Lagrangeova relaksacija u mrežnoj optimizaciji

Čaldarević, Lana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lana Čaldarević

LAGRANGEOVA RELAKSACIJA U MREŽNOJ OPTIMIZACIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, Srpanj, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

Mrežna optimizacija posebna je vrsta modela linearnog programiranja. U mnogim aplikacijama i primjenama postoje mnogi primjeri korištenja mreže optimizacije. Neki od tih primjera su: problem minimalnog puta, problem maksimalnog toka, problem minimalnog troška, itd. Na tim mrežnim modelima baziraju se mnogi drugi, kompliciraniji modeli koji u sebi sadrže skrivenu mrežnu strukturu tih modela.

U ovom radu se bavimo rješavanjem takvih problema. U takvim slučajevima bilo bi korisno kada bi mogli riješiti jednostavniji problem kako bi dobili aproksimacije ili ocjene za originalni problem. Pokušavamo ih riješiti koristeći metodu dekompozicije koja nam omogućuje da iskoristimo taj osnovni problem mrežnog toka na kojem su bazirani kompliciraniji modeli i da iskoristimo poznate algoritme za njihovo rješavanje. Metoda dekompozicije nam dopušta da uvedemo širi skup optimizacijskih mrežnih problema. Također u ovom radu definiramo pojam Lagrangeove relaksacije koji koristimo pri rješavanju takvih problema. Lagrangeova relaksacija jedna je od rijetkih metoda u optimizaciji koje možemo iskoristiti pri rješavanju linearnih i cjelobrojnih zadaća programiranja, kombinatorne optimizacije i zadaće nelinearnog programiranja.

Motivacija za izradu ovog rada je bio interes prema problemu rasporeda u zračnom prijevozu. Neki od problema s kojim se susreće zrakoplovna industrija u današnje vrijeme su problemi raspoređivanja zrakoplova, problem raspoređivanja zrakoplovne posade, problemi usmjeravanja zrakoplova i mnogi drugi problemi koji posjeduju značajke problema rasporeda. Problemi rasporeda u zrakoplovnoj industriji puno su kompliciraniji nego općeniti problemi rasporeda. Zrakoplovna kompanija se mora suočiti sa mnogim složenim problemima koji su međusobno povezani. Potrebno je dodijeliti različite zrakoplove velikom broju letova uz različite uvjete povezivanja i kompatibilnosti, nakon toga potrebno je naći optimalnu rutu za pojedini zrakoplov tako da su zadovoljeni prethodni uvjeti i istodobno mora dodijeliti zrakoplovnu posadu različitim letovima tako da su zadovoljeni ne samo uvjeti povezanosti i kompatibilnosti, već i zahtjevi zrakoplovne posade i ostali regulatorni uvjeti.

Postoji par glavnih problema rasporeda sa kojima se susreće zrakoplovna kompanija na dnevnoj bazi. Kao što smo već spomenuli, jedan od tih problema je problem raspoređivanja zrakoplova koji se bavi dodijelom pojedinih zrakoplova na unaprijed zadanu mrežu letova koje nudi zrakoplovna kompanija. S obzirom da različiti rasporedi ostvaruju drugačiji profit ili generiraju drugačiji trošak, cilj je povećati ukupni profit ili minimizirati ukupan trošak uz zadane uvjete. Problem raspoređivanja zrakoplovne posade također je jedan od problema rasporeda s kojim se možemo susresti u zrakoplovnoj industriji. Cilj je rasporediti članove posade na odgovarajuće letove. Slično kao i kod problema raspoređivanja zrakoplova, cilj problema raspoređivanja zrakoplovne posade je minimizirati ukupnu cijenu rasporeda uz različite uvjete. Dodatni problem koji se može dogoditi u svakodnevnom poslovanju zrakoplovne kompanije su nepredviđene smetnje kao što su loše vrijeme, bolest članova posade ili mehanički problemi. Stoga je mogućnost odlučivanja u realnom vremenu neophodno za generiranje alternativnog rasporeda koji će se provesti ukoliko dođe do nekih prekida. Također, zrakoplovna kompanija mora uzeti u obzir da promjena rasporeda može biti vrlo skupa i zahtjevna.

Još neki od problema rasporeda koje možemo pronaći u zračnom prijevozu su problemi sekvencijalnog slijetanja zrakoplova, problem raspoređivanja radne snage za utovar i istovar zrakoplova, problem raspoređivanja zrakoplova kod odgode slijetanja zbog problema na zračnoj pisti,... Više informacija o problemima u zračnom prijevozu i općenito o problemu rasporeda čitatelj može naći u [3].

U Poglavlju 1 uvesti ćemo pojam Lagrangeove relaksacije te ćemo obraditi teoriju koja stoji iza nje. Također ćemo opisati subgradijentnu metodu koju koristimo pri rješavanju zadaće dobivene primjenom Lagrangeove relaksacije. U Poglavlju 2 spomenuti ćemo probleme u mrežnoj optimizaciji i riješiti ih primjenom teorije obrađene u Poglavlju 1. Posebno, riješit ćemo probleme vezane uz usmjeravanja vozila i raspoređivanje operatera u jednu i dvije smjene. Problemi rasporeda koji se javljaju u zračnom prometu možemo svesti na takve probleme i riješiti ih na isti način kao što ćemo to napraviti u Poglavlju 2.

Glavna referenca ovog rada je knjiga *Network flows: Theory, Algorithms and Applications* od autora *Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti* i *James B. Orlin*. Za opis subgradijentne metode i teorije koja stoji iza te metode koristila sam knjigu *Handbooks in Operations Research and Management Science: Optimization, Volume 1* od autora *M. J. Todd, G. L. Nemhauser* i *A. H. G. Rionnoy Kan*, a za informacije vezane uz problem rasporeda u zračnom prometu koristila sam članak *Scheduling Problems in the Airline Industry* autora *Gang Yu Xiangtong Qi* i *Jian Yang* iz knjige *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis*.

Poglavlje 1

Lagrangeova relaksacija

1.1 Uvod

Promotrimo sljedeći optimizacijski problem, gdje je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in S. \end{aligned}$$

Relaksacija tog problema ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \min\ & f_R(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in S_R, \end{aligned}$$

gdje je $f_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takva da je $f_R(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$, za bilo koji $\mathbf{x} \in S$ i $S \subseteq S_R$. Jasno je da je minimalna vrijednost f_R^* relaksiranog problema ocjena odozdo za optimalno rješenje polaznog problema.

Veliki broj optimizacijskih problema ima "skrivenu" osnovnu mrežnu strukturu i ideja Lagrangeove relaksacije je iskoristiti tu strukturu kako bi lakše riješili originalni problem. Lagrangeova relaksacija je metoda dekompozicije: skup uvjeta S inicijalnog problema razdvajamo u dva skupa $S = S_1 \cap S_2$, gdje je S_1 skup "jednostavnih" uvjeta, tj. uvjeta za koje je originalnu zadaću lako rješiti, a S_2 skup "kompliciranih" uvjeta, tj. uvjeta zbog kojih je originalnu zadaću teško rješiti. S_2 izbacimo iz skupa uvjeta i prebacimo u funkciju cilja, tj. $S_R = S_1$, a f_R sada ovisi o f i S_2.

Kako je S_1 skup "jednostavnih" uvjeta moguće je riješiti relaksacijski problem. Štoviše, u nekim slučajevima kod Lagrangeove relaksacije optimalno rješenje relaksacijskog problema daje optimalno rješenje originalnog problema, što ćemo vidjeti kasnije u ovom poglavlju.

U idućoj točki ilustrirati ćemo metodu na jednom jednostavnom primjeru.

Minimalni put s ograničenjima

Promatramo usmjereni graf (V, E), gdje je V skup vrhova, a E skup bridova grafa. Sa s označavamo izvor grafa, a s t ponor grafa. Svakom bridu $(i, j) \in E$ pridružimo dvije vrijednosti: trošak c_{ij} i vrijeme t_{ij} potrebno za prolazak po tom bridu. Kod problema minimalnog puta s ograničenjima cilj je je pronaći put od izvora s do ponora t sa minimalnim troškom, ali tako da zadovoljava dodatno vremensko ograničenje, tj. da put mora biti prijeđen u najviše T jedinica vremena.

Minimalni put s ograničenjima možemo formulirati kao zadaću cjelobrojnog linearnog programiranja na sljedeći način:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \in V \setminus \{s, t\} \\ -1, & i = t \end{cases} \tag{1.1a}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij} \leq T, \tag{1.1b}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E \\ 1, & (i, j) \in E. \end{cases} \tag{1.1c}$$

Ovaj problem nije klasični problem minimalnog puta, već problem minimalnog puta s dodatnim vremenskim uvjetom. Umjesto da rješavamo taj problem direktno možemo pristupiti problemu na način da ga svedemo na klasičan problem minimalnog puta uz modificiranu funkciju cilja. To je točno ideja Lagrangeove relaksacije zadaće (1.1). Općenito, ideja Lagrangeovog pristupa je da relaksiramo dodatni uvjet koji komplicira rješavanje problema i dodamo ga funkciji cilja uz pridružen vektor $\boldsymbol{\mu}$. U ovom slučaju, skupu S_1 pripadaju uvjeti (1.1a) i (1.1c), dok skupu S_2 pripada uvjet (1.1b).

Neka je $\boldsymbol{\mu} > 0$, promatrajmo sljedeći problem cjelobrojnog linearnog programiranja:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} - \boldsymbol{\mu}(T - \sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij})$$

$$\sum_{\{j:(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \in V \setminus \{s,t\} \\ -1, & i = t \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases}$$

Problem (1.2) je ekvivalentan pronalasku minimalnog puta od s do t u grafu sa modificiranom funkcijom troška:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} (c_{ij} + \mu t_{ij}) x_{ij}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = s \\ 0, & i \in V \setminus \{s,t\} \\ -1, & i = t \end{cases} \tag{1.3}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases}$$

Znači, za fiksan $\boldsymbol{\mu}$, problem može biti lako riješen.

Ako je $\boldsymbol{\mu} = 0$, onda rješavamo klasičan problem minimalnog puta bez vremenskog ograničenja. Za velike vrijednosti komponenti od $\boldsymbol{\mu}$, vrijednost od $\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}$ postaje velika u odnosu na vrijednost troška $\mathbf{c}$ te bi u tom slučaju, pošto je vrijednost $\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}$ dominantija od vrijednosti troška $\mathbf{c}$, tražili najbrži put od s do t. Znači, tražimo vrijednost od $\boldsymbol{\mu}$ negdje između te dvije vrijednosti.

Neka je $z(x) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ i $z_\mu(x) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{t}^T\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}T$. Označimo i pripadne optimalne vrijednosti s z^* i z^*_μ, respektivno, gdje je z^* optimalna vrijednost rješenja zadaće (1.1) s pripadnom varijablom odluke x^*, a z^*_μ optimalna vrijednost rješenja zadaće (1.2) s pripadnom varijablom odluke x^*_μ. Zanima nas kako možemo dobiti optimalnu vrijednost z^* zadaće (1.1)? Primjetimo prvo da za bilo koji dopustivi put P zadaće (1.1), s pripadnom varijablom odluke x^*, vrijedi $\sum_{(i,j)\in P} t_{ij}x_{ij} \le T$, iz čega možemo zaključiti $z_\mu(x) \le z(x)$. Stoga, vrijedi sljedeće:

$$z^*_\mu = z_\mu(x^*_\mu) \le z_\mu(x^*) \le z(x^*) = z^*,$$

za bilo koji $\boldsymbol{\mu} \ge 0$. Znači, optimalna vrijednost zadaće (1.2) daje ocjenu odozdo za optimalnu vrijednost zadaće (1.1), tj. $z^*_\mu \le z^*$.

Lagrangeova relaksacija nam omogućuje dekompoziciju problema kako bi iskoristili njihovu posebnu strukturu. Ovaj pristup rješenju je savršeno prilagođen za rješavanje problema čiji modeli potiču od problema mrežne optimizacije.

Lagrangeova relaksacija ima mnoge prednosti:

1. Budući da je često moguće napraviti dekompoziciju problema na nekoliko načina i primijeniti Lagrangeovu relaksaciju na svaku tu dekompoziciju, Lagrangeova relaksacija je vrlo fleksibilan pristup rješenju.

2. Kod dekompozicije problema, Lagrangeova relaksacija rješava potprobleme kao samostalne probleme i zbog toga možemo iskoristimo bilo koji poznati algoritam za njihovo rješavanje.

3. Kao što smo već spomenuli, Lagrangeova relaksacija nam omogućuje da nađemo ocjenu za optimalnu vrijednost funkcije cilja i ponekad nam omogućuje da dobijemo dobro, ali ne nužno optimalno rješenje s pridruženom ocjenom koja nam kaže koliko je rješenje daleko od optimalnosti. Također, u mnogim problemima cjelobrojnog programiranja, Lagrangeova relaksacija daje bolje ocjene nego relaksirana zadaća cjelobrojnog programiranja.

U nastavku detaljnije opisujemo metodu Lagrangeove relaksacije. Također pokazujemo kako odabrati vrijednost $\boldsymbol{\mu}$ koja će dati "dobru" ocjenu odozdo za originalnu zadaću i pokazujemo da će ta vrijednost, u nekim slučajevima, dati optimalno rješenje.

1.2 Tehnike Lagrangeove relaksacije

U ovom odjeljku formalno definiramo Lagrangeov dual i pokazujemo da njegovo rješenje daje ocjenu odozdo za originalni minimizacijski problem (odnosno ocjenu odozgo u slučaju problema maksimizacije). Također, ocjena dobivena Lagrangeovom relaksacijom je barem jednako dobra kao ocjena dobivena iz relaksirane zadaće linearnog programiranja.

Lagrangeov dual

Promotrimo sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} z^* = \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in X. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Lagrangeovom relaksacijom relaksiramo uvjet jednakosti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tako da ga dodamo funkciji cilja s pridruženim vektorom $\boldsymbol{\mu}$ čije komponente nazivamo *Lagrangeovim multiplikatorima*. Dobivamo sljedeći problem:

$$\begin{aligned} \min \ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \\ & \mathbf{x} \in X. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Problem (1.5) nazivamo *Lagrangeovom relaksacijom* problema (1.4), a funkciju

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\}$$

nazivamo *Lagrangeovom funkcijom*. Kako smo prilikom Lagrangeove relaksacije eliminirali uvjet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, rješenje od (1.5) ne mora biti dopustivo u (1.4). Zanima nas možemo li dobiti bilo kakvu korisnu informaciju o rješenju problema (1.4) iako rješenje Lagrangeove relaksacije (1.5) nije dopustivo u tom problemu? Sljedeći rezultat odgovara na to pitanje te nas motivira za korištenje Lagrangeove relaksacije:

Lema 1.2.1 (Slaba dualnost)**.** *Za svaki Lagrangeov multiplikator $\boldsymbol{\mu}$, vrijednost Lagrangeove funkcije $L(\boldsymbol{\mu})$ je ocjena odozdo za optimalno rješenje z^* originalnog problema* (1.4)*, tj.* $L(\boldsymbol{\mu}) \leq z^*$.

Dokaz. Kako svako rješenje $\mathbf{x}$ koje zadovoljava problem (1.4) vrijedi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, za svaki $\boldsymbol{\mu}$ je $z^* = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in X\} = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in X\}$. Ako maknemo uvjet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ iz druge minimizacijske zadaće to neće dovesti do povećanja vrijednosti funkcije cilja pa vrijedi $z^* \geq \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\} = L(\boldsymbol{\mu})$. □

Znači, za bilo koju vrijednost $\boldsymbol{\mu}$, $L(\boldsymbol{\mu})$ je ocjena odozdo za optimalnu vrijednost z^* zadaće (1.4). Kako bismo dobili najbolju moguću ocjenu odozdo potrebno je riješiti sljedeću optimizacijsku zadaću:

$$L^* = \max_{\mu} L(\boldsymbol{\mu}) \tag{1.6}$$

koju nazivamo *Lagrangeova dualna zadaća* pridružena primarnoj zadaći (1.4).

Iz slabe dualnosti neposredno slijedi sljedeća tvrdnja:

Korolar 1.2.2. *Optimalno rješenje L^* od* (1.6) *je ocjena odozdo za vrijednost z^* optimalnog rješenja od* (1.4)*, tj. $L^* \leq z^*$.*

Imamo sljedeće ocjene:

$$L(\boldsymbol{\mu}) \leq L^* \leq z^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Ove nejednakosti govore nam kada je Lagrangeov multiplikator $\boldsymbol{\mu}$ optimalan za Lagrangeovu dualnu zadaću (1.6) i kada je dopustivo rješenje x optimalno za originalnu zadaću (1.4).

Korolar 1.2.3 (Optimalnost)**.** *Neka je $\boldsymbol{\mu}$ Lagrangeov multiplikator.*

1. *Ako je* $\mathbf{x}$ *dopustiva točka zadaće* (1.4) *za koje je* $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$*, tada vrijedi:*
   - $L(\boldsymbol{\mu})$ *je optimalno rješenje Lagrangeove dualne zadaće, tj.* $L^* = L(\boldsymbol{\mu})$,
   - $\mathbf{x}$ *je optimalno rješenje primarne zadaće* (1.4).
2. *Ako je rješenje* $\mathbf{x}$ *dualne zadaće* (1.5) *dopustiva točka primarne zadaće* (1.4)*, onda vrijedi:*
   - $\mathbf{x}$ *je optimalno rješenje primarne zadaće* (1.4)*,*
   - $\boldsymbol{\mu}$ *je optimalno rješenje dualne zadaće* (1.6).

Primjetimo da u drugoj tvrdnji imamo sljedeće: kako je $\mathbf{x}$ rješenje od (1.5) vrijedi $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$, a kako je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje od (1.4) vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, iz čega slijedi da je $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ pa prva tvrdnja povlači da je $\mathbf{x}$ rješenje primarne zadaće (1.4) i da $\boldsymbol{\mu}$ rješava zadaću (1.6).

Kao što smo vidjeli u Korolaru 1.2.3 iz slabe dualnosti neposredno slijedi jedna od prednosti korištenja Lagrangeove relaksacije. Metoda nam daje potvrdu (u obliku jednakost $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za neki Lagrangeov multiplikator $\boldsymbol{\mu}$) da je dobiveno rješenje primarne zadaće (1.4) optimalno.

U slučaju da imamo $L(\boldsymbol{\mu}) < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, ocjena odozdo nam omogućuje da saznamo koliko daleko je dobiveno rješenje od optimalnosti. Na primjer, ako je $(\mathbf{c}^T\mathbf{x} - L(\boldsymbol{\mu}))/L(\boldsymbol{\mu}) \leq 0.05$, znamo da je dopustivo rješenje $\mathbf{x}$ ne više od 5% od optimalnosti. Ovakva ocjena je jako korisna u praksi, omogućuje nam da procijenimo stupanj suboptimalnosti danog rješenja i dopušta nam da prekinemo potragu za optimalnim rješenjem kada imamo rješenje koje je dovoljno blizu optimalnosti za naše potrebe.

Lagrangeova relaksacija i uvjeti tipa nejednakosti

U zadaći (1.4) promatrali smo uvjete tipa jednakosti. U praksi su češći uvjeti tipa nejednakosti. Promatramo sljedeći problem:

$$\begin{aligned} z^* = \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in X. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Lagrangeova dualna zadaća, u tom slučaju, je dana sa:

$$L^* = \max_{\mu \geq 0} L(\boldsymbol{\mu}), \tag{1.8}$$

tj. u obzir uzimamo samo Lagrangeove multiplikatore koji su nenegativni.

Tvrdnje slabe dualnosti te optimalnosti vrijede i dalje, no postoji jedna značajna razlika između relaksiranja uvjeta jednakosti i nejednakosti. Kod uvjeta nejednakosti, optimalno rješenje $\mathbf{x}$ zadaće Lagrangeove zadaće ne mora biti optimalno rješenje primarnog problema iako je dopustivo. Uz to što zadovoljava primarnu zadaću (1.7) mora zadovoljavati i uvjet komplementarnosti $\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$.

Lema 1.2.4. *Ako je za neki* $\boldsymbol{\mu}$, *rješenje* $\mathbf{x}$ *zadaće dobivene Lagrangeovom relaksacijom zadaće* (1.7) *optimalno i takvo da vrijedi:*

- $\mathbf{x}$ *je dopustiva točka zadaće* (1.7)*,*
- $\mathbf{x}$ *zadovoljava uvjet komplementarnosti* $\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$,

tada je $\mathbf{x}$ *optimalno rješenje primarne zadaće* (1.7)*.*

Dokaz. Jer je $\mathbf{x}$ rješenje relaksacijskog problema vrijedi $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$. Kako je po pretpostavci $\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$, slijedi da je $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Kako je $\mathbf{x}$ dopustiva točka zadaće (1.7) i vrijedi $L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ po tvrdnji 1. iz Korolara (1.2.3) vrijedi da je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje primarne zadaće (1.7). □

Rješavanje Lagrangeove dualne zadaće

U ovom odjeljku opisujemo metodu kojom ćemo aproksimirati Lagrangeovu dualnu zadaću

$$L^* = \max_{\mu} L(\boldsymbol{\mu}). \tag{1.9}$$

Pritom je Lagrangeova funkcija koja relaksira uvjet jednakosti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dana sa:

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\}.$$

Znači, kako bi našli optimalnu vrijednost $\boldsymbol{\mu}^*$ Lagrangeove dualne zadaće moramo pronaći najvišu točku Lagrangeove funkcije $L(\boldsymbol{\mu})$. Geometrijski tražimo najvišu točku podgrafa funkcije $L(\boldsymbol{\mu})$, što možemo svesti na sljedeću zadaću linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\max w \\ &w \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),\ \mathbf{x} \in X,\ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Zapišimo taj rezultat kao teorem:

Teorem 1.2.5. *Lagrangeova dualna zadaća* $L^* = \max_{\mu} L(\boldsymbol{\mu})$, *gdje je*

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\}$$

je ekvivalentna zadaći linearnog programiranja

$$L^* = \max\{w \mid w \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),\ \mathbf{x} \in X\}.$$

Dokaz. Neka je $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ rješenje zadaće (1.9), pa vrijedi: $L^* = L(\boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + (\boldsymbol{\mu}^*)^T(\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b})$, posebno je $L^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + (\boldsymbol{\mu}^*)^T(\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b})$ pa slijedi da $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ rješava zadaću (1.10).

Obratno, neka $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ rješava zadaću (1.10) i neka se maksimum postiže u w^*. Tada je $w^* = L^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + (\boldsymbol{\mu}^*)^T(\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b})$. Posebno, $L^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + (\boldsymbol{\mu}^*)^T(\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b})$, pa $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ rješava zadaću (1.9). □

Kako je, prema Teoremu (1.2.5), Langrangeova dualna zadaća ekvivalentna zadaći linearnog programiranja možemo ju riješiti koristeći metode linearnog programiranja, npr. Dantzig-Wolfeovu dekompoziciju u čije detalje nećemo ići, a više se može naći u [1], no napomenimo samo da je mana tog pristupa ta što zahtjeva rješavanje niza zadaća linearnog programiranja što može biti jako zahtjevno.

Umjesto toga mogli bi primjeniti neku vrstu metode gradijenta na Lagrangeovu funkciju $L(\boldsymbol{\mu})$. Problem kod tog pristupa je taj što Lagrangeova funkcija $L(\boldsymbol{\mu})$ nije uvijek diferencijabilna. Diferencijabilna je samo u slučaju kada je optimalno rješenje problema Lagrangeove relaksacije jedinstveno. Kako bi izbjegli ovaj problem, opisujemo metodu subgradijenta koja služi za rješavanje Lagrangeovog duala i u slučaju kada $L(\boldsymbol{\mu})$ nije diferencijabilna.

Metoda subgradijenta

U mnogim problemima optimizacije nailazimo na situacije u kojima moramo optimirati funkciju koja nije diferencijabilna u svim točkama. U tim situacijama potrebni su nam novi ”alati” kojima zamjenjujemo standarnu teoriju diferencijalnog računa i te ”alate” izvodimo iz teorije konveksne analize.

U ovom odjeljku opisujemo potrebne pojmove i bitna osnovna svojstva vezana uz optimizaciju nediferencijabilne funkcije te opisujemo metodu subgradijenata koja se koristi kod takvih problema.

Promatramo bezuvjetnu zadaću minimizacije realne funkcije f na $\mathbb{R}^n$:

$$\min f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Za zadaću (1.11) ne zahtjevamo da funkcija f ima neprekidne derivacije, tj. ne zahtjevamo da je glatka. Zadovoljni smo ukoliko gradijent od f postoji u skoro svakoj točki i ako, za svaku točku x gdje gradijent nije definiran, postoji derivacija u svakom smjeru d,

$$f'(x;d) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x+td) - f(x)]. \tag{1.12}$$

Obično je funkcija f u zadaći (1.11) po dijelovima C^1, tj. $\mathbb{R}^n$ će biti sastavljen od područja gdje gradijent ∇f postoji i neprekidan je, i na rubovima gdje ∇f nije definirana (iako je f neprekidna).

Promotrimo sljedeću funkciju u jednoj dimenziji:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{za } x < 0, \\ x^2, & \text{za } x \geq 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Tada je $f'(x) = -1$, za $x < 0$ i $f'(x) = 2x$, za $x > 0$. Za $x = 0$ derivacija nije definirana, ali ako pogledamo limes slijeva i limes sdesna, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$ i $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, vidimo da oni karakteriziraju ponašanje funkcije f blizu $x = 0$.

Gornje zapažanje vodi nas na promatranje subdiferencijala funkcije f kojim zamjenjujemo gradijent:

Definicija 1.2.6. *Subdiferencijal od f u točki x zadan je kao:*

$$\partial f(x) = \overline{\text{conv}}\{g \in \mathbb{R}^n \mid g = \lim \nabla f(x_i),\ x_i \to x,\ \nabla f(x_i) \textit{ postoji i konvergira}\},$$

gdje $\overline{\text{conv}}$ *označava zatvorenu konveksnu ljusku.*

Definicija ima smisla jer, za konveksne f, gradijent postoji u skoro svakoj točki. Subdiferencijal je neprazan, konveksni i kompaktan skup koji sadrži samo $\nabla f(x)$ u slučaju kada je f diferencijabilna u x. Elemente subdiferencijala $\partial f(x)$ nazivamo *subgradijentima*.

Za funkciju (1.13) imamo sljedeće: za $x \neq 0$, $\partial f(x)$ je jednočlan skup $\{f'(x)\}$,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{za } x < 0, \\ \{2x\}, & \text{za } x > 0, \end{cases}$$

dok za $x = 0$ imamo

$$\partial f(0) = [-1, 0].$$

Kao što smo mogli očekivati, postoji bliska veza između subdiferencijala i derivacije u smjeru. Zapravo je derivacija u smjeru $f'(x; d)$ potporna funkcija za subdiferencijal $\partial f(x)$, tj.

$$f'(x; d) = \max_{g \in \partial f(x)} g^T d. \tag{1.14}$$

Definicija (1.2.6) nije klasična definicija subdiferencijala, ali nam služi kao generalizacija, tj. za slučajeve u kojima imamo funkciju f koja nije konveksna. U slučaju kada je f konveksna, diferencijalni kvocjent u (1.12) je monoton u t, tj. $f(x + d) \leq f(x) + \nabla f(x)d$, i to, zajedno s (1.14) daje još jednu ekvivalentnu karakterizaciju subdiferencijala:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid g^T(z - x) \leq f(z) - f(x), \forall z \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.15}$$

Za fiksan x, derivacija u smjeru $\nabla f(x)d$ je konveksna u d i kao takva ima subdiferencijal u $d = 0$, koji je točno $\partial f(x)$.

Svojstva (1.14) i (1.15) daju dovoljne i nužne uvjete optimalnosti za konveksnu zadaću (1.11):
x^* je optimalno rješenje za zadaću (1.11), tj. $(\forall x \in \mathbb{R}^d)\ f(x^*) \leq f(x) \iff 0 \in \partial f(x^*)$.

Stoga je skup X^* optimalnih rješenja zadaće (1.11) karakteriziran s:

$$X^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in \partial f(x^*)\}.$$

Za X^* pretpostavljamo da je neprazan i ograničen.

Za daljnja razmatranja, koristiti ćemo sljedeću pretpostavku:

Pretpostavka 1.2.1. *Za svaku točku x, znamo $f(x)$ i jedan proizvoljni $g \in \partial f(x)$*

Pretpostavka (1.2.1) je zapravo prirodna i subgradijent obično možemo izračunati koristeći samo standarni diferencijalni račun, a o tome se više može pronaći u [2].

U [2] također možemo pronaći i ovu teoriju proširenu na slučaj kada f nije konveksna. Mi smo pretpostavili da je f konveksna i razvili teoriju za taj slučaj.

Prijeđimo sada na opis subgradijentne metode pomoću koje tražimo optimalno rješenje zadaće (1.11) kod koje funkcija nema derivacije u svim točkama.

Neka je f glatka u trenutnoj iteraciji x_k. U standarnim gradijentnim metodama radimo pozitivan korak t_k u smjeru negativnog gradijenta:

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k). \tag{1.16}$$

Smjer $-\nabla f(x_k)$ je smjer pada funkcije, stoga će nam pretraživanje po polupravcu $x_k - t\nabla f(x_k),\ t \geq 0$, dati neki $t_k > 0$ takav da je $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Za funkciju f koja nije glatka, gradijent u x_k možda neće postojati, no po Pretpostavci (1.2.1) znamo da će postojati barem jedan subgradijent u x_k. Stoga ćemo zamjeniti gradijent u (1.16) sa subgradijentom g_k. Normiranjem smjera pretraživanja dobivamo sljedeću generalizaciju od (1.16):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - t_k \frac{g_k}{|g_k|}, \text{ gdje je } g_k \in \partial f(x) \\ t_k &> 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Zanima nas kako izabrati korak t_k u (1.17)? Sljedeće jednostavno zapažanje nam govori kako najbolje odabrati korak t_k : neka je x^* optimalna točka, iz (1.15) slijedi da je kut između $-g_k$ i $x^* - x_k$ šiljast, stoga za $t > 0$ dovoljno male, $x_k - tg_k/|g_k|$ je bliže x^* nego x_k. Preciznije:

Lema 1.2.7. *Pretpostavimo da x_k nije optimalan i neka je x^* neka optimalna točka. Tada vrijedi:*

$$|x_{k+1} - x^*| < |x_k - x^*|, \tag{1.18}$$

ako je:

$$0 < t_k < 2[f(x_k) - f(x^*)]/|g_k|. \tag{1.19}$$

Dokaz. Iz (1.17) slijedi:

$$\begin{aligned} |x^* - x_{k+1}|^2 &= \left| x^* - x_k + t_k \frac{g_k}{|g_k|} \right|^2 \\ &= |x^* - x_k|^2 + 2t_k(x^* - x_k)^T \frac{g_k}{|g_k|} + t_k^2 g_k^T \frac{g_k}{|g_k|^2}. \end{aligned}$$

Tu jednakost zapisujemo kao:

$$|x^* - x_{k+1}|^2 = |x^* - x_k|^2 - 2t_k b_k + t_k^2,$$

gdje je $b_k = (x_k - x^*)^T g_k/|g_k|$.

Tada (1.18) vrijedi za t_k između 0 i $2b_k$. Koristeći (1.15) sa $x = x_k,\ g = g_k$ i $z = x^*$ dobivamo:

$$b_k \geq [f(x_k) - f(x^*)]/|g_k| > 0,$$

pa iz (1.19) slijedi traženo svojstvo. □

Izaberimo sada korak takav da

$$t_k \to 0^+ \text{ kada } k \to \infty.$$

To daje argument za konvergenciju k optimumu: ako (1.18) ne vrijedi, tada po Lemi (1.2.7) ne vrijedi (1.19) i $f(x_k)$ je blizu $f(x^*)$ (za velike k) i tu stajemo. Postoji još nešto što moramo uvažiti prilikom odabira niza koraka t_k : neka je x_0 početna točka za iteraciju (1.17) i neka je $A = \sum_{j=0}^{\infty} t_j$. Tada za svaku iteraciju k vrijedi;

$$\begin{aligned} |x_0 - x_k| &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + ... + |x_{k-1} - x_k| \\ &= t_0 + t_1 + ... + t_k \ll A. \end{aligned}$$

Dakle, cijelo vrijeme se nalazimo u kugli radijusa A sa središtem u početnoj točki x_0. Kako bismo bili sigurni, odabiremo male t_k takve da je njihova suma velika, npr. $+\infty$. U tom slučaju nam neki optimalni x^* koji je daleko od početne točke x_0 neće biti izvan dosega.

Znači imamo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - t_k g_k / |g_k|, \text{ gdje je } g_k \in \partial f(x) \\ t_k &\text{ takav da } t_k \to 0^+ \text{ i } \sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Vrijedi sljedeće:

Teorem 1.2.8. *Pretpostavimo da je skup optimalnih točaka, X^*, neprazan i ograničen. Tada, za proizvoljnu početnu točku x_0, niz x_k dobiven pomoću* (1.20) *je ograničen i svi njegovi limesi su u skupu X^*.*

Što se tiče konvergencije, možemo očekivati da će konvergencija k optimumu biti jako spora, no u te detalje nećemo ulaziti, više se može pronaći u [2].

Ako se vratimo na rješavanje Lagrangeove dualne zadaće, možemo se prisjetiti da naša funkcija L nije svugdje diferencijabilna zato jer je po dijelovima linearna funkcija. Stoga računamo niz $(\boldsymbol{\mu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da $L(\boldsymbol{\mu}_k)$ konvergira k optimalnom rješenju i to računamo korištenjem gore opisane metode subgradijenata.

Algoritam 1.2.1 (Metoda subgradijenta za Lagrangeovu dualnu zadaću)**.**

1. *Stavimo $k = 0$ i odaberimo $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^n$*
2. *Izračunamo $L(\boldsymbol{\mu}_k)$ i vektor $\mathbf{x}_k \in X$ gdje se postiže ta vrijednost*

3. *Izaberimo subgradijent* $\mathbf{g}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}_k$ *funkcije* L *u* $\boldsymbol{\mu}_k$

4. *Ako je* $\mathbf{g}_k = 0$ *algoritam staje i optimalno rješenje je* $L(\boldsymbol{\mu}_k)$

5. *Računamo* $\boldsymbol{\mu}_{k+1} = \boldsymbol{\mu}_k + \theta_k \mathbf{g}_k$, *gdje je* θ_k *korak*

6. *Povećamo k i vratimo se na korak* 2.

Za korak θ_k bismo trebali uzeti $\theta_k = [L^* - L(\boldsymbol{\mu}_k)]/||\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}||^2$, gdje je L^* optimalno rješenje Lagrangeove dualne zadaće koje ne znamo. Umjesto tog izbora, uzima se $\theta_k = \lambda_k(M - L(\boldsymbol{\mu}_k))/||\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}||^2$, gdje je M ocjena odozgo na L^*, a skalar λ_k se uzima na intervalu između 0 i 2. Na početku, za M se uzima vrijednost funkcije cilja od bilo koje dopustive točke zadaće (1.4). Ukoliko algoritam generira bolju dopustivu točku, koristimo funkciju cilja u toj točki kao novu vrijednost od M. Obično se počinje sa $\lambda_k = 2$ i ukoliko se vrijednost Lagrangeove funkcije ne poveća, skalar λ_k se djeli s 2.

U slučaju uvjeta nejednakosti, metoda mora biti malo modificirana tako da je $\boldsymbol{\mu}_k \geq 0$ za $k \geq 0$. U tom slučaju, u koraku 5. za i-tu koordinatu vektora $\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ uzimamo maksimum između 0 i i-te koordinate od $\boldsymbol{\mu}_k + \theta_k \mathbf{g}_k$.

U oba slučaja, broj iteracija k ovisi o željenoj točnosti rezultata. Kako algoritam nema nikakvog kriterija za zaustavljanje, obično se algoritam prekida nakon određenog broja iteracija.

Ovime smo završili opisom subgradijentne metode. Za više detalja oko te metode, čitatelj može pogledati u [2]. Također u toj knjizi se mogu pronaći razni primjeri te alternativne metode traženja optimuma funkcije koja nije svugdje diferencijabilna.

1.3 Lagrangeova relaksacija i zadaća linearnog programiranja

U ovom odjeljku raspravljamo o svojstvima Lagrangeove relaksacije. Kao što smo već spomenuli, osnovna ideja Lagrangeove relaksacije je dobiti ocjenu odozdo za funkciju cilja optimizacijskog problema. Kod zadaće cjelobrojnog programiranja, relaksacijom zahtjeva cjelobrojnosti dobivamo relaksiranu zadaću linearnog programiranja koja nam daje alternativnu metodu za pronalazak ocjene odozdo. Zanima nas koja od tih dviju ocjena odozdo je bolja, tj. veća po vrijednosti? U ovom odjeljku pokazujemo da ocjena odozdo dobivena Lagrangeovom relaksacijom je barem jednako dobra kao ona dobivena rješavanjem relaksirane zadaće linearnog programiranja. Zbog toga, i iz razloga što je ocjenu odozdo rješavanjem Lagrangeovom relaksacijom lakše za dobiti, Lagrangeova relaksacija je korisna tehnika za rješavanje zadaća linearnog programiranja i za primjenu u praksi.

Rezultate dobivene u prethodnim odjeljcima pokazali smo na proizvoljnom skupu X, koji smo zvali skup "jednostavnih" uvjeta. Sada promatramo zadaću linearnog programiranja i primjenjujemo Lagrangeovu relaksaciju na tu zadaću.

Neka je dan sljedeći problem:

$$\begin{aligned} z^* = \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Primjenom Lagrangeove relaksacije na tu zadaću dobivamo:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Pripadajuća Lagrangeova funkcija je dana sa:

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}. \tag{1.23}$$

Dualna zadaća od (1.21) je dana sa:

$$\begin{aligned} \max\ & -\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{w}^T\mathbf{q} \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{D}^T\mathbf{w} \geq -\mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \text{ slobodan}, \mathbf{w} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Sljedeći teorem govori o primjeni Lagrangeove relaksacije na zadaću linearnog programiranja:

Teorem 1.3.1 (Jaka dualnost)**.** *Ako zadaća* (1.21) *ima rješenje, onda je optimalna vrijednost L^* Lagrangeove dualne zadaće*

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}),$$

gdje je $L(\boldsymbol{\mu})$ dana s (1.23)*, jednaka optimalnoj vrijednosti z^* zadaće* (1.21)*, tj. $L^* = z^*$.*

Dokaz. Neka je x^* optimalno rješenje zadaće (1.21) koje postiže optimalnu vrijednost z^*, i neka su y^*, w^* optimalna rješenja dualne zadaće (1.24) za koja vrijedi $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* + \mathbf{D}^T\mathbf{w}^* + \mathbf{c} \geq 0$. Nadalje, po teoriji linearnog programiranja([1]) vrijede sljedeći uvjeti komplementarnosti:

- $(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* + \mathbf{D}^T\mathbf{w}^* + \mathbf{c})^T\mathbf{x}^* = 0$,
- $(\mathbf{w}^*)^T(\mathbf{D}\mathbf{x}^* - \mathbf{q}) = 0$.

Promatramo Lagrangeovu funkciju $L(\boldsymbol{\mu})$ za $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}^*$,

$$L(\mathbf{y}^*) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + (\mathbf{y}^*)^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}. \tag{1.25}$$

Primjetimo da je $\mathbf{x}^*$ dopustivo u zadaći (1.25) jer je dopustivo u zadaći (1.21).

Svaki vektor $\mathbf{x}$ postiže optimalnu vrijednost $L(\mathbf{y}^*)$ ako i samo ako postiže optimalnu vrijednost u sljedećoj zadaći linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \min\ & (\mathbf{c}^T + (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{A})\mathbf{x} \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Dualna zadaća od (1.26) je:

$$\begin{aligned} & \max\ -\mathbf{q}^T\mathbf{z} \\ & \mathbf{D}^T\mathbf{z} \geq -(\mathbf{c} + \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*) \\ & \mathbf{z} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Stoga, uvjeti komplementarnosti impliciraju da dopustiva točka $\tilde{\mathbf{x}}$ za (1.26), i dopustiva točka $\tilde{\mathbf{z}}$ za (1.27) rješavaju sustav:

- $\tilde{\mathbf{z}}^T(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{q}) = 0$,
- $\tilde{\mathbf{x}}^T(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*) = 0$

ako i samo ako je $\tilde{\mathbf{x}}$ optimalna za (1.26).

Stavljanjem $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{w}^*$, i $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$ vrijede uvjeti komplementarnosti, te slijedi da je $\mathbf{x}^*$ optimalno rješenje zadaće (1.26), tj. $\mathbf{x}^*$ je optimalno rješenje zadaće (1.25) za $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}^*$.

Kako je $\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = 0$, slijedi da je $L(\mathbf{y}^*) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$. Stoga je po tvrdnji 1. Korolara (1.2.3) optimalna vrijednost Lagrangeove dualne zadaće L^* dana sa $L^* = L(\mathbf{y}^*) = \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}^* = z^*$, tj. optimalna vrijednost Lagrangeove dualne zadaće jednaka je optimalnoj vrijednosti funkcije cilja zadaće (1.21). □

Napomena 1.3.2. *Primjetimo da tvrdnja Teorema* (1.3.1) *vrijedi i u slučaju da zadaća* (1.21) *nema rješenje. Tada je* $z^* = L^* = \infty$, *ako je dopustivi skup zadaće* (1.21) *prazan, odnosno* $z^* = L^* = -\infty$, *ako je funkcija cilja u* (1.21) *neomeđena odozdo na dopustivom skupu.*

Napomena 1.3.3. *Prema dokazu Teorema* (1.3.1) *vidimo da rješenje zadaće* (1.23) *za optimalan multiplikator* $\boldsymbol{\mu}$ *je upravo rješenje* $\mathbf{x}^*$ *originalne zadaće* (1.21).

Ovaj teorem pokazuje da tehnika Lagrangeove relaksacije daje alternativnu metodu za rješavanje zadaće linearnog programiranja. Umjesto rješavanjem zadaće linearnog programiranja direktno korištenjem postojećih algoritama, relaksacijom nekih od uvjeta možemo riješiti zadaću Lagrangeovog duala koristeći metodu subgradijenata. U nekim slučajevima relaksiranu zadaću je lako za riješiti, dok originalnu nije i u tim slučajevima je korisna tehnika Lagrangeove relaksacije.

Promatramo sada sljedeći diskretni optimizacijski problem:

$$\begin{aligned} z^* = \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in X, \end{aligned} \tag{1.28}$$

gdje je $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. Ne gubimo općenitost odabirom takvog X jer se diskretni optimizacijski problemi u stvarnim primjenama mogu formulirati kao problemi cjelobrojnog linearnog programiranja.

Relaksacijom uvjeta cjelobrojnosti dobivamo sljedeću relaksiranu zadaću linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} z^o = \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{D}\mathbf{x} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Kako dopustivi skup zadaće (1.28) leži u dopustivom skupu zadaće (1.29) slijedi da je $z^o \leq z^*$. Stoga, relaksirana zadaća linearnog programiranja daje važeću ocjenu odozdo za optimalnu vrijednost funkcije cilja zadaće (1.28).

Iz Korolara (1.2.2) slijedi da Lagrangeova dualna zadaća također daje ocjenu odozdo za optimalnu vrijednost zadaće (1.28), tj. $L^* \leq z^*$. Sljedeće što pokazujemo je da vrijedi ocjena $z^o \leq L^*$, tj. Lagrangeova relaksacija daje ocjenu odozdo koja nije lošija od ocjene odozdo dobivene relaksiranom zadaćom linearnog programiranja. Taj rezultat ćemo dobiti tako da pokažemo da Lagrangeova dualna zadaća također rješava zadaću linearnog programiranja i da se prostor rješenja Lagrangeove dualne zadaće nalazi unutar prostora rješenja problema (1.29). Zadaća linearnog programiranja koju rješava Lagrangeova dualna zadaća koristi "konveksifikaciju" prostora rješenja $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$.

Neka je $X = \{x^1, x^2, ..., x^K\} \subseteq \mathbb{R}^n$ konačni skup. Kažemo da je *x konveksna kombinacija* vektora $x^1, x^2, ..., x^K$ ako je $x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k x^k$, gdje je $\lambda_k \geq 0$, $\forall k$ i $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$. Neka je $\mathrm{conv}(X)$ *konveksna ljuska* od X (skup svih konveksnih kombinacija od X). Konveksna ljuska predstavlja najmanji konveksni skup koji sadrži skup X. U sljedećim diskusijama koristiti ćemo sljedeća svojstva konveksne ljuske $\mathrm{conv}(X)$:

Lema 1.3.4.

1. *Konveksna ljuska* $\mathrm{conv}(X)$ *je poliedarski skup, tj. može se prikazati kao prostor rješenja definiran sa konačnim brojem linearnih nejednakosti*
2. *Svaka ekstremna točka rješenja poliedra* $\mathrm{conv}(X)$ *leži u X, i ako optimiziramo linearnu funkciju cilja na* $\mathrm{conv}(X)$, *neka točka iz X će optimalna*
3. *Skup* $\mathrm{conv}(X)$ *je sadržan u skupu rješenja* $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq 0\}$

Slijedi glavni teorem ovog odjeljka:

Teorem 1.3.5. *Neka je X konačni skup i neka je* $\mathrm{conv}(X)$ *konveksna ljuska skupa X. Neka je dana zadaća:*

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in X, \end{aligned}$$

gdje je $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. *Lagrangeova dualna zadaća te zadaće je dana s:*

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}),$$

gdje je $L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\}$.

Tada je optimalna vrijednost L^* *Lagrangeove dualne zadaće jednako optimalnoj vrijednosti funkcije cilja zadaće linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathrm{conv}(X). \end{aligned}$$

Dokaz. Lagrangeova funkcija

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in X\}$$

ekvivalentna je Lagrangeovoj funkciji

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{x} \in \mathrm{conv}(X)\} \tag{1.30}$$

po tvrdnji 2. Leme (1.3.4), tj. jer se optimalna rješenja ekvivalentne Lagrangeove funkcije (1.30) postižu u nekim ekstremnim točkama konveksne ljuske conv(X), a svaka ekstremna točka rješenja konveksne ljuske conv(X) pripada skupu X.

Primjetimo da je (1.30) zapravo zadaća linearnog programiranja jer po tvrdnji 1. Leme (1.3.4) skup conv(X) možemo prikazati kao prostor rješenja definiran sa konačnim brojem linearnih nejednakosti. Stoga (1.30) možemo zamisliti kao relaksaciju sljedeće zadaće linearnog programiranja

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \in \mathrm{conv}(X). \end{aligned} \tag{1.31}$$

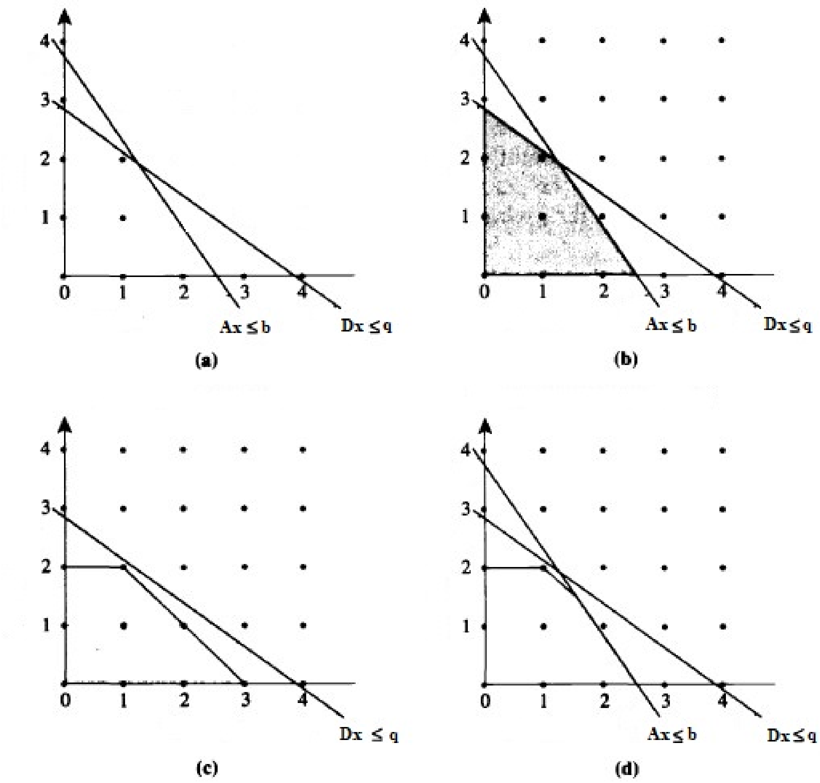
Sada, po Teoremu (1.3.1) slijedi da je optimalna vrijednost L^* Lagrangeove dualne zadaće jednaka optimalnoj vrijednosti zadaće (1.31) što smo trebali i dokazati. □

Zadaća (1.31) je "konveksifikacija" zadaće (1.28). Prethodni teorem pokazuje da je optimalno rješenje dualne zadaće L^* jednako optimalnoj vrijednosti funkcije cilja "konveksificirane" zadaće (1.31). Zanima nas koja je veza između skupa dopustivih rješenja zadaće (1.31) i relaksirane zadaće linearnog programiranja (1.29)? Pokazati ćemo tu vezu na jednom primjeru koji možemo vidjet na Slici (1.1).

Zbog jednostavnosti uzimamo da su relaksirani uvjeti tipa nejednakosti $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, umjesto jednakosti. Uvođenjem pomoćnih varijabli uvjet lako svodimo na uvjet jednakosti. Primjer (a) prikazuje skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, tj. dopustivi skup zadaće (1.28). Primjer (b) prikazuje skup $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, tj. dopustivi skup zadaće (1.29). U primjeru (c) prikazana je konveksna ljuska conv(X), a u primjeru (d) dopustivi skup zadaće (1.31), tj. skup $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathrm{conv}(X)\}$. Primjetimo da je dopustivi skup zadaće (1.31) podskup dopustivog skupa zadaće (1.29).

Taj rezultat vrijedi i općenito:

Teorem 1.3.6. *Ocjena dobivena Lagrangeovom relaksacijom zadaće cjelobrojnog programiranja nije lošija od ocjene odozdo koja je dobivena rješavanjem relaksirane zadaće linearnog programiranja, tj.* $z^o \leq L^*$.



Slika 1.1: Veza dopustivih skupova zadaća (1.31) i (1.29). Slika je preuzeta iz [1].

Dokaz. Prema tvrdnji 3. Leme (1.3.4) koji kaže da je konveksna ljuska $\text{conv}(X)$ sadržana u skupu $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ slijedi da je dopustivi skup zadaće (1.31), koji je dan s $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \text{conv}(X)\}$, sadržan u dopustivom skupu zadaće (1.29) dan s $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. Kako se optimizacijom iste funkcije cilja na manjem dopustivom skupu ne može povećati vrijednost funkcije cilja vidimo da vrijedi $z^o \leq L^*$. □

Sljedeće što nas zanima je kada je ocjena odozdo dobivena Lagrangeovom relaksacijom jednaka ocjeni odozdo dobivenoj rješavanjem relaksirane zadaće linearnog programiranja?

Pokazati ćemo da će ocjene biti jednake u slučaju kada zadaća dobivena primjenom Lagrangeove relaksacije zadovoljava *svojstvo cjelobrojnosti*. Kažemo da zadaća Lagrangeove relaksacije

$$\min\{\mathbf{d}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0 \text{ i cjelobrojan}\}$$

zadovoljava *svojstvo cjelobrojnosti* ako njena relaksacija ima cjelobrojno optimalno rješenje za bilo koji izbor koeficijenata funkcije cilja. Primjetimo da taj uvjet povlači da zadaće

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0 \text{ i cjelobrojan}\}$$

i

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$$

imaju istu optimalnu vrijednost funkcije cilja za bilo koji izbor Lagrangeovog multiplikatora $\boldsymbol{\mu}$. Na primjer, ako su uvjeti nejednakosti $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q}$ pridruženi problemu minimalnog puta, onda će zadaća:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

uvijek imati optimalno rješenje koje je cjelobrojno i nametanjem uvjeta cjelobrojnosti varijable $\mathbf{x}$ nećemo povećati optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Teorem 1.3.7. *Ako Lagrangeova relaksacija zadaće* (1.28) *zadovoljava svojstvo cjelobrojnosti, onda vrijedi $z^o = L^*$.*

Dokaz. Zadaća

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{d}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

će imati cjelobrojno optimalno rješenje za svaki izbor $\mathbf{d}^T$ samo ako je svaka ekstremna točka rješenja dobivena uvjetima $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q}$ i $\mathbf{x} \geq 0$ cjelobrojna.

Inače možemo izabrati $\mathbf{d}^T$ takav da ekstremna točka rješenja koja nije cjelobrojna postane optimalno rješenje. Ovo implicira da je skup $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ jednak konveksnoj ljusci skupa $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\}$, koju smo označavali s conv(X). A iz ovog rezultata slijedi da su skupovi

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q},\ \mathbf{x} \geq 0\} \tag{1.32}$$

i

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \operatorname{conv}(X)\} \tag{1.33}$$

jednaki.

Skup (1.32) je skup dopustivih točaka relaksirane zadaće linearnog programiranja (1.29), a skup (1.33) je skup dopustivih točaka zadaće (1.31). Kako zadaće (1.29) i (1.31) imaju isti skup dopustivih rješenja, imat će i istu optimalnu vrijednost funkcije cilja pa po Teoremu (1.3.5) vrijedi tvrdnja koju smo trebali pokazati. □

Ovaj rezultat pokazuje da ako zadaća zadovoljava svojstvo cjelobrojnosti slijedi da je rješavanje zadaće Lagrangeove relaksacije jednako rješavanju relaksirane zadaće linearnog programiranja. U takvim situacijama Lagrangeova relaksacija ne daje ništa bolje rezultate nego relaksirana zadaća linearnog programiranja. No ipak, Lagrangeova relaksacija i u ovakvim slučajima može biti od velike značajnosti posebice zato što rješavanje Lagrangeovog duala je ponekad efikasnije nego direktno rješavanje relaksirane zadaće linearnog programiranja.

U mnogim nelinearnim problemima optimalna vrijednost L^* zadaće Lagrangeovog duala je strogo manja od optimalne vrijednosti z^* funkcije cilja zadaće (1.28), tj. zadaća ima *dualni procjep*. Taj dualni procjep se pojavljuje jer zadaća Lagrangeovog duala rješava optimizacijski problem na većem prostoru rješenja (na "konveksifikaciji" prostora rješenja) nego orginalna zadaća i zbog toga optimalna vrijednost zadaće Lagrangeovog duala može biti manja.

Poglavlje 2

Primjene Lagrangeove relaksacije

Kao što smo već vidjeli, Lagrangeova relaksacija ima brojne primjene u optimizacijskim problemima. U ovom poglavlju opisat ćemo primjene Lagrangeove relaksacija na neke od problema vezanih uz mrežnu optimizaciju. U svim primjerima pripadni usmjereni graf ćemo označavati s $G = (V, E)$, gdje je V skup vrhova, a E skup lukova.

2.1 Tok na mreži sa dodatnim uvjetima

Problem minimalnog puta kojeg smo spomenuli u prethodnom poglavlju, specijalni je slučaj šireg skupa optimizacijskih problema koji su poznati kao problemi toka na mreži sa dodatnim uvjetima. Tok $\mathbf{x}$ je funkcija na skupu lukova, pa ćemo vrijednost toka na $(i, j) \in E$ označavati s x_{ij}. Promatrajmo sljedeću generalizaciju takvih problema:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{Nx} = \mathbf{q} \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ x_{ij}\ & \text{cjelobrojan}, \forall (i, j) \in E. \end{aligned}$$

U ovoj formulaciji, $\mathbf{N}$ je matrica incidencije definirana sa:

$$(\mathbf{N})_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{ako luk } e_j \text{ izlazi iz vrha } v_i \\ 1, & \text{ako luk } e_j \text{ ulazi iz vrha } v_i \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$\mathbf{q}$ je vektor koji predstavlja zalihu/potražnju u vrhovima, a $\mathbf{l}$ i $\mathbf{u}$ su donje i gornje granice nametnute na tok po lukovima. Vektor toka $\mathbf{x}$ može, ali i nemora biti ograničen na cjelobrojne vrijednosti, to ovisi o modelu kojime se bavimo, a u ovom slučaju promatramo cjelobrojne vrijednosti. Problem kod ovog modela je dodatan uvjet na vektor toka mreže, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, koji dodatno ograničava tok na mreži i otežava rješavanje ovakvog problema.

Na primjer, kod problema minimalnog puta sa dodatnim ograničenjima imali smo $q(s) = 1$ i $q(t) = -1$, gdje je s izvor grafa, a t ponor grafa, a za sve ostale j je $q(j) = 0$. Također svaka donja granica je $l_{ij} = 0$, a gornja $u_{ij} = 1$. U ovom slučaju, dodatno ograničenje $\sum_{(i,j)} t_{ij}x_{ij} \leq T$ je uvjet nejednakosti koji modelira vremensko ograničenje i dodatno otežava rješavanje problema.

Relaksacija uvjeta nejednakosti $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ i korištenje Lagrangeove relaksacije omogućuje nam da iskoristimo poznate algoritme za rješavanje problema mrežne optimizacije. Korištenje Lagrangeove relaksacije na ovakvom generalnom problemu toka na mreži slično je kao korištenje Lagrangeove relaksacije na problemu minimalnog puta opisanog u prošlom poglavlju: uvjetu $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, kojeg želimo relaksirati, pridružimo nenegativan Lagrangeov multiplikator $\boldsymbol{\mu}$ i dodamo ga funkciji cilja te dobijemo sljedeći Lagrangeov problem:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \\ & \mathbf{Nx} \ = \mathbf{b} \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \end{aligned}$$

kojeg rješavamo uzimajući različite vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora $\boldsymbol{\mu}$ kojeg mijenjamo korištenjem metode subgradijenata opisane u prošlom poglavlju. Za svaki izbor $\boldsymbol{\mu}$, taj problem je klasični problem toka na mreža kojeg možemo lako riješiti jednim od poznatih algoritama za njihovo rješavanje, npr. mrežnom simpleks metodom.

2.2 Problem trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika jedan je od najpoznatijih među optimizacijskim problemima. Počevši od vrha 1, npr. grada u kojem živi, trgovačni putnik želi posjetiti svaki od nekoliko gradova samo jednom i nakon toga se vratiti doma. To želi napraviti tako da mu je trošak puta minimalan. Gradovi su označeni kao vrhovi $1, 2, ..., n$ grafa G. Svako dopustivo rješenje ovog problema zvati ćemo *turom*.

Postoji više načina na koji možemo formulirati problem trgovačkog putnika kao optimizacijski model. Mi ćemo ga formulirati kao model sa ugrađenom strukturom mrežnog toka. Neka je c_{ij} trošak puta između gradova i i j, neka je y_{ij} varijabla koja označuje putuje li trgovački putnik iz grada i u grad j. Također, definirajmo varijablu toka x_{ij} na svakom luku (i, j) i pretpostavimo da trgovački putnik ima dostupno $n - 1$ jedinica robe na vrhu 1, kojeg uzimamo kao izvor, tj. kao početni vrh, i mora dostaviti 1 jedinicu robe svakom od preostalih vrhova.

Tada problem možemo formulirati kao:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}y_{ij} \tag{2.1a}$$

$$\sum_{1\leq j\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall i = 1, 2, ..., n \tag{2.1b}$$

$$\sum_{1\leq i\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall j = 1, 2, ..., n \tag{2.1c}$$

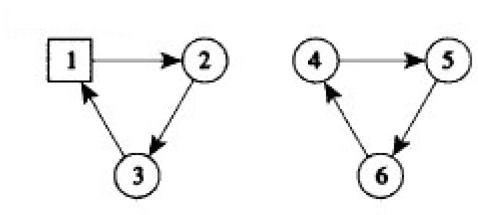
$$\mathbf{Nx} = \mathbf{b} \tag{2.1d}$$

$$x_{ij} \leq (n-1)y_{ij},\ \forall (i, j) \in E \tag{2.1e}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall (i, j) \in E \tag{2.1f}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E, \\ 1, & (i, j) \in E. \end{cases} \tag{2.1g}$$

Kako bi mogli interpretirati ovu formulaciju, stavimo $A' = \{(i, j) \mid y_{ij} = 1\}$ i $A'' = \{(i, j) \mid x_{ij} > 0\}$. Uvjeti (2.1b) i (2.1c) govore da samo jedan luk iz A' izlazi i ulazi u vrh i, stoga je A' unija disjunktnih ciklusa koji sadrže sve vrhove grafa. Znači, bilo koje cjelobrojno rješenje koje zadovoljava (2.1b) i (2.1c) bit će unija disjunktnih ciklusa; ako bilo koje drugo rješenje sadrži više od jednog ciklusa, te cikluse nazivamo *podture* pošto prolaze samo kroz neke vrhove.



Slika 2.1: Primjer nedopustivog rješenja problema trgovačkog putnika. Slika je preuzeta iz [1].

Uvjet (2.1d) osigurava da je A'' povezan. Taj uvjet nam je potreban jer je potrebno poslati 1 jedinicu toka od vrha 1 do svakog drugog vrha u grafu G preko lukova iz A''. Uvjet (2.1e) govori da je A'' podskup od A' iz čega slijedi da je A' povezan pa ne može sadržavati podture. Zaključujemo da je ovo važeća formulacija problema trgovačkog putnika.

Jedna od prednosti ovakve formulacije problema je to što možemo primjeniti Lagrangeovu relaksaciju na nekoliko načina. Npr. pretpostavimo da pridružimo Lagrangeove multiplikatore $\boldsymbol{\mu}_{ij} \geq 0$ uvjetima (2.1e) i dodamo ih funkciji cilja. Dobivamo sljedeći problem:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{(i,j)\in E} [c_{ij} - (n-1)\mu_{ij}] y_{ij} + \sum_{(i,j)} \mu_{ij} x_{ij} \\
\sum_{1\leq j\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall i = 1,2,...,n \\
\sum_{1\leq i\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall j = 1,2,...,n \\
\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
x_{ij} \geq 0,\ \forall (i,j) \in E \\
y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Primjetimo kako u ovom problemu možemo razdvojiti varijable x_{ij} i y_{ij}, tj. varijable su nezavisne, te iz tog razloga problem možemo razdvojiti na dva potproblema:

1. problem dodjeljivanja po varijabli $\mathbf{y}$

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{(i,j)\in E} [c_{ij} - (n-1)\mu_{ij}] y_{ij} \\
\sum_{1\leq j\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall i = 1,2,...,n \\
\sum_{1\leq i\leq n} y_{ij} = 1,\ \forall j = 1,2,...,n \\
y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. problem minimalnog toka po varijabli $\mathbf{x}$

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{(i,j)\in E} \mu_{ij} x_{ij} \\
\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
x_{ij} \geq 0,\ \forall (i,j) \in E.
\end{aligned}
$$

Ta dva problema lako rješimo pomoću nekih od poznatih metoda za njihovo rješavanje. Problem dodjeljivanja možemo riješiti mađarskom metodom, a problem toka na mreži možemo riješiti mrežnom simpleks metodom. Za svaki izbor Lagrangeovog multiplikatora μ, rješavamo dva problema toka na mreži. Korištenjem metode subgradijenata možemo pronaći najbolju ocjenu odozdo i optimalnu vrijednost Lagrangeovih multiplikatora, pa tako i riješiti polazni problem (prema Teoremu (1.3.1)).

2.3 Usmjeravanje vozila

Problem usmjeravanja vozila je generalizacija prethodno opisanog problema trgovačkog putnika. Primjenjuje se u mnogim problemima koji uključuju npr. dostavu potrošačkih proizvoda u trgovine mješovitom robom, skupljanje novaca iz raznih automata, itd.

Neka je dano K vozila smještenih u zajedničkom skladištu koje predstavljamo vrhom 1, i neka je dan skup kupaca j, predstavljenih s vrhovima $2, ..., n$. Svaki vrh $j = 2, ..., n$ ima potražnju d_j i trošak puta od vrha i do vrha j, c_{ij}. Zanima nas koji je minimalni trošak skupa ruta za dostavu (ili skupljanja) robe do kupaca? Pretpostavljamo da svako vozilo ima kapacitet od u jedinica robe.

Kao i kod svakog problema, postoji nekoliko načina na koji možemo formulirati problem usmjeravanja vozila. Mi ćemo primjeniti Lagrangeovu relaksaciju na osnovnu formulaciju: imamo varijablu odluke x_{ij}^k koja govori šaljemo li ($x_{ij}^k = 1$) ili ne ($x_{ij}^k = 0$) vozilo k po luku (i, j) i varijablu y_{ij} koja govori prolazi li koje vozilo lukom (i, j).

Problem možemo zapisati na sljedeći način:

$$\min \sum_{1\leq k\leq K} \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}^k \tag{2.2a}$$

$$\sum_{1\leq k\leq K} x_{ij}^k = y_{ij} \tag{2.2b}$$

$$\sum_{1\leq j\leq n} y_{ij} = 1, \ \forall i = 2, ..., n \tag{2.2c}$$

$$\sum_{1\leq i\leq n} y_{ij} = 1, \ \forall j = 2, ..., n \tag{2.2d}$$

$$\sum_{1\leq j\leq n} y_{1j} = K \tag{2.2e}$$

$$\sum_{1\leq i\leq n} y_{i1} = K \tag{2.2f}$$

$$\sum_{2\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} d_i x_{ij}^k \le u,\ \forall k=1,2,...,K \tag{2.2g}$$

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in Q} y_{ij} \le |Q|-1,\ \forall Q\subset\{2,...,n\} \tag{2.2h}$$

$$y_{ij}=\begin{cases}0, & (i,j)\notin E,\\ 1, & (i,j)\in E.\end{cases} \tag{2.2i}$$

$$x_{ij}^k=\begin{cases}0, & (i,j)\notin E,\\ 1, & (i,j)\in E,\end{cases}\quad \forall k=1,2,...,K. \tag{2.2j}$$

Neka je $A'=\{(i,j)\mid y_{ij}=1\}$. Kao i kod problema trgovačkog putnika, uvjeti (2.2c) i (2.2d) osiguravaju da neće doći do različitih podtura. Uvjet (2.2h) osigurava da rješenje ne sadrži cikluse vrhova $2,...,n$; inače bi skup lukova A' sadržavao neke cikluse koji prolaze kroz skup Q i to rješenje ne bi zadovoljavalo uvjet (2.2h) jer bi lijeva strana imala vrijednost barem $|Q|$.

Primjetimo da ova formulacija u sebi ima ugrađeno nekoliko različitih struktura koje možemo dobiti primjenom Lagrangeove relaksacije. Ako relaksiramo neke od uvjeta možemo dobiti nekoliko nezavisnih i lako rješivih potproblema.

Na primjer, ako relaksiramo uvjet (2.2b) dobijemo dva nezavisna potproblema, jedan po varijablama $\mathbf{x}^k$, a drugi po $\mathbf{y}$, pa je ovo još jedan primjer dobrog kandidata za primjenu Lagrangeove relaksacije:

- po varijabli $\mathbf{x}^k$:

$$\min \sum_{1\le k\le K}\sum_{(i,j)\in E}(c_{ij}+\mu_{ij})x_{ij}^k$$

$$\sum_{2\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} d_i x_{ij}^k \le u,\ \forall k=1,2,...,K$$

$$x_{ij}^k=\begin{cases}0, & (i,j)\notin E,\\ 1, & (i,j)\in E,\end{cases}\quad \forall k=1,2,...,K.$$

  Ovaj problem se sveo na problem naprtnjače, za svaki k.

- po varijabli $\mathbf{y}$:

$$\min \sum_{(i,j)\in E}\mu_{ij}y_{ij}$$

$$\sum_{1\le j\le n} y_{ij} = 1,\ \forall i = 2, ..., n$$
$$\sum_{1\le i\le n} y_{ij} = 1,\ \forall j = 2, ..., n$$
$$\sum_{1\le j\le n} y_{1j} = K$$
$$\sum_{1\le i\le n} y_{i1} = K$$
$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\in Q} y_{ij} \le |Q| - 1,\ \forall Q \subset \{2, ..., n\}$$
$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E, \\ 1, & (i, j) \in E. \end{cases}$$

Ovaj problem je zapravo problem K trgovačkih putnika.

2.4 Problem dizajniranja mreže

Pretpostavimo da možemo sami dizajnirati svoju mrežu i odrediti pripadni optimalni tok. Drugim riječima, imamo usmjereni graf G i možemo, ali i ne moramo dodati luk (i, j) tom grafu: ako dodamo luk (i, j) u graf, nastane trošak dizajniranja mreže f_{ij}. Naš zadatak je pronaći dizajn mreže s minimalnim troškom, tj. minimizaciju sume troška dizajniranja i troška toka.

Problem koji promatramo sastoji se od usmjeravanja više vrsta robe na mreži: svaka vrsta robe k ima jedan početni vrh s^k i jedno odredište d^k. Nakon što luk (i, j) dodamo mreži, imamo dovoljno kapaciteta za usmjeravanje ukupnog protoka od svih vrsta robe na tom luku.

Neka vektor $\mathbf{x}^k$ predstavlja tok svake robe k na mreži. Umjesto da x^k_{ij} predstavlja ukupan tok robe k na luku (i, j), stavimo da x^k_{ij} predstavlja dio potrebnog toka robe k za usmjeravanje od početnog vrha s^k do odredišta d^k po luku (i, j). Označimo s c^k vektor troška za k-tu robu koji skaliramo kako bi se podudarao s definicijom od x_{ij}, tj. c^k_{ij} je trošak po jedinici za $k-$tu robu na luku (i, j) pomnožen s zahtjevom toka te robe. Također, neka je y_{ij} vektor odluke koji govori jesmo li dodali luk (i, j) u dizajn mreže.

Koristeći tu notaciju problem dizajniranja mreže možemo formulirati na sljedeći način:

$$\min \sum_{1\leq k\leq K} (\mathbf{c}^k)^T \mathbf{x}^k + \mathbf{f}^T \mathbf{y} \tag{2.3a}$$

$$\sum_{\{j \mid (i,j)\in E\}} x_{ij}^k - \sum_{\{j \mid (j,i)\in E\}} x_{ji}^k = \begin{cases} 1, & i = s^k \\ -1, & i = d^k \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \forall i \in V,\ k = 1,2,...,K \tag{2.3b}$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij},\ \forall (i,j) \in E,\ k = 1,2,...,K \tag{2.3c}$$

$$x_{ij}^k \geq 0,\ \forall (i,j) \in E,\ k = 1,2,...,K \tag{2.3d}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases} \tag{2.3e}$$

Uvjet (2.3c) govori da ako ne odaberemo luk (i, j) kao dio mreže, ne možemo pustit niti jedan dio potražnje robe k po tom luku, a ako ga odaberemo kao dio mreže možemo pustiti koliko god robe k želimo po tom luku.

Ako relaksiramo taj uvjet, dobijemo sljedeći problem:

$$\min \sum_{1\leq k\leq K} \sum_{(i,j)\in E} (c_{ij}^k + \mu_{ij}^k) x_{ij}^k + \sum_{(i,j)\in E} (f_{ij} - \sum_{1\leq k\leq K} \mu_{ij}^k) y_{ij}$$

$$\sum_{\{j \mid (i,j)\in E\}} x_{ij}^k - \sum_{\{j \mid (j,i)\in E\}} x_{ji}^k = \begin{cases} 1, & i = s^k \\ -1, & i = d^k \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad i \in V,\ k = 1,2,...,K$$

$$x_{ij}^k \geq 0,\ \forall (i,j) \in E,\ k = 1,2,...,K$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ 1, & (i,j) \in E. \end{cases}$$

Dakle, dobivamo dva nezavisna problema, jedan po varijablama $\mathbf{x}^k,\ k = 1,...,K$, a drugi po varijabli $\mathbf{y}$:

- Problem minimalnog puta za svaku robu k:

$$\min \sum_{1\leq k\leq K} \sum_{(i,j)\in E} (c_{ij}^k + \mu_{ij}) x_{ij}^k$$

$$\sum_{\{j \mid (i,j)\in E\}} x_{ij}^k - \sum_{\{j \mid (j,i)\in E\}} x_{ji}^k = \begin{cases} 1, & i = s^k \\ -1, & i = d^k \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \forall i \in V,\ k = 1,2,...,K$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \ \forall (i,j) \in E, \ k = 1, 2, ..., K.$$

- Jednostavan problem binarnog programiranja

$$\min \sum_{(i,j) \in E} (f_{ij} - \sum_{1 \leq k \leq K} \mu_{ij}^k) y_{ij}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ 1, & (i,j) \in E, \end{cases}$$

kojeg možemo lako riješiti. Rješenje je dano formulom:

$$y_{ij}^* = \begin{cases} 0, & f_{ij} - \sum_{1 \leq k \leq K} \mu_{ij}^k \geq 0, \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako bi pokazali prednost korištenja Lagrangeove relaksacije na ovom problemu, pogledajmo problem s 50 vrhova i 500 kandidata za lukove. Pretpostavimo da svaki par vrhova ima svoju vrstu robe. Tada imamo 50(49) = 2450 vrsta robe. Kako svaka roba može teći svakim lukom, model ima 2450(500) = 1225000 varijabli toka. Zbog toga, i zbog toga što:

- svaka varijabla toka definira uvjet (2.3c)
- svaka vrsta robe ima uvjet ravnoteže toka,

model ima 1225000 + 2450(50) = 1347500 uvjeta. Također, ima 500 y varijabli. Dekompozicijiom ovog problema, za svaki izbor Lagrangeovog multiplikatora rješavamo 2450 malih problema minimalnog puta što je puno bolji pristup rješenju nego rješavanje linearnog problema, čije rješavanje nadilazi mogućnosti današnjih softwera.

2.5 Raspored operatera u dvije smjene

U mnogim problemima raspoređivanja radne snage privatno poduzeće ili javni sektor mora rasporediti svoje zaposlenike (medicinske sestre, zrakoplovna posada, telefonski operateri,...) kako bi pružili potrebnu uslugu. Takvi problemi su, uglavnom, dosta komplicirani zbog kompleksnih pravila rada, npr. zrakoplovna posada ima ograničenje na broj radnih sati u svakom tjednu ili mjesecu. Osim toga, dosta često potražnja za uslugom tih zaposlenika varira vremenski i/ili geografski. Stoga, pronaći minimalni trošak rasporeda zahtjeva da balansiramo prevladavajuća radna pravila s potražnjom. Slika (2.2) prikazuje jedan primjer planiranja radne snage. Radi se o raspoređivanju radnika za jednu liniju autobusa.

Vremenski period	Raspored								Potražnja
	1	2	3	4	5	6	7	8	
8–9	1	0	0	1	0	1	0	1	≥ 1
9–10	1	0	0	1	0	1	0	1	≥ 1
10–11	1	0	0	0	1	0	0	1	≥ 1
11–12	0	1	0	0	1	0	0	1	≥ 1
12–1	0	1	0	0	1	0	0	1	≥ 1
1–2	1	0	0	1	0	1	1	0	≥ 1
2–3	1	0	0	1	0	1	1	0	≥ 1
3–4	0	0	1	1	0	0	1	0	≥ 1
4–5	0	0	1	1	0	0	1	0	≥ 1
5–6	0	0	1	1	0	0	1	0	≥ 1
Trošak	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	

Slika 2.2: Primjer raspoređivanja vozača autobusa u dvije smjene. Slika je preuzeta iz [1].

Svaki stupac u tablici odgovara jednom mogućem rasporedu. Npr., u rasporedu 1, vozač vozi liniju autobusa u dvije smjene, prva je od 8 do 11, a druga od 1 do 3 i tako za svaki stupac. U stupcu "Potražnja" zahtjevamo da je barem jedan vozač dostupan za vožnju svakog sata u danu, od 8 ujutro do 6 popodne (ako su raspoređena dva vozača istom autobusu, onda je jedan vozač, a drugi putnik). Jedna mogućnost za rješenje tog problema je da odaberemo rasporede 1, 2 i 3. Također možemo odabrati rasporede 4 i 5, te 3, 5 i 6.

Svaki raspored j ima pridružen trošak c_j i želimo odabrati skup rasporeda koji zadovoljava određene zahtjeve tako da njihov trošak bude minimalan. Kako bismo formulirali ovaj problem kao optimizacijski model, stavimo da varijabla x_j označuje jesmo li ($x_j = 1$) ili nismo ($x_j = 0$) odabrali raspored j, i neka A označuje matricu koeficijenata tablice rasporeda (tj. element a_{ij} je 1 ako raspored j ima raspoređenog vozača i-tog sata u danu). Označimo s $\mathbf{e}$ vektor jedinica. Tada model izgleda ovako:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{e} \\ &x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Izbor raspoloživih rasporeda u problemu ovisi o vladajućim pravilima rada. U našem primjeru, niti jedan vozač ne vozi niti u jednoj smjeni manje od 2 sata. Također, primjetimo da raspored dozvoljava razdvajanje smjena i da niti jedan raspored nema više od dvije smjene. Ovakav generalni raspored operatera nazivamo *raspored operatera u dvije smjene*.

U [1] je opisan problem raspoređivanja operatera u jednoj smjeni, te je pokazano da se može opisati pomoću problema minimalnog puta. Pokazat ćemo da problem raspoređivanja operatera u dvije smjene možemo zapisati kao problem raspoređivanja operatera u jednoj smjeni, te ćemo primjenom Lagrangeove relaksacije na jedan od uvjeta dobiti problem minimalnog puta kojeg lako riješimo.

Pretpostavimo da svaki stupac j matrice $\mathbf{A}$ sadrži dva niza jedinica (tj. svaki raspored j sadrži dvije smjene). Napravimo sada dva nova stupca $\mathbf{A}'_j$ i $\mathbf{A}''_j$ od stupca $\mathbf{A}_j$. Svaki od stupaca $\mathbf{A}'_j$ i $\mathbf{A}''_j$ sadrži jednu smjenu od $\mathbf{A}_j$, pa vrijedi $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}'_j + \mathbf{A}''_j$. Također, zamjenimo varijablu x_j sa dvije varijable, x'_j i x''_j. Dobivamo novi model:

$$\begin{aligned} \min\ (\mathbf{c}')^T\mathbf{x}' + (\mathbf{c}'')^T\mathbf{x}'' \\ \mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{A}''\mathbf{x}'' \geq \mathbf{e} \\ \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' = 0 \\ x'_j,\ \ x''_j \in \{0,1\},\ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

U ovoj formulaciji smo pretpostavili da smo razdvojili svaki stupac matrice $\mathbf{A}$. U slučaju da ih ne možemo razdvojiti, pretpostavit ćemo da neki stupci od $\mathbf{A}''$ sadrže sve nule. Također, možemo podjeliti trošak svake varijable x_j proizvoljno između c'_j i c''_j. Problemi (2.4) i (2.5) su ekvivalentni.

Ako eliminiramo uvjet $\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' = 0$ dobivamo raspored operatera u jednoj smjeni, a kao što smo već napomenuli, on se svodi na rješavanje problema minimalnog puta. Ovo zapažanje nam sugerira da primjenimo Lagrangeovu relaksaciju. Relaksiranjem tog uvjeta dobivamo sljedeći problem rasporeda operatera u jednoj smjeni:

$$\begin{aligned} \min\ (\mathbf{c}' + \boldsymbol{\mu})^T\mathbf{x}' + (\mathbf{c}'' - \boldsymbol{\mu})^T\mathbf{x}'' \\ \mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{A}''\mathbf{x}'' \geq \mathbf{e} \\ x'_j,\ \ x''_j \in \{0,1\},\ \ j = 1,2,...,n. \end{aligned}$$

Kada razdvojimo stupac $\mathbf{A}_j$ u dva stupca $\mathbf{A}'_j$ i $\mathbf{A}''_j$, nije važno kako raspodjelimo trošak c_j između c'_j i c''_j, dokle god vrijedi $c_j = c'_j + c''_j$. Kako je $x'_j = x''_j$ u bilo kojem dopustivom rješenju, trošak dopustivog rješenja bit će isti i neće ovisiti kako raspodjelimo c_j. Međutim, podjela troška u relaksiranom problemu nakon što relaksiramo uvjet $x'_j = x''_j$ čini značajnu razliku. Ako stavimo da je c'_j veliki, a c''_j malen, tada će vjerojatno u rješenju relaksiranog problema x'_j biti 0, a x''_j će biti 1. Idealno bi bilo kada bi raspodjelili trošak između c'_j i c''_j tako da je ili $x'_j = x''_j = 0$ ili $x'_j = x''_j = 1$ u relaksiranom problemu.

No, ispostavlja se da ne trebamo brinuti oko podjele troška ako koristimo Lagrangeovu relaksaciju jer Lagrangeov multiplikator μ_j za uvjet $x'_j - x''_j = 0$ radi podjelu troška. Npr. neka je $c'_j = c_j$ i $c''_j = 0$. Tada, pošto relaksiramo uvjet $x'_j - x''_j = 0$, koeficijenti od x'_j u relaksiranoj zadaći su $c_j + \mu_j$, a koeficijenti od x''_j su $c_j - \mu_j = -\mu_j$. Kako je μ_j u rasponu realnih brojeva, trošak c_j možemo raspodjeliti između c'_j i c''_j na sve moguće načine.

Ukoliko želimo napraviti raspored vozača na više autobusnih linija, desna strana u problemu (2.4) više neće biti 1, nego proizvoljni cijeli broj koji govori koliko je vozača potrebno za svaki vremenski period tokom dana. U ovom slučaju također koristimo raspodjelu varijable $\mathbf{x}$, ali problem se ne svodi na problem minimalnog puta nego na problem minimalnog troška toka na mreži.

Bibliografija

[1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993.

[2] G. L. Nemhauser, A. H. G. Rionnoy Kan, M. J. Todd, *Handbooks in Operations Research and Management Science: Optimization, Volume 1*, North-Holland, 1989.

[3] Xiangtong Qi, Jian Yang, Gang Yu, *Scheduling Problems in the Airline Industry*, Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis (2004), 1079–1099.

Sažetak

Lagrangeova relaksacije je fleksibilan pristup rješenju koji omogućuje otkrivanje skrivene mrežne strukture optimizacijskih problema relaksiranjem "kompliciranih" uvjeta. Ovakav pristup omogućuje nam da "rastavimo" model uklanjanjem uvjeta i prebacivanjem tih uvjeta u funkciju cilja sa pridruženim Lagrangeovim multiplikatorom. U ovom radu razradili smo teoriju Lagrangeove relaksacije u linearnom programiranju, opisali smo pristup rješenju te obradili niz problema u kojima Lagrangeova relaksacija efektivno otkriva skrivenu strukturu mreže: problem toka na mreži sa dodatnim uvjetima, problem trgovačkog putnika, problem usmjeravanja vozila, problem dizajniranja mreže i problem rasporeda operatera u dvije smjene.

Osnovna teorije Lagrangeove relaksacije je rezultat slabe dualnosti koji govori da je za bilo koju vrijednost Lagrangeovog multiplikatora optimalna vrijednost relaksirane zadaće uvijek ocjena odozdo za vrijednost funkcije cilja originalne zadaće. Kako bismo dobili najbolju moguću ocjenu odozdo, moramo odabrati Lagrangeov multiplikator takav da je optimalna vrijednost Lagrangeove relaksirane zadaće što veća moguća. Tu zadaću zvali smo Lagrangeova dualna zadaća koja se može riješiti na više načina. Metoda subgradijenata, kojom smo se mi bavili, je jedna od najpopularnijih tehnika za rješavanje Lagrangeove dualne zadaće. Za primjene je najznačajniji rezultat jake dualnosti koji govori da se optimalne vrijednosti Lagrangeove dualne zadaće i polazne zadaće podudaraju.

Obično odabiremo one uvjete koje relaksiranjem daju Lagrangeovu relaksiranu zadaću koje je puno lakše za riješiti nego originalnu zadaću. Stoga, kod primjene Lagrangeove relaksacije, umjesto da rješavamo jednu "kompliciranu" zadaću, rješavamo više "jednostavnijih" zadaća. Često ti "komplicirani" uvjeti povezuju inače neovisne zadaće, u tim slučajevima, Lagrangeova relaksacija nam dopušta da problem razdvojimo na manje probleme, koje je lakše riješiti.

Pokazali smo kako interpretirati problem Lagrangeovih multiplikatora kao "konveksifikaciju" originalnog optimizacijskog problema. Također smo pokazali da kod primjene na probleme cjelobrojnog programiranja, Lagrangeova relaksacije uvijek daje barem jednako

dobru ocjenu odozdo kao i relaksirani problem linearnog programiranja u kojem zanemarujemo uvjet cjelobrojnosti. Konačno, pokazali smo da kada Lagrangeova relaksirana zadaća zadovoljava svojstvo cjelobrojnosti (ima cjelobrojna rješenja za svaki izbor Lagrangeovog multiplikatora) te se ocjene odozdo podudaraju. U ovim slučajevima, iako Langrangeov pristup pruža jednake ocjene odozdo kao i relaksirani problem linearnog programiranja, ipak ima kvalitetu bržeg rješavanja problema.

Summary

Lagrangian relaxation is a flexible approach to solutions that enables the detection of hidden network structures of optimization problems by relaxing ”complicated” conditions. This approach allows us to ”break down” the model by removing the conditions and placing them into a target function which we need to optimize with the associated Lagrangian multiplier. In this paper, we elaborated the theory behind Lagrangian relaxation, described solution approaches and looked at several examples in which Lagrangian relaxation effectively reveals the hidden network structure: networks with side constraints, traveling salesman problem, vehicle routing,network design and two-duty operator scheduling.

The basic rule of application and the theory of Lagrangian relaxation is weak duality, which says that for any value of Lagrangian multiplier, the optimal value of the relaxed problem is always a lower bound for the value of the target function of original problem which we need to optimize. In order to get the best possible lower bound, we have to choose Lagrangian multiplier such that optimal value of Lagrangian relaxed problem is as large as possible. We call this problem Lagrangian multiplier problem or Lagrangian dual problem and we can solve it in several ways. The subgradient method, that we described in this paper, is one of the most popular techniques for solving Lagrangian dual problem. The most significant result in applications is strong duality which says that the optimal values of Lagrangian dual problem and original problem are equal.

Usually, we choose those conditions whose relaxation gives Lagrangian relaxed problem that is much easier to solve than the original problem. Therefore, Lagrangian relaxation allows us to separate the problem into smaller ones, which are easier to solve.

We have also shown how to interpret Lagrangian multiplier problem as a convexification of the original optimization problem and we have shown that when applying to the integer programming problems, Lagrangian relaxation always gives at least as large bound as the relaxed linear programming problem. Finally, we demonstrated that when Lagrangian relaxation problem satisfies the integrity property (it has an integer solution for all values of Lagrangian multipliers), solving the Lagrangian multiplier problem is equal to

solving the relaxed linear programming problem of the original problem. In these cases, though Lagrangian approach provides the same lower bound as the relaxed linear programming problem, it still has the ability to solve the problem faster.

Životopis

Rođena sam 17. lipnja 1991. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole upisala sam Gornjogradsku gimnaziju koju sam završila 2010. godine. Nakon završenog srednjeg školovanja upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu (2010. godine), koji sam završila 2014. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Primijenjena Matematika na istom fakultetu.