**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maja Budimir

# IZRAČUNLJIVI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

*Ovaj diplomski rad izradila sam uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Zvonka Iljazovića kojem bih se ovim putem željela zahvaliti na pomoći, uloženom trudu te vremenu koje mi je pružao za vrijeme izrade ovog rada. Isto tako željela bih se zahvaliti i svojoj obitelji na potpori tijekom cijelog mojeg fakultetskog obrazovanja.*

# Sadržaj

# Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo pojam izračunljivog broja.

U prvom poglavlju definiramo pojam izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te proučavamo neka svojstva takvih funkcija.

U drugom poglavlju, kao korak prema definiranju izračunljivih brojeva, uvodimo pojmove izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te proučavamo svojstva tih funkcija. Zatim definiramo pojam izračunljivog broja te između ostalog dokazujemo da je zbroj i umnožak dvaju izračunljivih brojeva izračunljiv broj.

U trećem poglavlju proučavamo konačnost i prebrojivost skupova. Nadalje dokazujemo da je skup svih izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, za fiksni $k$, prebrojiv te također dobivamo da je skup svih izračunljivih brojeva prebrojiv. Na kraju dokazujemo da postoje realni brojevi koji nisu izračunljivi.

Svi pojmovi korišteni u radu su precizno definirani, a sve tvrdnje su detaljno dokazane.

# Poglavlje 1

# RAM-stroj

## 1.1 RAM-stroj

RAM-stroj je idealizirano računalo s beskonačno velikom memorijom koje nikad ne pravi greške. Osnovni dijelovi RAM-stroja su:

- registri;
- spremnik za program.

Za svaki prirodan broj $k$ stroj ima registar koji označavamo s $R_k$. U svakom trenutku rada stroja svaki registar $R_k$ sadrži neki prirodan broj ili nulu.
U spremniku za program je smješten program. Program je konačan niz instrukcija. Ako je $n + 1$ broj instrukcija u programu tada su $0., 1., \ldots, n.$ oznake tih instrukcija.
Postoje tri tipa instrukcija:

- INC $R_k$
  Kada stroj izvodi tu instrukciju tada povećava broj u registru $R_k$ za jedan te prelazi na izvršavanje sljedeće instrukcije u programu.

- DEC $R_k$, $m$
  Broj $m$ je obvezno redni broj neke instrukcije u programu. Ako je broj u registru $R_k$ različit od nule tada se prilikom izvršenja navedene instrukcije broj u $R_k$ smanji za jedan. Ukoliko je $R_k$ jednak nuli onda se sadržaj registra $R_k$ ne mijenja, a program prelazi na izvršavanje instrukcije s oznakom $m$.

- GO TO $m$
  Broj $m$ je obvezno redni broj neke instrukcije u programu. Kada stroj izvodi tu ins-

trukciju program prelazi na izvršavanje instrukcije s oznakom $m$.

Sljedećom slikom dajemo skicu RAM-stroja:

| $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $\dots$ | $\longrightarrow$ REGISTRI |
|---|---|---|---|---|---|

| | |
|---|---|
| 0.<br>1.<br>2.<br>3.<br>.<br>.<br>.<br>n. | $\longrightarrow$ SPREMNIK ZA PROGRAM |

Navedimo neke jednostavne primjere RAM-programa.

**Primjer 1.1.1.** *Program koji broj u registru $R_2$ poveća za 3:*

*0. INC $R_2$*
*1. INC $R_2$*
*2. INC $R_2$*

**Primjer 1.1.2.** *Program koji broj u registru $R_2$ zamjeni s jedinicom:*

*0. DEC $R_2$, 2*
*1. GO TO 0*
*2. INC $R_2$*

**Primjer 1.1.3.** *Program koji broj iz registra $R_1$ kopira u registar $R_2$:*

*0. DEC $R_2$, 2*
*1. GO TO 0*
*2. DEC $R_3$, 4*
*3. GO TO 2*
*4. DEC $R_1$, 8*
*5. INC $R_2$*
*6. INC $R_3$*
*7. GO TO 4*
*8. DEC $R_3$, 11*
*9. INC $R_1$*

*10. GO TO 8*
*11. INC $R_3$*

**Primjer 1.1.4.** *Program koji nikad ne staje:*
*0. INC $R_2$*
*1. GO TO 0*

## 1.2 Izračunljive funkcije

**Definicija 1.2.1.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Za funkciju $f$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoji program $P$ koji ima sljedeće svojstvo:*
*ako su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$, onda program $P$ staje za ulazne podatke*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_k$ | 0 | 0 | $\ldots$ |

*i daje rezultat*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x_1, \ldots, x_k)$ | ? | ? | $\ldots$ |

*Za ovakav program $P$ kažemo da računa funkciju $f$.*

**Primjer 1.2.2.** *Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(x) = x$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija. Program koji je računa je sljedeći:*

*0. DEC $R_1$, 3*
*1. INC $R_0$*
*2. GO TO 0*
*3. INC $R_1$*

**Primjer 1.2.3.** *Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(x) = x+1$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija. Program koji je računa je sljedeći:*

*0. DEC $R_1$, 3*
*1. INC $R_0$*
*2. GO TO 0*
*3. INC $R_0$*

**Primjer 1.2.4.** *Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(x, y) = x + y$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija. Program koji je računa je sljedeći:*

*0. DEC $R_1$, 3*
*1. INC $R_0$*
*2. GO TO 0*
*3. DEC $R_2$, 6*

*4. INC* $R_0$
*5. GO TO 3*
*6. INC* $R_1$

**Primjer 1.2.5.** *Neka je* $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s* $f(x, y) = x \cdot y$. *Tada je* $f$ *izračunljiva funkcija. Program koji je računa je sljedeći:*

*0. DEC* $R_2$*, 9*
*1. DEC* $R_1$*, 5*
*2. INC* $R_0$
*3. INC* $R_3$
*4. GO TO 1*
*5. DEC* $R_3$*, 8*
*6. INC* $R_1$
*7. GO TO 5*
*8. GO TO 0*
*9. INC* $R_4$

**Primjer 1.2.6.** *Neka su* $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ *međusobno različiti brojevi. Želimo program koji zbraja sadržaje registara* $R_i$ *i* $R_j$ *te zapisuje u* $R_k$. *Pri tome sadržaji svih ostalih registara osim* $R_l$ *ostaju nepromijenjeni.*

*0. DEC* $R_k$*, 2*
*1. GO TO 0*
*2. DEC* $R_l$*, 4*
*3. GO TO 2*
*4. DEC* $R_i$*, 8*
*5. INC* $R_k$
*6. INC* $R_l$
*7. GO TO 4*
*8. DEC* $R_l$*, 11*
*9. INC* $R_i$
*10. GO TO 8*
*11. DEC* $R_j$*, 15*
*12. INC* $R_k$
*13. INC* $R_l$
*14. GO TO 11*
*15. DEC* $R_l$*, 18*
*16. INC* $R_j$

*17. GO TO 15*
*18. INC $R_l$*

**Definicija 1.2.7.** *Za $x, y \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \textit{ako je } x \geq y \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

*Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ kažemo da je* ***modificirano oduzimanje****.*

**Primjer 1.2.8.** *Modificirano oduzimanje je izračunljiva funkcija.*

*0. DEC $R_2$, 3*
*1. DEC $R_1$, 3*
*2. GO TO 0*
*3. DEC $R_1$, 6*
*4. INC $R_0$*
*5. GO TO 3*
*6. INC $R_3$*

**Primjer 1.2.9.** *Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način: za $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$, neka je $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ te neka je $f(x, 0) = 0$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija.*

*0. DEC $R_2$, 14*
*1. INC $R_2$*
*2. DEC $R_2$, 6*
*3. INC $R_3$*
*4. INC $R_4$*
*5. GO TO 2*
*6. DEC $R_4$, 9*
*7. INC $R_2$*
*8. GO TO 6*
*9. DEC $R_3$, 12*
*10. DEC $R_1$, 14*
*11. GO TO 9*
*12. INC $R_0$*
*13. GO TO 2*
*14. INC $R_3$*

**Propozicija 1.2.10.** *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Neka su $i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi te $N \in \mathbb{N}$. Tada postoji program $P$ sa sljedećim*

*svojstvom:*
*P staje za sve ulazne podatke te ako su u registrima $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ brojevi $x_1, \ldots, x_k$, onda će nakon izvršavanja programa P u $R_{i_o}$ biti broj $f(x_1, \ldots, x_k)$, a stanje u svim ostalim registrima $R_j$ za $j \leq N$ ostaje nepromijenjeno.*

*Dokaz.* Budući da je $f$ izračunljiva funkcija postoji program $P$ koji računa $f$. Tvrdimo da postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da je

$$M > k + 1$$

te da program $P$ za ulazne podatke $(x_i)$, takve da je $x_0$=0 i $x_i$=0 za svaki $i \in \{k+1, \ldots, M-1\}$ daje rezultat $(y_i)$ pri čemu je

$$y_0 = f(x_1, \ldots, x_k)$$

te

$$y_i = x_i$$

za svaki $i \geq M$. Naime neka su $p_0, \ldots, p_n$ instrukcije programa $P$. Tada možemo odabrati broj $M \in \mathbb{N}$ takav da je $M > i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ za kojeg postoji $j \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $P_j$ = INC $R_i$ ili je $P_j$ = DEC $R_i$, $l$ za neki $l \in \mathbb{N}$.
Također možemo pretpostaviti da je

$$M > k + 1.$$

Tada je $M$ traženi broj jer sadržaj registara $R_M, R_{M+1}, \ldots$ ne utječe na izvršavanje programa $P$. Nadalje, možemo pretpostaviti da je $M > N$ te $M > i_0$, ..., $M > i_k$. Traženi program je sljedeći program:

0. DEC $R_M$, 2
1. GO TO 0
2. DEC $R_0$, 5
3. INC $R_M$
4. GO TO 2
5. DEC $R_1$,8
6. INC $R_{M+1}$
7. GO TO 5

.
.
.

$l$. DEC $R_{M-1}$, $l$+3
$l$+1. INC $R_{2M-1}$
$l$+2. GO TO $l$
$l$+3. DEC $R_{M+i_1}$, $l$+7

$l$+4. INC $R_1$
$l$+5. INC $R_0$
$l$+6. GO TO $l$+3
$l$+7. DEC $R_0$, $l$+10
$l$+8. INC $R_{M+i_1}$
$l$+9. GO TO $l$+7
.
.
.
$l'$. DEC $R_{M+i_k}$, $l'$+4
$l'$+1. INC $R_k$
$l'$+2. INC $R_0$
$l'$+3. GO TO $l'$
$l'$+4. DEC $R_0$, $l' + 7$
$l'$+5. INC $R_{M+i_k}$
$l'$+6. GO TO $l'$+4
$l'$+7. $p_0$
.
.
.
$l' + 7 + n$. $p_n$
$l''$. DEC $R_{i_0}$, $l''$+2
$l''$+1. GO TO $l''$
$l''$+2. DEC $R_0$, $l''$+5
$l''$+3. INC $R_{i_0}$
$l''$+4. GO TO $l''$+2
$l''$+5. DEC $R_M$, $l''$+8
$l''$+6. INC $R_0$
$l''$+7. GO TO $l''$+5
$l''$+8. DEC $R_1$, $l''$+10
$l''$+9. GO TO $l''$+8
$l''$+10. DEC $R_{M+1}$, $l''$+13
$l''$+11. INC $R_1$
$l''$+12. GO TO $l''$+10
.
.
.
$l'''$. DEC $R_{M-1}$, $l'''$+2
$l'''$+1. GO TO $l'''$

$l'''$+2. DEC $R_{2M-1}$, $l'''$+5
$l'''$+3. INC $R_{M-1}$
$l'''$+4. GO TO $l'''$+2
$l'''$+5. INC $R_{2M}$
Pri tome u nizu instrukcije od $l''$+8 do $l'''$+4 preskačemo kopiranje $R_{M+i_0}$ u $R_{i_0}$. Također, ako je $i_0 = 0$, onda ne stavljamo instrukcije od $l''$ do $l''$+7. □

## 1.3 Makro-program

Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Neka su $i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ međusobno različiti brojevi te $N \in \mathbb{N}$. Prema prethodnoj propoziciji postoji program $P$ koji staje za sve ulazne podatke te ako su u registrima $R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}$ brojevi $x_1, \ldots, x_k$, onda će nakon izvršavanja programa $P$ u $R_{i_0}$ biti broj $f(x_1, \ldots, x_k)$, a stanje u svim ostalim registrima $R_j$ za $j \leq N$ ostaje nepromijenjeno. Taj program uzmemo kao jednu novu "instrukciju" (tzv. makro-instrukciju) koju možemo koristiti u pisanju nekog novog programa. Taj novi program, u kojem koristimo i makro-instrukcije, nazivamo **makro-program**.
Oznaka za navedenu makro-instrukciju je

$$f(R_{i_1}, \ldots, R_{i_N}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$$

Kažemo da je to **makro-instrukcija programa** $P$. Pojam "makro-program $Q$ računa funkciju $f$" definiramo analogno kao pojam "program $P$ računa funkciju $f$".

**Primjer 1.3.1.** *Postoji makro-program koji računa funkciju $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x \cdot y$.*
*Znamo da je funkcija $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x + y$ izračunljiva. Umjesto*

$$f(R_{i_1}, R_{i_2}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$$

*pišemo*

$$R_{i_1} + R_{i_2} \xrightarrow{N} R_{i_3}$$

*Funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$ je izračunljiva. Umjesto*

$$f(R_{i_1}) \xrightarrow{N} R_{i_0}$$

*pišemo*

$$R_{i_1} \xrightarrow{N} R_{i_0}$$

*Sljedeći makro-program računa funkciju $f$:*
*0. DEC $R_2$, 4*

*1.* $R_0 + R_1 \xrightarrow{3} R_3$
*2.* $R_3 \xrightarrow{3} R_0$
*3. GO TO 0*
*4. INC* $R_3$

**Primjer 1.3.2.** *Neka je* $i \in \mathbb{N}$. *Promotrimo sljedeći program:*
*0. DEC* $R_i$*, 2*
*1. GO TO 0*
*2. INC* $R_i$
*3. DEC* $R_i$*, 3*
*Nakon izvršavanja ovog programa u registru* $R_i$ *se nalazi 0, a sadržaji ostalih registara ostaju nepromjenjeni. Makro instrukciju za ovaj program označavamo sa ZERO* $R_i$.

**Propozicija 1.3.3.** *Neka je* $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija za koju postoji makro-program koji je računa. Tada je* $f$ *izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Neka je $Q = (q_0, \dots, q_n)$ makro-program koji računa funkciju $f$. Pretpostavimo da je $i \in \{0, \dots, n\}$ takav da je $q_i$ makro-instrukcija. Neka je $P = (p_0, \dots, p_m)$ program takav da je $q_i$ makro-instrukcija programa $P$. Promotrimo makro-program

$$Q' = (q'_o, \dots, q'_{i-1}, p'_0, \dots, p'_m, q'_{i+1}, \dots, q'_n)$$

pri čemu su $q'_o, \dots, q'_{i-1}, p'_0, \dots, p'_m, q'_{i+1}, \dots, q'_n$ definirani na sljedeći način:

- za $j \in \{0, \dots, n\}$, $j \neq i$ je:

$$q'_j = \begin{cases} DEC\ R_l, k+m, & \text{ako je } q_j = DEC\ R_l, k \text{ gdje je } k > i; \\ GO\ TO\ k+m, & \text{ako je } q_j = GO\ TO\ k \text{ gdje je } k > i; \\ q_j & \text{inače} \end{cases}$$

- za $j \in \{0, \dots, m\}$ je:

$$p'_j = \begin{cases} DEC\ R_l, k+i, & \text{ako je } p_j = DEC\ R_l, k; \\ GO\ TO\ k+i, & \text{ako je } p_j = GO\ TO\ k; \\ INC\ R_l & \text{ako je } p_j = INC\ R_l \end{cases}$$

Uočimo da makro-program $Q'$ također računa funkciju $f$ (zapravo $Q'$ ”djeluje” isto kao i $Q$). Uočimo da je broj makro-instrukcija u $Q'$ za jedan manji od broja makro-instrukcija u $Q$. Dakle, ako postoji makro-program koji računa $f$ i u kojem ukupno ima $k$ makro-instrukcija, onda postoji i makro-program koji računa $f$ u kojem ukupno ima $k-1$ makro-instrukcija. Iz ovoga zaključujemo da postoji makro-program koji računa $f$ u kojem nema ni jedne makro-instrukcije, dakle postoji program koji računa $f$, a to znači da je $f$ izračunljiva. □

**Primjer 1.3.4.** *Neka je* $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x^y$ *pri čemu uzimamo da je* $0^0 = 1$. *Tada je* $f$ *izračunljiva funkcija.*
*Da bismo to dokazali, dovoljno je prema propoziciji 1.3.3 dokazati da postoji makro-program koji računa* $f$. *Lako je provjeriti da sljedeći makro-program računa* $f$:

*0. INC* $R_0$
*1. DEC* $R_2$, *5*
*2.* $R_0 \cdot R_1 \xrightarrow{3} R_3$
*3.* $R_3 \xrightarrow{3} R_0$
*4. GO TO 1*
*5.INC* $R_3$

## 1.4 Kompozicija, primitivna rekurzija, $\mu$ operator

**Definicija 1.4.1.** *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *te* $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. *Neka je* $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana na sljedeći način:*

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)),$$

*za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$. *Tada za funkciju* $h$ *kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija* $f, g_1, \ldots, g_n$.

Uočimo:

1. Ako je $n = 1$ onda je
$$h(x) = f(g_1(x))$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa je
$$h = f \circ g_1,$$
tj. $h$ je kompozicija funkcija $f$ i $g_1$ u klasičnom smislu kompozicije funkcija.

2. Neka je $G\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana na sljedeći način:
$$G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je
$$h(x) = f(G(x)) = (f \circ G)(x)$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, tj.
$$h = f \circ G.$$

**Propozicija 1.4.2.** *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *izračunljive funkcije. Neka je* $h$ *kompozicija funkcija* $f, g_1, \ldots, g_n$. *Tada je* $h$ *izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Sljedeći makro-program računa funkciju $h$.

0. $g_1(R_1, \ldots, R_k) \overset{k+n}{\rightarrow} R_{k+1}$

.

.

.

$n$-1. $g_n(R_1, \ldots, R_k) \overset{k+n}{\rightarrow} R_{k+n}$

$n$. $f(R_{k+1}, \ldots, R_{k+n}) \overset{k+n}{\rightarrow} R_0$

□

**Definicija 1.4.3.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g\colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka je $h\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana induktivno po prvoj varijabli na sljedeći način:*

$$h(0, y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

$$h(x + 1, y_1, \ldots, y_n) = g(h(x, y_1, \ldots, y_n), x, y_1, \ldots, y_n)$$

*Tada za funkciju $h$ kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija $f$ i $g$.*

**Primjer 1.4.4.** *Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$h(x, y) = x + y.$$

*Pokažimo da je funkcija $h$ dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija $f$ i $g$ gdje su $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s*

$$f(a) = a,$$

$$g(a, b, c) = a + 1.$$

*Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$h(0, y) = y = f(y),$$

$$h(x + 1, y) = x + 1 + y = x + y + 1 = h(x, y) + 1 = g(h(x, y), x, y).$$

*Dakle, $h(0, y) = f(y)$, $h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y)$. Prema tome $h$ je dobivena primitivnom rekurzijom od $f$ i $g$.*

**Primjer 1.4.5.** *Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $h(x, y) = x \cdot y$. Neka su $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s*

$$f(a) = 0$$

*i*

$$g(a, b, c) = a + c.$$

*Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$h(0, y) = 0 = f(y)$$

$$h(x+1, y) = (x+1) \cdot y = x \cdot y + y = h(x, y) + y = g(h(x, y), x, y).$$

*Dakle, $h(0, y) = f(y)$, $h(x+1, y) = g(h(x, y), x, y)$. Prema tome h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.*

**Propozicija 1.4.6.** *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g\colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Neka je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je h izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Sljedeći makro-program računa funkciju $h$:

0. $f(R_2, \ldots, R_{n+1}) \overset{n+1}{\to} R_0$
1. ZERO $R_{n+2}$
2. DEC $R_1$, 7
3. $g(R_0, R_{n+2}, R_2, \ldots, R_{n+1}) \overset{n+3}{\to} R_{n+3}$
4. $R_{n+3} \overset{n+3}{\to} R_0$
5. INC $R_{n+2}$
6. GO TO 2
7. INC $R_{n+5}$ □

**Definicija 1.4.7.** *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija. Pretpostavimo da su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ takvi da postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Tada broj* $\min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ *označimo s $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$.*

**Definicija 1.4.8.** *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo: za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.*
*Neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

*Kažemo da je funkcija f dobivena primjenom $\mu$ operatora na funkciju g.*

**Propozicija 1.4.9.** *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija. Pretpostavimo da je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija dobivena primjenom $\mu$ operatora na funkciju g. Tada je f izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Sljedeći makro-program računa funkciju $f$:

0. $g(R_0, R_1, \ldots, R_n) \overset{n+1}{\to} R_{n+1}$
1. DEC $R_{n+1}$, 4
2. INC $R_0$
3. GO TO 0
4. INC $R_{n+2}$ □

**Propozicija 1.4.10.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Tada su izračunljive i funkcije $f + g, f \cdot g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$h(x, y) = x + y.$$

Prema primjeru 1.1.3 funkcija $h$ je izračunljiva. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(x) = h(f(x), g(x)).$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija $f+g$ dobivena kompozicijom funkcija $h$, $f$ i $g$. Prema propoziciji 1.4.2 funkcija $f+g$ je izračunljiva. Analogno, koristeći činjenicu da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ izračunljiva dobivamo da je $f \cdot g$ izračunljiva funkcija. □

**Korolar 1.4.11.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $f_1 + f_2 + \ldots + f_n, f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive.*

*Dokaz.* Dokažimo da je $f_1 + \ldots + f_n$ izračunljiva funkcija indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $f_1, \ldots, f_{n+1}\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Vrijedi

$$f_1 + \ldots + f_{n+1} = (f_1 + \ldots f_n) + f_{n+1}$$

pa iz pretpostavke indukcije i propozicije 1.4.10 slijedi da je

$$f_1 + \ldots + f_{n+1}$$

izračunljiva funkcija. Time smo dokazali da za svaki $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i sve izračunljive funkcije $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ vrijedi da je $f_1 + \ldots + f_n$ izračunljiva funkcija.
Analogno dokazujemo tvrdnju za produkt funkcija. □

**Definicija 1.4.12.** *Neka su $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $I^n_j\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$I^n_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j.$$

*Funkciju $I^n_j$ nazivamo **projekcija od $\mathbb{N}^n$ na j-tu koordinatu**.*

**Propozicija 1.4.13.** *Neka su $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$. Funkcija $I^n_j\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ je izračunljiva.*

*Dokaz.* Sljedeći program računa funkciju $I^n_j$ :

0. DEC $R_j$, 3
1. INC $R_0$
2. GO TO 0
3. INC $R_{n+1}$

□

## 1.5 Izračunljivi skupovi

**Definicija 1.5.1.** *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^k$. *Neka je* $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

*Za* $\chi_S$ *kažemo da je* ***karakteristična funkcija skupa*** $S$ ***u*** $\mathbb{N}^k$.

**Definicija 1.5.2.** *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^k$. *Kažemo da je* $S$ ***izračunljiv skup u*** $\mathbb{N}^k$ *ako je njegova karakteristična funkcija* $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *izračunljiva.*

**Primjer 1.5.3.** *Neka je* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Tada su* $\mathbb{N}^k$, $\emptyset$ *izračunljivi skupovi u* $\mathbb{N}^k$.
*Naime, za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *vrijedi*

$$\chi_{\mathbb{N}^k}(x) = 1$$

*tj.* $\chi_{\mathbb{N}^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *je konstantna funkcija s vrijednošću 1. Ta funkcija je očito izračunljiva pa je* $\mathbb{N}^k$ *izračunljiv skup u* $\mathbb{N}^k$. *Analogno vidimo da je prazan skup izračunljiv u* $\mathbb{N}^k$.

**Primjer 1.5.4.** *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *izračunljiva funkcija. Tada je funkcija* $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, g(x, y) = f(y, x)$ *izračunljiva.*
*Naime, za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$g(x, y) = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)).$$

*Iz ovoga zaključujemo da je* $g$ *kompozicija funkcija* $f, I_2^2, I_1^2$. *Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je* $g$ *izračunljiva funkcija.*

**Primjer 1.5.5.** *Neka je* $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$A(x, y) = |x - y|.$$

*Za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \tag{1.1}$$

*To vidimo na sljedeći način:*
*ako je* $x \leq y$ *onda je*

$$|x - y| = y - x,$$

*a*

$$(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = 0 + y - x = y - x.$$

*Ako je* $x > y$ *onda je*

$$|x - y| = x - y,$$

*a*

$$(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = x - y + 0 = x - y.$$

*Neka je* $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *modificirano oduzimanje. Neka je* $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$g(x, y) = f(y, x).$$

*Prema primjeru 1.2.8 funkcija f je izračunljiva. Prema primjeru 1.5.4 funkcija g je izračunljiva. Prema* (1.1) *vrijedi*

$$A = f + g$$

*pa iz propozicije 1.4.10 slijedi da je A izračunljiva funkcija.*

**Definicija 1.5.6.** *Neka je* $sg\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$sg(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Propozicija 1.5.7.** *Funkcija* $sg\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je izračunljiva.*

*Dokaz.* Sljedeći program računa funkciju $sg$:

0. DEC $R_1, 2$
1. INC $R_0$
2. INC $R_2$ □

**Definicija 1.5.8.** *Neka je* $\overline{sg}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

**Propozicija 1.5.9.** *Funkcija* $\overline{sg}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je izračunljiva.*

*Dokaz.* Sljedeći program računa funkciju $\overline{sg}$:

0. DEC $R_1$, 2
1. GO TO 3
2. INC $R_0$
3. INC $R_2$ □

**Primjer 1.5.10.** *Neka je* $o\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$o(x, y) = \begin{cases} x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y, & y \geq 1 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

*Neka su* $x, y \in \mathbb{N}, y \geq 1$. *Znamo da tada postoje jedinstveni* $k, l \in \mathbb{N}$ *takvi da je*

$$x = ky + l$$

*i* $0 \leq l < y$ *pri čemu je* $l$ *ostatak pri dijeljenju* $x$ *s* $y$*. Slijedi*

$$\frac{x}{y} = k + \frac{l}{y}.$$

*Budući da je* $0 \leq \frac{l}{y} < 1$ *imamo da je*

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = k.$$

*Stoga je*

$$x = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + l$$

*pa je*

$$l = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y,$$

*tj.*

$$l = o(x, y).$$

*Dakle, za* $x, y \in \mathbb{N}, y \geq 1, o(x, y)$ *je ostatak pri dijeljenju broja* $x$ *s* $y$*.*

**Propozicija 1.5.11.** *Funkcija* $o$ *je izračunljiva.*

*Dokaz.* Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija iz primjera 1.2.9 . Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$o(x, y) = x \dot{-} f(x, y)y. \tag{1.2}$$

Neka je $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Prema (1.2) za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$o(x, y) = m(x, f(x, y) \cdot y) = m(I_1^2(x, y), h(x, y))$$

gdje je

$$h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ h(x, y) = f(x, y) \cdot y.$$

Uočimo da je $o$ kompozicija funkcija $m, I_1^2, h$. Iz

$$h = f \cdot I_2^2$$

i propozicije 1.4.10 slijedi da je $h$ izračunljiva funkcija.
Funkcije $m$, $I_1^2$ i $h$ su izračunljive pa iz propozicije 1.4.2 slijedi da je $o$ izračunljiva funkcija.

□

**Primjer 1.5.12.** *Skup* $2\mathbb{N}$*, tj. skup svih parnih brojeva, je izračunljiv.*
*Dokažimo to.*
*Za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \overline{sg}(o(x, 2)) = \overline{sg}(f(x)) \tag{1.3}$$

*pri čemu je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = o(x, 2)$
*Neka je* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(x) = 2$*. Imamo*

$$f(x) = o(x, 2) = o(I_1^1(x), g(x)),$$

*za svaki* $x \in \mathbb{N}$*. Funkcije* $o, I_1^1, g$ *su izračunljive, a* $f$ *je kompozicija tih funkcija. Prema propoziciji 1.4.2 funkcija* $f$ *je izračunljiva. Prema* (1.3) $\chi_{2\mathbb{N}}$ *je kompozicija funkcija* $\overline{sg}$ *i* $f$*. Stoga je* $\chi_{2\mathbb{N}}$ *izračunljiva funkcija. Dakle, skup* $2\mathbb{N}$ *je izračunljiv.*

**Primjer 1.5.13.** *Neka je* $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \mid y\}$*. Tvrdimo da je skup* $D$ *izračunljiv.*
*Uočimo prije svega sljedeće: za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$x \mid y \Leftrightarrow o(y, x) = 0 \tag{1.4}$$

*Naime, ako je* $x \geq 1$*, onda* $x \mid y$ *ako i samo ako je ostatak pri dijeljenju broja* $y$ *s* $x$ *jednak 0, a to je ako i samo ako je* $o(x, y) = 0$*.*
*Ako je* $x = 0$*, onda imamo* $0 \mid y$ *ako i samo ako je* $y = 0$*, a prema definiciji funkcije* $o$ *vrijedi*

$$o(y, 0) = y$$

*pa kada ovo uvrstimo u prethodnu ekvivalenciju dobivamo*

$$0 \mid y \Leftrightarrow o(y, 0) = 0,$$

*a to je upravo* (1.4) *za* $x = 0$*. Iz* (1.4) *slijedi da je*

$$\chi_D(x, y) = \overline{sg}(o(y, x))$$

*za sve* $x, y \in \mathbb{N}$*. Iz primjera 1.5.4 i propozicije 1.4.2 zaključujemo da je* $\chi_D$ *izračunljiva funkcija. Dakle, skup* $D$ *je izračunljiv.*

**Propozicija 1.5.14.** *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka su* $S$ *i* $T$ *izračunljivi skupovi u* $\mathbb{N}^k$*. Tada su* $S \cup T$*,* $S \cap T$ *i* $S^c$ *izračunljivi skupovi.*

*Dokaz.* Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S \cap T}(x) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x)$$

pa iz propozicije 1.4.10 slijedi da je $\chi_{S\cap T}$ izračunljiva funkcija. Prema tome $S \cap T$ je izračunljiv skup.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S\cup T}(x) = sg(\chi_S(x) + \chi_T(x))$$

pa je $\chi_{S\cup T}$ kompozicija funkcija $sg$ i $\chi_S + \chi_T$ iz čega slijedi da je $\chi_{S\cup T}$ izračunljiva funkcija. Prema tome $S \cup T$ je izračunljiv skup.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S^c}(x) = \overline{sg}(\chi_S(x))$$

pa zaključujemo da je $S^c$ izračunljiv skup. □

**Propozicija 1.5.15.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Neka su $f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije te neka su $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ izračunljivi skupovi takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstven $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}$$

*Tada je $F$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + \ldots + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x)$$

pa iz propozicije 1.4.10 i korolara 1.4.11 slijedi da je $F$ izračunljiva funkcija. □

# Poglavlje 2

# Realne izračunljive funkcije

## 2.1 Cjelobrojne izračunljive funkcije

**Definicija 2.1.1.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Kažemo da je $f$ izračunljiva funkcija ako postoje izračunljive funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

**Lema 2.1.2.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija ako i samo ako postoje izračunljive funkcije $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $f$ izračunljiva funkcija. Tada postoje izračunljive funkcije $u, v\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & v(x) \in 2\mathbb{N} \\ -u(x), & v(x) \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

odnosno:

$$f(x) = \begin{cases} u(x) - 0, & v(x) \in 2\mathbb{N} \\ 0 - u(x), & v(x) \notin 2\mathbb{N} \end{cases} \tag{2.1}$$

Definirajmo funkcije $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$a(x) = \begin{cases} u(x), & v(x) \in 2\mathbb{N} \\ 0, & v(x) \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 0, & v(x) \in 2\mathbb{N} \\ u(x), & v(x) \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Tada prema (2.1) za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = a(x) - b(x)$. Dokažimo još da su funkcije $a$ i $b$ izračunljive. Iz definicija ovih funkcija slijedi da je

$$a(x) = u(x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(v(x))$$

i

$$b(x) = u(x) \cdot \chi_{2\mathbb{N}+1}(v(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa iz propozicije 1.4.10 slijedi da su $a$ i $b$ izračunljive funkcije.
Pretpostavimo sada da je $f(x) = a(x) - b(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, gdje su $a, b \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Dokažimo da je $f$ izračunljiva funkcija. Definirajmo $u \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$u(x) = |a(x) - b(x)|.$$

Vrijedi

$$u(x) = A(a(x), b(x)),$$

gdje je $A$ funkcija iz primjera 1.5.4 . Stoga je $u$, kao kompozicija izračunljivih funkcija, izračunljiva funkcija.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & a(x) \geq b(x) \\ -u(x), & a(x) < b(x) \end{cases}$$

Definirajmo funkciju $v \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$v(x) = \begin{cases} 0, & a(x) \geq b(x) \\ 1, & a(x) < b(x) \end{cases}$$

Očito je tada

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Preostaje još dokazati da je $v$ izračunljiva funkcija. No to slijedi iz činjenice da je

$$v(x) = sg(b(x) \dot{-} a(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. □

**Propozicija 2.1.3.** *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $-f, f + g, f \cdot g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljive.*

*Dokaz.* Budući da su $f$ i $g$ izračunljive postoje izračunljive funkcije $u, v, u', v' \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{v(x)} \cdot u(x)$$

i

$$g(x) = (-1)^{v'(x)} \cdot u'(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(-f)(x) = (-1)^{v(x)+1} \cdot u(x)$$

i

$$(f \cdot g)(x) = (-1)^{v(x)+v'(x)} \cdot u(x) \cdot u'(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, iz čega je jasno da su funkcije $-f, f \cdot g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljive.
Prema 2.1.2 postoje izračunljive funkcije $a, b, a', b' \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = a(x) - b(x)$$

i

$$g(x) = a'(x) - b'(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$(f + g)(x) = a(x) + a'(x) - (b(x) + b'(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa iz činjenice da su funkcije $a + a', b + b' \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive i leme 2.1.2 slijedi da je $f + g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljiva funkcija. □

**Napomena 2.1.4.** *Ako je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija, onda je $f$ izračunljiva i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Naime vrijedi*

$$f(x) = (-1)^{g(x)} \cdot f(x)$$

*za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pri čemu je $g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 0.*

## 2.2 Racionalne izračunljive funkcije

**Definicija 2.2.1.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Kažemo da je $f$ izračunljiva funkcija ako postoje izračunljive funkcije $u \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $v(x) \neq 0$ i $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

**Napomena 2.2.2.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija ako i samo ako postoje izračunljive funkcije $u, v, w \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $v(x) \neq 0$ i*

$$f(x) = (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)}$$

*za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

**Propozicija 2.2.3.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $f \cdot g, f + g, -f, |f|\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ onda je i funkcija $\frac{1}{f}\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva.*

*Dokaz.* Neka su $u, u'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v, v'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da je

$$v(x) \neq 0, v'(x) \neq 0, f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ } i \text{ } g(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(-f)(x) = \frac{-u(x)}{v(x)} = \frac{(-u)(x)}{v(x)}.$$

Prema propoziciji 2.1.3 funkcija $-u\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je izračunljiva pa je stoga funkcija $-f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva.
Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(u \cdot u')(x)}{(v \cdot v')(x)}.$$

Prema propoziciji 2.1.3 i propoziciji 1.4.10 funkcije $u \cdot u'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $v \cdot v'\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su izračunljive pa je stoga funkcija $f \cdot g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)}{v(x) \cdot v'(x)},$$

dakle

$$(f + g)(x) = \frac{(uv' + u'v)(x)}{(vv')(x)}$$

pri čemu na $v$ i $v'$ u brojniku razlomka gledamo kao funkcije s $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Iz propozicije 2.1.3 i propozicije 1.4.10 slijedi da je funkcija $f + g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva.
Imamo

$$u(x) = (-1)^{a(x)} \cdot b(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, gdje su $a, b\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = (-1)^{a(x)} \cdot \frac{b(x)}{v(x)}$$

pa je

$$|f(x)| = \frac{b(x)}{v(x)} = (-1)^0 \cdot \frac{b(x)}{v(x)}.$$

Stoga je $|f|$ izračunljiva funkcija.
Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Slijedi da je $b(x) \neq 0$ i

$$\frac{1}{f}(x) = (-1)^{a(x)} \cdot \frac{v(x)}{b(x)} = \frac{(-1)^{a(x)} \cdot v(x)}{b(x)}.$$

Stoga je $\frac{1}{f} \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. □

**Propozicija 2.2.4.** *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. Neka je $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ i $S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$. Tada su $S_1$, $S_2$ i $S_3$ izračunljivi skupovi.*

*Dokaz.* Budući da je $f$ izračunljiva funkcija postoje izračunljive funkcije $u, v, w \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$v(x) \neq 0 \textit{ i } f(x) = (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $x \in S_1$ ako i samo ako je $u(x) = 0$. Stoga je

$$\chi_{S_1}(x) = \overline{sg}(u(x))$$

pa je $\chi_{S_1}$ izračunljiva funkcija kao kompozicija izračunljivih funkcija. Dakle, $S_1$ je izračunljiv skup.
Nadalje, za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $x \in S_2$ ako i samo ako je $w(x)$ paran i $u(x) \neq 0$ pa je stoga

$$\chi_{S_2}(x) = X_{2\mathbb{N}}(w(x)) \cdot sg(u(x)).$$

Dakle, $\chi_{S_2}$ je umnožak funkcija $\chi_{2\mathbb{N}} \circ w$ i $sg \circ u$ koje su očito izračunljive pa je $\chi_{S_2}$ izračunljiva funkcija. Dakle, $S_2$ je izračunljiv skup. Uočimo: $S_3 = S_1 \cup S_2$. Stoga je $S_3$ izračunljiv skup. □

**Korolar 2.2.5.** *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive funkcije. Neka je $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ i $S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leq g(x)\}$. Tada su $S_1$, $S_2$ i $S_3$ izračunljivi skupovi.*

*Dokaz.* Neka je $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h = g - f$. Tada je $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) > 0\}$ i $S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) \geq 0\}$. Iz propozicije 2.2.3 i propozicije 2.2.4 slijedi tvrdnja korolara. □

**Napomena 2.2.6.** *Ako je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljiva funkcija, onda je $f$ izračunljiva i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Naime vrijedi $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gdje je $u = f$ i $v \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $v(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

## 2.3 Izračunljivi brojevi i realne izračunljive funkcije

**Definicija 2.3.1.** *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za $x$ kažemo da je* ***izračunljiv broj*** *ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(k)| < 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

**Primjer 2.3.2.** *Svaki racionalan broj je izračunljiv.*

*Neka je $q \in \mathbb{Q}$. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definirana s*

$$f(k) = q$$

*za svaki $k \in \mathbb{N}$ je izračunljiva. Naime imamo*

$$q = (-1)^c \cdot \frac{a}{b}$$

*gdje su $a, b, c \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ pa za funkcije $u, v, w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,*

$$u(k) = a, v(k) = b, w(k) = c$$

*očito vrijedi da su izračunljive te da je*

$$f(k) = (-1)^{w(k)} \cdot \frac{u(k)}{v(k)}$$

*za svaki $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi*

$$|q - f(k)| = 0 < 2^{-k}$$

*za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome $q$ je izračunljiv broj.*

**Definicija 2.3.3.** *Neka je $(x_i)$ niz realnih brojeva. Kažemo da je $(x_i)$* ***izračunljiv niz u $\mathbb{R}$*** *ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x_i - F(i, k)| < 2^{-k}$ za sve $i, k \in \mathbb{N}$.*

**Definicija 2.3.4.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je $f$ izračunljiva funkcija ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|f(x) - F(x, k)| < 2^{-k}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Za $F$ kažemo da je izračunljiva aproksimacija od $f$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je $(x_i)$ niz realnih brojeva, onda je $(x_i)$ izračunljiv niz u $\mathbb{R}$ (u smislu definicije 2.3.3) ako i samo ako je $(x_i)$ izračunljiv kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (u smislu definicije 2.3.4).

**Definicija 2.3.5.** *Neka je $S$ skup, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $f : S \to \mathbb{N}^n$. Tada postoje jedinstvene funkcije $f_1, \ldots, f_n : S \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ za svaki $x \in S$. Za $f_1, \ldots, f_n$ kažemo da su* ***komponentne funkcije od*** *$f$.*

**Definicija 2.3.6.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je izračunljiva ako su komponentne funkcije od $f$ izračunljive (kao funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$).*

**Propozicija 2.3.7.** *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ izračunljive funkcije. Tada je $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo tvrdnju uz pretpostavku da je $l$=1.
Neka su $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $f$. Funkcije $f_1, \dots, f_n$ su izračunljive te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

iz čega zaključujemo da je $g \circ f$ kompozicija funkcija $g, f_1, \dots, f_n$. Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je $g \circ f$ izračunljiva funkcija.
Promotrimo sada slučaj kada je $l \geq 2$.
Neka su $g_1, \dots, g_l : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $g$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), \dots, g_l(f(x))) = ((g_1 \circ f)(x), \dots, (g_l \circ f)(x)).$$

Iz ovoga zaključujemo da su $g_1 \circ f, \dots, g_l \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $g \circ f$. Prema prvom slučaju (kada je $l$=1) funkcije $g_1 \circ f, \dots, g_l \circ f$ su izračunljive. Stoga je $g \circ f$ izračunljiva funkcija. □

**Propozicija 2.3.8.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ izračunljiva funkcija te neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. Tada je $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Budući da je $f$ izračunljiva funkcija, postoje izračunljive funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je

$$v(y) \neq 0 \text{ } i \text{ } g(y) = (-1)^{w(y)} \cdot \frac{u(y)}{v(y)}$$

za svaki $y \in \mathbb{N}^n$. Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (-1)^{w(f(x))} \cdot \frac{u(f(x))}{v(f(x))} = (-1)^{(w \circ f)(x)} \cdot \frac{(u \circ f)(x)}{(v \circ f)(x)}.$$

Prema propoziciji 2.3.7 funkcije $w \circ f, u \circ f, v \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su izračunljive. Stoga je $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. □

**Propozicija 2.3.9.** *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ izračunljiva funkcija te neka je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Tada je $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Budući da je $g$ izračunljiva funkcija, postoji izračunljiva funkcija $G\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|g(y) - G(y,i)| < 2^{-i}$$

za sve $i \in \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}^n$. Stoga za svaki $i \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$|g(f(x)) - G(f(x),i)| < 2^{-i}.$$

Definirajmo

$$H\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q},\ H(x,i) = G(f(x),i)$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|(g \circ f)(x) - H(x,i)| < 2^{i}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$.
Preostaje još pokazati da je $H$ izračunljiva funkcija.
Definirajmo

$$F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{n+1},\ F(x,i) = (f(x),i)$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$H(x,i) = G(f(x),i) = G(F(x,i))$$

pa je

$$H = G \circ F.$$

Stoga je prema propoziciji 2.3.8 dovoljno pokazati da je $F$ izračunljiva funkcija. Neka su $f_1,\dots,f_n\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $f$ te $F_1,\dots,F_{n+1}\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $F$. Za sve $x_1,\dots,x_k,i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F(x_1,\dots,x_k,i) = (f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_n(x_1,\dots,x_k),i).$$

Očito je

$$F_{n+1} = I^{n+1}_{n+1}$$

pa je $F_{n+1}$ izračunljiva funkcija.
Neka je $j \in \{1,\dots,n\}$. Za sve $x_1,\dots,x_k,i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F_j(x_1,\dots,x_k,i) = f_j(x_1,\dots,x_k) = f_j(\pi(x_1,\dots,x_k,i)),$$

gdje je

$$\pi\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k,\ \pi(x_1,\dots,x_k,i) = (x_1,\dots,x_k).$$

Stoga je

$$F_j = f_j \circ \pi.$$

Komponentne funkcije od $\pi$ su projekcije pa su izračunljive. Stoga je $\pi$ izračunljiva funkcija pa iz propozicije 2.3.7 slijedi da je $F_j$ izračunljiva funkcija. Time smo dokazali da su komponentne funkcije od $F$ izračunljive pa je $F$ izračunljiva funkcija. □

**Lema 2.3.10.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da postoje izračunljive funkcije $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ i $M\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je $|f(x) - F(x,k)| < M(x)\cdot 2^{-k}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Uočimo prije svega da za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $l \le 2^l$. Naime, ovo je očito za $l = 0$ i $l = 1$, ako pretpostavimo da je

$$l \le 2^l,$$

za neki $l \ge 1$, onda je

$$2l \le 2^{l+1},$$

a

$$l + 1 \le 2l$$

pa je

$$l + 1 \le 2^{l+1}.$$

Definirajmo

$$H\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q},\ H(x,k) = F(x, k + M(x)),$$

$x \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je $H$ izračunljiva funkcija. Vrijedi

$$H(x,k) = F(G(x,k)),$$

gdje je

$$G\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{n+1},\ G(x,k) = (x, k + M(x)).$$

Dakle, $H = F \circ G$ pa je dovoljno pokazati da je $G$ izračunljiva funkcija.
Neka su $G_1, \dots, G_{n+1}\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $G$. Za sve $x_1, \dots, x_n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G(x_1, \dots, x_n, k) = (x_1, \dots, x_n, k + M(x_1, \dots, x_n)).$$

Iz ovoga je očito da su funkcije $G_1, \dots, G_n$ projekcije, dakle te su funkcije izračunljive.
Za sve $x_1, \dots, x_n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$G_{n+1}(x_1, \dots, x_n, k) = k + M(x_1, \dots, x_n) = I^{n+1}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, k) + (M \circ \pi)(x_1, \dots, x_n, k),$$

gdje je

$$\pi\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^n,\ \pi(x_1, \dots, x_n, k) = (x_1, \dots, x_n).$$

Očito je $\pi$ izračunljiva funkcija pa iz

$$G_{n+1} = I^{n+1}_{n+1} + M \circ \pi$$

slijedi da je $G_{n+1}$ izračunljiva funkcija. Zaključujemo da je $G$ izračunljiva funkcija stoga je $H$ izračunljiva funkcija.
Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$M(x) \leq 2^{M(x)}$$

pa iz definicije funkcije $H$ i

$$|f(x) - F(x,k)| < M(x) \cdot 2^{-k}$$

slijedi

$$|f(x) - H(x,k)| = |f(x) - F(x, k + M(x))| < M(x) \cdot 2^{-(k+M(x))} = \frac{M(x)}{2^{M(x)}} \cdot 2^{-k} \leq 1 \cdot 2^{-k} = 2^{-k}.$$

Dakle,

$$|f(x) - H(x,k)| < 2^{-k}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $f$ je izračunljiva funkcija. □

**Lema 2.3.11.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija te neka je $F \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva aproksimacija od $f$. Tada postoji izračunljiva funkcija $M \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $|f(x)| < M(x)$ i $|F(x,k)| < M(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* Uočimo prije svega sljedeće:
ako je $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $g \colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija onda postoji izračunljiva funkcija $M \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $|g(x)| < M(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^l$. Naime imamo

$$g(x) = (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^l$, pri čemu su $u, v, w \colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da je $v(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^l$ pa za svaki $x \in \mathbb{N}^l$ vrijedi

$$|g(x)| = \frac{u(x)}{v(x)} \leq u(x) < u(x) + 1.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$|f(x) - F(x,0)| < 1$$

pa iz

$$|f(x)| - |F(x,0)| \leq |f(x) - F(x,0)|$$

slijedi

$$|f(x)| - |F(x,0)| < 1.$$

Stoga je

$$|f(x)| < 1 + |F(x, 0)|. \tag{2.2}$$

Funkcija

$$H\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q},\ H(x) = 1 + |F(x, 0)|$$

je izračunljiva. Naime funkcija

$$G\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}, G(x) = F(x, 0)$$

je izračunljiva jer je $G = F \circ \varphi$ gdje je

$$\varphi\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^{n+1},\ \varphi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0).$$

Funkcija $\varphi$ je izračunljiva jer su joj komponentne funkcije izračunljive. Stoga je $G$ izračunljiva funkcija. Funkcija $H$ je zbroj funkcije $|G|$ i konstantne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ s vrijednošću 1. Stoga je $H$ izračunljiva. Prema dokazanom postoji funkcija $M\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je

$$|H(x)| < M(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Iz (2.2) slijedi

$$|f(x)| < M(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$|F(x, k)| - |f(x)| \leq |f(x) - F(x, k)|.$$

Dakle,

$$|F(x, k)| - |f(x)| < 1$$

pa je

$$|F(x, k)| < 1 + |f(x)| < 1 + M(x).$$

Prema tome

$$|F(x, k)| < 1 + M(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$M'\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},\ M'(x) = 1 + M(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Očito je da je $M'$ izračunljiva funkcija te da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x, k)| < M'(x)\ i\ |f(x)| < M'(x).$$

□

**Teorem 2.3.12.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $-f, |f|, f + g, f \cdot g \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljive.*

*Dokaz.* Neka su $F, G \colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljive aproksimacije od $f$ i $g$. Za sve $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$|(-f)(x) - (-F)(x, k)| = |f(x) - F(x, k)| < 2^{-k}.$$
Iz ovoga slijedi da je $-F$ izračunljiva aproksimacija od $-f$.
Nadalje za sve $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$||f(x)| - |F(x, k)|| \leq |f(x) - F(x, k)| < 2^{-k}$$
pa je $|F|$ izračunljiva aproksimacija od $|f|$.
Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi
$$|(f+g)(x)-(F+G)(x, k)| = |f(x)+g(x)-F(x, k)-G(x, k)| = |(f(x)-F(x, k))+(g(x)-G(x, k))| \leq$$
$$|f(x) - F(x, k)| + |g(x) - G(x, k)| < 2 \cdot 2^{-k}.$$
Dakle,
$$|(f + g)(x) - (F + G)(x, k)| < 2 \cdot 2^{-k}.$$
Prema lemi 2.3.10 funkcija $f + g$ je izračunljiva. Prema lemi 2.3.11 postoje izračunljive funkcije $M, N \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da je
$$|f(x)| < M(x) \ i \ |G(x, k)| < N(x)$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Imamo
$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x, k)| = |f(x) \cdot g(x) - F(x, k) \cdot G(x, k)| =$$
$$|f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot G(x, k) + f(x) \cdot G(x, k) - F(x, k) \cdot G(x, k)| =$$
$$|f(x)\cdot(g(x)-G(x, k))+G(x, k)\cdot(f(x)-F(x, k))| \leq |f(x)|\cdot|g(x)-G(x, k)|+|G(x, k)|\cdot|f(x)-F(x, k)| <$$
$$M(x) \cdot 2^{-k} + N(x) \cdot 2^{-k} = (M(x) + N(x)) \cdot 2^{-k}.$$
Dakle,
$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x, k)| < (M(x) + N(x)) \cdot 2^{-k}.$$
Prema lemi 2.3.10 $f \cdot g$ je izračunljiva funkcija. □

**Lema 2.3.13.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ izračunljiv skup takav da za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x_1, ..., x_n, y) \in S$. Tada postoji izračunljiva funkcija $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in S$ za svaki $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* Neka su $x_1, ..., x_n, y \in \mathbb{N}$. Tada je $(x_1, ..., x_n, y) \in S$ ako i samo ako je

$$\chi_S(x_1, ..., x_n, y) = 1,$$

a ovo vrijedi ako i samo ako je

$$\overline{sg}(\chi_S(x_1, ..., x_n, y)) = 0.$$

Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tako da je

$$f(x_1, ..., x_n) = \mu y(\overline{sg}(\chi_S(x_1, ..., x_n, y)) = 0).$$

Funkcija $f$ je izračunljiva jer je dobivena primjenom $\mu$ operatora na funkciju $\overline{sg} \circ \chi_S$. Za sve $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$\overline{sg}(\chi_S(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))) = 0,$$

tj.

$$(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in S.$$

$\square$

**Teorem 2.3.14.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija takva da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je $\frac{1}{f}\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Neka je $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva aproksimacija od $f$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2^{-k} < \varepsilon.$$

Naime, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{\varepsilon} < k$, a $k \leq 2^k$ pa je $\frac{1}{\varepsilon} < 2^k$ što povlači $2^{-k} < \varepsilon$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$\frac{|f(x)|}{4} > 0$$

pa postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2^{-k_0} < \frac{|f(x)|}{4}.$$

Slijedi

$$4 \cdot 2^{-k_0} < |f(x)|. \tag{2.3}$$

Imamo

$$|f(x)| - |F(x, k_0)| \leq |f(x) - F(x, k_0)| < 2^{k_0}$$

pa je

$$|f(x)| - 2^{-k_0} < |F(x, k_0)|.$$

Iz (2.3) slijedi
$$3 \cdot 2^{-k_0} < |f(x)| - 2^{-k_0}$$
pa je
$$3 \cdot 2^{-k_0} < |F(x, k_0)|.$$
Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$3 \cdot 2^{-k_0} < |F(x, k_0)|.$$
Pretpostavimo da je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$3 \cdot 2^{-k_0} < |F(x, k_0)|. \tag{2.4}$$
Imamo
$$|F(x, k_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - F(x, k_0)| < 2^{-k_0}$$
pa je
$$|F(x, k_0)| - 2^{-k_0} < |f(x)|.$$
Iz ovoga i (2.4) slijedi
$$2 \cdot 2^{-k_0} < |f(x)| \tag{2.5}$$
Neka je $k \geq k_0$. Imamo
$$|f(x) - F(x, k)| < 2^{-k} \leq 2^{-k_0}$$
pa je
$$|f(x)| - 2^{-k_0} < |F(x, k)|.$$
Iz ovoga i (2.5) slijedi
$$2^{-k_0} < |F(x, k)| \tag{2.6}$$
Rezimirajmo. Za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (2.4). S druge strane ako za neki $x \in \mathbb{N}^n$ i neki $k_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi (2.4), onda vrijedi (2.5) te za svaki $k \geq k_0$ vrijedi (2.6).
Neka je
$$S = \{(x_1, ..., x_n, k) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid 3 \cdot 2^{-k} < |F(x_1, ..., x_n, k)|\}.$$
Neka je $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s
$$g(x_1, ..., x_n, k) = 3 \cdot 2^{-k}.$$
Funkcija $\gamma\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\gamma(a, b) = a^b$ je izračunljiva prema primjeru 1.3.4 pa je funkcija $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\omega(x) = 2^x$ izračunljiva jer je $\omega(x) = \gamma(2, x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}$.
Za sve $x_1, ..., x_n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$g(x_1, ..., x_n, k) = (-1)^0 \cdot \frac{3}{2^k} = (-1)^0 \cdot \frac{3}{(\omega \circ I_{n+1}^{n+1}) \cdot (x_1, ..., x_n, k)}$$

pa je $g$ izračunljiva funkcija po definiciji.
Vrijedi

$$S = \{(x_1, ..., x_n, k) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid g(x_1, ..., x_n, k) < |F|(x_1, ..., x_n, k)\}.$$

Iz korolara 2.2.5 slijedi da je $S$ izračunljiv skup.
Neka je $x \in \mathbb{N}^n$. Dokazali smo da tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$3 \cdot 2^{-k} < |F(x, k)|.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, k) \in S$. Prema lemi 2.3.13 postoji izračunljiva funkcija $\varphi\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Prema tome

$$3 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |F(x, \varphi(x))|$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.
Prema dokazanom vrijedi

$$2 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |f(x)|\ ,\quad 2^{-\varphi(x)} < |F(x, k)| \tag{2.7}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \geq \varphi(x)$.
Definirajmo funkciju

$$H\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q},\ H(x, k) = F(x, k + \varphi(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$. Očito je

$$2^{-\varphi(x)} < |H(x, k)| \tag{2.8}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$.
Neka je

$$\sigma\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{n+1},\ \sigma(x_1, ..., x_n, k) = (x_1, ..., x_n, k + \varphi(x_1, ..., x_n)).$$

Neka su $\sigma_1, ..., \sigma_{n+1}\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $\sigma$. Funkcije $\sigma_1, ..., \sigma_n$ su očito izračunljive. Vrijedi

$$\sigma_{n+1} = I^{n+1}_{n+1} + \varphi \circ \pi$$

gdje je

$$\pi\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^n,\ \pi(x_1, ..., x_n, k) = (x_1, ..., x_n).$$

Stoga je $\sigma_{n+1}$ izračunljiva funkcija. Dakle, $\sigma$ je izračunljiva funkcija.
Očito je $H = F \circ \sigma$ iz čega slijedi da je $H$ izračunljiva funkcija. Iz (2.8) slijedi da je $H(x, k) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.2.3 funkcija $\frac{1}{H}\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ je izračunljiva. Iz (2.7) i (2.8) slijedi

$$\frac{1}{|f(x)|} < 2^{\varphi(x)}\ i\ \frac{1}{|H(x, k)|} < 2^{\varphi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$.
Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{H}(x,k)\right| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{H(x,k)}\right| = \left|\frac{H(x,k) - f(x)}{f(x)\cdot H(x,k)}\right| =$$

$$= |f(x) - F(x, k+\varphi(x))| \cdot \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{|H(x,k)|} < 2^{-(k+\varphi(x))} \cdot 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{\varphi(x)} = 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-k}.$$

Dakle

$$\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{H}(x,k)\right| < 2^{\varphi(x)} \cdot 2^{-k}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema lemi 2.3.10 funkcija $\frac{1}{f}\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je izračunljiva. □

**Propozicija 2.3.15.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.*
*1. Neka je $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Tada je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.*
*2. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je $f$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Budući da je funkcija $f$ izračunljiva postoji funkcija $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k} \tag{2.9}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in \mathbb{N}^n$ fiksiran. Definirajmo funkciju

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(k) = F(x,k)$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$x = (x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{n+1}$, $\varphi(k) = (x_1, ..., x_n, k)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $\varphi_1, ..., \varphi_{n+1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ komponentne funkcije od $\varphi$. Funkcije $\varphi_1, ..., \varphi_n$ su konstantne, a funkcija $\varphi_{n+1}$ je identiteta na $\mathbb{N}$. Prema tome $\varphi$ je izračunljiva funkcija.
Uočimo da je $g = F \circ \varphi$. Stoga je $G$ izračunljiva funkcija. Iz (2.9) i definicije funkcije $g$ slijedi da je

$$|f(x) - g(k)| < 2^{-k}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema tome $f(x)$ je izračunljiv broj.
2. Budući da je $\alpha$ izračunljiv broj, postoji izračunljiva funkcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|\alpha - g(k)| < 2^{-k}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Neka je $F\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$, $F = g \circ I^{n+1}_{n+1}$. Očito je $F$ izračunljiva funkcija. Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|f(x) - F(x,k)| = |\alpha - g(I^{n+1}_{n+1}(x,k))| = |\alpha - g(k)| < 2^{-k}.$$

Dakle
$$|f(x) - F(x,k)| < 2^{-k}$$
za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da je $f$ izračunljiva funkcija. □

**Korolar 2.3.16.** *Neka su $\alpha$ i $\beta$ izračunljivi brojevi. Tada su $-\alpha, |\alpha|, \alpha+\beta, \alpha\cdot\beta$ izračunljivi brojevi. Ako je $\alpha \neq 0$ onda je i broj $\frac{1}{\alpha}$ izračunljiv.*

*Dokaz.* Neka su $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s
$$f(x) = \alpha, g(x) = \beta$$
za svaki $x \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.3.15 funkcije $f$ i $g$ su izračunljive. Prema teoremu 2.3.12 funkcije $-f, |f|, f+g, f\cdot g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ su izračunljive.
Odaberimo bilo koji $x \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.3.15 brojevi
$$-f(x),\ |f|(x),\ (f+g)(x),\ (f\cdot g)(x)$$
su izračunljivi. Dakle, $-\alpha, |\alpha|, \alpha+\beta, \alpha\cdot\beta$ su izračunljivi brojevi.
Ako je $\alpha \neq 0$ onda je funkcija $\frac{1}{f}$ izračunljiva (prema teoremu 2.3.14) pa je $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ izračunljiv broj, dakle $\frac{1}{\alpha}$ je izračunljiv broj. □

**Propozicija 2.3.17.** *Neka je $p$ prost broj te neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s:*
$$f(x) = \begin{cases} \text{eksponent kojim broj } p \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, & x \geq 2 \\ 0, & x = 0,1 \end{cases}$$
*Tada je $f$ izračunljiva funkcija.*

*Dokaz.* Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$. Označimo
$$k = f(x).$$
Tada vrijedi
$$2^k \mid x,$$
ali
$$2^{k+1} \nmid x.$$
Stoga je
$$k = \min\{y \in \mathbb{N} \mid 2^{k+1} \nmid x\}.$$
Budući da je
$$x = x + \overline{sg}(x)$$

imamo

$$f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid 2^{k+1} \nmid (x + \overline{sg}(x))\}. \tag{2.10}$$

Uočimo da (2.10) vrijedi i za $x = 0$. Neka je $D$ skup iz primjera 1.5.13. Tada za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a \nmid b \Leftrightarrow (a, b) \notin D \Leftrightarrow \chi_D(a, b) = 0.$$

Iz ovog i (2.10) zaključujemo da je

$$f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid \chi_D(2^{y+1}, x + \overline{sg}(x)) = 0\}. \tag{2.11}$$

Definirajmo

$$H\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ H(x, y) = \chi_D(2^{y+1}, x + \overline{sg}(x)).$$

Funkcija $H$ je kompozicija funkcija $\chi_D$, $f_1$ i $f_2$ gdje su $f_1, f_2\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s

$$f_1(x, y) = 2^{y+1},\ f_2(x, y) = x + \overline{sg}(x).$$

Neka je $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x, y) = x^y$. Tada je

$$f_1(x, y) = h(2, y + 1)$$

iz čega slijedi da je $f_1$ izračunljiva funkcija (kao kompozicija izračunljivih funkcija). Funkcija $f_2$ je izračunljiva funkcija (kao zbroj izračunljivih funkcija). Stoga je $H$ izračunljiva funkcija. Iz (2.11) i definicije funkcije $H$ slijedi da je

$$f(x) = \mu y(H(x, y) = 0)$$

Prema tome funkcija $f$ je dobivena primjenom $\mu$ operatora na funkciju $H$ pa iz propozicije 1.4.9 slijedi da je $f$ izračunljiva funkcija. □

Za prost broj $p$ definiramo funkciju $e_p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$e_p(x) = \begin{cases} \text{eksponent kojim broj } p \text{ ulazi u rastav od } x \text{ na proste faktore}, & x \geq 2 \\ 0, & x = 0, 1 \end{cases}$$

Prema propoziciji 2.3.17 funkcija $e_p$ je izračunljiva za svaki prost broj $p$.

**Primjer 2.3.18.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Tada postoji izračunljiva surjekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$. Naime, neka su $p_1, ..., p_n$ međusobno različiti prosti brojevi. Definirajmo*

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n,\ f(x) = (e_{p_1}(x), ..., e_{p_n}(x)).$$

*Očito su komponentne funkcije od $f$ izračunljive, dakle $f$ je izračunljiva funkcija. Ako je $y \in \mathbb{N}^n$, onda je*

$$y = (y_1, ..., y_n)$$

*gdje su* $y_1, ..., y_n \in \mathbb{N}$ *pa za*

$$x = p_1^{y_1} \cdot ... \cdot p_n^{y_n}$$

*vrijedi*

$$f(x) = (e_{p_1}(x), ..., e_{p_n}(x)) = (y_1, ..., y_n), \; tj. \; f(x) = y.$$

*Time smo pokazali da je* $f$ *surjekcija.*

# Poglavlje 3

# Prebrojivost i izračunljivost

## 3.1 Konačnost i prebrojivost

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathbb{N}_n = \{0, 1, ..., n\}$.

**Definicija 3.1.1.** *Za skup $S$ kažemo da je* **konačan** *ako je $S$ prazan ili postoje $n \in \mathbb{N}$ i surjekcija $f\colon \mathbb{N}_n \to S$.*

**Lema 3.1.2.** *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $i \in \mathbb{N}_n$. Tada postoji bijekcija $\mathbb{N}_{n-1} \to \mathbb{N}_n\backslash\{i\}$.*

*Dokaz.* Funkcija $f\colon \mathbb{N}_{n-1} \to \mathbb{N}_n\backslash\{i\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq i \\ n, & x = i \end{cases}$$

je tražena bijekcija. □

**Propozicija 3.1.3.** *Neka je $S$ neprazan konačan skup. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $\mathbb{N}_n \to S$.*

*Dokaz.* Neka je $T = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ surjekcija } \mathbb{N}_k \to S\}$. Iz činjenice da je $S$ neprazan konačan skup slijedi da je $T$ neprazan skup. Svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ ima minimum pa postoji $k_0 \in T$ takav da je

$$k_0 \leq k$$

za svaki $k \in T$. Iz $k_0 \in T$ slijedi da postoji surjekcija

$$f\colon \mathbb{N}_{k_0} \to S.$$

Tvrdimo da je $f$ injekcija. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}_{k_0}$ takvi da je

$$i \neq j \text{ te } f(i) = f(j).$$

Uočimo da je $k_0 \neq 0$. Promotrimo funkciju

$$f|_{\mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}} \colon \mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\} \to S.$$

Ova funkcija je surjekcija. Naime ako je $y \in S$ tada postoji $x \in \mathbb{N}_{k_0}$ takav da je $f(x) = y$. Ako je $x \neq i$ onda je $x \in \mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}$ pa je

$$f|_{\mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}}(x) = f(x) = y.$$

Ako je $x = i$ onda je $y = f(i)$ pa je $y = f(j)$, a $j \in \mathbb{N}_{k_0\setminus\{i\}}$. Dakle

$$f|_{\mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}}(j) = y.$$

Time smo dokazali da je $f|_{\mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}}$ surjekcija.
Prema lemi 3.1.2 postoji surjekcija

$$g \colon \mathbb{N}_{k_0-1} \to \mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}$$

iz čega slijedi da je

$$f|_{\mathbb{N}_{k_0}\setminus\{i\}} \circ g \colon \mathbb{N}_{k_0-1} \to S$$

surjekcija pa zaključujemo da je $k_0 - 1 \in T$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $k_0$ minimum skupa $T$. Prema tome $f$ je injekcija pa je stoga i bijekcija i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Definicija 3.1.4.** *Za skup koji nije konačan kažemo da je* ***beskonačan****.*

**Definicija 3.1.5.** *Za skup $S$ kažemo da je* ***prebrojiv*** *ako je $S$ prazan ili postoji surjekcija $\mathbb{N} \to S$.*

**Propozicija 3.1.6.** *Neka su $S$ i $T$ skupovi takvi da je $T \subseteq S$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoji surjekcija $S \to T$.*

*Dokaz.* Odaberimo $t_0$ iz $T$. Definirajmo funkciju $f \colon S \to T$ na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in T \\ t_0, & x \notin T \end{cases}$$

Očito je $f$ surjekcija. □

Uočimo da je svaki konačan skup prebrojiv.
Naime neka je $S$ konačan skup. Ako je $S = \emptyset$ onda je $S$ očito prebrojiv. Ako je $S \neq \emptyset$ onda postoji $n \in \mathbb{N}$ i surjekcija $f \colon \mathbb{N}_n \to S$. Prema propoziciji 3.1.6 postoji surjekcija $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_n$. Tada je $f \circ g \colon \mathbb{N} \to S$ surjekcija. Dakle, $S$ je prebrojiv.

**Propozicija 3.1.7.** *1) Svaki podskup konačnog skupa je konačan.*
*2) Ako je $f\colon S \to T$ funkcija i $A$ konačan podskup od $S$, onda je $f(A)$ konačan skup.*

*Dokaz.* 1) Neka je $S$ konačan skup te neka je $T \subseteq S$.
Ako je $T = \emptyset$ onda je očito $T$ konačan, a ako je $T \neq \emptyset$ tada postoje surjekcije

$$f\colon \mathbb{N}_n \to S,\ g\colon S \to T.$$

Tada je

$$g \circ f\colon \mathbb{N}_n \to T$$

surjekcija. Dakle, $T$ je konačan skup.
2) Ako je $A = \emptyset$, onda je $f(A) = \emptyset$ pa je $f(A)$ očito konačan. Ako je $A \neq \emptyset$ onda postoje $n \in \mathbb{N}$ i surjekcija $h\colon \mathbb{N}_n \to A$.
Neka je $g\colon A \to f(A)$ funkcija definirana s

$$g(x) = f(x).$$

Očito je $g$ surjekcija. Slijedi da je

$$g \circ h\colon \mathbb{N}_n \to f(A)$$

surjekcija, pa je dakle $f(A)$ konačan skup. □

**Teorem 3.1.8.** *Neka je $S$ prebrojiv skup. Tada je $S$ konačan skup ili postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to S$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da $S$ nije konačan skup. Tada je $S \neq \emptyset$ pa postoji surjekcija

$$a\colon \mathbb{N} \to S.$$

Dakle

$$S = \{a_0, a_1, a_2, ...\}.$$

Definirajmo funkciju $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktivno na sljedeći način. Neka je

$$\varphi(0) = 0.$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $\varphi(n)$. Tvrdimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da

$$a_k \notin \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}.$$

U suprotnom bi za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedilo $a_k \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}$, što bi značilo da je

$$S \subseteq \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\},\ tj.\ S = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}.$$

No ovo bi značilo da je funkcija $a|_{\mathbb{N}_{\varphi(n)}} : \mathbb{N}_{\varphi(n)} \to S$ surjekcija pa bismo imali da je $S$ konačan što je u kontradikciji s pretpostavkom. Prema tome skup

$$\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \notin \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}\}$$

je neprazan stoga ima minimum. Definiramo

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}\}.$$

Iz definicije funkcije $\varphi$ je očito da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{\varphi(n+1)} \notin \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\} \tag{3.1}$$

te da za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k < \varphi(n+1)$ vrijedi

$$a_k \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) slijedi da je

$$\varphi(n) < \varphi(n+1) \tag{3.3}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n < m$ vrijedi

$$\varphi(n) < \varphi(m).$$

Definirajmo funkciju

$$f : \mathbb{N} \to S,\ f(n) = a_{\varphi(n)}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $f$ bijekcija.
Dokažimo da je $f$ injekcija.
Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i < j$. Tada je

$$j = n + 1$$

za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle

$$i < n + 1$$

pa je

$$\varphi(i) < \varphi(n+1).$$

Iz (3.2) slijedi

$$a_{\varphi(i)} \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}.$$

Iz ovoga i (3.1) slijedi da je

$$a_{\varphi(i)} \neq a_{\varphi(n+1)},\ tj.\ f(i) \neq f(j).$$

Dakle, za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $i < j$ vrijedi $f(i) \neq f(j)$. Prema tome $f$ je injekcija. Dokažimo da je $f$ surjekcija. Dokažimo indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\} \subseteq f(\mathbb{N}) \tag{3.4}$$

Za $n = 0$ imamo

$$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_0\} = \{a_0\} = f(0) \in f(\mathbb{N}).$$

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi (3.4).
Neka je $k \in \mathbb{N}_{\varphi(n+1)}$. Ako je

$$k = \varphi(n+1),$$

onda je

$$a_k = a_{\varphi(n+1)} = f(n+1) \in f(\mathbb{N}),$$

a ako je

$$k < \varphi(n+1)$$

onda prema (3.2) vrijedi

$$a_k \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\},$$

što zajedno s induktivnom pretpostavkom daje $a_k \in f(\mathbb{N})$. Prema tome

$$\{a_k \mid k \in \mathbb{N}_{\varphi(n+1)}\} \subseteq f(\mathbb{N}).$$

Time smo pokazali da (3.4) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n \leq \varphi(n). \tag{3.5}$$

Dokažimo to indukcijom. Za $n = 0$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n \leq \varphi(n).$$

Tada je

$$n + 1 \leq \varphi(n) + 1,$$

a prema (3.3) vrijedi

$$\varphi(n) + 1 \leq \varphi(n+1).$$

Dakle, $n + 1 \leq \varphi(n+1)$.
Neka je $x \in S$. Tada je $x = a_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $i \in \mathbb{N}_n$ (možemo na primjer uzeti $n = i$). Tada iz (3.5) slijedi

$$i \leq \varphi(n), \ tj. \ i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}.$$

Prema tome

$$x \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}_{\varphi(n)}\}$$

pa iz (3.4) slijedi $x \in f(\mathbb{N})$. Time smo pokazali da je $S \subseteq f(\mathbb{N})$. Prema tome $f$ je surjekcija pa imamo da je $f$ bijekcija. □

**Teorem 3.1.9.** *Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prebrojivih skupova. Tada je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je $A_n = \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ onda je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $A_{n_0} \neq \emptyset$. Definirajmo niz skupova $(A_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$A_n' = \begin{cases} A_n, & \text{ako je } A_n \neq \emptyset \\ A_{n_0}, & \text{ako je } A_n = \emptyset \end{cases}$$

Tvrdimo da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n{}' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Ako je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n'$ onda je $x \in A_n'$ za neki $n \in \mathbb{N}$, pa je $x \in A_n$ ili $x \in A_{n_0}$. U svakom slučaju $x \in A_n$.

Obratno, ako je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ onda je $x \in A_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Očito je $A_n \neq 0$ pa je $A_n' = A_n$, tj. $x \in A_n'$. Dakle $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n'$. Time smo pokazali da vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Uočimo da je $A_n' \neq \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $A_n'$ je prebrojiv pa postoji surjekcija $a^n \colon \mathbb{N} \to A_n'$.

Definirajmo funkciju

$$F \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n', \; F(n, i) = a^n(i),$$

za sve $n, i \in \mathbb{N}$. Funkcija $F$ je surjekcija. Naime ako je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n'$ onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_n'$ pa budući da je $a^n$ surjekcija postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a^n(i) = x.$$

Dakle,

$$F(n, i) = x,$$

pa je $F$ surjekcija. Prema primjeru 2.3.18 postoji surjekcija $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. Funkcija

$$F \circ G\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n'$$

je surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. Stoga je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n'$, tj. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ prebrojiv skup. □

**Korolar 3.1.10.** *Neka su $S$ i $T$ prebrojivi skupovi. Tada je $S \cup T$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Definirajmo niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$A_n = \begin{cases} S, & n = 1 \\ T, & n = 2 \\ \emptyset, & n > 2 \end{cases}$$

Očito je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = S \cup T$. Prema teoremu 3.1.9 skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ je prebrojiv. Dakle, $S \cup T$ je prebrojiv skup. □

**Definicija 3.1.11.** *Za skup koji nije prebrojiv kažemo da je* ***neprebrojiv****.*

**Primjer 3.1.12.** *Neka je $S$ skup svih funkcija $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Tada je $S$ neprebrojiv skup. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji surjekcija $f\colon \mathbb{N} \to S$. Dakle, $S = \{f_1, f_2, ...\}$. Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$*

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } f_n(n) = 1 \\ 1, & \text{ako je } f_n(n) = 0 \end{cases}$$

*Tada je $g \in S$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $g = f_n$. Slijedi $g_i = f_n(i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa posebno $g(n) = f_n(n)$ no to je nemoguće zbog definicije funkcije $g$. Prema tome $S$ je neprebrojiv skup.*

**Propozicija 3.1.13.** *Neka su $S$ i $T$ skupovi te $f\colon S \to T$ surjekcija. Pretpostavimo da je $S$ prebrojiv skup. Tada je $T$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Budući da je $S$ prebrojiv skup postoji surjekcija $g\colon \mathbb{N} \to S$. Funkcija $f \circ g\colon \mathbb{N} \to T$ je surjekcija, dakle $T$ je prebrojiv skup. □

**Korolar 3.1.14.** *Neka je $S$ prebrojiv skup te neka je $T \subseteq S$. Tada je $T$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je $T = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Prema propoziciji 3.1.6 postoji surjekcija $S \to T$ pa iz propozicije 3.1.13 slijedi da je $T$ prebrojiv skup. □

**Definicija 3.1.15.** *Neka je $S$ skup te neka je $n \in \mathbb{N}$. Za svaku funkciju $x \colon \{0, ..., n\} \to S$ kažemo da je* ***konačan niz duljine*** *$n + 1$ u $S$. Naravno, za $i \in \{0, ..., n\}$ umjesto $x(i)$ pišemo $x_i$, a umjesto $x$ pišemo $(x_0, ..., x_n)$ ili $x_0, ..., x_n$.*

**Definicija 3.1.16.** *Za $n \in \mathbb{N}$ i skup $S$ neka $F^n(S)$ označava skup svih konačnih nizova u $S$ duljine $n + 1$. Dakle, $F^n(S) = \{(x_0, ..., x_n) \mid x_0, ..., x_n \in S\}$*

**Propozicija 3.1.17.** *Neka je $S$ prebrojiv skup te neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $F^n(S)$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je $S = \emptyset$ onda je $F^n(S) = \emptyset$ pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji surjekcija $f \colon \mathbb{N} \to S$. Definirajmo funkciju $F \colon \mathbb{N}^{n+1} \to F^n(S)$ sa

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) = (f(x_1), ..., f(x_{n+1})).$$

Funkcija $F$ je surjekcija. Naime, ako je

$$(a_0, ..., a_n) \in F^n(S)$$

onda, zbog surjektivnosti od $f$, za svaki $i \in \{0, ..., n\}$ postoji $x_{i+1} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(x_{i+1}) = a_i.$$

Tada je

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) = (a_0, ..., a_n).$$

Prema tome $F$ je surjekcija. Prema primjeru 2.3.18 skup $\mathbb{N}^{n+1}$ je prebrojiv. Iz propozicije 3.1.13 slijedi da je $F^n(S)$ prebrojiv skup. □

**Definicija 3.1.18.** *Za skup $S$ neka $F(S)$ označava skup svih konačnih nizova u $S$.*

## 3.2 Prebrojivost skupa izračunljivih funkcija

**Propozicija 3.2.1.** *Neka je $S$ prebrojiv skup. Tada je $F(S)$ prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Vrijedi $F(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(S)$ pa iz propozicije 3.1.17 i teorema 3.1.9 slijedi da je $F(S)$ prebrojiv skup. □

**Definicija 3.2.2.** *Instrukcije (programa za RAM-stroj) precizno možemo definirati na sljedeći način. Instrukciju INC $R_i$ definiramo kao uređeni par $(0, i)$.*
*Instrukciju DEC $R_i, k$ definiramo kao uređenu trojku $(1, i, k)$.*
*Instrukciju GO TO $k$ definiramo kao uređeni par $(2, k)$.*

*Neka je* $N_1 = \{(0, i) \mid i \in \mathbb{N}\}$
*Neka je* $N_2 = \{(1, i, k) \mid i \in \mathbb{N}\}$
*Neka je* $N_3 = \{(2, k) \mid i \in \mathbb{N}\}$
*Neka je* $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$

**Propozicija 3.2.3.** *Skupovi* $N_1, N_2, N_3, N$ *su prebrojivi.*

*Dokaz.* Funkcija
$$\mathbb{N} \to N_1,\ i \mapsto (0, i)$$
je bijekcija, dakle $N_1$ je prebrojiv skup. Analogno dobivamo da je $N_3$ prebrojiv skup.
Funkcija
$$\mathbb{N}^2 \to N_2,\ (i, k) \mapsto (1, i, k)$$
je bijekcija, dakle $N_2$ je prebrojiv skup. Iz
$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$$
i korolara 3.1.10 slijedi da je $N$ prebrojiv skup. □

Neka $\mathcal{P}$ označava skup svih programa.
Očito je $\mathcal{P} \subseteq F(N)$ pa iz propozicije 3.2.3, propozicije 3.2.1 i korolara 3.1.14 slijedi da je $\mathcal{P}$ prebrojiv skup.

**Definicija 3.2.4.** *Za* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *neka* $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ *označava skup svih izračunljivih funkcija s* $\mathbb{N}^k$ *u* $\mathbb{N}$*, neka* $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ *označava skup svih izračunljivih funkcija s* $\mathbb{N}^k$ *u* $\mathbb{Q}$*, te neka* $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ *označava skup svih izračunljivih funkcija s* $\mathbb{N}^k$ *u* $\mathbb{R}$*.*

**Propozicija 3.2.5.** *Neka su* $S$ *i* $T$ *skupovi te* $f\colon S \to T$*. Pretpostavimo da je* $f$ *injekcija te da je* $T$ *prebrojiv skup. Tada je* $S$ *prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Funkcija
$$S \to f(S),\ x \mapsto f(x)$$
je bijekcija, neka je
$$g\colon f(S) \to S$$
njena inverzna funkcija. Iz
$$f(S) \subseteq T$$
i propozicije 3.1.13 slijedi da je $f(S)$ prebrojiv skup. Iz činjenice da je $g$ surjekcija slijedi da je $S$ prebrojiv skup. □

**Propozicija 3.2.6.** *Neka su* $S$ *i* $T$ *prebrojivi skupovi. Tada je* $S \times T$ *prebrojiv skup.*

*Dokaz.* Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$, onda je $S \times T = \emptyset$ pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$ i $T \neq \emptyset$. Tada postoje surjekcije

$$f\colon \mathbb{N} \to S \ i \ g\colon \mathbb{N} \to T.$$

Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S \times T$ sa

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Tvrdimo da je $h$ surjekcija.
Neka je $a \in S$ i $b \in T$. Budući da su $f$ i $g$ surjekcije postoje $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da

$$f(x) = a \ i \ g(y) = b.$$

Imamo

$$h(x, y) = (f(x), g(y)) = (a, b).$$

Prema tome $h$ je surjekcija. Iz propozicije 3.1.13 slijedi da je $S \times T$ prebrojiv skup. □

**Propozicija 3.2.7.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ prebrojiv.*

*Dokaz.* Neka je $f \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$. Tada postoji program $P_f$ koji računa $f$. Neka je

$$\Phi\colon \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \to \mathcal{P}, \ \Phi(f) = P_f.$$

Tvrdimo da je $\Phi$ injekcija. Neka su $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ takvi da je

$$\Phi(f) = \Phi(g).$$

Dakle

$$P_f = P_g.$$

Prema tome isti program računa i funkciju $f$ i funkciju $g$ pa je očito $f = g$. Dakle $\Phi$ je injekcija pa iz propozicije 3.2.5 slijedi da je $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ prebrojiv skup. □

**Propozicija 3.2.8.** *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ prebrojiv.*

*Dokaz.* Neka je $f \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$. Tada postoje izračunljive funkcije

$$u_f, v_f, w_f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

takve da je

$$v_f(x) \neq 0 \ i \ f(x) = (-1)^{w_f(x)} \cdot \frac{u_f(x)}{v_f(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Definirajmo

$$\Phi\colon \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q}) \to (\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})) \times \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}),\ \Phi(f) = ((u_f, v_f), w_f)$$

za svaki $f \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$. Pretpostavimo da su $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ takvi da je

$$\Phi(f) = \Phi(g).$$

Tada je

$$u_f = u_g,\ v_f = v_g \text{ i } w_f = w_g.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = (-1)^{w_f(x)} \cdot \frac{u_f(x)}{v_f(x)} = (-1)^{w_g(x)} \cdot \frac{u_g(x)}{v_g(x)} = g(x),$$

dakle

$$f(x) = g(x).$$

Prema tome $f = g$ pa zaključujemo da $\Phi$ injekcija. Iz propozicije 3.2.6 i propozicije 3.2.7 slijedi da je $(\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N}) \times \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})) \times \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ prebrojiv skup. Iz činjenice da je $\Phi$ injekcija i propozicije 3.2.5 slijedi da je $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{Q})$ prebrojiv skup. □

**Definicija 3.2.9.** *Ako je $S$ skup onda svaku funkciju s $\mathbb{N}$ u $S$ nazivamo* ***niz*** *u $S$. Ako je $x$ niz u $S$ onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo $x_n$. Niz $x$ označavamo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili $(x_n)$.*

**Definicija 3.2.10.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva (tj. niz u $\mathbb{R}$) te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz $(x_n)$* ***teži ili konvergira*** *prema $a$ i pišemo $x_n \to a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. U tom slučaju za $a$ kažemo da je limes niza $(x_n)$.*

**Propozicija 3.2.11.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Očito je $\varepsilon > 0$. Iz $x_n \to a$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Iz $x_n \to b$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq m_0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ (na primjer $n = \max\{n_0, m_0\}$). Tada je

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|a-b|}{2} = |a - b|,$$

dakle

$$|a - b| < |a - b|.$$

Kontradikcija. Prema tome $a = b$. □

**Lema 3.2.12.** *Neka je $(x_n)$ niz relnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$|x_n - a| < 2^{-n} \tag{3.6}$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to a$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Kao u dokazu teorema 2.3.14 dobivamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2^{-n_0} < \varepsilon.$$

Neka je $n \geq n_0$. Tada je

$$2^{-n} \leq 2^{-n_0}$$

pa je

$$2^{-n} < \varepsilon.$$

Iz (3.6) slijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Dakle,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $x_n \to a$. □

**Propozicija 3.2.13.** *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ prebrojiv.*

*Dokaz.* Neka je $f \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$. Tada postoji izračunljiva funkcija $F_f \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|f(x) - F_f(x, n)| < 2^{-n} \tag{3.7}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$\Phi \colon \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R}) \to \mathcal{I}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{Q}),\ \Phi(f) = F_f.$$

Neka je $f \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ te neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Iz (3.7) i leme 3.2.12 slijedi da niz $(F_f(x, n))_{n \in \mathbb{N}}$ teži u $f(x)$. Koristeći ovu činjenicu dokažimo da je $\Phi$ injekcija.
Neka su $f, g \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ takvi da je

$$\Phi(f) = \Phi(g).$$

Dakle

$$F_f = F_g.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$(F_f(x, n))_{n \in \mathbb{N}} \to f(x)$$

i

$$(F_g(x,n))_{n\in\mathbb{N}} \to g(x).$$

No

$$(F_f(x,n))_{n\in\mathbb{N}} = (F_g(x,n))_{n\in\mathbb{N}}$$

pa iz propozicije 3.2.11 slijedi da je

$$f(x) = g(x).$$

Prema tome $f = g$. Time smo dokazali da je $\Phi$ injekcija. Iz propozicije 3.2.8 i propozicije 3.2.5 slijedi da je skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}^k, \mathbb{R})$ prebrojiv. □

**Korolar 3.2.14.** *Skup svih izračunljivih brojeva je prebrojiv.*

*Dokaz.* Označimo skup svih izračunljivih brojeva sa $S$. Za $\alpha \in S$ neka je $f_\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija s vrijednošću $\alpha$, tj.

$$f_\alpha(x) = \alpha$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.3.15 za svaki $\alpha \in S$ vrijedi $f_\alpha \in \mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Definirajmo

$$\psi \colon S \to \mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \ \psi(\alpha) = f_\alpha$$

za svaki $\alpha \in S$. Pokažimo da je $\psi$ injekcija.
Uzmimo $\alpha_1, \alpha_2 \in S$ takve da je $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ očito je

$$f_{\alpha_1}(x) \neq f_{\alpha_2}(x).$$

Prema tome

$$f_{\alpha_1} \neq f_{\alpha_2}$$

odnosno

$$\psi(\alpha_1) \neq \psi(\alpha_2).$$

Dakle $\psi$ je injekcija. Prema propoziciji 3.2.13 skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ je prebrojiv pa iz propozicije 3.2.5 slijedi da je $S$ prebrojiv skup. □

**Definicija 3.2.15.** *Ako su $S$ i $T$ skupovi takvi da postoji bijekcija $S \to T$, onda kažemo da su $S$ i $T$* ***ekvipotentni skupovi*** *i pišemo $S \cong T$.*

Uočimo sljedeće:
Ako su $S$ i $T$ skupovi takvi da je $S \cong T$, onda je $T \cong S$.
Nadalje, ako je $S \cong T$ i $S$ prebrojiv skup onda je $T$ prebrojiv skup.

**Propozicija 3.2.16.** *Neka su $S$ i $T$ skupovi te neka je $f\colon S \to T$ injekcija. Pretpostavimo da je $S$ neprebrojiv skup. Tada je i $T$ neprebrojiv skup.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $T$ prebrojiv skup. Imamo $f(S) \subseteq T$, pa je $f(S)$ prebrojiv skup. Očito je $S \cong f(S)$ (funkcija $g\colon S \to f(S)$, $g(x) = f(x)$ je očito bijekcija) pa slijedi da je $S$ prebrojiv skup što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije. Dakle $T$ je neprebrojiv skup. □

**Primjer 3.2.17.** *Neka je $S$ skup svih funkcija s $\mathbb{N}$ u {0,1} te neka je $T$ skup svih funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$. Za $f \in S$ neka je*

$$\bar{f}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

*funkcija definirana*

$$\bar{f}(x) = f(x)$$

*za svaki $x \in \mathbb{N}$. Očito je*

$$\bar{f_1} \neq \bar{f_2}$$

*za $f_1, f_2 \in S$ takve da je $f_1 \neq f_2$. Stoga je funkcija $S \to T$, $f \to \bar{f}$ injekcija pa iz činjenice da je skup $S$ neprebrojiv (prema primjeru 3.1.12) i propozicije 3.2.16 slijedi da je $T$ neprebrojiv.*
*S druge strane skup $\mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ je prebrojiv prema propoziciji 3.2.7. Stoga je*

$$T \neq \mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$$

*pa zbog*

$$\mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \subseteq T$$

*zaključujemo da postoji $f \in T$ takav da $f \notin \mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Dakle, postoji funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ koja nije izračunljiva.*

## 3.3 Neizračunljivi brojevi

**Definicija 3.3.1.** *Za niz relanih brojeva $(x_n)$ kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

**Definicija 3.3.2.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$. Uređen par $((x_n), (s_n))$ označavamo sa $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ i nazivamo* ***red****.*
*Ako je $n \in \mathbb{N}$, za $s_n$ kažemo da je* ***n-ta parcijalna suma reda*** *$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*

**Definicija 3.3.3.** *Kažemo da je* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ***konvergentan red*** *ako je* $(s_n)$ *konvergentan niz. U tom slučaju limes niza* $(s_n)$ *nazivamo* ***suma reda*** $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *i označavamo sa* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

**Definicija 3.3.4.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $c \in \mathbb{R}$. *Za* $c$ *kažemo da je* ***gornja međa skupa*** $S$ *ako za svaki* $s \in S$ *vrijedi* $c \geq s$.

**Definicija 3.3.5.** *Za* $S \subseteq \mathbb{R}$ *kažemo da je* ***odozgo omeđen*** *ako postoji barem jedna gornja međa skupa* $S$.

**Definicija 3.3.6.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $M \in S$ *takav da je* $M$ *gornja međa od* $S$. *Tada za* $M$ *kažemo da je* ***maksimum skupa*** $S$.

**Definicija 3.3.7.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $u \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je* $u$ ***supremum skupa*** $S$ *ako je* $u$ *najmanja gornja međa od* $S$*, tj. ako vrijedi:*
*(1)* $u$ *je gornja međa skupa* $S$
*(2) za svaku gornju među* $v$ *skupa* $S$ *vrijedi* $u \leq v$.

Ako su $u_1$ i $u_2$ supremumi skupa $S$ onda je $u_1 = u_2$.
Naime, $u_1$ i $u_2$ su gornje međe od $S$ pa iz definicije 3.3.7.(2) slijedi $u_1 \leq u_2$ i $u_2 \leq u_1$ pa je $u_1 = u_2$. Supremum skupa $S$, ako postoji označavamo $\sup S$.

Pretpostavimo da je $M$ maksimum skupa $S$. Očito je tada $M$ gornja međa od $S$, a za svaku gornju među $v$ od $S$ vrijedi $M \leq v$ (jer je $M \in S$). Prema tome $M$ je supremum od $S$.

Ako su $M_1$ i $M_2$ maksimumi skupa $S$, onda je $M_1 = M_2$. Naime to slijedi iz činjenice da su $M_1$ i $M_2$ ujedno i supremumi skupa $S$.

**Primjer 3.3.8.** *Neka je* $a \in \mathbb{R}$ *te neka je* $S = \langle -\infty, a\rangle$. *Tvrdimo da je* $a$ *supremum skupa* $S$. *Očito je* $a$ *gornja međa od* $S$. *Neka je* $v$ *gornja međa od* $S$. *Tvrdimo da je* $a \leq v$.
*Pretpostavimo suprotno. Tada je* $v < a$. *Odaberimo* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $v < x < a$. *Slijedi* $x \in S$ *pa je* $x \leq v$ *jer je* $v$ *gornja međa od* $S$. *No to je u kontradikciji s činjenicom da je* $v < x$. *Prema tome je* $a \leq v$. *Time smo dokazali da je* $a$ *supermum skupa* $S$.
*Skup* $S$ *nema maksimuma. Naime, kad bi* $M$ *bio maksimum od* $S$ *onda bi* $M$ *bio supremum od* $S$ *pa bi vrijedilo* $M = a$*, a to je nemoguće jer* $a \notin S$.

**AKSIOM POTPUNOSTI.** *Neka su* $S$ *i* $T$ *neprazni podskupovi od* $\mathbb{R}$ *takvi da za svaki* $x \in S$ *i svaki* $y \in T$ *vrijedi* $x \leq y$. *Tada postoji* $z \in \mathbb{R}$ *takav da za svaki* $x \in S$ *i svaki* $y \in T$ *vrijedi* $x \leq z \leq y$.

**Propozicija 3.3.9.** *Neka je* $S$ *neprazan odozgo omeđen podskup od* $\mathbb{R}$. *Tada postoji supremum skupa* $S$.

*Dokaz.* Definirajmo $T$ kao skup svih gornjih međa od $S$. Za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ očito vrijedi $x \leq y$. Vrijedi $T \neq \emptyset$ jer je $S$ odozgo omeđen. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq z \leq y$. Iz ovoga je jasno da je $z$ supremum skupa $S$. □

**Definicija 3.3.10.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)$ kažemo da je* ***rastući*** *ako je $x_n \leq x_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

**Propozicija 3.3.11.** *Neka je $(x_n)$ rastući niz realnih brojeva. Pretpostavimo da je $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

*Dokaz.* Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za svaki $m > n$ vrijedi $x_n \leq x_m$. Dokažimo to indukcijom.
Za $m = n + 1$ navedena nejednakost očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $m$ vrijedi

$$x_n \leq x_m.$$

Iz ovoga i

$$x_m \leq x_{m+1}$$

slijedi

$$x_n \leq x_{m+1}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < x_{n_0}$.
Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi $a - \varepsilon \geq x_{n_0}$. Slijedi da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Budući da je $a$ najmanja međa ovog skupa slijedi da je $a \leq a - \varepsilon$, odnosno $\varepsilon \leq 0$, što je u kontradikciji s tim da je $\varepsilon > 0$. Prema tome postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < x_{n_0}$.
Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_{n_0} \leq x_n$$

te također

$$x_n \leq a$$

(jer je $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) pa imamo

$$a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leq a + \varepsilon,$$

dakle

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Prema tome za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle\,.$$

Time smo dokazali $x_n \to a$. □

**Definicija 3.3.12.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Za $c$ kažemo da je* ***donja međa skupa*** *$S$ ako za svaki $s \in S$ vrijedi $c \leq s$.*

**Definicija 3.3.13.** *Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je textbfodozdo omeđen ako postoji barem jedna donja međa skupa $S$.*

**Definicija 3.3.14.** *Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* **omeđen** *ako je $S$ omeđen odozgo i odozdo.*

**Definicija 3.3.15.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)$ kažemo da je omeđen ako je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup.*

**Korolar 3.3.16.** *Svaki rastući omeđen niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)$ rastući omeđen niz u $\mathbb{R}$. Tada je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen, očito neprazan, pa prema propoziciji 3.3.9 postoji supremum $a$ skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Iz propozicije 3.3.11 slijedi da $x_n \to a$. Prema tome $(x_n)$ je konvergentan niz. □

**Lema 3.3.17.** *Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$.*

*Dokaz.* Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.
Imamo

$$(1+\varepsilon)^{n+1} = (1+\varepsilon)^n \cdot (1+\varepsilon) \geq (1+n\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon + n\varepsilon + n\varepsilon^2 =$$

$$= 1 + (n+1)\cdot\varepsilon + n\varepsilon^2 \geq 1 + (n+1)\cdot\varepsilon.$$

Dakle, $(1+\varepsilon)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\varepsilon$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

**Propozicija 3.3.18.** *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Tada skup $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen.*

*Dokaz.* Definirajmo $\varepsilon := a - 1$. Očito vrijedi $\varepsilon > 0$ i $a = 1 + \varepsilon$.
Pretpostavimo da je skup $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen. Tada postoji gornja međa $M$ tog skupa.
Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$k > \frac{M}{\varepsilon}.$$

Slijedi

$$k\varepsilon > M$$

pa koristeći lemu 3.3.17 dobivamo

$$a^k = (1+\varepsilon)^k \geq 1 + k\varepsilon > 1 + M > M.$$

Dakle $a^k > M$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $M$ gornja međa skupa $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Prema tome skup $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen. □

**Korolar 3.3.19.** *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nuli.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$.
Prema prethodnoj propoziciji skup $\{\left(\frac{1}{q}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen pa $\frac{1}{\varepsilon}$ nije gornja međa tog skupa, što povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Slijedi

$$q^{n_0} < \varepsilon$$

Uzmimo $n \geq n_0$. Budući da je $q < 1$ vrijedi

$$q^n \leq q^{n_0}$$

pa je

$$q^n < \varepsilon,$$

tj.

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

Dakle za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

Prema tome niz $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nuli. □

**Propozicija 3.3.20.** *Neka su $(x_n)$ i $(y_n)$ nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$, $y_n \to b$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*
*(1) $-x_n \to -a$*
*(2) $x_n + y_n \to a + b$*
*(3) $c \cdot x_n \to c \cdot a$*

*Dokaz.* (1) Neka je $\varepsilon > 0$.
Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$.
Stoga je

$$|(-x_n) - (-a)| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Time smo dokazali tvrdnju 1.

(2) Neka je $\varepsilon > 0$.
Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $n \geq n_0$.
Budući da $y_n \to a$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $n \geq m_0$.
Neka je $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$.
Uzmimo $n \geq k_0$. Tada je

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq k_0$. Time smo dokazali tvrdnju 2.

(3) Neka je $\varepsilon > 0$.
Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c| + 1}$$

za svaki $n \geq n_0$.
Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|c \cdot x_n - c \cdot a| = |c| \cdot |x_n - a| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c| + 1} = \frac{|c|}{|c| + 1} \cdot \varepsilon < \varepsilon,$$

tj.

$$|c \cdot x_n - c \cdot a| < \varepsilon.$$

Time smo dokazali tvrdnju 3. □

**Propozicija 3.3.21.** *Neka je $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Tada red $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^{n+1}$ konvergira i vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} = \frac{q}{1 - q}.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^{n+1}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_n = q + q^2 + ... + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} - 1 = \frac{q}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \cdot q^{n+2} \tag{3.8}$$

Koristeći korolar 3.3.19 lako zaključujemo da niz $(q^{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira prema nuli.
Neka su $(x_n)$ i $(y_n)$ nizovi definirani s

$$x_n = \frac{q}{1 - q}, \ y_n = -\frac{1}{1 - q} \cdot q^{n+2}.$$

Iz propozicije 3.3.20.(3) slijedi $y_n \to 0$. S druge strane očito vrijedi $x_n \to \frac{q}{1-q}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_n = x_n + y_n.$$

Iz propozcije 3.3.20.(2) slijedi da $s_n \to \frac{q}{1-q}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Napomena 3.3.22.** *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$ te neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je prema* (3.8)

$$\sum_{i=0}^{n} q^{i+1} < \frac{q}{1-q}.$$

**Propozicija 3.3.23.** *Neka je $(a_n)$ niz u $\{0, ..., 9\}$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^{n+1}}$ konvergentan i vrijedi $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} \leq 1$.*

*Dokaz.* Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $s_n$ $n$-ta parcijalna suma ovog reda.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{10^{i+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+2}} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} = s_n.$$

Dakle,

$$s_n \leq s_{n+1}.$$

Prema tome niz $(s_n)$ je rastući.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći napomenu 3.3.22 dobivamo

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{9}{10^{i+1}} = 9 \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1} < 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Dakle $s_n < 1$. Prema tome 1 je gornja međa skupa $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Neka je

$$a = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tada je $a \leq 1$, a prema propoziciji 3.3.11 vrijedi $s_n \to a$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je očito

$$0 \leq s_n \leq a$$

pa slijedi

$$0 \leq a.$$

Zaključak: Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^{n+1}}$ je konvergentan i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} = a$. Prema tome

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} \leq 1.$$

□

**Napomena 3.3.24.** *Neka je $(a_n)$ niz u $\{0, 1, ..., 9\}$. Pretpostavimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $a_N \neq 9$. Tada je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} < 1$.*
*Naime, uz oznake iz propozicije 3.3.23, za svaki $n \geq N$ vrijedi*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} = \sum_{i=0,\ i\neq N}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_N}{10^{N+1}} \leq \sum_{i=0,\ i\neq N}^{n} \frac{9}{10^{i+1}} + \frac{8}{10^{N+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{9}{10^{i+1}} - \frac{1}{10^{N+1}} < 1 - \frac{1}{10^{N+1}}.$$

*Dakle,*

$$s_n < 1 - \frac{1}{10^{N+1}}$$

*za svaki $n \geq N$. Iz činjenice da je $(s_n)$ rastući niz slijedi*

$$s_n < 1 - \frac{1}{10^{N+1}}$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je*

$$a \leq 1 - \frac{1}{10^{N+1}} < 1$$

*pa je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} < 1.$$

**Definicija 3.3.25.** *Neka je $(a_n)$ niz u $\{0, 1, ..., 9\}$ te neka je $b \in \mathbb{N}$.*
*Neka je*

$$x = b + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}}.$$

*(Uočimo da je prema propoziciji 3.3.23 definicija broja x smislena.)*
*Broj $x$ označavamo $b.a_0a_1a_2...$*

**Definicija 3.3.26.** *Za $x \in \mathbb{R}$ sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak od $x$. Za $\lfloor x \rfloor$ kažemo da je* ***najveće cijelo*** *od $x$.*

**Lema 3.3.27.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \to a$. Neka je $N \in \mathbb{N}$. Definirajmo niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = x_{n+N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $y_n \to a$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $n + N \geq n_0$ pa je

$$|x_{n+N} - a| < \varepsilon,$$

tj.

$$|y_n - a| < \varepsilon.$$

Prema tome $y_n \to a$. □

**Propozicija 3.3.28.** *Neka je $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ konvergentan. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} c \cdot x_i$ konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c \cdot x_i = c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ te neka je $(t_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} c \cdot x_i$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} c \cdot x_i = c \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i = c \cdot s_n.$$

Dakle

$$t_n = c \cdot s_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja propozicije sada slijedi iz propozicije 3.3.20.(3). □

**Propozicija 3.3.29.** *Neka je $(x_i)$ niz realnih brojeva, neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je $(y_i)$ niz realnih brojeva definiran s $y_i = x_{i+N+1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ konvergentan. Tada je konvergentan i red $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ te vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{N} x_i + \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ te neka je $(t_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} y_i = \sum_{i=0}^{n} x_{i+N+1} = x_{N+1} + x_{N+2} + ... + x_{n+N+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+N+1} x_i = \sum_{i=0}^{n+N+1} x_i - \sum_{i=0}^{N} x_i = s_{n+N+1} - s_N.$$

Dakle

$$t_n = s_{n+N+1} - s_N \tag{3.9}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Niz $(s_n)$ je konvergentan i teži prema $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$. Iz leme 3.3.27 slijedi da niz $(s_{n+N+1})$ teži prema $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$. Iz (3.9) i propozicije 3.3.20.(2) slijedi da niz $(t_n)$ teži prema $\sum_{i=0}^{\infty} x_i - s_N$. Prema tome red $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ je kovergentan i

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i - s_N.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Propozicija 3.3.30.** *Neka je $(a_n)$ niz u $\{0, ..., 9\}$ takav da ne postoji $p \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $a_n = 9$ za svaki $n \geq p$. Neka je $x = 0.a_0a_1a_2....$ Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$o\left(\left\lfloor 10^{N+1} \cdot x \right\rfloor, 10\right) = a_N,$$

*pri čemu je o funkcija iz primjera 1.5.10.*

*Dokaz.* Imamo

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^{i+1}}.$$

pa iz propozicije 3.3.28 slijedi

$$10^{N+1} \cdot x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{10^{N+1}}{10^{i+1}} \cdot a_i = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{N-i} \cdot a_i.$$

Definirajmo niz $(y_i)$ na sljedeći način:

$$y_i = 10^{N-(i+N+1)} \cdot a_{i+N+1}.$$

Iz propozicije 3.3.29 slijedi da je red $\sum_{i \in \mathbb{N}} y_i$ konvergentan te da je

$$\sum_{i=0}^{\infty} 10^{N-i} \cdot a_i = \sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i + \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

Dakle

$$10^{N+1} \cdot x = \sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i + \sum_{i=0}^{\infty} y_i. \tag{3.10}$$

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$y_i = \frac{a_{i+N+1}}{10^{i+1}}.$$

Za $i \in \mathbb{N}$ označimo

$$b_i = a_{i+N+1}.$$

Tada je

$$y_i = \frac{b_i}{10^{i+1}}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Uočimo da (prema pretpostavci propozicije) postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $b_i \neq 9$. Iz propozicije 3.3.23 i napomene 3.3.24 slijedi da je

$$0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_i < 1.$$

Uočimo da je $\sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i \in \mathbb{N}$. Sada iz (3.10) slijedi da je

$$\left\lfloor 10^{N+1} \cdot x \right\rfloor = \sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i. \tag{3.11}$$

Imamo

$$\sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i = \sum_{i=0}^{N-1} 10^{N-i} \cdot a_i + a_N = 10 \cdot \left( \sum_{i=0}^{N-1} 10^{N-(i+1)} \cdot a_i \right) + a_N.$$

Vrijedi $\sum_{i=0}^{N-1} 10^{N-(i+i)} \cdot a_i \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$o\left(\sum_{i=0}^{N} 10^{N-i} \cdot a_i, 10\right) = a_N,$$

tj. prema (3.11)

$$o\left(\left\lfloor 10^{N+1} \cdot x\right\rfloor, 10\right) = a_N.$$

□

**Teorem 3.3.31.** *Neka je $x \in [0, 1\rangle$. Tada postoji jedinstven niz $(a_n)$ u $\{0, ..., 9\}$ takav da je $x = 0.a_0a_1a_2...$ te takav da ne postoji $p \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $a_n = 9$ za svaki $n \geq p$.*

*Dokaz.* Uočimo prije svega sljedeće:
ako je $y \in [0, 10\rangle$, onda postoje $a \in \{0, ..., 9\}$ i $a^{'} \in [0, 1\rangle$ takvi da je

$$y = a + a^{'}$$

Definirajmo sada niz $(a_n)$ u $\{0, ..., 9\}$ i niz $(a_n^{'})$ u $[0, 1\rangle$ induktivno na sljedeći način.
Iz $x \in [0, 1\rangle$ slijedi $10 \cdot x \in [0, 10\rangle$ pa postoje $a_0 \in \{0, ..., 9\}$ i $a_0^{'} \in [0, 1\rangle$ takvi da je

$$10 \cdot x = a_0 + a_0^{'}. \tag{3.12}$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ tada smo konstruirali $a_n \in \{0, ..., 9\}$ i $a_n^{'}$ $[0, 1\rangle$. Slijedi $10 \cdot a_n^{'} \in [0, 10\rangle$ pa postoje $a_{n+1} \in \{0, ..., 9\}$ i $a_{n+1}^{'} \in [0, 1\rangle$ takvi da je

$$10 \cdot a_n^{'} = a_{n+1} + a_{n+1}^{'}. \tag{3.13}$$

Tvrdimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_n^{'}}{10^{n+1}}. \tag{3.14}$$

Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom. Iz (3.12) slijedi

$$x = \frac{a_0}{10} + \frac{a_0^{'}}{10},$$

prema tome (3.14) vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da (3.14) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz (3.13) slijedi

$$a_n^{'} = \frac{a_{n+1}}{10} + \frac{a_{n+1}^{'}}{10}$$

pa je

$$x = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_n'}{10^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{\frac{a_{n+1}}{10} + \frac{a_{n+1}'}{10}}{10^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+2}} + \frac{a_{n+1}'}{10^{n+2}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a_{n+1}'}{10^{n+2}}.$$

Prema tome (3.14) vrijedi za $n + 1$. Time smo dokazali da (3.14) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Iz (3.14) slijedi

$$\left| x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} \right| < \frac{a_n'}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n+1}}, \tag{3.15}$$

tj.

$$\left| x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} \right| < \left( \frac{1}{10} \right)^n \tag{3.16}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Dokažimo sada koristeći (3.16) da je

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} \tag{3.17}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Niz $\left( \left( \frac{1}{10} \right)^n \right)$ teži nuli pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| \left( \frac{1}{10} \right)^n - 0 \right| < \varepsilon,$$

tj.

$$\left( \frac{1}{10} \right)^n < \varepsilon.$$

Iz (3.16) slijedi da je

$$\left| x - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^{i+1}} \right| < \varepsilon$$

za svaki $n \geq n_0$. Time smo dokazali da niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{10^{n+1}}$ teži prema $x$, dakle (3.17) vrijedi. Stoga je

$$x = 0.a_0 a_1 a_2 ...$$

Pretpostavimo da postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n = 9$ za svaki $n \geq p$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Iz (3.14) slijedi

$$x = \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \sum_{i=p+1}^{p+n+1} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}} = \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \sum_{i=p+1}^{p+n+1} \frac{9}{10^{i+1}} + \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}}$$

pa je

$$x = \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}} + \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} + \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}},$$

tj.

$$x - \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}} = \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} + \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}}. \tag{3.18}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}} - 0 \right| = \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}} < \left( \frac{1}{10} \right)^n.$$

Iz ovog slijedi da niz $\left( \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ teži u nulu.
Niz $\left( \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ teži u $\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$ (prema propoziciji 3.3.21) pa iz propozicije 3.3.20.(3) slijedi da niz $\left( \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ teži u $\frac{1}{10^{p+1}}$. Iz propozicije 3.3.20.(2) slijedi da niz

$$\left( \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^{i+1}} + \frac{a'_{p+n+1}}{10^{p+n+2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

teži u $\frac{1}{10^{p+1}}$. S druge strane zadnji niz je prema (3.18) konstantan i teži u $x - \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}}$.
Iz propozicije 3.2.11 slijedi da je

$$x - \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{10^{i+1}} = \frac{1}{10^{p+1}},$$

što je u kontradikciji sa (3.15) (kada je $n = p$).
Jedinstvenost niza $(a_n)$ direktno slijedi iz propozicije 3.3.30.

□

**Korolar 3.3.32.** *Neka je $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Tada postoje $b \in \mathbb{N}$ i niz $(a_n)$ u $\{0, ..., 9\}$ takvi da je $x = b.a_0a_1a_2...$*

*Dokaz.* Očito je $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1\rangle$ pa prema teoremu 3.3.31 postoji niz $a_n$ u $\{0, ..., 9\}$ takav da je $x - \lfloor x \rfloor = 0.a_0a_1a_2....$
Dakle

$$x - \lfloor x \rfloor = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}}$$

pa je

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}}.$$

Očito je $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, pa je

$$x = \lfloor x \rfloor .a_0a_1a_2...$$

□

**Teorem 3.3.33.** *Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno tj. da je $\mathbb{R}$ prebrojiv. Stoga je $[0, 1\rangle$, kao podskup od $\mathbb{R}$, također prebrojiv. Slijedi da postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \to [0, 1\rangle$.
Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo $f(k) \in [0, 1\rangle$ pa postoji niz $(a^k_n)$ u $\{0, ..., 9\}$ takav da je

$$f(k) = 0.a^k_0a^k_1a^k_2...$$

i pri tome ne postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $a^k_n = 9$ za svaki $n \geq p$.
Definirajmo niz $(b_n)$ u $\{0, ..., 9\}$ na sljedeći način:

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \; a^n_n \neq 0 \\ 1, & \text{ako je } \; a^n_n = 0 \end{cases}$$

Očito za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$b_n \neq a^n_n \tag{3.19}$$

i $b_n \neq 9$. Neka je

$$x = 0.b_0b_1b_2...$$

Prema propoziciji 3.3.23 i napomeni 3.3.24 vrijedi $x \in [0, 1\rangle$.
Budući da je $f$ surjekcija postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(k) = x.$$

Slijedi

$$x = 0.a^k_0a^k_1a^k_2...$$

Iz teorema 3.3.31 slijedi da je

$$a_n^k = b_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno za $n = k$ dobivamo

$$a_k^k = b_k$$

što je u kontradikciji s (3.19).
Zaključak: $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

□

**Korolar 3.3.34.** *Postoji realan broj koji nije izračunljiv.*

*Dokaz.* Neka je $S$ skup svih izračunljivih brojeva. Prema korolaru 3.2.14 $S$ je prebrojiv skup.
S druge strane $\mathbb{R}$ je neprebrojiv skup prema teoremu 3.3.33. Stoga je $S \neq \mathbb{R}$. No očito je $S \subseteq \mathbb{R}$. Prema tome $\mathbb{R} \nsubseteq S$. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

# Bibliografija

[1] Z. Iljazović: Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[2] S. Mardešić, Matematička analiza 1, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[3] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[4] B. Pour-El, I. Richards, Computability in Analiysis and Physics, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[5] M. Vuković, Izračunljivost, skripta, 2009.

# Sažetak

Ovaj diplomski rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju se, koristeći RAM-stroj definira pojam izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te se proučavaju neka svojstva tih funkcija. U drugom poglavlju definiramo izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Proučavamo razna svojstva tih funkcija te proučavamo izračunljive brojeve. U trećem poglavlju se bavimo konačnošću i prebrojivošću skupova, dokazujemo da racionalnih i realnih izračunljivih funkcija ima prebrojivo mnogo te da izračunljivih brojeva ima prebrojivo mnogo. Na kraju pokazujemo da postoje neizračunljivi realni brojevi.

# Summary

This diploma thesis is divided into three chapters. In the first chapter, using the notion of a random-access machine, we define the notion of a computable function $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ and we study some properties of these functions. In the second chapter we define computable functions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. We examine various properties of these functions and we examine computable numbers. In the third chapter we deal with finiteness and countability of sets, we prove that there are only countably many rational and real computable functions and we prove that the set of all computable numbers is countable. At the end we show that there exist incomputable real numbers.

# Životopis

Rođena sam 19. studenog 1990. godine u Požegi. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1997. godine u Osnovnoj školi Zdenka Turkovića u Kutjevu. Godine 2005. upisujem Opću gimnaziju u Požegi, koju završavam 2009. godine. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu. Godine 2014., nakon završenog Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematika; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.