) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$*, onda je* $|||\cdot|||_\varepsilon = |||\cdot|||_\Lambda$ *i* $\mathcal{K}_\varepsilon = \mathcal{K}_\Lambda$.

(e) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*, onda je* $|||\cdot|||_\varepsilon \le |||\cdot|||_\Lambda \le 2|||\cdot|||_\varepsilon$ *i* $\mathcal{K}_\varepsilon \le \mathcal{K}_\Lambda \le 2\mathcal{K}_\varepsilon$.

(f) $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||_\varepsilon$ *i* $|||\cdot|||_\Lambda$ *su norme na X ekvivalentne normi* $\|\cdot\|$*; vrijedi:*

$$\begin{aligned}
\|\cdot\| &\le |||\cdot||| \le \mathcal{K}\|\cdot\|,\\
\|\cdot\| &\le |||\cdot|||_\varepsilon \le \mathcal{K}_\varepsilon\|\cdot\|,\\
\|\cdot\| &\le |||\cdot|||_\Lambda \le \mathcal{K}_\Lambda\|\cdot\|.
\end{aligned}$$

Dokaz. (a) Slijedi iz Propozicije 2.2.10.

(b) Slijedi iz dijela (*a*) i Teorema 1.5.1.

(c) Slijedi iz Propozicije 2.2.9(a).

(d) Slijedi iz Propozicije 2.2.9(b).

(e) Slijedi iz Propozicije 2.2.9(c).

(f) Kako su $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||_\varepsilon$ i $|||\cdot|||_\Lambda$ definirani pomoću inicijalne norme $\|\cdot\|$, trivijalno slijedi da svaki zadovoljava svojstva norme na X. Navedene nejednakosti slijede iz dijela (*a*) i dijela (*b*).

□

Napomena 4.1.5. *Neka je X Banachov prostor i* $(x_n)_n$ *bezuvjetna baza za X. Konstante* $\mathcal{K}$*,* $\mathcal{K}_\varepsilon$ *i* $\mathcal{K}_\Lambda$*, te norme* $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||_\varepsilon$ *i* $|||\cdot|||_\Lambda$ *su definirane kao u Teoremu 4.1.4.*

Definicija 4.1.6. *Neka je X Banachov prostor i* $(x_n)_n$ *bezuvjetna baza za X. Tada* $\mathcal{K}_\varepsilon$ *nazivamo bezuvjetna bazna konstanta baze* $(x_n)_n$.

Napomena 4.1.7. *Vrijedi* $1 \le C \le \mathcal{K} \le \mathcal{K}_\varepsilon$.

4.2 Karakterizacija bezuvjetnih baza

Teorem 4.2.1. *Neka je X Banachov prostor i* $(x_n)_n$ *fundamentalan niz u X takav da je* $x_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je bezuvjetna baza za X;*

(b) Postoji konstanta $C_1 \ge 1$ *takva da za svaki* $N \in \mathbb{N}$*, svaki izbor skalara* $c_1, ..., c_N$ *i svaki izbor predznaka* $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$ *vrijedi*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n\Big\| \le C_1 \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|; \tag{4.1}$$

(c) Postoji konstanta $C_2 \geq 1$ takva da za svaki $N \in \mathbb{N}$ i svaki izbor skalara $c_1, ..., c_N, b_1, ..., b_N$ takvih da je $|b_1| \leq |c_1|, ..., |b_N| \leq |c_N|$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|; \tag{4.2}$$

(d) Postoje konstante C_3 i C_4, $0 < C_3 \leq 1 \leq C_4 < \infty$, takve da za svaki $N \in \mathbb{N}$ i svaki izbor skalara $c_1, ..., c_N$ vrijedi

$$C_3 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C_4 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\|; \tag{4.3}$$

(e) $(x_n)_n$ je baza i za svaki ograničen niz skalara $\Lambda = (\lambda_n)$ postoji neprekidan linearan operator $T_\Lambda : X \to X$ takav da je $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, u slučaju kada ovo vrijedi, optimalna konstanta u jednadžbi 4.1 je bezuvjetna bazna konstanta $C_1 = \mathcal{K}_\varepsilon = \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}\|$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X, te neka su $(a_n)_n$ pridruženi koeficijentni funkcionali. Odaberimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$, proizvoljne skalare $c_1, ..., c_N$ i proizvoljne predznake $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$, te stavimo $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Sada je $c_n = a_n(x)$ za $n \leq N$ i $c_n = 0$ za $n > N$. Stoga je

$$\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n = \sum_{n \in F} \varepsilon_n a_n(x) x_n = S_{F,\varepsilon}(x),$$

gdje je $F = \{1, ..., N\}$ i $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N\}$.
Sada iz definicije od $|||\cdot|||_\varepsilon$ i iz Teorema 4.1.4(f) slijedi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n \Big\| = \|S_{F,\varepsilon}\| \leq |||x|||_\varepsilon \leq \mathcal{K}_\varepsilon \|x\| = \mathcal{K}_\varepsilon \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (b) uz $C_1 = \mathcal{K}_\varepsilon$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Odaberimo proizvoljan $N > 0$ i proizvoljne skalare b_n, c_n takve da vrijedi $|b_n| \leq |c_n|$, za $n = 1, ..., N$. Neka je $|\lambda_n| \leq 1$ takav da vrijedi $b_n = \lambda_n c_n$, te stavimo $\alpha_n = Re\lambda_n$ i $\beta_n = Im\lambda_n$ $(n = 1, ..., N)$. Kako su $\alpha_n \in \mathbb{R}$ i zadovoljavaju $|\alpha_n| \leq 1$, iz Korolara 1.7.2 slijedi da možemo naći skalare $t_m \geq 0$ i predznake $\varepsilon_m^n = \pm 1$, za $m = 1, ..., N+1$ i $n = 1, ..., N$, takve da vrijedi

$$\sum_{m=1}^{N+1} t_m = 1 \ i \ \sum_{m=1}^{N+1} \varepsilon_m^n t_m = \alpha_n, \ za \ n = 1, ..., N.$$

Stoga imamo

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n x_n\Big\| &= \Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N+1}\varepsilon_m^n t_m c_n x_n\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{m=1}^{N+1} t_m \sum_{n=1}^{N}\varepsilon_m^n c_n x_n\Big\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{N+1} t_m \Big\|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_m^n c_n x_n\Big\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{N+1} t_m C_1 \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\| \\
&= C_1\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|
\end{aligned}
$$

.

Analogno se pokaže slična ocjena za imaginarne dijelove β_n, koji su nula u slučaju kad je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pa imamo

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\Big\| &= \Big\|\lambda_n c_n x_n\Big\| \\
&\leq \Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n c_n x_n\Big\| + \Big\|\beta_n c_n x_n\Big\| \\
&\leq 2C_1\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (c) uz $C_2 = 2C_1$.

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c), te neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\mathbb{N}$. Želimo pokazati da je $(x_{\sigma(n)})_n$ baza za X. Po pretpostavci je $(x_{\sigma(n)})_n$ fundamentalan niz u X sa netrivijalnim elementima. Stoga je, po Teoremu 3.6.3, dovoljno pokazati da postoji konstanta C_σ takva da vrijedi

$$\forall N \geq M,\ \forall c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)},\ \Big\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\| \leq C_\sigma \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\Big\|.$$

Fiksirajmo proizvoljne $N, M \in \mathbb{N}$ takve da je $N \geq M$ i odaberimo proizvoljne skalare $c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(N)}$. Definirajmo $c_n = 0$ za $n \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$. Neka je $L = max\{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$

te definirajmo

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & n \in \{\sigma(1), ..., \sigma(M)\}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{L} \lambda_n c_n x_n \Big\| \\ &\leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{L} c_n x_n \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \Big\|. \end{aligned}$$

To je upravo ono što smo htjeli pokazati, uz $C_\sigma = C_2$. Stoga vrijedi tvrdnja (a).

$\boxed{(c) \Rightarrow (d)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Odaberimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ te proizvoljne skalare $c_1, ..., c_N$. Neka je $b_n = |c_n|$, za $n = 1, ..., N$. Tada vrijedi i

$$|b_n| \leq |c_n|, \; n = 1, ..., N, \tag{4.4}$$

i

$$|c_n| \leq |b_n|, \; n = 1, ..., N. \tag{4.5}$$

Po pretpostavci, 4.4 povlači

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|,$$

dok 4.5 povlači

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\|.$$

Sve skupa, imamo

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C_2^2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\|,$$

odnosno, jer je $C_2 \geq 1 > 0$, imamo

$$\frac{1}{C_2} \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leq C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\|.$$

Vrijedi $0 < \frac{1}{C_2} \leq 1$ i $C_2 \geq 1$ pa vidimo da vrijedi tvrdnja (d) uz $C_3 = \frac{1}{C_2}$ i $C_4 = C_2$.

$\boxed{(d) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (d). Odaberimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$, proizvoljne skalare $c_1, ..., c_N$ i proizvoljne predznake $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$. Prema tvrdnji (d), vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n \Big\| \leq C_4 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n c_n| x_n \Big\| = C_4 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\| \leq \frac{C_4}{C_3} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (b) uz $C_1 = \frac{C_4}{C_3}$.

$\boxed{(a) \Rightarrow (e)}$ Neka je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X te neka je $(a_n)_n$ niz pridruženih koeficijentnih funkcionala. Neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan ograničen niz skalara, te stavimo $M = \sup |\lambda_n|$. Fiksirajmo proizvoljan $x \in X$. Tada red $x = \sum a_n(x) x_n$ konvergira bezuvjetno. Sada, prema Teoremu 2.2.5(f), slijedi da red $\sum \lambda_n a_n(x) x_n$ konvergira. Stoga je dobro definiran $T_\Lambda : X \to X$ formulom

$$T_\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x) x_n.$$

Nadalje, T_Λ je očito linearan i vrijedi

$$\begin{aligned} \|T_\Lambda(x)\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x) x_n \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{M} \lambda_n a_n(x) x_n \Big\| = M \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x) x_n \Big\| \\ &= M \Big\| \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x) x_n \Big\| = M \lim_{N \to \infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x) x_n \Big\| = (*). \end{aligned}$$

Stavimo $F = \{1, ..., N\}$ i $\Lambda' = (\frac{\lambda_n}{M})$. Vrijedi $\left|\frac{\lambda_n}{M}\right| = \frac{|\lambda_n|}{M} \leq \frac{M}{M} = 1$, pa je i Λ' ograničen niz. Stoga dalje imamo

$$\begin{aligned} (*) = M \lim_{N \to \infty} \|S_{F,\Lambda'}(x)\| &\leq M \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_{F,\Lambda'}(x)\| \leq M \sup_{F} \|S_{F,\Lambda'}(x)\| \\ &\leq M \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}(x)\| \leq M \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}\| \, \|x\| \\ &= M \mathcal{K}\Lambda \|x\| < \infty. \end{aligned}$$

Dakle, T_Λ je neprekidan. Na kraju, želimo pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$. To slijedi iz biortogonalnosti nizova $(x_n)_n$ i $(a_n)_n$. Naime, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$T_\Lambda(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \underbrace{a_m(x_n)}_{\delta_{nm}} x_m = \lambda_n x_n.$$

Dakle, vrijedi tvrdnja (e).

$\boxed{(e) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (e), te neka je $(a_n)_n$ pridružen niz koeficijentnih funkcionala. Dakle, svaki $x \in X$ ima jedinstven prikaz oblika $x = \sum a_n(x)x_n$. Da bi pokazali tvrdnju (a), trebamo pokazati da navedeni red konvergira bezuvjetno.
Neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz skalara takvih da vrijedi $|\lambda_n| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci, postoji neprekidno preslikavanje $T_\Lambda : X \to X$ takvo da vrijedi $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zbog neprekidnosti od T_Λ vrijedi

$$T_\Lambda(x) = T_\Lambda\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)T_\Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\lambda_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x)x_n.$$

Dakle, pokazali smo da red $\sum \lambda_n a_n(x)x_n$ konvergira za svaki izbor ograničenih skalara (λ_n). Stoga, po Teoremu 2.2.5(f), vrijedi da red $\sum a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno. Kako je $x \in X$ bio proizvoljan, slijedi da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za X, odnosno vrijedi tvrdnja (a). □

4.3 Schauderov sustav

Definicija 4.3.1. *Schauderov sustav u* $C[0,1]$ *je*

$$\{\chi, \ell\} \cup \{s_{n,k}\}_{n\geq 0, k=0,\dots,2^n-1},$$

gdje su

$$\chi(t) = \chi_{[0,1]}(t),$$
$$\ell(t) = t,$$

$s_{n,k}$ *je neprekidna funkcija definirana sa*

$$s_{n,k}(t) = \begin{cases} 1, \ t = \frac{k+1/2}{2^n}, \\ \textit{linearno}, \ \textit{na} \ [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1/2}{2^n}] \ \textit{i na} \ [\frac{k+1/2}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}], \\ 0, \ \textit{inače}. \end{cases}$$

Tvrdnja 4.3.2. *Schauderov sustav je uvjetna baza za* $C[0,1]$.

Dokaz. Dokaz tvrdnje i više detalja mogu se pogledati u [2]. □

Poglavlje 5

Rieszove baze Hilbertovih prostora

5.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 5.1.1. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ niz u H.*

(a) $(x_n)_n$ je Rieszova baza za H ako je on ekvivalentan nekoj ortonormiranoj bazi za H.

(b) $(x_n)_n$ je Rieszov niz u H ako je on Rieszova baza za $\overline{span}\{x_n\}$ u H.

Napomena 5.1.2. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. Iz definicije Rieszove baze i Korolara 3.2.4 slijedi da je $(x_n)_n$ ekvivalentan svim ortonormiranim bazama prostora H. Također slijedi i da su sve Rieszove baze prostora H međusobno ekvivalentne.*

Lema 5.1.3. *Neka su H i K Hilbertovi prostori, te neka je $T : H \to K$ topološki izomorfizam. Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H, onda je $(Tx_n)_n$ Rieszova baza za K.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. Tada postoje ortonormirana baza $(e_n)_n$ za H i topološki izomorfizam $U : H \to H$ takav da vrijedi $Ue_n = x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po Teoremu 1.2.10, H je separabilan. Kako je, po pretpostavci, K topološki izomorfan prostoru H, slijedi da je i on separabilan. Prema Teoremu 1.3.5, svi separabilni Hilbertovi prostori su izometrički izomorfni, pa postoji izometrija Z koja preslikava H na K. Kako je Z izometrički izomorfizam, niz $(Zx_n)_n$ je ortonormirana baza za K. Stoga je TUZ^{-1} topološki izomorfizam prostora K sa samim sobom i vrijedi $TUZ^{-1}(Ze_n) = TUe_n = Tx_n$. Dakle, niz $(Tx_n)_n$ je ekvivalentan ortonormiranoj bazi za K, odnosno $(Tx_n)_n$ je Rieszova baza za K. □

Teorem 5.1.4. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. Tada je $(x_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za H.*

Dokaz. Prema definiciji Rieszove baze, postoji ortonormirana baza $(e_n)_n$ za H i topološki izomorfizam $T : H \to H$ takav da vrijedi $Te_n = x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, $(e_n)_n$ je očito ograničena baza, a prema Propoziciji 1.3.4 je i bezuvjetna baza za H. Sada po Lemi 4.1.2(b) slijedi da je $(x_n)_n$ bezuvjetna ograničena baza za H. □

Lema 5.1.5. *Neka je H Hilbertov prostor, $(x_n)_n$ baza za H i $(y_n)_n$ biortogonalan niz nizu $(x_n)_n$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n$ *je Rieszova baza za H;*

(b) $(y_n)_n$ *je Rieszova baza za H;*

(c) $(x_n)_n \sim (y_n)_n$.

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b), (c)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. To znači da vrijedi $(x_n)_n \sim (e_n)_n$, gdje je $(e_n)_n$ neka ortonormirana baza za H. Prema Korolaru 3.7.4 slijedi da $(x_n)_n$ i $(e_n)_n$ imaju ekvivalentne biortogonalne nizove. Kako je $(e_n)_n$ sam sebi biortogonalan niz, vrijedi $(y_n)_n \sim (e_n)_n \sim (x_n)_n$. Dakle, vrijede tvrdnje (b) i (c).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a), (c)}$ Prema Korolaru 3.7.3 vrijedi da je $(y_n)_n$ baza za H i $(x_n)_n$ je biortogonalan niz nizu $(y_n)_n$. Stoga, ako pretpostavimo da je $(y_n)_n$ Rieszova baza za H, analogno kao u prethodnom paragrafu slijede tvrdnje (a) i (c).

$\boxed{(c) \Rightarrow (a), (b)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Tada postoji topološki izomorfizam $T : H \to H$ takav da vrijedi $Tx_n = y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljan $x \in H$ imamo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Tx_n \rangle x_n.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\langle Tx, x \rangle &= \Big\langle T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Tx_n \rangle x_n\Big), x \Big\rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Tx_n \rangle Tx_n, x \Big\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Tx_n \rangle \langle Tx_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, Tx_n \rangle|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Kako je T neprekidan, slijedi da je i pozitivan operator na H. Sada po Teoremu 1.3.7 postoji neprekidan i pozitivan operator S^2 na H tako da je $S^2 = T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}} = T$, te je i $T^{\frac{1}{2}}$ neprekidan i pozitivan operator na H. Analogno se pokaže da je i T^{-1} pozitivan operator na H te stoga i za njega postoji neprekidan i pozitivan operator B^2 takav da je $B^2 = T^{-1}$. Vrijedi $B^2 = (T^{-1})^{\frac{1}{2}}(T^{-1})^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{-1}{2}}T^{\frac{-1}{2}} = (T^{\frac{1}{2}})^{-1}(T^{\frac{1}{2}})^{-1}$ te je $(T^{\frac{1}{2}})^{-1}$ neprekidan i pozitivan operator na H. Dakle, $T^{\frac{1}{2}}$ je topološki izomorfizam. Nadalje, vrijedi $T^{\frac{1}{2}} = (T^{\frac{1}{2}})^*$ pa za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\langle T^{\frac{1}{2}}x_m, T^{\frac{1}{2}}x_n\rangle = \langle x_m, (T^{\frac{1}{2}})^* T^{\frac{1}{2}}x_n\rangle = \langle x_m, T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x_n\rangle = \langle x_m, Tx_n\rangle = \langle x_m, y_n\rangle = \delta_{mn}.$$

Time je pokazano da je $(T^{\frac{1}{2}}x_n)_n$ ortonormiran niz u H. Kako je po pretpostavci $(x_n)_n$ baza za H te je $T^{\frac{1}{2}}$ topološki izomorfizam, prema Lemi 3.2.1 slijedi da je $(T^{\frac{1}{2}}x_n)_n$ ortonormirana baza za H. Dakle, niz $(x_n)_n$ je ekvivalentan ortonormiranoj bazi za H, odnosno $(x_n)_n$ je Rieszova baza za H.
Prema Korolaru 3.7.3 vrijedi da je $(y_n)_n$ baza za H i $(x_n)_n$ je biortogonalan niz nizu $(y_n)_n$. Stoga analogno slijedi da je $(y_n)_n$ Rieszova baza za H.
Dakle, vrijede tvrdnje (a) i (b). □

Definicija 5.1.6. *Neka je H Hilbertov prostor. Niz $(x_n)_n$ u H je Besselov niz ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \ \forall x \in H.$$

Teorem 5.1.7. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za H koja je ograničena odozgo u normi. Tada je $(x_n)_n$ Besselov niz u H.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za H takva da vrijedi $\sup \|x_n\| < \infty$, te neka je $(y_n)_n$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Prema Teoremu 3.1.16, vrijedi

$$1 \leq \|x_n\| \, \|y_n\| \leq 2C, \ \forall n,$$

gdje je C bazna konstanta baze $(x_n)_n$. Odavde slijedi da vrijedi $\inf \|y_n\| > 0$.
Nadalje, kako je H refleksivan, prema Korolaru 3.7.3 je $(y_n)_n$ bezuvjetna baza za H i $(x_n)_n$ je njemu pridružen niz koeficijentnih funkcionala. Stoga za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \sum \langle x, x_n\rangle y_n$, pri čemu navedeni red konvergira bezuvjetno. Sada iz Teorema 1.3.8 slijedi da je $\sum \|\langle x, x_n\rangle y_n\|^2 < \infty$. Kako vrijedi $\sum \|\langle x, x_n\rangle y_n\|^2 = \sum |\langle x, x_n\rangle|^2 \|y_n\|^2$, i $(y_n)_n$ je ograničen odozdo u normi, slijedi da je $\sum |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty$ za svaki $x \in H$. Dakle, $(x_n)_n$ je Besselov niz u H. □

Propozicija 5.1.8. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ Besselov niz u H. Tada je preslikavanje definirano sa $Ux = (\langle x, x_n\rangle)$ za svaki $x \in H$ neprekidan linearan operator sa H u ℓ^2. Posebno, postoji konstanta B za koju vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \ \forall x \in H.$$

Dokaz. [1], Propozicija 9.1.8. □

5.2 Karakterizacija Rieszovih baza

Teorem 5.2.1. *Neka je H Hilbertov prostor i $(x_n)_n$ niz u H. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *$(x_n)_n$ je Rieszova baza za H;*

(b) *$(x_n)_n$ je ograničena bezuvjetna baza za H;*

(c) *$(x_n)_n$ je baza za H i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty;$$

(d) *$(x_n)_n$ je fundamentalan niz u H i postoje konstante $A, B > 0$ takve da za svaki $N \in \mathbb{N}$ i svaki izbor skalara $c_1, ..., c_N$ vrijedi*

$$A \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2; \tag{5.1}$$

(e) *Postoji ekvivalentan skalarni produkt $(\cdot, \cdot)$ na H takav da je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za H obzirom na taj skalarni produkt;*

(f) *$(x_n)_n$ je fundamentalan Besselov niz i postoji niz $(y_n)_n$ koji je biortogonalan nizu $(x_n)_n$ te je $(y_n)_n$ također fundamentalan Besselov niz.*

Dokaz. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Ovo je upravo tvrdnja Teorema 5.1.4.

$\boxed{(b) \Rightarrow (f)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za H. Prema Teoremu 3.6.1, $(x_n)_n$ je fundamentalan niz u H, a prema Teoremu 5.1.7 je i Besselov niz u H. Nadalje, kako je H refleksivan, iz Korolara 3.7.3 slijedi da je $(y_n)_n$ ograničena bezuvjetna baza za H. Sada, analogno kao za $(x_n)_n$, slijedi da je $(y_n)_n$ fundamentalan Besselov niz u H. Dakle, vrijedi tvrdnja (f).

$\boxed{(f) \Rightarrow (c)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (f). Tada prema Propoziciji 5.1.8 postoje konstante $C, D > 0$ tako da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq C\|x\|^2, \ \forall x \in H,$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 \leq D\|x\|^2, \ \forall x \in H.$$

Pokazujemo da je $(x_n)_n$ baza za H i $(y_n)_n$ njemu pridružen niz koeficijentnih funkcionala. Kako je po pretpostavci $(x_n)_n$ fundamentalan niz u H i $(y_n)_n$ je njemu biortogonalan niz, prema Teoremu 3.6.1 dovoljno je pokazati da vrijedi $\sup_N \|S_N\| < \infty$, gdje je S_N operator parcijalne sume. Za proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\|S_N x\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} |\langle S_N x, y\rangle|^2 = \sup_{\|y\|=1} \Big|\Big\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, y_n\rangle x_n, y\Big\rangle\Big|^2 = \sup_{\|y\|=1} \Big|\sum_{n=1}^{N} \langle x, y_n\rangle\langle x_n, y\rangle\Big|^2 \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, y_n\rangle|^2\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle x_n, y\rangle|^2\Big) \leq \sup_{\|y\|=1} D\|x\|^2 C\|y\|^2 = CD\|x\|^2.\end{aligned}$$

Stoga je $\sup_N \|S_N\|^2 \leq CD < \infty$. Dakle, $(x_n)_n$ je baza za H.
Pokažimo još da $\sum c_n x_n$ konvergira ako i samo ako $\sum |c_n|^2 < \infty$.
Pretpostavimo da $\sum c_n x_n$ konvergira i neka je $x = \sum c_n x_n$. Kako je $(x_n)_n$ baza za H i $(y_n)_n$ njemu njemu pridružen niz koeficijentnih funkcionala, za svaki $n \in \mathbb{N}$ mora vrijediti $c_n = \langle x, y_n\rangle$. Stoga je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle|^2 \leq D\|x\|^2 < \infty.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\sum |c_n|^2 < \infty$. Tada je $(|c_n|^2)$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Za proizvoljne $M, N \in \mathbb{N}$ takve da je $M < N$ imamo

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=M+1}^{N} c_n x_n\Big\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} \Big|\Big\langle \sum_{n=M+1}^{N} c_n x_n, y\Big\rangle\Big|^2 = \sup_{\|y\|=1} \Big|\sum_{n=M+1}^{N} c_n\langle x_n, y\rangle\Big|^2 \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} \Big(\sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2\Big)\Big(\sum_{n=M+1}^{N} |\langle x_n, y\rangle|^2\Big) \leq \sup_{\|y\|=1} \Big(\sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2\Big) C\|y\|^2 \\ &= C \sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2.\end{aligned}$$

Dakle, $\sum c_n x_n$ je Cauchyjev u H pa slijedi da je konvergentan.

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c) i neka je $(e_n)_n$ neka ortonormirana baza za H. Prema Propoziciji 1.3.4, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ konvergira} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Kako prema pretpostavci vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

imamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ konvergira.}$$
Prema Teoremu 3.2.3, to je ekvivalentno sa $(x_n)_n \sim (e_n)_n$. Dakle, $(x_n)_n$ je Rieszova baza za H.

$\boxed{(a) \Rightarrow (e)}$ Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H. Tada postoje ortonormirana baza $(e_n)_n$ za H i topološki izomorfizam $T : H \to H$ takvi da vrijedi $Te_n = x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo
$$(x, y) = \langle Tx, Ty\rangle, \ \forall x, y \in H,$$
i
$$|||x|||^2 = (x, x) = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||, \ \forall x \in H.$$
Za proizvoljne $x, y, z \in H$ i proizvoljan $\alpha \in \mathbb{F}$ vrijedi

(i) $(x, x) = ||Tx||^2 \geq 0$,

(ii) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow ||Tx||^2 = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iii) $(\alpha x, y) = \langle T(\alpha x), Ty\rangle = \langle \alpha Tx, Ty\rangle = \alpha\langle Tx, Ty\rangle = \alpha(x, y)$,

(iv) $(x + y, z) = \langle T(x + y), Tz\rangle = \langle Tx + Ty, Tz\rangle = \langle Tx, Tz\rangle + \langle Ty, Tz\rangle = (x, z) + (y, z)$,

(v) $(x, y) = \langle Tx, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, Tx\rangle} = \overline{(y, x)}$.

Dakle, $(\cdot, \cdot)$ je skalarni produkt na H i $|||\cdot|||$ je norma na H inducirana tim skalarnim produktom. Nadalje, za proizvoljan $x \in H$ vrijedi
$$|||x|||^2 = ||Tx||^2 \leq ||T||^2 ||x||^2,$$
i
$$||x||^2 = ||T(T^{-1}x)||^2 = |||T^{-1}x|||^2 \leq |||T|||^2 |||x|||^2.$$
Stoga je
$$|||T^{-1}|||^{-1} ||x|| \leq |||x||| \leq ||T||\ ||x||,$$
odnosno $||\cdot||$ i $|||\cdot|||$ su ekvivalentne norme na H. To upravo po definiciji znači da su $\langle\cdot, \cdot\rangle$ i $(\cdot, \cdot)$ ekvivalentni skalarni produkti na H. Pokazujemo da je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za H obzirom na skalarni produkt $(\cdot, \cdot)$. Prema Teoremu 1.3.3, dovoljno je pokazati da je niz $(x_n)_n$ ortonormiran i fundamentalan. Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$(x_m, x_n) = \langle Tx_m, Tx_n\rangle = \langle e_m, e_n\rangle = \delta_{nm}.$$

Dakle, $(x_n)_n$ je ortonormiran niz u H obzirom na $(\cdot,\cdot)$.
Uzmimo sada proizvoljan $x \in H$ takav da vrijedi $(x, x_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$0 = (x, x_n) = \langle Tx, Tx_n\rangle = \langle Tx, e_n\rangle, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $(e_n)_n$ fundamentalan u H obzirom na $\langle\cdot,\cdot\rangle$, prema Korolaru 1.4.3 slijedi da je $Tx = 0$. Stoga, jer je T topološki izomorfizam, slijedi da je $x = 0$. Sada po Korolaru 1.4.3 slijedi da je $(x_n)_n$ i fundamentalan niz u H obzirom na $(\cdot,\cdot)$.
Dakle, $(x_n)_n$ je ortonormirana baza za H obzirom na $(\cdot,\cdot)$, odnosno vrijedi tvrdnja (e).

$\boxed{(e) \Rightarrow (d)}$ Neka je $(\cdot,\cdot)$ skalarni produkt na H, ekvivalentan originalnom skalarnom produktu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, takav da je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za H obzirom na $(\cdot,\cdot)$. Neka je $|||\cdot|||$ norma na H inducirana tim skalarnim produktom. Tada su norme $|||\cdot|||$ i $\|\cdot\|$ ekvivalentne, odnosno postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi

$$A|||x|||^2 \leq \|x\|^2 \leq B|||x|||^2, \ \forall x \in H. \tag{5.2}$$

Prema Teoremu 1.3.3, $(x_n)_n$ je fundamentalan niz u H obzirom na normu $|||\cdot|||$, odnosno $span\{x_n\}$ je gust u H obzirom na normu $|||\cdot|||$. Dakle, za proizvoljan $x \in H$ i $\varepsilon > 0$ mora postojati $y \in span\{x_n\}$ takav da je $|||x - y||| < \varepsilon$. Po 5.2, vrijedi $\|x - y\| \leq B^{\frac{1}{2}}|||x - y||| < B^{\frac{1}{2}}\varepsilon$. Odavde slijedi da je $span\{x_n\}$ gust u H i obzirom na normu $\|\cdot\|$, odnosno da je $(x_n)_n$ fundamentalan niz u H i obzirom na normu $\|\cdot\|$.
Odaberimo sada proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ i skalare $c_1, ..., c_N$. Kako je $(x_n)_n$ ortonormirana baza za H obzirom na $(\cdot,\cdot)$, prema Teoremu 1.3.3 vrijedi

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big|\Big|\Big|^2 = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2.$$

Zajedno sa 5.2, to daje

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = \Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big|\Big|\Big|^2 \leq \frac{1}{A}\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|^2,$$

i

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = \Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big|\Big|\Big|^2 \geq \frac{1}{B}\Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|^2.$$

Stoga je

$$A\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \Big\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\Big\|^2 \leq B\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2.$$

Kako su $N \in \mathbb{N}$ i skalari $c_1, ..., c_N$ bili proizvoljni, time je pokazano da vrijedi 5.1.
Dakle, vrijedi tvrdnja (d).

$\boxed{(d) \Rightarrow (b)}$ Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (d). Odaberimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ te definirajmo

$$a_n = \delta_{Nn}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Po pretpostavci postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi

$$A = A \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|^2 = \|x_N\|^2 = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = B.$$

Dakle, niz $(x_n)_n$ je ograničen u normi. Posebno, vrijedi $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokazujemo da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za H.
Odaberimo proizvoljan $N \in \mathbb{N}$, proizvoljne skalare $c_1, ..., c_N$ te proizvoljne predznake $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$. Po pretpostavci vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n \Big\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n c_n|^2 = B \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{B}{A} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|^2.$$

Kako su $N \in \mathbb{N}$, te $c_1, ..., c_N$ i $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$ bili proizvoljni te je po pretpostavci $(x_n)_n$ fundamentalan niz u H, po Teoremu 4.2.1 slijedi da je $(x_n)_n$ bezuvjetna baza za H.
Dakle, vrijedi tvrdnja (b). □

Primjer 5.2.2. *Neka je H Hilbertov prostor i $(e_n)_n$ ortonormirana baza za H.*

(a) Neka su $c, C \geq 0$ konstante i neka je $(\alpha_n)_n$ niz skalara takav da vrijedi $c \leq |\alpha_n| \leq C, \forall n$. Tada je $(\alpha_n e_n)_n$ Rieszova baza za H.

(b) Neka je S operator jednostranog pomaka (unilateralni šift). Tada je $S + 2I$ regularan operator i vrijedi $(S + 2I)e_n = 2e_n + e_{n+1}$. Dakle, niz $(2e_n + e_{n+1})_n$ je Rieszova baza za H. Štoviše, za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ takve da je $|\lambda| > 1$ vrijedi da je niz $(\lambda e_n + e_{n+1})_n$ Rieszova baza za H.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/predavanja/np-1516-final.pdf`, (srpanj 2017.).

[2] C. Heil, *A Basis Theory Primer, Expanded Edition*, Birkhäuser, Basel, 2011.

[3] ———, *A Basis Theory Primer*, dostupno na `https://http://people.math.gatech.edu/~heil/papers/bases.pdf`, (srpanj 2017.).

[4] W. Rudin, *Real and Complex Anaysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1987.

[5] R. J. Vanderbei, *Linear Programming, Foundations and Extensions*, Springer, New York, 2010.

Sažetak

U ovom radu su najprije navedene osnovne definicije i rezultati iz teorije normiranih prostora te su potom izložene osnovne činjenice o bezuvjetnoj konvergenciji redova. U centralnom dijelu rada su prikazani glavni rezultati o topološkim bazama normiranih, odnosno Banachovih prostora. Pokazana je neprekidnost koeficijentnih funkcionala i pokazano je da je svaka baza Banachovog prostora Schauderova baza tog prostora; štoviše, da je ona i slaba baza i slaba Schauderova baza tog prostora. Također su opisani različiti oblici nezavisnosti nizova te su pokazani odnosi među različitim oblicima nezavisnosti. Opisana je biortogonalnost i minimalnost nizova. Posebno, opisane su bezuvjetne baze kao posebno važna klasa topoloških baza. Na kraju su pokazane osnovne činjenice o Rieszovim bazama Hilbertovih prostora.

Summary

In this thesis, some of the fundamental definitions and results from the theory of normed spaces are first outlined, and then the basic facts about unconditional convergence of series are presented. In the central part of the thesis, the main results about topological bases in normed, that is Banach spaces, are shown. Continuity of coefficient functionals is shown and it is also shown that every basis in a Banach space is Schauder basis in that space, and that it is, in fact, weak basis and weak Schauder basis in that space. Various forms of sequence independence are described and some basic relations among them are shown. Biorthogonality and minimality of sequences are also described. Especially, unconditional bases, which are important class of topological bases, are described. Finally, some basic facts about Riesz bases in Hilbert spaces are shown as well.

Životopis

Rođena sam 15. lipnja 1991. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Trnjanska, upisala sam zagrebačku XV. gimnaziju. Potom sam 2010. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2015. upisala sam diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na istom fakultetu.