

# Određivanje kompleksnih frekvencija normalnih modova Zemlje autoregresijskom metodom

---

**Majstorović, Josipa**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:941232>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-24**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
GEOFIZIČKI ODSJEK

Josipa Majstorović

Određivanje kompleksnih frekvencija normalnih  
modova Zemlje autoregresijskom metodom

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
GEOFIZIČKI ODSJEK

SMJER: SEIZMOLOGIJA I FIZIKA ČVRSTE ZEMLJE

**Josipa Majstorović**

Diplomski rad

**Određivanje kompleksnih frekvencija  
normalnih modova Zemlje  
autoregresijskom metodom**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Davorka Herak

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2016.

Prvenstveno, zahvaljujem se mojoj mentorici prof. dr. sc. Davorki Herak što mi je predložila i potaknula me na vanjsku suradnju iz koje je ovaj diplomski rad proizašao. Posebno se zahvaljujem dr. sc. Severini Rosat što mi je omogućila boravak na *Institut de Physique du Globe de Strasbourg*. Zahvaljujem joj se na svojoj pomoći oko diplomskog rada kao i oko svakodnevnih životnih situacija, na svom znanju koje mi je prenijela, na svim savjetima, kritikama, idejama, razgovorima, strpljenju i pristupačnosti. Željela bih se zahvaliti i dr. sc. Dingu Hao i dr. sc. Benjaminu F. Chao na konstruktivnim savjetima oko provođenja metode te dr. sc. Sophie Lombote i dr. sc. Rudolfu Widmer-Schnidrigu na savjetima, kritikama i diskusijama u vezi dobivenih rezultata. Također želim se ponovno zahvaliti dr. sc. Widmer-Schnidrigu i dr. sc. Walteru Zürnu na srdačnoj dobrodošlici na opservatoriju Black Forest u Njemačkoj, na razgovorima o slobodnim oscilacijama i temama iz područja znanosti. Zahvaljujem se mojim roditeljima i sestri Ani što su uvijek bili uz mene tijekom mog školovanja, bodrili me, pružali podršku i dijelili moju radost. Zahvaljujem se prijateljima uz koje je studiranje bilo puno lakše. I naposljetku, zahvaljujem se Benjaminu što je uvijek vjerovao u mene.



## Sažetak

U ovom radu prezentirana su mjerenja svojstvenih frekvencija singleta i faktora dobrote za pet normalnih modova Zemlje, četiri fundamentalna moda  ${}_0S_0$ ,  ${}_0S_2$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  i jedan viši harmonik  ${}_2S_1$ . Normalni modovi Zemlje, zbog osjetljivosti na rotaciju, eliptičnost, lateralne heterogenosti i anizotropiju pod utjecajem su procesa razdvajanja, kada umjesto degenerirane frekvencije moda uočavamo njegovo razdvajanje na singlete. Za mjerenje svojstvenih frekvencija singleta modova korištena je autoregresijska metoda u frekvencijskoj domeni. Korištena je velika skupina podataka i po prvi put kombinirana su mjerenja gravimetra i seizmometra. Odnosno, ukupno je korišteno 113 gravimetara i seizmometara nakon 5 mega potresa iz 2004. (otočje Sumatra-Andaman, Indonezija), 2010. (Maule regija, Čile), 2011. (Tohoku, Japan), 2012. (Aceh, Indonezija) i 2015. (Illapel, Čile) godine, magnituda većih od 8, zabilježenih na 46 postaja u svijetu. Rezultati izračunatih svojstvenih frekvencija i faktora dobrote singleta mjerenih modova pokazuju dobro slaganje s prijašnjim radovima. Pogreške, koje su dobivene *bootstrap* eksperimentima, pokazale su se realističnima i konzistentnima. Također, očekivano mjerenja su ukazala na odstupanja vrijednosti svojstvenih frekvencija singleta od teorijskih vrijednosti definiranih modelom Zemlje PREM. To potvrđuje činjenicu da korišteni model nije dovoljan za opis efekata koje opažamo na realnim podacima zbog Zemljine kompleksnosti. Iako je metoda dala zadovoljavajuće rezultate, osjetljiva je na nelinearnosti u vremenskim nizovima koje mogu prouzrokovati pristranost mjerenja.

# Autoregressive determination of the complex frequencies of the Earth's normal modes

## Abstract

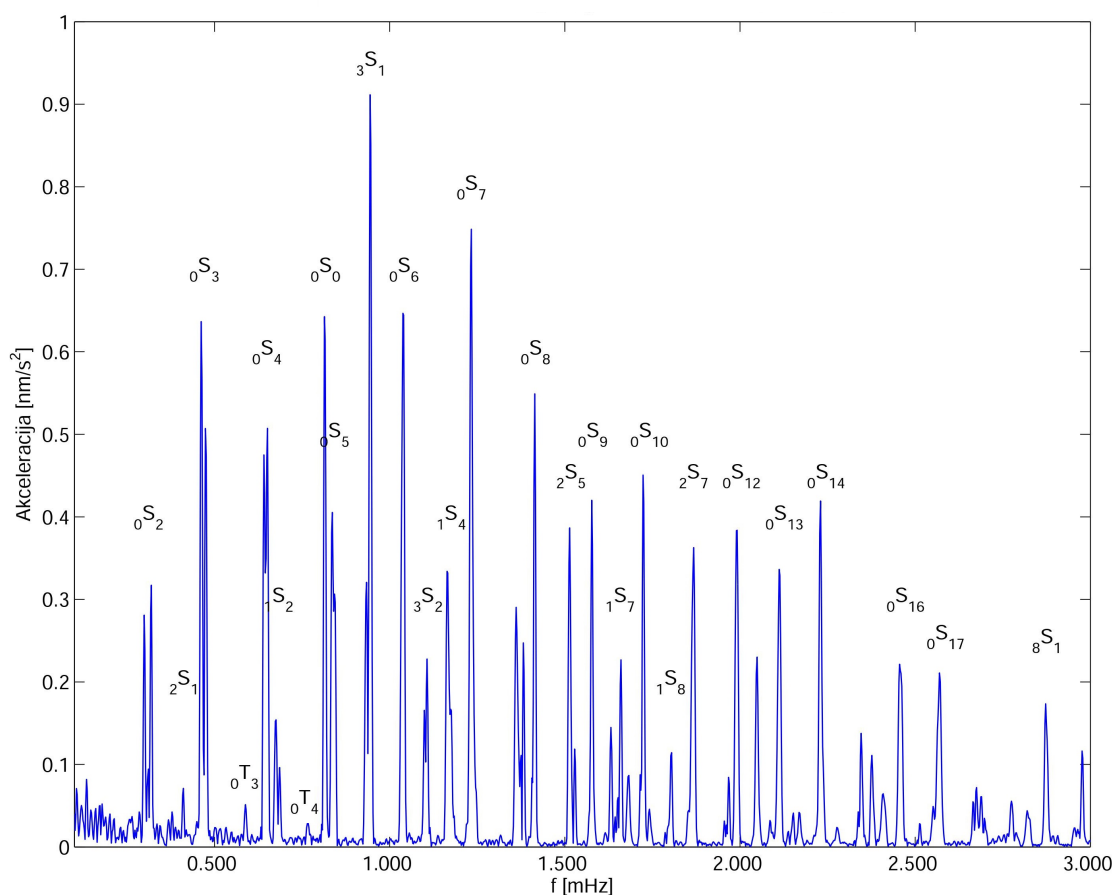
Based upon superconducting gravimeter and seismometer records, the autoregressive method is used to determine the frequencies and quality factors of five spheroidal modes: four fundamental modes  ${}_0S_0$ ,  ${}_0S_2$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  and one higher mode  ${}_2S_1$ . The data used are 113 records from five major earthquakes (Sumatra-Andaman earthquake 2004, Chile earthquake 2010, Tohoku earthquake 2011, Achet earthquake 2012 and Illapel earthquake 2015) with the moment magnitude above 8 recorded at 46 stations worldwide. Estimated weighted average values of the eigenfrequencies and the quality factors of the mode's singlets are very close to the results of the previous studies as well as the PREM predictions. However, some results show deviations from theoretical PREM values, supporting the fact that this model is not appropriate to explain all processes in the Earth, because of Earth's complexity. Additionally, standard deviation estimated by the bootstrap method are realistic and consistent. While this autoregressive method gave satisfactory results, one should be aware of the fact that this method relies heavily on the high quality data, because non-linearity destroys autoregressive nature of time series and hence introduces bias in the estimate.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorija</b>	<b>4</b>
2.1	Slobodne oscilacije Zemlje . . . . .	4
2.1.1	Normalni modovi sfere . . . . .	4
2.1.2	Toroidalni modovi . . . . .	12
2.1.3	Sferoidalni modovi . . . . .	14
2.1.4	Atenuacija, razdvajanje i sprega modova . . . . .	15
2.1.5	Mjerenje normalnih modova . . . . .	17
2.1.6	Strukturni koeficijenti . . . . .	18
2.2	Obrada signala . . . . .	22
2.2.1	Prikaz periodičnih funkcija pomoću Fourierovog niza . . . . .	22
2.2.2	Spektar vremenski ograničenih mjerenja i prozorske funkcije . . . . .	23
2.2.3	Aliasing efekt i teorem o uzorkovanju . . . . .	26
2.2.4	Fourierova transformacija diskretnih funkcija (DFT) . . . . .	31
2.2.5	Brza Fourierova transformacija . . . . .	33
2.2.6	Z-transformat . . . . .	35
2.2.7	Produljivanje signala . . . . .	36
2.3	Metoda . . . . .	37
2.3.1	Autoregresijski modeli . . . . .	37
2.3.2	Geometrijska interpretacija koeficijenata autoregresivnog modela . . . . .	38
2.3.3	Autoregresijska metoda u frekvencijskoj domeni . . . . .	42
2.3.4	Spektar analitički produljenog signala . . . . .	45
2.3.5	Autoregresijski spektar u z-domeni . . . . .	47
2.3.6	Metoda usrednjavanja . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Obrada podataka</b>	<b>52</b>
3.1	Podaci . . . . .	52
3.2	Priprema podataka za obradu . . . . .	56
3.3	Postupak analize . . . . .	59
3.4	Procjena pogrešaka mjerenja pomoću <i>bootstrap</i> metode . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Rezultati</b>	<b>67</b>
4.1	Izračunate kompleksne frekvencije normalnih modova . . . . .	68
4.2	Strukturni koeficijenti . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>94</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Metoda računanja hoda vektora faze</b>	<b>96</b>

# 1 Uvod

Teorija slobodnih oscilacija Zemlje, ili teorija normalnih modova, jedna je od temeljnih teorija u seizmologiji, jer njeno proučavanje omogućuje razumijevanje kako Zemlja, kao dinamički sustav, odgovara na unutarnje i vanjske sile. Proučavanje slobodnih oscilacija predstavlja analiziranje informacija na velikim periodima od 3000 do 200 s. Analiziranje se najčešće provodi računanjem spektra slobodnih oscilacija, koji sadrže važne informacije o strukturi Zemlje na velikoj skali pružanjem osnovnih ograničenja i na sferno simetričnu "usrednjenu" Zemlju i na lateralne varijacije Zemljine strukture uzrokovane temperaturom, sastavom i anizotropijom. Odnosno, jedino se iz podataka zasnovanih na spektru normalnih modova mogu dobiti direktne informacije o trodimenzionalnoj raspodjeli gustoće, čije lateralne varijacije na velikoj skali pružaju informacije o konvekcijskoj, termalnoj i kompozicijskoj evoluciji unutrašnjosti Zemlje. Primjer gdje je teorija normalnih modova doprinijela razumijevanju unutrašnjosti Zemlje su dokazi da je unutrašnja jezgra kruta (Dziewonski i Gilbert, 1971) i anizotropna (Woodhouse i sur., 1986; Tromp, 1993), a kako izgleda amplitudni spektar s jasno izraženim i označenim spektralnim šiljcima koji odgovaraju Zemljinim modovima nalazi se na slici (1.1).



**Slika 1.1** Amplitudni spektar za potres kod otočja Sumatra-Andaman iz 2004. godine na postaji CB (str. 54) s označenim pobuđenim modovima. Za generiranje ovog spektra korišten je niz od 80 sati.

Istraživanje normalnih modova kao jasan zadatak ima otkrivanje i razumijevanje Zemljinog intrinzičnog vibracijskog spektra. Ovaj zadatak je težak, jer kako je već rečeno informacije normalnih modova nalaze se na velikim periodima i da bi se dobila potrebna spektralna rezolucija zapisi moraju biti dovoljno dugi. S druge strane, modovi često atenuiraju puno brže nego li se uspije uspostaviti uzorak za formiranje stojnih valova. Iz tog razloga se u mnogim opažачkim istraživanjima uz seizmogramе prave Zemlje računaju teorijski (sintetički) seizmogrami. Spektralni šiljci realne Zemlje, kao na slici (1.1), pod utjecajem su lateralnih heterogenosti u unutrašnjosti Zemlje koje uzrokuju njihovo odstupanje od teorijskih modela te se umjesto provođenja analize direktno na sam spektar, analiza mora bazirati i na usporedbi između realnih podataka i sintetički generiranih podataka kako bi se ustanovilo koliko i zašto dolazi do odstupanja. U konačnici, cilj je unaprijediti postojeće teorijske modele Zemlje, a time i usklađenost realnih i sintetičkih podataka.

Proučavanja slobodnih oscilacija počela su relativno kasno, jer isključivo potresi magnitude veće od 6.5 oslobađaju dovoljno energije za pobudu slobodnih oscilacija Zemlje, za čije se proučavanje tada mogu koristiti i gravimetri i seizmometri sa svih postaja. Proučavanja su započela tek nakon čileanskog potresa 22. svibnja 1960. godine, dok su tek nakon analize digitalnog zapisa dubokog kolumbijskog potresa od 21. srpnja 1970. godine dostupna mjerenja i podaci omogućili konstrukciju prvog jednodimenzionalog (1-D) modela Zemlje. Ovi modeli Zemlje i danas predstavljaju referentne modele u proučavanjima slobodnih oscilacija (1066A prema Gilbertu i Dziewonskiju, 1975). Veliki napredak u proučavanjima slobodnih oscilacija je postignut nakon instalacije globalne digitalne seizmološke mreže postaja IDA (*International Deployment of Accelerometers*) te instaliranjem *LaCoste-Romberg* mreže gravimetara koje su bile posebno osmišljene za bilježenje slobodnih oscilacija Zemlje. U međuvremenu, postojeće postaje su nadograđene široko pojasnim seizmičkim sensorima, najčešće Wielandt-Streckeisen STS-1. To uključuje postaje koje su korištene za praćenje globalne seizmičnosti kao što je *High-Gain Long Period Network* (HGLP, Savino i sur. 1972), *Seismic Research observatory* (SRO, Peterson i sur., 1980), *World-Wide Standardized Seismograph Network* (WWSSN, Oliver i Murphy, 1971) i *China Digital Seismograph Network* (CDSM, Peterson i Tilgner, 1985). Mnoge ove stanice kao i nadograđena mreža IDA sada su dio globalne seizmološke mreže *Global Seismic Network* (GSN) pod vodstvom organizacije IRIS (*Incorporated Research Institution for Seismology*). Međutim, uz američku globalnu mrežu postoje i ostale globalne mreže postaja kao što je francuska mreža GEOSCOPE (Romanowicz i sur., 1984) te njemačka mreža GEOFON (Hanka i Kind, 1994). Spomenute mreže trenutno zajedno djeluju pod okriljem međunarodne organizacije digitalnih seizmoloških postaja (*Federation of Digital Seismograph Networks*, Romanowicz i Dziewonski, 1986). Uz ovu naprednu mrežu instrumenata do danas postoji otprilike 25 godina aktivnog bilježenja normalnih modova (Widmer-Schmidrig i Laske, 2007) pomoću široko pojasnih seizmoloških postaja. Time se stvorila veliku bazu podataka visoko kvalitetnih dugoperiodičkih se-

izmičkih zapisa, što predstavlja glavni temelj za uspješno analiziranje unutrašnjosti Zemlje.

Cilj ovog rada je promatrati proces razdvajanja (engl. *splitting*) degenerirane frekvencije pet normalnih modova Zemlje (četiri fundamentalna moda  ${}_0S_0$ ,  ${}_0S_2$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  i jedan viši harmonik  ${}_2S_1$ ) na frekvencije singleta modova. Svaki mod u slučaju idealno elastične homogene i izotropne Zemlje može oscilirati jednakom frekvencijom na  $2l + 1$  način (gdje je  $l$  azimutalni red Legendreovog polinoma) što čini multiplet moda. U slučaju odstupanja od prethodno navedene Zemlje svaki navedeni način osciliranja poprima frekvenciju različitog iznosa koja se naziva singlet. Analiziranje će se temeljiti na mjerenju svojstvenih frekvencija singleta i faktora dobrote pomoću autoregresijske metode u frekvencijskoj domeni prema radu Chaoa i Gilberta iz 1980. godine. Prije same obrade podataka i provedbe metode, u drugom poglavlju iznijet će se osnovna teorija slobodnih oscilacija, osnovna teorija obrade podataka i signala te teorija autoregresijske metode u frekvencijskoj domeni. U trećem poglavlju opisat će se korištena skupina podataka i njihova priprema za obradu te postupak analize. U četvrtom poglavlju prezentirat će se rezultati mjerenja, koji su po prvi put dobiveni kombiniranjem podataka iz gravimetara i seizmometara. Rezultati će se usporediti s prijašnjim mjerenjima u literaturi i s teorijskim vrijednostima dobivenih pomoću 1D modela Zemlje te će se analizirati konzistentnost izračunatih standardnih devijacija u usporedbi s omjerom signala i šuma korištenih vremenskih nizova i prijašnjim mjerenjima. Također, na temelju izračunatog niza svojstvenih frekvencija  ${}_0S_2$  pokazat će se kako se može pristupiti računanju strukturnih koeficijenata, veličina koje direktno nose informacije o perturbacijama u unutrašnjosti Zemlje. U zadnjem poglavlju iznijet će se zaključak ovog rada.

## 2 Teorija

### 2.1 Slobodne oscilacije Zemlje

Elastičko-gravitacijski odziv Zemlje na lokalizirano tranzijentna pobuđenja sastoji se od impulzivnih poremećaja praćenih disperzivnim nizom valova i dugotrajnim stojnim valovima. Sve dok potres traje Zemlja odgovara na prisilne oscilacije. Jednom kada potres završi Zemlja je podvrgnuta slobodnim oscilacijama oko novog ravnotežnog stanja. Za potrese srednje i jake jačine na seizmogramu se može uočiti niz valova koji su u potpunosti obišli Zemlju prije nego su stigli do postaje gdje su zabilježeni. Kako je Zemlja konačno tijelo, tranzijentni valovi koji se rasprostiru od lokalnog izvora interferiraju. Za stazu čija je orbitalna duljina višekratnik valne duljine, dva signala interferiraju konstruktivno, inače slijedi destruktivna interferencija. Iz tog je razloga amplitudni spektar kode dugačke nekoliko dana karakteriziran diskretnim linijama koje odgovaraju Zemljinim normalnim modovima, dok je destruktivna interferencija odgovorna za praznine koje odvajaju šiljke (slika (1.1)). Kako je Zemlja dinamički sustav sa  $N$  stupnjeva slobode, gdje je  $N$  beskonačno velik, Zemlja ima beskonačan broj modova osciliranja. Uobičajena teorija rasprostiranja seizmičkih valova promatra gibanje u Zemlji kao poremećaj koji je zahvatio samo mali dio Zemlje u nekom trenutku, odnosno valna teorija razmatra kratke periode slobodnih oscilacija, dok teorija slobodnih oscilacija promatra gibanje cijele Zemlje simultano, gibanje velikih perioda.

#### 2.1.1 Normalni modovi sfere

Možda najjednostavniji slobodno oscilirajući sustav, koji dijeli vezu sa slobodno oscilirajućim sustavom sfere ili Zemlje, je sustav oscilirajuće žice. Za jednodimenzionalni sustav čija valna jednadžba glasi

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

rješenje se može napisati u obliku sume stojnih valova

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(x, \omega_n) \cos(\omega_n t), \quad (2.2)$$

odnosno sume svojstvenih funkcija,  $U_n(x, \omega_n)$ , gdje svaka svojstvena funkcija ima težinu određenu amplitudom  $A_n$  i gdje svaka svojstvena funkcija oscilira svojom svojstvenom frekvencijom,  $\omega_n$ . Svojstvene funkcije i svojstvene frekvencije ovise o fizikalnim svojstvima sustava, u ovom slučaju žice, dok amplituda ovisi o lokaciji i prirodi izvora koji je uzrokovao gibanje. Svojstvene funkcije koje zadovoljavaju valnu jednadžbu jednodimenzionalne žice su sinus i kosinus. Za homogenu žicu duljine  $L$  i

brzine  $c$  uz rubne uvjete da je pomak na krajevima žice jednak nuli dobiva se

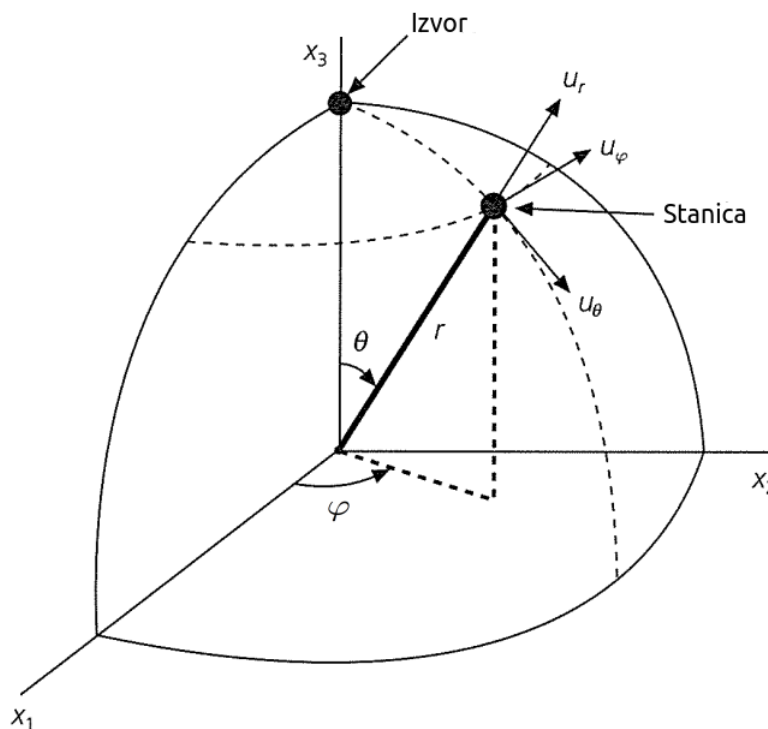
$$U_n(x, \omega_n) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right), \quad (2.3)$$

tako da su svojstvene frekvencije oblika

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}. \quad (2.4)$$

Frekvencija, brzina i valna duljina putujućeg vala povezane su relacijom  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , iz relacije (2.4) slijedi da je  $L = \frac{n\lambda}{2}$  tako da svaka prostorna svojstvena funkcija ima integralni broj jednak polovici valne duljine duž žice. Konačna žica može oscilirati samo u obliku diskretnih modova koji zadovoljavaju rubne uvjete. Svojstvene frekvencije žice međusobno se razlikuju za parametar  $\frac{\pi c}{L}$  te kada bi žica bila beskonačna, svojstvene frekvencije bile bi kontinuirane, a ne diskretne.

Ekstenzija rasprostiranja valova u trodimenzionalnoj sfernoj Zemlji provodi se formuliranjem oscilacija u sfernim koordinatama, koje nazivamo normalnim modovima. Seizmički izvor postavlja se u pol koordinatnog sustava prikazano na slici 2.1. Kako se seizmički izvor nalazi na polu,  $\theta$  je kutna udaljenost od pola, latituda, dok  $\varphi$  definira azimut oko pola, longitudu.



**Slika 2.1** Sferni koordinatni sustav za normalne modove. Izvor potresa nalazi se u polu, tako da u položaju prijarnika radijalna komponenta pomaka  $u_r$  je vertikalna,  $u_\theta$  se nalazi u horizontalnom položaju u vertikalnoj ravnini koja sadrži i izvor i prijarnik, dok je pomak  $u_\varphi$  transverzalan na tu ravninu. Preuzeto iz Sten i Wysession (2003).

Pretpostavit će se da se seizmički valovi rasprostiru u homogeno uniformno elastičkoj



sferi gdje nema izvora seizmičkih valova pa time ni vanjske sile, zanemaruje se sila teža i rotacija sfere. Tada seizmički valovi zadovoljavaju jednadžbu gibanja (Stein i Wysession, 2003)

$$(\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  Laméove konstante, dok je  $\rho$  gustoća. Ova jednadžba može se riješiti pomoću Helmholtzovog teorema, prema kojem se svako vektorsko polje može prikazati kao zbroj bezrotacijske i bezdivergentne komponente

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}, \quad \vec{\nabla} \times \phi = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0. \quad (2.6)$$

Ovako zapisan vektor predstavlja zbroj gradijenta skalarnog potencijala,  $\phi$ , i rotaciju vektorskog potencijala,  $\Psi$  i kao takav zadovoljava vektorske identitete koji odvajaju polje pomaka na dva dijela

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \text{i} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) = 0. \quad (2.7)$$

Dio koji pripada skalarnom potencijalu nema rotaciju i zapravo odgovara longitudinalnim valovima, dok dio koji pripada vektorskom potencijalu nema divergenciju i time ne uzrokuje promjenu volumena te pripada smicajnim valovima. Da bi se pronašlo rješenje jednadžbe (2.5) kreće se s relacijom kada je  $\Psi = 0$  pri čemu (2.6) postaje

$$\vec{u}_1 = \vec{\nabla}\phi. \quad (2.8)$$

Kako se traži slobodna oscilacija kutne frekvencije  $\omega$ , tako da je  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$ , uvrštavanjem (2.8) u (2.5), korištenjem (2.7) i grupiranjem članova pod isti operator slijedi

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi) &= -\rho\omega^2\vec{\nabla}\phi, \\ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla}^2\phi + \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}\phi \right] &= 0, \\ \vec{\nabla}^2\phi + h^2\phi &= 0, \\ h^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} \quad \rightarrow \quad h &= \frac{\omega}{v_p}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdje je  $v_p$  brzina longitudinalnog vala. Da bi se odredio vektorski potencijal  $\vec{\Psi}$  potrebno je promotriti rubne uvjete, a kao mogući rubni uvjet može se postaviti da normalna i tangencijalna komponenta napetosti iščezavaju na graničnoj plohi. Prvi član rješenja (2.6) zove se normalna komponenta, budući da je gradijent usmjeren u smislu najvećeg iznosa promjene skalarnog potencijala, tada se drugi član može nazvati transverzalnom komponentom, jer je rotacija vektora obično transverzalna

na smjer najveće promjene. Kao druga komponenta probat će se

$$\vec{u}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}, \quad \vec{\Psi} = (r, 0, 0)\psi, \quad (2.10)$$

gdje je  $\psi$  skalarna funkcija položaja i vremena. Vektor  $\vec{u}_2$  tangencijalan je na sfernu plohu  $r = \text{konstanta}$  i biti će rješenje ako zadovoljava jednadžbu gibanja (2.5). Novo rješenje (2.10) uvrštava se u (2.5), koristi se vektorski identitet (2.7) i

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^2 \vec{\Psi}) - \vec{\nabla}^2(\vec{\nabla} \vec{\Psi}), \quad \vec{\nabla}^2(\vec{\nabla} \vec{\Psi}) = 0,$$

te grupiranjem članova pod isti operator slijedi

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})] - \mu\vec{\nabla} \times [(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}))] &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}), \\ \vec{\nabla} \times \left[ \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\Psi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} \right] &= 0, \\ \vec{\nabla}^2 \psi - k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad k &= \frac{\omega}{v_s}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdje je  $v_s$  brzina transverzalnog vala. Kako bi se generiralo potpuno transverzalno rješenje, traži se još jedno skalarno polje takvo da je ortogonalno na  $\vec{u}_1$  i  $\vec{u}_2$ . Probat će se vektor

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{c}, \quad \vec{c} = (r, 0, 0)\chi, \quad (2.12)$$

gdje je  $\chi$  skalarna funkcija položaja. Ovaj vektor tangencijalan je na sferne plohe konstantnog radijusa te uvrštavanjem (2.12) u (2.5) slijedi

$$\vec{\nabla}^2 \chi + k^2 \chi = 0. \quad (2.13)$$

Ovim postupkom su određena tri skalarna polja  $\phi, \psi, \chi$ , rješenja Helmholtzove jednadžbe. Općenito rješenje poprima oblik

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times (r\psi, 0, 0) + \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (r\chi, 0, 0). \quad (2.14)$$

Kako se dilatacija volumena,  $\Delta$ , rasprostire istom brzinom kao i longitudinalni valovi umjesto  $\phi$  u relaciji  $\vec{\nabla}^2 \phi + h^2 \phi = 0$  može se supstituirati varijabla dilatacije,  $\Delta$ , i tada se za sferni koordinatni sustav dobiva

$$\vec{\nabla}^2 \Delta = -h^2 \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varphi^2}. \quad (2.15)$$

Separacijom varijabli dilatacija volumena se može napisati u obliku produkta tri funk-

cije  $\Delta = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$ , što supstitucijom u relaciju (2.15) generira jednadžbu

$$\underbrace{\frac{2rR' + r^2R''}{R} + h^2r^2}_{f(R)} + \frac{1}{\sin^2\theta} \left[ \underbrace{\frac{\sin\theta}{P} \frac{\partial}{\partial\theta}(P' \sin\theta)}_{f(\theta)} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{f(\varphi)} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Svaki dio gornje jednadžbe koji ovisi samo o jednoj varijabli mora biti konstantan pa se dobiva

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{2rR' + r^2R''}{R} + h^2r^2 &= l(l+1), \\ r^2R'' + 2rR' + [h^2r^2 - l(l+1)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(P' \sin\theta) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] = 0. \quad (2.19)$$

gdje  $()'$  i  $()''$  označavaju prvi i drugu derivaciju za (2.17) po varijabli  $\varphi$ , za (2.18) po varijabli  $r$  i za (2.19) po varijabli  $\theta$ . Iz relacije (2.17) se vidi da je rješenje za  $\Phi$ , koje ovisi o longitudi  $\varphi$ , oblika

$$\Phi(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi) \quad \text{ili} \quad \sim e^{im\varphi}, \quad (2.20)$$

tako da  $\Phi$  opisuje svojstvo dilatacije volumena u ovisnosti o longitudi,  $\varphi$ . Trigonometrijske funkcije tvore kompletan niz ortogonalnih funkcija i time čine prikladne bazne funkcije. Funkcija  $P$  ovisi o latitudi,  $\theta$ . Uvođenjem argumenta za sferu  $t = \cos\theta$  u (2.19) tako da varijabla  $t$  poprima vrijednosti između  $-1 \leq t \leq 1$  dolazi se do jednadžbe

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP}{dt} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] P = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Jednadžba (2.21) naziva se pridružena Legendreova diferencijalna jednadžba. Rješenja ove jednadžbe nazivaju se Legendreove funkcije  $m$ -tog reda,  $l$ -tog stupnja 1. vrste, gdje je uvjet za postojanje Legendreovih funkcija  $0 \leq m \leq l$

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{\sin^n\theta}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(\cos^2\theta - 1)^l}{dt^{l+m}}. \quad (2.22)$$

Pridružene Legendreove funkcije također tvore kompletan niz ortogonalnih svojstvenih funkcija, odnosno konkretno u slučaju argumenta  $t = \cos\theta$  ortogonalne su na

intervalu  $-1 \leq t \leq 1$  i iz tog razloga su prikladne bazne funkcije za opis kutnih varijacija. Kada su  $m$  i  $l$  cijeli brojevi, a argument funkcije realan, onda Legendreove funkcije postaju polinomi. Azimutalna funkcija  $e^{im\varphi}$  i pridružene Legendreove funkcije zajedno čine normirane sferne harmonike (kugline funkcije)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.23)$$

koji predstavljaju ukupni kutni dio rješenja Helmholtzove jednadžbe. Sferni harmonici su bazne funkcije koje se koriste za aproksimaciju funkcija na površini sfere i uvijek su definirani produktom  $P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ , jedino što se u literaturi koriste različiti faktori normiranja (Ivica Smolić, 2016). Kutne varijacije između  $0$  i  $\pi$  mogu biti ili simetrične kada je zbroj  $l+m$  neparan, ili asimetrične kada je  $l+m$  paran s obzirom na ekvator ( $\theta = \pi/2$ ), dok su azimutalne varijacije periodične ( $\varphi + \pi = \varphi$ ). Kutni stupanj,  $l$ , opisuje broj čvornih linija na površini. Kada je azimutalni red  $m$  jednak nuli, čvorne linije su kružnice oko pola, odnosno u tom slučaju postoji  $l$  čvornih linija duž latituda, a nema čvornih linija duž longitude. Takva rješenja nazivaju se zonalni harmonici te ne ovise o  $\varphi$  (simetrična su s obzirom na pol  $\theta$ ). Kada je  $m = l$ , čvorne linije čine velike kružnice kroz pol, odnosno čvorne linije nalaze se duž longitude, a nema čvornih linija duž latituda. Takva rješenja nazivaju se sektorski harmonici. U slučaju da je  $0 < |m| < l$  rješenja se nazivaju teseralni harmonici i čvorne linije predstavljaju kombinaciju kutnih i azimutalnih (latitudinalnih i longitudinalnih) čvornih obrazaca. Sferni harmonici su također ortogonalni

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_l^{m'*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \delta_{ll} \delta_{m'm}, \quad (2.24)$$

gdje su  $\delta_{ll}, \delta_{m'm}$  Diracove  $\delta$ -funkcije (str. 28.), tako da je integral produkta sfernog harmonika i njegovog konjugiranog para na sferi jednak nuli. Odnosno, sferni harmonici tvore ortogonalni set baznih vektora koji se mogu koristiti za aproksimaciju bilo koje funkcije na površinu sfere, baš kao što su se bazne funkcije sinusa i kosinusa koristile u slučaju žice.

Kako je opće rješenje produkt triju funkcije  $\Delta = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$  preostaje još naći kako  $\Delta$  ovisi o radijalnoj udaljenosti  $r$  plohe sfere. Jednadžba koja određuje funkciju  $R(r)$  je (2.18), gdje je  $h^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$ . Ako je  $h \neq 0$ , može se iskoristiti supstitucija  $\tau = rh$  i uvesti nova funkcija  $Z(\tau)$  za koju vrijedi  $Z(\tau) \equiv R(\frac{\tau}{h})$ . Funkcija  $R$  tada postaje  $R = \sqrt{h}Z(\tau)\tau^{-1/2}$ . Nakon računanja prve i druge derivacije novo definirane funkcije  $R$ , izrazi se supstituiraju u (2.18) da bi se naposljetku dobila relacija

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{d\tau} + \left[ 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{\tau^2} \right] z = 0. \quad (2.25)$$

Dobivena jednadžba je Besselova diferencijalna jednadžba, čija su rješenja Besselove

funkcije  $J_{\pm l \pm \frac{1}{2}}$ . Rješenje od (2.25) je

$$z(\tau) = a_l J_{l+\frac{1}{2}}(\tau) + b_l J_{-(l+\frac{1}{2})}(\tau), \quad (2.26)$$

gdje je  $J$  Besselova ili cilindrična funkcija I. vrste. Za rješenje se koriste rekurzivne formule

$$\begin{aligned} J_{n+l}(\tau) &= (-1)^l \tau^{n+l} \left( \frac{d}{\tau d\tau} \right)^l [\tau^{-n} J_n(\tau)], \\ J_{n-l}(\tau) &= \tau^{-n+l} \left( \frac{d}{\tau d\tau} \right)^l [\tau^n J_n(\tau)]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ako se stavi  $n = \frac{1}{2}$  u prvi izraz gore navedene relacije, a  $n = -\frac{1}{2}$  u drugi izraz te ako se primijene izrazi

$$\begin{aligned} J_{1/2}(\tau) &= \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{1/2} \sin \tau, \\ J_{-1/2}(\tau) &= \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{1/2} \cos \tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

dobivaju se sljedeći izrazi

$$\begin{aligned} J_{l+\frac{1}{2}}(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^l \tau^{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{\tau d\tau} \right)^l \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right), \\ J_{-l-\frac{1}{2}}(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau^{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{\tau d\tau} \right)^l \left( \frac{\cos \tau}{\tau} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Supstitucijom dobivenih izraza u relaciju (2.26) te uvođenjem novih konstanti  $c_l = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_l$  i  $d_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_l$  rješenje  $z(\tau)$  se može zapisati u obliku

$$z(\tau) = \tau^{l+\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{d}{\tau d\tau} \right)^l \left( c_l \frac{\sin \tau}{\tau} + d_l \frac{\cos \tau}{\tau} \right)^l \right] \quad (2.30)$$

Stoga izraz za rješenje  $R(r)$  Besselove jednadžbe (2.18) glasi

$$\begin{aligned} R &= h^{1/2} z(\tau) \tau^{-1/2}, \\ R(r) &= h^{l+\frac{1}{2}} r^l \left( \frac{1}{hr} \frac{d}{d(hr)} \right)^l \left[ \frac{c_l \sin(hr) + d_l \cos(hr)}{hr} \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Iz prethodne relacije je očito da svakom cijelom broju  $l$ , kojem odgovara određena funkcija  $P(\theta)$ , odgovara i jedno rješenje  $R(r)$ . Prema tome, postoje rješenja za  $l = 0, 1, 2, \dots$ , tako da u općem rješenju za funkciju  $\Delta$  moramo pretpostaviti superpoziciju svih tih rješenja. Kako bi rješenje odgovaralo realnosti, konstante  $c_l$  i  $d_l$  odabiru se tako da zadovoljavaju određene rubne uvjete, a to je da rješenje mora biti konačno

za svaku točku u unutrašnjosti Zemlje, to jest za svaki  $r$ , gdje je  $0 \leq r \leq R$ . Kako bi prethodni uvjet bio zadovoljen i za središte sfere ( $r = 0$ ), konstanta  $d_l$  mora biti nula, tako da konačno rješenje Besselove jednadžbe (2.18) (veličina  $h^{l+\frac{1}{2}}$  uključena je u novu veličinu  $C_l$ ) glasi

$$R(r) = C_l r^l \left( \frac{1}{hr} \frac{d}{d(hr)} \right)^l \left[ \frac{\sin hr}{hr} \right]. \quad (2.32)$$

Prethodna funkcija opisuje kako se dilatacija volumena mijenja s radij vektorom, to jest, kako se mijenja s udaljenošću od središta sfere. Budući da i ovdje postoji  $l$  rješenja to je zbog linearnosti i njihova linearna kombinacija također rješenje. Na taj način konačno rješenje za dilataciju volumena traži se u obliku sume i može se zapisati u obliku

$$\Delta = \sum_{l,m} R \cdot P \cdot \Phi = \sum_l C_l r^l \left( \frac{1}{hr} \frac{d}{d(hr)} \right)^l \left[ \frac{\sin hr}{hr} \right] \sum_m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (2.33)$$

Prethodna relacija predstavlja opće rješenje za dilataciju volumena pri slobodnom osciliranju homogene elastičke sfere. Kako dilatacija volumena oscilira istim periodom kao i čestice  $\phi = \Delta e^{i\omega t}$ , rješenje Helmholtzovih jednadžbi (2.9) postaje

$$\phi = z_l(hr) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} e^{i\omega t}. \quad (2.34)$$

Jednadžba (2.18) uz odgovarajuće rubne uvjete određuje beskonačan niz svojstvenih funkcija  ${}_n\omega_l$ , a kako se  $\omega$  nalazi u  $h$ , svojstvene su vrijednosti definirane  $h = \frac{n\omega_l}{v_p}$ . Na primjer, ako se u (2.32) uvrsti  $l = 0$  i uzme u obzir rubni uvjet na slobodnoj površini,  $r = r_0$ ,  $R(r_0) = 0$  slijedi

$$R(r_0) = \sqrt{\frac{v_p c_0}{\omega r}} \sin \left( \frac{\omega r}{v_p} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Iz prethodne relacije se može dobiti izraz za svojstvene frekvencije homogene elastičke sfere

$${}_n\omega_0 = \frac{(n+1)\pi v_p}{r_0} \quad (2.36)$$

gdje  $n = 0$  označava fundamentalne modove, dok  $n \geq 1$  označava više harmonike.

Isti oblik rješenja (2.34) dobiven za (2.9) vrijedi i za (2.11) i (2.13). Ukupno rješenje dobiva se raspisivanjem (2.14) prema komponenta. Rješenje je općenito vrlo složeno, ali se može pojednostaviti tako da se vibracije tla  $\vec{u}$  rastave na dvije klase vibracija: sferoidalne oscilacije (pandan Rayleighjevima valovima) i toroidalne oscilacije (pandan Loveovim valovima).

Zaključno, prema analogiji s (2.34) rješenje jednadžbe (2.5) može se zapisati u

obliku sume normalnih modova

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_n \sum_l \sum_m {}_n A_l^m {}_n y_l(r) x_l^m(\theta, \varphi) e^{i_n \omega_l^m t}. \quad (2.37)$$

Kako se radi o trodimenzionalnom sredstvu, svaki mod opisuje se radijalnim redom  $n$  (dubina) i dva površinska reda  $l$  i  $m$ . Sva tri indeksa imaju diskretne vrijednosti jer je Zemlja konačno tijelo. Svojstvene funkcije ovise o sva tri indeksa te je prostorni oblik opisan radijalnom skalarnom svojstvenom funkcijom  ${}_n y_l(r)$  (Besselove jednadžbe) i površinskom vektorskom svojstvenom funkcijom  $x_l^m(\theta, \varphi)$  (sferni harmonici). Suma normalnih modova ovisi o težinskim funkcijama svojstvenih funkcija,  ${}_n A_l^m$ , odnosno amplitudama koje ovise o seizmičkom izvoru. Prema tome, pomak moda varira na Zemljinoj površini i ovisi o pobuđenju moda i lokaciji moda relativno na izvor te upravo ove dvije kombinacije kontroliraju vrijednosti površinskih svojstvenih funkcija. Izraz (2.37) može se bolje razumjeti ako se izračuna Fourierov transformat seizmograma dugačkog nekoliko dana ili tjedana nakon relativno snažnog potresa. Na amplitudnom spektru uočavaju se šiljci na određenim frekvencijama koji odgovaraju normalnim modovima. Zato, ako se seizmogram shvati kao suma modova može se dobiti novi uvid u prirodu seizmograma. Odvajanje radijalnih i površinskih svojstvenih funkcija u sumaciji normalnih modova ima zanimljive posljedice. Zemlja je oblikom bliska sferno simetričnom modelu (lateralno homogeni model) jer njena struktura više varira s dubinom nego što varira lateralno na nekoj dubini. Također, kada bi Zemlja bila u potpunosti lateralno homogena, površinske svojstvene funkcije ne bi utjecale na svojstvene frekvencije, tako da se za lateralno homogenu Zemlju može pisati  ${}_n \omega_l^m = {}_n \omega_l$ , a pokazat će se da to ne vrijedi za realnu Zemlju.

### 2.1.2 Toroidalni modovi

Koristeći sferne harmonike eksplicitno se mogu napisati normalni modovi sfere, (2.37). U Kartezijevom koordinatnom sustavu pomak se dijeli na P-SV i SH valove kao posljedica toga da se ovi valovi rasprostiru neovisno jedno o drugom u sredstvu čija svojstva variraju samo s dubinom te u ravnini koja sadrži i izvor i prijammnik. U sfernoj geometriji provodi se slično razdvajanje pomaka normalnih modova. Analogno SH valovima postoje toroidalni ili torzijski modovi. Njihove površinske svojstvene funkcije definirane su vektorom sfernih harmonika s  $(r, \theta, \varphi)$  komponentama

$$T_l^m = \left( 0, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{-\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right). \quad (2.38)$$

Vektor sfernih harmonika čine vektori čije komponente sadrže derivacije sfernih harmonika kao posljedica jednadžbe gibanja koja sadrži prostorne derivacije pomaka.

Vektor pomaka  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$  za toroidalne modove glasi

$$\vec{u}^T(r, \theta, \varphi) = \sum_n \sum_l \sum_{m=-l}^l {}_n A_l^m {}_n W_l(r) \vec{T}_l^m(\theta, \varphi) e^{in\omega_l^m t}. \quad (2.39)$$

Svojtvena funkcija koja ovisi o radijusu,  ${}_n W_l(r)$ , varira s dubinom, iako konačan pomak nema radijalne komponente, jer je  $u_r = 0$ . Iz tog razloga toroidalni modovi imaju samo horizontalni pomak i time su analogni SH valovima. Također, njihova divergencija jednaka je nuli tako da oni ne uzrokuju promjenu volumena. Toroidalni modovi nose oznaku  ${}_n T_l^m$ , gdje  $n$  označava radijalni red,  $l$  kutni stupanj i  $m$  azimutalni red. Za određeni radijalni red i kutni stupanj postoji  $2l + 1$  modova različitog azimutalnog reda, gdje se pojedini mod azimutalnog reda  $-l \leq m \leq l$  naziva singlet, dok grupa singleta (engl. *singlets*) čini multiplet (engl. *multiplet*). Kada bi Zemlja bila savršeno sferno simetrična i ne rotirajuća, tada bi svi singleti unutar jednog multipleta imali istu svojtvenu frekvenciju. Ovo se stanje naziva degeneracija. Na primjer, period moda  ${}_n T_l^0$  bio bi jednak periodima modova  ${}_n T_l^{\pm 1}$ ,  ${}_n T_l^{\pm 2}$ ,  ${}_n T_l^{\pm 3}$  i tako dalje. U realnoj Zemlji frekvencije singleta variraju i taj efekt se naziva razdvajanje (engl. *splitting*). Međutim, razdvajanje singleta je jako mali efekt i često se zanemaruje pa se izostavljanjem indeksa  $m$  oznaka  ${}_n T_l$  referira na cijeli mod svojtvene frekvencije  ${}_n \omega_l$ . Za toroidalne pomake horizontalni pomaci,  $u_\theta$  i  $u_\varphi$ , jednaki su nuli na čvornim linijama, zato jer kutni pomak  $u_\theta$  iščezava za  $\partial Y_l^m / \partial \varphi = 0$  te azimutalni pomak iščezava za  $\partial Y_l^m / \partial \theta = 0$ . Za demonstraciju uzet će se toroidalni mod s najnižom frekvencijom (najvećim periodom)  ${}_0 T_2^0$ . U ovom slučaju nema radijalnih gibanja dok je kutni pomak uvijek jednak nuli jer je  $m = 0$ , zato jer je pomak  $u_\theta$  proporcionalan izrazu

$$\frac{1}{\sin \theta} P_2^0(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{im\varphi}) = \frac{1}{\sin \theta} P_2^0(\cos \theta) (im) e^{im\varphi} = 0$$

i jedini pomak koji nije jednak nuli je  $u_\varphi$  koji je proporcionalan

$$e^{im\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_2^0(\cos \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Prema prethodnoj relaciji očito je da pomak iščezava na polovima ( $\theta = 0^\circ$  i  $180^\circ$ ) i na ekvatoru ( $\theta = 90^\circ$ ). Ovakvo gibanje je na sjevernoj i južnoj polutci suprotnog smjera jer je  $\sin \theta$  neparna funkcija i ova čvorna linija na površini dio je čvorne ravnine koja prolazi kroz Ekvator. Kako je toroidalni mod  ${}_0 T_2^0$  fundamentalan mod, tako da nema čvornih ploha u unutrašnjosti, isti uzorak gibanja na površini nastavlja se i kroz plašt, dok vanjska jezgra predstavlja slobodnu površinu za toroidalne modove i oni se ne rasprostiru kroz vanjsku jezgru i tako nikada ne dolaze do unutarnje jezgre. Radijalni red opisuje kako mod toroidalnih slobodnih oscilacij varira s radijusom, dok kutni stupanj i azimutalni red opisuju kako varira s latitudom i longitudom. Za



toroidalne modove,  $n$  predstavlja broj čvornih sfernih ploha unutar Zemlje. Kada je  $n = 0$  nema čvornih ploha i smjer kretanja na zadanoj latitudi i longitudi jednak je na svim dubinama. Za toroidalne modove kutni stupanj  $l$  je jednak jednom broju više nego što postoji broj čvornih linija na površini. Oblik i raspodjela tih čvornih linija ovise o azimutalnom redu  $m$ , koji daje broj vertikalnih čvornih ploha koji presjecaju Zemlju prolazeći kroz pol. Za  $m = 0$  čvorne linije su male kružnice oko pola, a ako je  $m = l - 1$ , čvorne linije su velike kružnice koje prolaze kroz pol. Toroidalni modovi za koje je  $n = 0$  nazivaju se fundamentalni modovi. Njihova oscilacija jednaka je na svim dubina. Ovo ne vrijedi za modove čiji je radijalni red veći od nule,  $n > 0$ , a nazivaju se harmonici.

U grupi toroidalnih modova zanimljivi su  ${}_0T_1$  i  ${}_0T_0$  modovi. Kako je broj čvornih ploha jednak  $l - 1$ , mod  ${}_0T_1$  očito nema čvornih ploha. Fizički, ovaj mod predstavlja rotaciju krutog tijela. Seizmički valovi generirani potresom jako su dobro opisani sustavom dvostrukog para sila, koji ne generira torziju i time ne utječe na rotaciju Zemlje. U vrlo rijetkim slučajevima, snažni potresi mogu uzrokovati vertikalni pomak stijena i time utjecati na Zemljinu rotaciju. Međutim, kako toroidalni modovi ne uključuju radijalne pomake, očuvanje kutnog momenta zahtjeva da mod  ${}_0T_1$  bude jednak nuli. S druge strane, postoje njegovi harmonici kao što su  ${}_1T_1$ ,  ${}_2T_1$ , koji uključuju oscilaciju cijele sferne ljuske Zemlje u jednom smjeru, dok unutarnje ljuske osciliraju u suprotnom smjeru. Mod  ${}_0T_0$  nema fizikalno značenje i stoga je nedefiniran.

### 2.1.3 Sferoidalni modovi

Sferoidalni modovi, poznati i pod imenom poloidalni modovi, predstavljaju klasu oscilacija tijekom koje dolazi do stezanja i rastezanja volumena, što uzrokuje promjenu gustoće, a time i promjenu gravitacije (analogno rasprostiranju P-SV valova). Ovi modovi su kompliciraniji od toroidalnih modova jer uključuju vertikalna i horizontalna gibanja, a njihove površinske svojstvene funkcije opisuju se pomoću dva vektorska sferna harmonika komponentata

$$R_l^m = (Y_l^m, 0, 0), \quad (2.40)$$

$$S_l^m = \left( 0, \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right). \quad (2.41)$$

Svaka komponenta odgovara različitoj radijalnoj svojstvenoj funkciji,  ${}_nU_1(r)$  ili  ${}_nV_1(r)$  tako da je vektor pomaka  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$  za sferoidalne oscilacije definiran relacijom

$$u^S(r, \theta, \varphi) = \sum_n \sum_l \sum_{m=-l}^l {}_n A_l^m \left[ {}_n U_l(r) \vec{R}_l^m(\theta, \varphi) + {}_n V_l(r) \vec{S}_l^m(\theta, \varphi) \right] e^{i n \omega_l^m t}. \quad (2.42)$$

Prema tome radijalna svojstvena funkcija  ${}_n U_1(r)$  odgovara radijalnom (vertikalnom) gibanju, dok  ${}_n V_1(r)$  odgovara horizontalnom gibanju. Dokaz da tri vektorska sferna harmonika zaista odvajaju P-SV od SH gibanja temelji se na činjenici da su tri vektorska sferna harmonika međusobno ortogonalna

$$T_l^m \cdot S_l^m = T_l^m \cdot R_l^m = S_l^m \cdot R_l^m = 0. \quad (2.43)$$

Pri opisivanju sferoidalnih modova koristi se ista nomenklatura kao i za toroidalne modove. Fundamentalni modovi, koji ne sadrže unutarnje čvorne plohe, opisani su s  $n = 0$ . Kako se  $n$  povećava tako se povećava i broj unutarnjih čvornih ploha, ali za razliku od toroidalnih modova  $n$  ne označava broj unutarnjih čvornih ploha. Kutni stupanj,  $l$ , označava ukupan broj čvornih površinskih linija, dok azimutalni red  $m$  označava broj čvornih kružnica koje prolaze kroz pol. Sferoidalni radijalni modovi za koje vrijedi da je  $l = 0$  imaju jedino radijalnu komponentu gibanja i nemaju svoj toroidalni analog. Primjer sferoidalnog radijalnog moda je mod "disanja" (engl. "breathing" mode),  ${}_0 S_0$ , koju uključuje radijalan pomak cijele Zemlje koja oscilira između ekspanzije i kontrakcije. Mod s najnižom frekvencijom, odnosno najvećim periodom zabilježenim do danas je  ${}_0 S_2$  mod perioda 54 minute. Singlet  ${}_0 S_2^0$  oscilira između ravnog diska i izduženog oblika koji podsjeća na oblik lopte za američki nogomet pa se ovaj mod još zove "nogometna lopta" (engl. "football" mode). Mod  ${}_0 S_1$ , koji bi uključivao bočno gibanje cijele planete, ne postoji. Međutim, povećanjem kutnog stupnja,  $l$ , povećava se broj čvornih površinskih linija pa se ti modovi pojavljuju.

#### 2.1.4 Atenuacija, razdvajanje i sprega modova

Do sada su samo spomenuti modovi sferno simetrične nerotirajuće u potpunosti elastičke i izotropne Zemlje. Ovako idealizirano tijelo, koje se naziva SNREI, smatra se razumnom aproksimacijom jer je Zemlja aproksimativno sferno simetrična i elastična, a njen period rotacije je relativno dugačak u usporedbi s periodima normalnih modova. U tom slučaju očekuje se da bi amplitudni spektar sadržavao diskretne šiljke koji odgovaraju normalnim modovima. Međutim, ako obratimo pažnju na amplitudni spektar realnog seizmograma, može se uočiti da pojedini šiljci variraju u širini kao i da se neki od njih preklapaju. Ove značajke reflektiraju kompleksnost mjerenja normalnih modova realne Zemlje.

Seizmogrami nisu beskonačno dugi tako da pomak moda nije čista sinusoida jedinstvene frekvencije koja se širi u beskonačnom vremenu, nego stane kada je seizmogramu kraj. Uzimanje konačne duljine seizmograma ima efekt na spektralne

šiljke u amplitudnom spektru: umjesto oštre delta funkcije šiljci se proširuju. Što se koristi kraći seizmogram to je spektralno proširenje šiljka veće. Ovaj problem može se riješiti ako se uzme u obzir dulji seizmogram koji će prouzrokovati uže spektralne šiljke, međutim ne može se uzeti ni proizvoljno dug seizmogram jer što se dulje čeka nakon potresa, signal se sve više smanjuje relativno u odnosu na pozadinski šum. Činjenica da se amplituda modova smanjuje s vremenom opisuje se procesom atenuacije gdje se seizmička energija vala pretvara u toplinu. Atenuacija predstavlja devijaciju Zemlje od savršene elastičnosti. Ovaj efekt modelira se kao produkt peri-odične oscilacije i članom koji opisuje opadanje amplitude:

$$e^{in\omega_l^m} e^{-\frac{n\omega_l t}{2nQ_l}}, \quad (2.44)$$

gdje je  ${}_nQ_l$  atenuacija moda ili faktor dobrote, koji je jednak za sve singlete unutar istog multipleta za model Zemlje SNREI. Faktor dobrote  $Q$  beskonačne vrijednosti znači da atenuacije nema i takva bi oscilacija trajala zauvijek, dok male vrijednosti faktora dobrote uzrokuju brzo trnjenje oscilacija. Za očekivati je da faktori dobrote realne Zemlje nisu jednaki za singlete unutar multipleta. U praksi, oni se također mjere jer opisuju kako brzo modovi atenuiraju.

Postoje i ostali efekti koji utječu na oblik spektralnih šiljaka u amplitudnom spektru. Za model Zemlje SNREI frekvencije modova ovise jedino o radijalnom redu  $n$  i kutnom stupnju  $l$ , tako da  $2l + 1$  singleta različitog azimutalnog reda  $-l \leq m \leq l$  imaju istu svojstvenu frekvenciju. Međutim, u realnoj Zemlji frekvencije singleta unutar multipleta variraju i uzrokuju razdvajanje moda (engl. *mode splitting*). Razdvajanje singleta uzrokuje proširenje spektralnog šiljka cijelog multipleta. Uzrok razdvajanja moda može se vizualizirati ako se uzme u obzir da je multiplet sastavljen od superpozicije singleta, dok singleti odgovaraju valovima koji putuju različitim stazama oko Zemlje. Zbog činjenice da valovi na prijarnike stižu stazama različitih duljina i/ili različitim brzinama, dolazi do efekta razdvajanja. Kada bi Zemlja bila sferna nerotirajuća i sferno simetrična sve staze bi bile jednake duljine i imale jednako vrijeme putovanja, što u slučaju prave Zemlje nije istina i to narušava konstruktivnu interferenciju valova koji čine slobodne oscilacije. S druge strane, relacija između brzine vala i svojstvene frekvencije (2.36) ukazuje da će se pojedine svojstvene frekvencije međusobno razlikovati ako valovi posjeduju i različite brzine. Efektu razdvajanja pridonosi i Zemljina rotacija. Prva posljedica rotacije je Coriolisova sila. Valovi koji putuju u smjeru rotacije Zemlje putuju brže nego valovi koji putuju u suprotnom smjeru. Kako je ovaj efekt proporcionalan omjeru perioda moda i Zemljine rotacije najveći je za  ${}_0S_2^0$  mod i smanjuje se za modove manjih perioda. Indirektni efekt rotacije je eliptični oblik Zemlje, što uzrokuje da valovi koji putuju preko pola prolaze udaljenost manju za 67 km nego valovi koji putuju oko ekvatora. Zatim, na promjenu brzina dubinom i lateralno jako utječe nehomogenost u unutrašnjosti Zemlje. Seizmičke brzine na bilo kojoj dubini lateralno variraju ba-

rem nekoliko posto te su ove varijacije bitne za razumjevanje procesa tektonike kao i konvekcije u plaštu. Razdvajanje moda uzrokuje i seizmička anizotropnost, koja se javlja kada se valovi rasprostiru različitim smjerovima u istom području različitim brzinama. Svime navedenim, očito je da se frekvencije singleta mogu iskoristiti za otkrivanje trodimenzionalne strukture Zemlje.

Osim efekta razdvajanja u Zemlji se javlja i efekt sprege između modova. Ako promatramo homogenu žicu, njeni modovi oscilacije su u potpunosti ortogonalni i ne međudjeluju jedni s drugima. Slično tome, u modelu Zemlje SNREI energija se ne prenosi s jedne oscilacije na drugu. Međutim, u realnoj Zemlji procesi kao što su rotacija, eliptičnost, lateralna nehomogenost i anizotropija utječu ne samo na svojstvene frekvencije nego i na svojstvene funkcije modova. Rezultat te činjenice je da svojstvena funkcija određenog moda sadrži i svojstvenu funkciju koju bi imala u slučaju modela SNREI kao i perturbaciju zbog doprinosa svojstvenih funkcija onih modova koji imaju vrlo slične svojstvene frekvencije kao i mod koji se promatra. Efekt sprege se može javiti između modova iz različitih grupa, u istoj grupi ili čak između singleta različitih azimutalnih redova unutar samog moda. Iako bi u teoriji potres trebao pobuditi samo, npr.,  $m = 0$ ,  $m = \pm 1$  i  $m = \pm 2$  singlete u slučaju  ${}_0S_2$  moda, jer emitira energiju prema uzorku četverostruke simetrije na ravnini rasjedanja, energija se također prenosi i na ostale singlete. Sprega se može dogoditi i između sferoidalnih te toroidalnih modova, time toroidalni modovi mogu doprinijeti radijalnom pomaku što ne bi bio slučaj da je u pitanju model Zemlje SNREI (Widmer i Laske, 2007). Posljedica toga je da spektralni šiljak u amplitudnom spektru može određivati više modova vrlo bliskih frekvencija između kojih dolazi do sprege i ti modovi se nazivaju supermultipletima.

Istraživanje teorije normalnih modova najviše se bazira na analiziranju kako perturbacije u jednadžbama gibanja uzrokovane rotacijom, eliptičnošću Zemlje, lateralnim nehomogenosti utječu na promjenu svojstvenih frekvencija i funkcija u odnosu na referentni SNREI model, koji predstavlja neperturbirani sustav. U konačnici, spektralni šiljci u amplitudnom spektru normalnih modova odražavaju kombinirane efekte uzrokovane potresom, sfernom i elastičnom Zemljinom strukturom, atenuacijom, rotacijom, eliptičnošću, lateralnom heterogenosti i anizotropijom. Podaci koji ukazuju na odstupanje realne Zemlje od jednostavnog modela koriste se kako bi se analizirala ta odstupanja i bolje opisala realna Zemlja.

### 2.1.5 Mjerenje normalnih modova

Najjednostavniji način na koji se modovi mogu izdvojiti iz seizmograma je računanje njegovog Fourierovog transformata. Gubitak energije samih modova, blizina ostalih modova kao i prisutnost šuma uzrokuju potrebu za korištenje različitih optimizacionih spektralnih tehnika kao što je, na primjer, upotreba odgovarajućeg skupa prozorskih funkcija (Harris, 1978), jer je pravilno korištenje prozorskih funkcija vrlo bitno u mjerenju brzine atenuacije modova i međusobnog razdvajanja spektralnih šiljaka.

Međutim, osim samih tehnika mjerenja veliki problem predstavlja i kvaliteta podataka jer je ponekad teško pronaći kontinuirani neporemećen niz podataka za analizu slobodnih oscilacija. Najbolji primjer je  ${}_0S_0$  mod, za čiju je pravilnu analizu potreban vremenski niz dugačak čak dva i pol mjeseca. U takvom nizu podataka često se javljaju praznine u podacima tako da je od velike važnosti razumjeti i kako te praznine u podacima uzrokuju deformacije u kompleksnom spektru. Nadalje, jedan od središnjih problema prilikom analiziranja modova je i razina pozadinskog šuma na različitim postajama, koja se detaljno proučava i uspoređuje (Rosat i Hinderer, 2011). Općenito, očito je da razina pozadinskog šuma ograničava mogućnost detekcije malih seizmičkih signala koji se rasprostiru kroz Zemlju i time nose informacije o seizmičkom izvoru kao i o strukturi sredstva kroz koji se val rasprostirao. Raznim studijama pokazalo se da supravodljivi gravimetri (Goodkind, 1999) postižu najnižu razinu instrumentalnog šuma u usporedbi s dugoperiodičkim seizmometrima u frekvencijskom pojasu ispod 1 mHz. Ovaj frekvencijski pojas od izuzetne je važnosti jer to je pojas gdje su modovi najosjetljiviji na lateralne heterogenosti i 1D strukturu gustoće.

Kako bi se Zemljini normalni modovi mogli opaziti kao diskretni šiljci u spektru zapisa potresa niz kriterija mora biti zadovoljen. Jedan od kriterija je da seizmički izvor mora proizvesti minimalnu momentnu magnitudu od  $M_w \approx 6.5$ . Zatim, kako se modovi mogu reprezentirati kao interferencija valova koji se rasprostiru u suprotnim smjerovima oko Zemlje, za analizu i Fourierov transformat mora se koristiti vremenski niz koji je dug najmanje 3 sata, jer to je vrijeme koje je potrebno dugoperiodičkim valovima da jednom obiđu Zemlju ako se pretpostavi da je grupna brzina vala oko 3.7 km/s. Međutim, kako bi frekvencijska rezolucija bila najveća moguća, moraju se koristiti zapisi i dulji od 3 sata. Poznato je da u praksi postoji kompromis između frekvencijske rezolucije i duljine signala. Iako dulji signal predstavlja bolju frekvencijsku rezoluciju, zbog atenuacije modova postoji trenutak kada produljivanjem signala jedino što se dodaje je šum. Istraživanja su pokazala da se dobar kompromis između frekvencijske rezolucije i visokog omjera signala i šuma postiže koristeći duljine zapisa koji odgovaraju Q ciklusu moda (Dahlen i Sailor, 1979), gdje faktor dobrote Q opisuje vrijeme potrebno da se amplituda signala smanji za  $e^{-\pi}$ . Q ciklus moda računa se kao omjer faktora dobrote moda i njegove frekvencije.

### 2.1.6 Strukturni koeficijenti

Često se efekt razdvajanja frekvencije multipleta na frekvencije singleta opisuje modelom rotirajuće Zemlje u hidrostatičkoj ravnoteži (Ritzwoller i sur., 1986). Takav model (od sada nadalje RH model) uključuje efekte rotacije i eliptičnosti izračunate prema Clairautovom teoremu. Kako RH model sadrži osnosimetričnu nesfernost<sup>1</sup>, svojstvene funkcije singleta u sferno simetričnom koordinatnom sustavu, čije se središte

<sup>1</sup>Sinonim za lateralnu heterogenost.

nalazi u polu osi simetrije, glase (Ritzwoller i sur., 1986)

$$\sigma_k^m(r) = \hat{r}U_k(r)Y_l^m(\theta, \varphi) + V_k(r)\nabla_1 Y_l^m(\theta, \varphi) - W_k(r)\hat{r} \times \nabla_1 Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (2.45)$$

U (2.45), gdje je  $k$  indeks multipleta, izostavljena je ovisnost  $e^{i\omega_k t}$ , gdje  $\omega_k$  predstavlja degeneriranu frekvenciju multipleta, dok se  $2l + 1$  singleta označavaju azimutalnim redom  $m$ ,  $-l \leq m \leq l$ . Prema Dahleu (1968) frekvencije singleta slijede kvadratičnu raspodjelu u ovisnosti o azimutalnom redu  $m$ :

$$\omega_m = \omega_k(1 + a + mb + m^2c), \quad (2.46)$$

gdje je  $\omega_m$  frekvencija  $m$ -tog singleta,  $\omega_k$  degenerirana frekvencija multipleta,  $a$  i  $c$  eliptični strukturni koeficijenti,  $b$  rotacijski strukturni koeficijent. Multipleti vrlo niskih frekvencija, čije je razdvajanje dominantno pod utjecajem Coriolisove sile (npr.  ${}_0S_{2-0}S_{5,1}S_{2-1}S_4$ ), posjeduju aproksimativno linearnu raspodjelu frekvencija singleta ( $b > c$ ), dok multipleti viših harmonika dominantno osjetljivi na efekt hidrostatičke eliptičnosti i efekt heterogene strukture (npr.  ${}_{11}S_{4,10}S_2$ ) posjeduju aproksimativno paraboličku raspodjelu frekvencija singleta ( $b < c$ ). Tablica spomenutih strukturnih koeficijenata  $a$ ,  $b$  i  $c$  za određene multiplete niskih frekvencija može se pronaći u Dahlen i Sailor (1979). Kvadratnu raspodjelu frekvencija singleta RH modela definiranu pomoću (2.46) može uništiti nesferna struktura Zemlje uzrokujući spregu pojedinih singleta. Takvo razdvajanje singleta može se okarakterizirati kao normalno ili anomalno. Ako raspon u kojem se frekvencije singleta opažaju odgovara rasponu predviđenom RH modelom, kaže se da je razdvajanje normalno. Međutim, kada RH model nije pogodan za opis opaženog razdvajanja, kaže se da je razdvajanje anomalno. Anomalno razdvajanje najčešće se veže uz modove jezgre, a Woodhouse i sur. (1986) je anomalno razdvajanje pripisao anizotropnosti unutarnje jezgre što je sada široko prihvaćeno objašnjenje.

Kako bi se shvatilo kako nesferna struktura utječe na frekvencije singleta, promatrat će se prvo izolirani multiplet, koji nije značajno pod utjecajem sprege bilo kojeg drugog multipleta, i model Zemlje SNREI. Ako se s  $k$  označe tri parametra koji karakteriziraju multiplet (tj.  $n$ ,  $l$  i vrsta multipleta, torodialan ili sferoidaln mod) tada se pomak na položaju  $\vec{r}$  pobuđen točkastim izvorom na položaju  $\vec{r}_0$  opisan momentnim tenzorom  $\vec{M}$  može zapisati u obliku (Gilbert i Dziewonski, 1975)

$$s(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \sum_k \vec{\sigma}_k^T(\vec{r}) \vec{a}_k(\vec{r}_0) e^{i\omega_k t} \right] \quad (2.47)$$

gdje eksponent  $T$  označava transponirani vektor, dok produkt  $\vec{\sigma}_k^T(\vec{r}) \vec{a}_k$  označava sumu  $2l + 1$  singleta. Vektor prijarnika  $\vec{\sigma}_k^T(\vec{r})$  ima  $2l + 1$  komponentu koje su opisane s (2.45), dok je  $\vec{a}_k(\vec{r}_0)$  vektor pobude koji sadrži seizmički moment i tenzor napetosti izračunat u izvoru na lokaciji  $\vec{r}_0$ . Pomak koji odgovara (2.47) za generalno lateralno

heterogenu Zemlju može se napisati u obliku izraza

$$s(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \sum_k \vec{\sigma}_k^T(\vec{r}) e^{i\vec{H}^k t} \vec{a}_k(\vec{r}_0) e^{i\omega_k t} \right], \quad (2.48)$$

gdje je  $\vec{H}^k$  kompleksna matrica razdvajanja, dimenzija  $(2l+1) \times (2l+1)$ , koja zapravo sadrži efekt nesferne strukture. Elementi matrice  $\vec{H}^k$  linearno su povezani sa strukturnim perturbacijama koje uzrokuju razdvajanje multiplleta. Matrica  $\vec{H}^k$  poprima izraz (izostavlja se indeks  $k$  zbog jasnoće)

$$H_{mm'} = \omega_k(a + mb + m^2c)\delta_{mm'} + \sum_s \gamma_s^{mm'} c_s^{m-m'}, \quad (2.49)$$

gdje prvi član relacije, dijagonala matrice  $\vec{H}$ , sadrži efekte razdvajanja kao što su rotacija i eliptičnost Zemlje, dok drugi član predstavlja utjecaj ostalih, nesfernih perturbacija, odnosno koeficijent  $c_s^{m-m'}$  sadrži perturbaciju gustoće, kompresibilnosti, smicanja i diskontinuiteta. Svaki multiplet  $k$  posjeduje jedinstven niz kompleksnih koeficijenata  ${}_k c_s^t$  čije su amplitude i faze funkcije količine i raspodjele Zemljine heterogenosti i načina na koji multipljeti uzorkuju heterogenosti. Procjena strukturnih koeficijenata  $c_s^t$  u potpunosti određuje matricu razdvajanja i time efekte lateralne heterogenosti na polje pomaka. Koeficijenti  $\gamma_s^{m,m'}$  su Wignerovi 3-j simboli definirani prema Edmondsu (1960) kao

$$\gamma_s^{mm'} = (-1)^{-m} (2l+1) \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} \begin{bmatrix} l & l & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & l & s \\ -m & m' & t \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Navedeni koeficijenti zadovoljavaju niz pravila i nisu jednaki nuli jedino kada je  $s$  paran,  $0 \leq s \leq 2l$  i  $t = m - m'$ . Ova svojstva definiraju kada će multiplet biti osjetljiv na lateralno heterogenu strukturu. Na primjer, prvo i drugo pravilo koje zadovoljavaju koeficijenti  $\gamma_s^{m-m'}$  definira da će multiplet harmoničkog stupnja  $l = 2$  biti osjetljiv samo na harmoničku strukturu reda  $s = 2$  i  $s = 4$  nesferne strukture.

Također, konceptijski je vrlo korisno promatrati spektralnu dekompoziciju matrice  $\vec{H}^k$

$$\vec{H}^k \vec{U}^k = \vec{U}^k \vec{\Omega}^k, \quad (2.51)$$

gdje je  $\vec{U}^k$  unitarna matrica čiji su stupci svojstveni vektori matrice  $\vec{H}^k$ , dok je  $\vec{\Omega}^k$  dijagonalna matrica koja sadrži svojstvene vrijednosti matrice  $\vec{H}^k$ . Problem se pojednostavljuje kada je matrica  $\vec{H}^k$  dijagonalna, što vrijedi za RH model Zemlje. Prema (2.50) to znači da je svaki singlet osjetljiv samo na rotaciju, eliptičnost Zemlje i os-

nosimetričnu strukturu ( $m - m' = 0$ ). U tom slučaju je  $\vec{U}^k = \vec{I}$  pa slijedi

$$\Omega_{mm'} = \omega_k(a + mb + m^2c) + \sum_s \gamma_s^{mm'} c_s^0. \quad (2.52)$$

Prema navedenoj teoriji jedna od najbitnijih informacija koje se mogu dobiti opažanjem normalnih modova je način na koji se modovi, odnosno multiplieti, razdvajaju na singlete i vrijednosti frekvencija tih singleta. Jer upravo odstupanje frekvencija singleta od degenerirane frekvencije multipljeta sadrži informacije o 3D strukturi Zemlje koja se želi otkriti. Spomenuta 3D struktura zemlje upisana je u maloprije objašnjenjenu matrici razdvajanja  $\vec{H}^k$ .



## 2.2 Obrada signala

Primjenjena geofizika je disciplina geofizike koja se bavi mjerenjem geometrije, lokacije i veličine geoloških struktura i fizikalnih parametara kao što je brzina ili promjena gustoće. Općenito, najčešće se vrše mjerenja različitih polja koja ovise o lokacijama ili odgovori na različita pobuđenja, odnosno procesi koji su ovisni i o lokaciji i vremenu, kao što su seizmička istraživanja. Uglavnom, izmjerene vrijednosti nisu primjenjive za direktnu interpretaciju jer mogu biti posljedica različitih uzroka te se zato podvrgavaju različitim obradama. Također, većina mjerenja u primijenjenoj geofizici su frekvencijski ovisna, kao što je i rasprostiranje seizmičkih valova kroz Zemljinu unutrašnjost, i u takvim slučajevima spektralna interpretacija izmjerenih podataka puno je korisnija od samih izmjerenih podataka.

Svako mjerenje sastoji se od signala i šuma, gdje je signal naša željena informacija, a šum smetnja. Jedna od motivacija obrade mjerenih vrijednosti jest razdvojiti ove dvije komponente kako bi signal od interesa bio bolje razlučivosti. Proces koji se javlja u geofizici mogu se klasificirati kao deterministički ili slučajni. Deterministički se proces može precizno opisati analitičkom funkcijom, dok se slučajni procesi mogu opisati samo slučajnim varijablama, gdje je svaki niz varijabli samo jedan niz od svih mogućih nizova varijabli. U praksi ne postoji točna granica između determinističkih i slučajnih procesa. Ova klasifikacija procesa može se i dalje podijeliti, gdje se deterministički procesi dijele na periodične i neperiodične, dok se slučajni procesi dijele na stacionarne i nestacionarne procese. Stacionarni proces ima statistička svojstva koja su prostorno i vremenski invarijantna i kao takvi njihovi modeli prevladavaju u praksi, iako većina geofizičkih procesa jest približno stacionarna i u ograničenom vremenskom intervalu. U konačnici, cilj obrade podataka jest transformirati izmjerene vrijednosti geofizičkih veličina u korisne informacije, povoljne direktnoj interpretaciji.

U kontekstu obrade signala slobodne oscilacije Zemlje predstavljaju signal koji nosi željene informacije i takav signal spada u skupinu determinističkih i periodičkih procesa.

### 2.2.1 Prikaz periodičnih funkcija pomoću Fourierovog niza

Periodične funkcije mogu se izraziti u obliku niza sinusa i kosinusa, koji nazivamo Fourierov niz. Ako je  $x(t)$  jednoznačna periodična funkcija vremenske varijable  $t$  i perioda  $T$  te ako zadovoljava Dirichletove uvjete (odnosno da je kontinuirana funkcija osim za konačan broj diskontinuiteta i da ima konačan broj minimuma i maksimuma) i ako je  $x(t)$  ograničena funkcija  $\int_0^T |x(t)| dt \leq c < \infty$ , onda se ona može zapisati u obliku Fourieriovog reda

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)), \quad f_0 = \frac{1}{T}. \quad (2.53)$$

Taj je red konvergentan prema gore navedenim uvjetima i ima vrijednost funkcije  $x(t)$  kada je ona neprekinuta. Na diskontinuitetima, niz konvergira u aritmetički srednjak vrijednosti funkcije koje se nalaze lijevo i desno od diskontinuiteta. Konstante  $a_n$  i  $b_n$  su Fourierovi koeficijenti koji se mogu odrediti iz funkcije  $x(t)$ . Množenjem (2.53) s  $\cos(2\pi f_0 mt)$  ili  $\sin(2\pi f_0 mt)$  te integracijom po  $t$  u intervalu od 0 do  $T_0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Fourierov niz funkcije  $x(t)$  može se prikazati kao kompleksna funkcija uvođenjem Eulerovih formula  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ;  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ , gdje je  $x = 2\pi n f_0 t$ , u (2.53) te se dobiva

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i2\pi n f_0 t}. \quad (2.55)$$

Kako je  $a_{-n} = a_n$  za  $n = 1, 2, \dots$  i  $b_{-n} = -b_n$  za  $n = 1, 2, \dots$  slijedi

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t}, \quad (2.56)$$

gdje je

$$X_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.57)$$

Ako se Fourierovi koeficijenti (2.54) supstituiraju u (2.57) dobiva se

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.58)$$

Prema tome, periodična funkcija  $x(t)$ , koja zadovoljava Dirichletove uvjete, može se izraziti pomoću Fourierovog niza (2.57) u intervalu od 0 do  $T$ . S druge strane, u (2.58) periodična je funkcija rastavljena na spektralne komponente množenjem  $x(t)$  pomoću  $e^{-i2\pi n f_0 t}$  i usrednjavanjem s duljinom vremenskog niza  $T$ . Rastavljanje funkcije na spektralne komponente dobiva se diskretni linijski spektar zbog postojanja indeksa  $n$ , odnosno funkcija  $x(t)$  može se rastaviti na spektar fundamentalne frekvencije  $f_0$  i njezine višekratnike  $n f_0$ .

### 2.2.2 Spektar vremenski ograničenih mjerenja i prozorske funkcije

Zbog ekperimentalnih ograničenja, geofizička mjerenja su vremenski ograničena. Ograničenje vremenskog intervala može se prikazati množenjem beskonačno dugog

signala  $s(t)$  s prozorskom funkcijom koja je jednaka jedinici unutar određenog intervala i nuli izvan tog istog intervala. Ta pravokutna funkcija (engl. *rectangular function*, *box-car function*) definira se izrazom

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{za } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Primjenom pravokutne funkcije  $w(t)$  na vremenski signal  $s(t)$  kao rezultat dobiva se vremenski ograničeni signal

$$s_T(t) = s(t)w(t). \quad (2.59)$$

Kako množenje u vremenskoj domeni odgovara konvoluciji u frekvencijskoj domeni, spektar ovog signala prema teoremu o konvoluciji je jednak izrazu

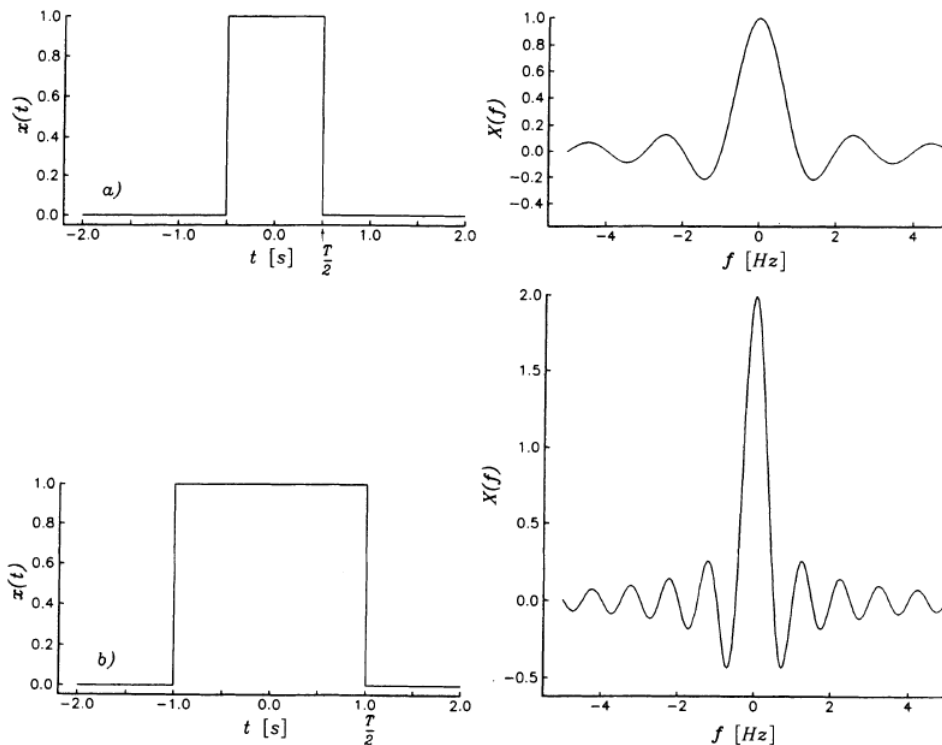
$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(g)W(f-g)dg, \quad (2.60)$$

gdje su  $S_T(f)$ ,  $S(f)$  i  $W(f)$  Fourierierovi transformati vremenskih nizova  $s_T(t)$ ,  $s(t)$  i  $w(t)$ . Kako bi se bolje shvatilo što se događa sa signalom nakon množenja s pravokutnom funkcijom, korisno je izračunati Fourierov transformat pravokutne funkcije

$$\begin{aligned} W(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi ft} dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi ft) dt = \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi f} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Prema (2.61) spektar pravokutne funkcije je kardinalni sinus i prikaz funkcija  $w(t)$  i  $W(f)$  nalazi se na slici (2.2) za dvije vrijednosti duljine vremenskog prozora,  $T$ . Ono što se sa slike može uočiti je da za male vrijednosti parametra  $T$ , spektar konvolucije signala,  $S_T(f)$ , općenito daje nejasnu sliku spektra signala  $S(f)$ . Razlog tome je što je spektralni prozor  $W(f)$  relativno širok i zbog toga spektralne vrijednosti spektra  $S(f)$  koje se nalaze na frekvencijama udaljenim od frekvencije signala  $f_0$  također pridonose spektru  $S_T(f_0)$ . Ovaj fenomen, gdje je spektralna vrijednost na frekvenciji signala  $f_0$  pod utjecajem frekvencijske komponente različite od same frekvencije signala,  $f \neq f_0$ , naziva se spektralno propuštanje (engl. *spectral leakage*). Spektralno propuštanje posljedica je činjenice da zbog kardinalnog sinusa energija na frekvenciji signala širi se na sve ostale frekvencije u spektru. Zbog ovog fenomena ponekad je teško odrediti pravu frekvenciju signala, ali zato se procjena spektra poboljšava kako se koristi što dulji vremenski prozor  $T$ , odnosno kada  $T \rightarrow \infty$ . U tom slučaju  $W(f)$

se približava Diracovoj  $\delta$ -funkciji te se spektar  $S_T(f_0)$  približava spektru  $S(f_0)$ . Prema tome, spektar ograničenog vremenskog signala nije pravi spektar tog signala, nego procjena koja odgovara konvolucijskom integralu (2.60). Korištenjem vremenskog prozora male duljine spektar se može izgladiti i time se ponekad onemogućuje razdvajanje susjednih dijelova pravog spektra i često se u spektar mogu dodati nerealne komponente. Prema svemu navedenom: ako se želi postići bolja frekvencijska rezolucija spektra, u smislu odvajanja i prepoznavanja pojedinih periodičnih signala, mora se koristiti što dulji vremenski niz.



**Slika 2.2** Spektar pravokutnih funkcija različitih vremenskih duljina  $T$ : a)  $T = 1$  s, b)  $T = 2$  s. Preuzeto iz Buttkus (2000).

Kako je neizbježno u istraživanjima koristiti ograničene vremenske signale, u samom početku kao glavni problem javlja se već spomenuto proširenje spektralnog šiljka kao i pojavljivanje lažnih šiljaka na susjednim frekvencijama (engl. *side lobes*) uslijed spektralnog propuštanja. Međutim, moguće je smanjiti susjedne šiljke mijenjanjem prozorske funkcije. Postoji niz različitih prozorskih funkcija, a njihov opis i primjena detaljno je opisana u Harris (1978). Od najpoznatiji može se navesti Hann prozorska funkcija, *Blackman* prozorska funkcija i druge. Spektralna rezolucija i prisutnost lažnih spektralnih komponenti ovise o duljini kao i obliku prozorske funkcije. Iz tog razloga, umjesto pravokutne prozorske funkcije bolje je koristiti takvu prozorsku funkciju čija Fourierova transformacija ima izražen i glavni šiljak i čiji su susjedni šiljci znatno smanjeni ili ih uopće nema. Nažalost ovi zahtjevi nisu komplementarni i u praksi je potrebno naći kompromis između ovih zahtjeva. Kao općenito pravilo u obradi signala lažni se šiljci, prouzrokovani korištenjem ograničenih sig-

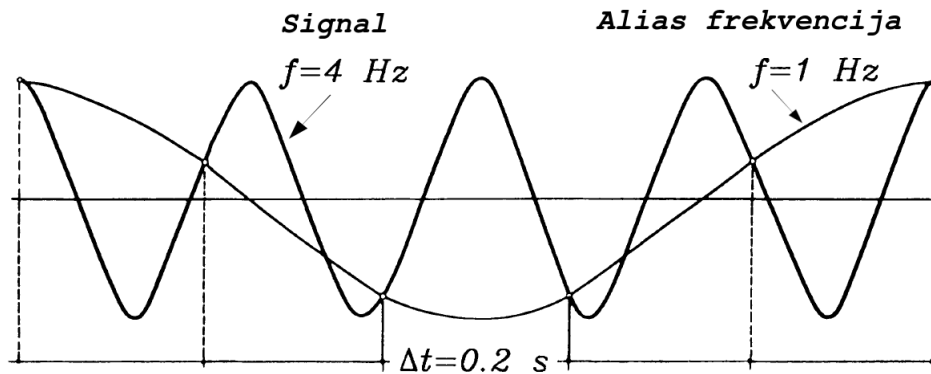
nala, smanjuju izglađivanjem oštarih rubova pravokutne prozorske funkcije u procesu koje se naziva opadanje vremenskog prozora (engl. *tapering*). Kao primjer može se proučiti ekstremni slučaj Gaussove prozorske funkcije, koja ne uzrokuje lažne šiljke na susjednim frekvencijama. Fourierov transformat Gaussove funkcije  $e^{-t^2/\tau^2}$  proporcionalan je funkciji  $e^{-\tau^2\omega^2/4}$  (npr. Gubbins, 2004), koja se smanjuje kako  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Veličina  $\tau$  određuje širinu Gaussove funkcije: mala vrijednost  $\tau$  označava usku funkciju u vremenskoj domeni, ali široku funkciju u frekvencijskoj domeni i obratno. Ovo je općenito pravilo Fourierove transformacije, koje se naziva i teorem neodređenosti. Prema teoremu neodređenosti postoji kompromis između visine i položaja središnje frekvencije spektralnog šiljka. Ako se poveća točnost lokacije šiljka uzrokujući suženje šiljka, unosi se velika pogreška u spektar što čini visinu šiljka nečitljivom. S druge strane, ako se spektar izgadi kako bi se točno odredila visina šiljka, određivanje položaja središnje frekvencije u tom slučaju postaje manje točno. Osim poteškoća rezolucije spektralnih šiljaka, također postoji i problem neželjenog šuma originalnog vremenskog niza, koji se vjerno reproducira u Fourierovom transformatu. Konvolucija vremenskog niza sa širokom funkcijom djeluje kao operacija izglađivanja i može smanjiti dominantni šum. Množenje originalnog vremenskog niza s prozorskom funkcijom može izglati spektar i smanjiti šum, ali opet na trošak spektralne rezolucije. Izbor prozorske funkcije ovisi o tome što se želi u spektru mjeriti. Na primjer, ako su spektralni šiljci dobro odvojeni tada lažne spektralne komponente nisu problem i može se koristiti pravokutna funkcija koja će prouzrokovati uske spektralne šiljke središnjih frekvencija.

### 2.2.3 Aliasing efekt i teorem o uzorkovanju

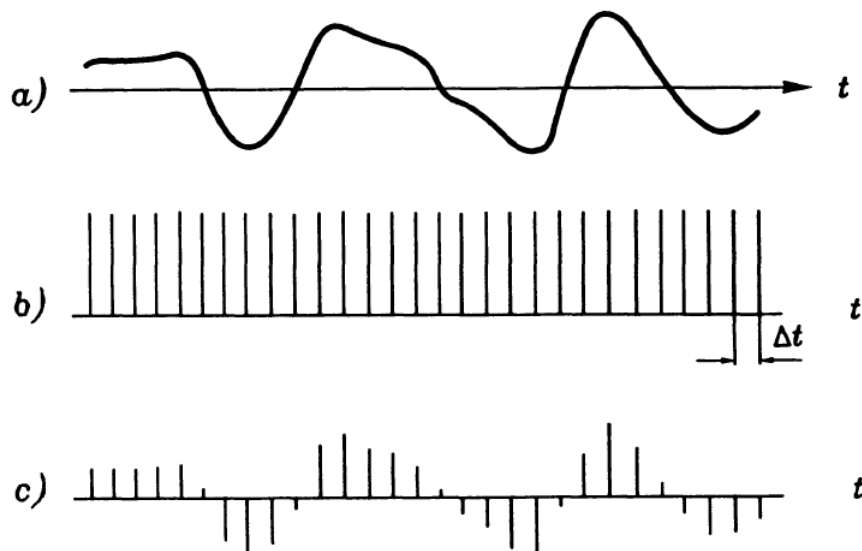
Geofizički procesi, kao što je rasprostiranje seizmičkih valova kroz Zemljinu unutrašnjost, su kontinuirani u vremeni i prostoru. U bilo kojem trenutku mjereni parametar, u gornjem slučaju pomak tla, može poprimiti bilo koju vrijednost u određenim granicama. Kako bi se geofizički procesi računalno analizirali, kontinuirani podaci se moraju pretvoriti u digitalni oblik, odnosno podaci se moraju uzorkovati. Vrijednosti mjerene veličine digitaliziraju se u diskretnim vremenskim intervalima, a kako se zapisuju kao binarni brojevi vrijednosti su u svakom trenutku ograničene specifičnim, konačnim brojem. Umjesto prave vrijednosti signala, zapisuje se najbliža dozvoljena vrijednost mjerene veličine. To je posljedica činjenice da su vrijednosti mjenog parametra prikazane ograničenim brojem znamenaka. Spektar digitaliziranih vrijednosti razlikuje se od spektra kontinuirane funkcije. Stupanj odstupanja ovisi o rezoluciji digitalizacije. Signal se uvijek uzorkuje u konstantnim vremenskim intervalima. Interval uzorkovanja bira se s obzirom na frekvencije signala, za koje se pretpostavlja da su pojasno ograničene, to jest da postoji najveća frekvencija,  $f_{max}$ , tako da je spektar signala jednak nuli za  $|f| > f_{max}$ .

Interval uzorkovanja  $\Delta t$  od centralne je važnosti. Ako se izabere premali interval uzorkovanja relativno u odnosu na maksimalnu frekvenciju  $f_{max}$ , uzorkovani niz

podataka biti će preopširan i sadržavat će suvišne informacije. S druge strane, ako je interval uzorkovanja prevelik s obzirom na frekventni sadržaj, signal neće biti dovoljno točno zapisan. O čemu je točno riječ prikazano je na slici (2.3) - signal frekvencije 4 Hz uzorkovan intervalom uzorkovanja od 0.2 s (5 Hz) postaje prividan signal frekvencije 1 Hz, jer je interval uzorkovanja bio prevelik. Fenomen gdje visokofrekventne komponente poprime identitet (engl. *alias*) niže frekvencije zove se aliasing. Kako se ne bi gubile informacije uzorkovanog signala, teorem o uzorkovanju definira gornju granicu dopustivog intervala uzorkovanja.



**Slika 2.3** Prikaz signala frekvencije 4 Hz nakon uzorkovanja s prevelikim intervalom uzorkovanja od 0.2 s (5 Hz) prividno postaje signal frekvencije 1 Hz (alias frekvencija). Korištenjem krivog intervala uzorkovanja gube se informacije o samom signalu. Preuzeto iz Buttkus (2000).



**Slika 2.4** Prikaz uzorkovanja kontinuirane funkcije  $x(t)$  (a), gdje je funkcija uzorkovanja niz Delta funkcija  $\delta(t - j\Delta t)$  (b), a rezultat je funkcija  $x_s(t)$  (c). Preuzeto iz Buttkus (2000).

Neka je diskretna sekvenca  $x_j = x(j\Delta t)$ ,  $j = -\infty, \dots, \infty$  generirana digitalizacijom signala  $x(t)$ . Vremenski niz  $x_j$  može se smatrati kontinuiranom funkcijom  $x_s(t)$  koja ima vrijednosti funkcije  $x(t)$  u intervalima uzorkovanja dok je suprotno jednaka nuli, odnosno  $x_s$  se može prikazati kao umnožak funkcije  $x(t)$  i funkcije uzorkovanja

(funkcije "češlja")  $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - j\Delta t)$  (slika (2.4))

$$x_s(t) = x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - j\Delta t). \quad (2.62)$$

Kontinuirana funkcija  $x_s(t)$  predstavlja niz šiljaka. Njen spektar,  $X_s(f)$  definiran je pomoću konvolucijskog teorema

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - g) \mathcal{F}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\Delta t)\right) dg. \quad (2.63)$$

gdje je Fourierov transformat  $\delta$ -funkcije definiran

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\Delta t)\right) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (2.64)$$

odnosno spektar periodičnog niza  $\delta$ -funkcija perioda  $T$  je također periodični niz  $\delta$ -funkcija perioda  $\frac{1}{T}$ .

**Definicija 2.1. Diracova  $\delta$ -funkcija** Diracova  $\delta$ -funkcija je funkcija raspodjele definirana kao

$$\delta(t) = 0 \quad \text{za } t \neq 0 \quad (2.65)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0) \quad (2.66)$$

za bilo koju funkciju  $x(t)$  koja je kontinuirana u  $t = t_0$ . Općenito vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0) \quad (2.67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (2.68)$$

$\delta$ -funkcija predstavlja idealizirani impuls, koji se u praksi može samo aproksimirati. Širina  $\delta$ -funkcije teži nuli kada njena amplituda teži u beskonačnost, a za to je vrijeme površina ispod krivulje funkcije koja opisuje impuls konstantna. Fourierov transformat  $\delta$ -funkcije slijedi iz relacije (2.66) kada se umjesto  $x(t)$  uvrsti  $e^{-i2\pi ft}$

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \mathcal{F}(\delta(t - t_0)) \Big|_{t_0=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-2\pi ft} dt \Big|_{t_0=0} = e^{-i2\pi ft_0} \Big|_{t_0=0} = 1. \quad (2.69)$$

Drugim riječima, spektar  $\delta$ -funkcije je konstantan za sve frekvencije.

Primjenom (2.64) i (2.66) slijedi

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-g) \frac{1}{\Delta t} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(g - \frac{n}{\Delta t}) dg = \frac{1}{\Delta t} \sum_{-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{\Delta t}), \quad (2.70)$$

da je  $X_s(f)$  periodična funkcija s periodom  $\frac{1}{\Delta t}$  i time ovisi o izboru intervala uzorkovanja  $\Delta t$ . Ako se uvede Nyquistova frekvencija

$$f_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t}, \quad (2.71)$$

relacija (2.70) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 2nf_{Ny}) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (X(f) + \sum_{n=1}^{\infty} X(f - 2nf_{Ny}) + X(f + 2nf_{Ny})). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Prema tome, vrijednosti pravog spektra u frekvencijama  $f_0 \pm 2nf_{Ny}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  doprinose procijenjenoj amplitudi spektra na  $f = f_0 \leq \frac{1}{2\Delta t}$ . Kako bi se izbjegla deformacija spektra interval uzorkovanja  $\Delta t$  mora biti takav da najveća frekvencija u signalu  $x(t)$ ,  $f_{max}$ , bude manja od Nyquistove frekvencije spektra

$$f_{max} < f_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t} \quad \text{ili} \quad \Delta t < \frac{1}{2f_{max}}. \quad (2.73)$$

U tom slučaju, sumacija u (2.72) za  $|n| > 0$  jednaka je nuli u Nyquistovom intervalu  $(-f_{Ny}, f_{Ny})$  i u tom intervalu  $X_s(f) = X(f)$ . Izvan tog intervala,  $X_s(f)$  se sastoji od periodičkog ponavljanja  $X(f)$ . Kada ne bi bio izabran dovoljno mali interval uzorkovanja, slijedilo bi da je  $X(f) \neq 0$  za  $|f| > \frac{1}{2\Delta t}$  i tada bi se spektralne komponente frekvencija većih od Nyquistove frekvencije pojavljivale u Nyquistovom intervalu,  $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$ . Isto vrijedi i za slučaj kada je interval uzorkovanja veći od gornje granice postavljene teoremom uzorkovanja,  $\Delta t > \frac{1}{cf_{max}}$ , lažne spektralne komponente također će se pojaviti u intervalu,  $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$ . Opisani efekt je već spomenuti aliasing efekt.

Uz određivanje duljine prozora  $T$  analizirane funkcije kao i prozorske funkcije, odabir intervala uzorkovanja  $\Delta t$  od velike je važnosti za određivanje spektra uzorkovanih funkcija. Dok duljina prozora  $T$  određuje frekvencijsku rezoluciju (poglavlje 2.1.2), interval uzorkovanja  $\Delta t$  određuje gornju granicu frekvencije  $f_{Ny}$  u spektru uzorkovane funkcije. Kako bi se izbjegao efekt aliasinga,  $\Delta t$  se mora odabrati u skladu s (2.73).

Ako je interval uzorkovanja fiksiran tada se frekvencijski raspon funkcije koja se digitalizira mora ograničiti na maksimalnu frekvenciju korištenjem anti-aliasing ili



nisko-propusnih filtera prije prije samog uzorkovanja. Spektar  $X_s(f)$  funkcije  $x_s(t)$  identičan je spektru  $X(f)$  kontinuirane funkcije  $x(t)$  kada:

- spektar  $X(f)$  kontinuirane funkcije  $x(t)$  ima frekvencije jedino u rasponu  $|f| \leq f_{max}$ ,
- vrijednosti su uzorkovane tako da je  $\Delta t < \frac{1}{2f_{max}}$ ,
- dobiveni je spektar  $X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{\Delta t})$  pomnožen s funkcijom

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{za } |f| \leq f_{Ny} \\ 0 & \text{za } |f| > f_{Ny} \end{cases},$$

koja uklanja spektralne komponente spektra  $X_s(f)$  koje se periodično ponavljaju izvan intervala  $|f| \leq f_{Ny}$ , tako da je  $X_s(f) = X(f)$ .

Teorem uzorkovanja može se izvesti na temelju pojasno ograničenog signala,  $x(t)$ , pomoću sljedećeg niza ortogonalnih funkcija

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{2f_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f(t - \frac{n}{2f_{max}})} df \\ &= \frac{\sin(2\pi f_{max}(t - \frac{n}{2f_{max}}))}{2\pi f_{max}(t - \frac{n}{2f_{max}})}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (2.74)$$

Pretpostavlja se da je pojas definiran kao  $(-f_{max}, f_{max})$  te da niz funkcija ima sljedeće svojstvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_n(t)y_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{za } n \neq m \\ \frac{1}{2f_{max}} & \text{za } n = m \end{cases}. \quad (2.75)$$

Ako se pojasno ograničeni signal  $x(t)$  izrazi prema

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n(t), \quad (2.76)$$

tada se mogu izračunati koeficijenti  $a_n$  množenjem obje strane prethodne relacije s  $y_m(t)$  i integracijom. Uz uvjet ortogonalnosti (2.75) slijedi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y_m(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2f_{max}} \int_{-f_{max}}^{f_{max}} e^{-i2\pi f(t - \frac{m}{2f_{max}})} df dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n(t)y_m(t)dt \\ &= a_m \frac{1}{2f_{max}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Iz čega slijedi

$$a_m = \int_{-f_{max}}^{f_{max}} e^{i2\pi f \frac{m}{2f_{max}}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt df = \int_{-f_{max}}^{f_{max}} X(f) e^{i2\pi f \frac{m}{2f_{max}}} df = x\left(\frac{m}{2f_{max}}\right), \quad (2.78)$$

odnosno

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_{max}}\right) y_n(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_{max}}\right) \frac{\sin(2\pi f_{max}(t - \frac{n}{2f_{max}}))}{2\pi f_{max}(t - \frac{n}{2f_{max}})}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Prethodna relacija je matematički prikaz teorema uzorkovanja prema Shannonu (1948): pojasno ograničeni signal  $x(t)$  ograničen frekvencijom  $f_{max}$  jednoznačno je određen diskretnim vrijednostima  $x_n = x(\frac{n}{2f_{max}})$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Kontinuirani signal može se rekonstruirati iz pojasno ograničenog signala  $x(t)$  pomoću diskretnih vremenskih vrijednosti, gdje se amplitude računaju prema (2.79) pomoću težinskog srednjaka (gdje je težinska funkcija  $\frac{\sin t}{t}$ ) za jednako udaljene vrijednosti  $x(\frac{n}{2f_{max}})$ . Pojasno ograničeni signal nije ograničen u vremenu, jer integral  $x(t) = \int_{-f_{max}}^{f_{max}} X(f) e^{i2\pi f t} df$  za konačnu vrijednost maksimalne frekvencije,  $f_{max}$ , postoji. Međutim, egzaktna rekonstrukcija kontinuirane funkcije iz pojasno ograničenog signala, koji se sastoji od konačne sekvence diskretnih vrijednosti, nije moguća. Čak i ako  $x(t)$  nije pojasno ograničena, (2.79) se može iskoristiti za računanje njene vrijednosti odabirom maksimalne frekvencije,  $f_{max}$  i koristeći vrijednosti  $x(t)$  u  $t = \frac{n}{2f_{max}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Konačan rezultat ipak nije jednak  $x(t)$ . U diskretnim točkama  $t = \frac{n}{2f_{max}}$  vrijednosti niza jednake su vrijednostima kontinuirane funkcije  $x(t)$ , dok u točkama između, interpolirane vrijednosti od  $x(t)$  su dane s (2.79). Kao što frekvencijski ograničeni signali nisu ograničeni u vremenskoj domeni, može se pokazati da vrijedi i obrnuti slučaj, gdje vremenski ograničeni signali nisu ograničeni u frekvencijskoj domeni. Štoviše, prema (2.79), spektar vremenski ograničenog signala  $x(t)$ ,  $-T \leq t \leq T$  jednoznačno je određen diskretnim vrijednostima spektra  $X(f)$  u intervalima  $\frac{1}{2T}$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2T}\right) \frac{\sin(2\pi T(f - \frac{n}{2T}))}{2\pi T(f - \frac{n}{2T})}. \quad (2.80)$$

#### 2.2.4 Fourierova transformacija diskretnih funkcija (DFT)

Za neperiodične procese, reprezentacija spektra pomoću diskretnih vrijednosti (2.58) nije moguća. Međutim, kontinuirana spektralna raspodjela može se dobiti u većini slučajeva. Ako  $x(t)$  zadovoljava Dirichletove uvjete (poglavlje 2.1.1) u proizvoljnom intervalu te ako je  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$  konvergentan, tada se  $x(t)$  može izraziti u

obliku Fourierovog integrala

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df, \quad (2.81)$$

gdje je

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2.82)$$

U prethodnoj relaciji  $X(f)$  predstavlja reprezentaciju  $x(t)$  u frekvencijskoj domeni i naziva se spektar funkcije  $x(t)$ .

I sada, neka je funkcija  $x(t)$ , gdje je  $0 \leq t \leq T$  i za koju je definiran Fourierov transform (2.82), uzorkovana u  $N$  jednako udaljenih točaka  $t = j\Delta t, j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Da bi se odredio spektar diskretne funkcije integral se aproksimira sumom prema trapezoidnom pravilu

$$X(f) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(j\Delta t)e^{-i2\pi fj\Delta t}. \quad (2.83)$$

Ako se  $X(f)$  računa za diskretne vrijednosti  $f = n\Delta f$ ,

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(j\Delta t)e^{-i2\pi n\Delta f j\Delta t}, \quad (2.84)$$

te ako je  $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}$ , dobiva se Fourierov transformat diskretnih vrijednosti

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x(j\Delta t)e^{-i2\pi \frac{nj}{N}}. \quad (2.85)$$

Ako je  $\Delta t = 1$  spektar se računa u ciklusima po jedinici vremena te slijedi

$$X_n = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi \frac{nj}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2.86)$$

U prethodnoj relaciji spektar nije dobro skaliran. Uglavnom se kao faktor normiranja uzima duljina niza,  $N$ . U (2.85) indeks  $j$  mjeri vrijeme u jedinici intervala uzorkovanja  $\Delta t$ , tako da je  $t = j\Delta t$ , sve do maksimalnog vremena  $T = N\Delta t$ . Indeks  $n$  mjeri frekvenciju u intervalima definiranim kao  $\Delta f = \frac{1}{T}$  sve do maksimalne frekvencije uzorkovanja  $f_s = N\Delta f = \frac{1}{\Delta t}$ . Kompleksni Fourierovi koeficijenti  $X(n\Delta f)$  opisuju doprinos određene frekvencije  $\omega = 2\pi n\Delta f$  originalnom vremenskom nizu. Fourierov transformat diskretne funkcije ima sljedeća svojstva:

- $X_n$  je periodična funkcija s periodom  $N$

$$X_{n+N} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi(\frac{n+N}{N})j} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi j} e^{-i2\pi\frac{n}{N}j} = X_n, \quad (2.87)$$

jer je  $e^{-i2\pi j} = \cos(2\pi j) - i \sin(2\pi j) = 1$  za  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

- Fourierovi koeficijenti imaju sljedeća svojstva simetričnosti

1. Za realni vremenski niz  $(x_j)$ ,

$$X_{\frac{N}{2}+n} = X_{\frac{N}{2}-n}^*, \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (2.88)$$

što slijedi iz

$$X_{\frac{N}{2}+n} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi(\frac{N}{2}+n)\frac{j}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi\frac{j}{2}} e^{-i2\pi n\frac{j}{N}}$$

$$X_{\frac{N}{2}-n}^* = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi(\frac{N}{2}-n)\frac{j}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{i2\pi\frac{j}{2}} e^{-i2\pi n\frac{j}{N}} = X_{\frac{N}{2}+n}$$

jer je  $e^{-i\pi j} = e^{i\pi j}$  za  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

2. Za kompleksni vremenski niz  $(x_j)$

$$X_{\frac{N}{2}+n} = -X_{\frac{N}{2}-n}^*. \quad (2.89)$$

Prema (2.86) i (2.87) postoji samo  $\frac{N}{2}$  nezavisnih vrijednosti  $X_n, n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ , gdje je  $X_{\frac{N}{2}}$  točka simetrije dok je  $X_0$  srednja vrijednost niza  $(x_j)$  pomnoženog s  $N$ ,  $X_0 = \sum_{j=0}^{N-1} x_j$ .

### 2.2.5 Brza Fourierova transformacija

Brza Fourierova transformacija temelji se na algoritmu za brzo računanje suma  $\sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\pm 2\pi i \frac{nj}{N}}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ . Ovaj algoritam koristi svojstvo simetrije trigonometrijskih funkcija kako bi se uštedjelo vrijeme prilikom numeričkog računanja. Da bi se izračunao diskretni Fourierov transformat za vremenski niz  $x_j, j = 0, 1, \dots, N-1$  korištenjem (2.86), vremenski niz je podijeljen u dva dijela jednake duljine (pretpostavlja se da je  $N$  paran)

$$y_j = x_{2j} = (x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-2}) \quad (2.90)$$

$$z_j = x_{2j+1} = (x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}), \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (2.91)$$

gdje su Fourierovi transformati za  $y_j$  i  $z_j$

$$Y_n = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} y_j e^{-i2\pi \frac{nj}{N/2}}, \quad (2.92)$$

$$Z_n = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} z_j e^{-i2\pi \frac{nj}{N/2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.93)$$

Za ove Fourierove koeficijente vrijede sljedeće relacije

$$Y_{n+\frac{N}{2}} = Y_n \quad i \quad Z_{n+\frac{N}{2}} = Z_n, \quad (2.94)$$

što slijedi iz

$$e^{-i4\pi \frac{j}{N}(n+\frac{N}{2})} = e^{-i(4\pi \frac{n}{N}j+2\pi j)} = e^{-i4\pi \frac{nj}{N}}, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Veza između Fourierovih transformata  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  izražava se

1. za  $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$  prema (??), (2.90), (2.91) vrijedi

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (y_j e^{-i2\pi \frac{n}{N}2j} + z_j e^{-i2\pi \frac{n}{N}(2j+1)}) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} y_j e^{-i4\pi \frac{nj}{N}} + e^{-i2\pi \frac{n}{N}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} z_j e^{-i4\pi \frac{nj}{N}}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

odnosno

$$X_n = Y_n + e^{-i2\pi \frac{n}{N}} Z_n. \quad (2.96)$$

2. Relacija (2.96) vrijedi i za  $n = \frac{N}{2}, \dots, N - 1$ . Kako je  $e^{-i4\pi \frac{nj}{N}}$  slijedi

$$X_n = Y_{n-\frac{N}{2}} + e^{-i2\pi \frac{n}{N}} Z_{n-\frac{N}{2}}. \quad (2.97)$$

Prema tome, Fourierov transformat vremenskog niza duljine  $N$  može se preurediti u dvije sume Fourierovih transformata dva vremenska niza duljina  $\frac{N}{2}$ . Ako je  $\frac{N}{2}$  također paran broj postupak se može nastaviti i dalje. Ako se izabere da je  $N$  jednak  $2^k$ , gdje  $k$  može biti bilo koji prirodan broj, vremenski niz se dijeli sve dok se pojedini parci-

jalni niz ne sastoji od samo jednog člana, čiji je Fourierov koeficijent prema relaciji (2.86) jednak vrijednosti uzorkovanja. Na taj način se uspješno određuju Fourierovi koeficijenti vremenskih nizova duljine  $2, 4, \dots, \frac{N}{2}$ . Općenito, pomoću brzog Fourierovog algoritma računanje Fourierovog transformata svodi se na  $N \log_2 N = Nk$  množenja i pribrajanja, za razliku od  $N^2$  množenja i zbrajanja kada se za računanje Fourierovog transformata koristi (2.86). Recimo, kada je  $N = 2^{10} = 1024$ , tada je  $N \log_2 N = 1024 \times 10 \approx 10^4$ , za razliku od  $N^2 \approx 10^6$  pri čemu se vrijeme računanja na računalu smanji za 99 %.

## 2.2.6 Z-transformat

Ako se pretpostavi da postoji digitalizirana sekvenca od  $N$  brojeva

$$\{x\} = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1},$$

koja predstavlja vrijednosti mjerenja u pravilnim razmacima, tada se može definirati z-transformat formiranjem polinoma kompleksne varijable  $z$  koristeći elemente vremenskog niza kao koeficijente

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \dots + x_{N-1} z^{N-1}. \quad (2.98)$$

Mnogi fizikalni procesi sadrže u sebi efekt množenja z-transformata vremenskog niza s drugim z-transformatom, a najbolji primjer je seizmometar. Ono što instrument zapiše razlikuje se od pravog gibanja tla i taj se odnos može protumačiti kao množenje z-transformata gibanja tla sa z-transformatom instrumenta. Zato je puno korisnije promatrati operacije na z-transformatu nego li na originalnom vremenskom nizu. Operacije na z-transformatu imaju svoj ekvivalent u vremenskoj domeni. Množenje kompleksnom varijablom  $z$  dobiva se

$$zX(z) = x_0 z + x_1 z^2 + x_2 z^3 + \dots + x_{N-1} z^N, \quad (2.99)$$

tako da novi z-transformat odgovara vremenskom nizu

$$\{x'\} = 0, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1} \quad (2.100)$$

koji je pomaknut u vremenu za pomak jednak intervalu uzorkovanja,  $\Delta t$ . Općenito, množenje dva z-transformata ekvivalentno je diskretnoj konvoluciji u vremenskoj domeni. Ako se u obzir uzme produkt  $X(z)$  i  $Y(z)$ , gdje je  $Y(z)$  transformacija drugog vremenskog niza  $\{y\}$  čija duljina  $M$  ne mora nužno biti iste duljine kao i duljina originalnog niza, tada je

$$C(z) = X(z)Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k \sum_{l=0}^{M-1} y_l z^l. \quad (2.101)$$

Da bi se dobio vremenski niz koji odgovara ovom z-transformatu, relacija se mora napisati u obliku polinoma i mora se pronaći opći član. Ako se stavi da je  $p = k + l$  i ako se promijeni red sumacije dobiva se

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} x_k y_l z^{k+l} = \sum_{p=0}^{N+M-2} \sum_{k=0}^p x_k y_{p-k} z^p \quad (2.102)$$

što predstavlja z-transformat vremenskog niza  $\{c\}$

$$c_p = \sum_{k=0}^p x_k y_{p-k}. \quad (2.103)$$

Izraz  $c_p = \sum_{k=0}^p x_k y_{p-k}$  predstavlja diskretnu konvoluciju vremenskih nizova  $\{x\}$  i  $\{y\}$  te ima duljinu  $N + M - 1$ .

### 2.2.7 Produljivanje signala

Ponekad je, postojeći vremenski niz, potrebno produljiti dodavanjem nula na sam kraj niza (engl. *zero-padding*). To se najčešće radi u slučaju kada je potrebno primijeniti brzu Fourierovu transformaciju, a korišteni niz nije višekratnih broja 2. Da bi se shvatilo kako ovaj proces mijenja spektar, u obzir će se uzeti vremenski niz  $x$ , duljine  $M$  i drugi niz  $y$  duljine  $N > M$ , tako da se može definirati treći niz,  $c$

$$\begin{aligned} c_k &= a_k; & k &= 0, 1, \dots, M-1, \\ &= 0; & k &= M, M+1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Očito je vremenski niz  $c$  dobiven množenjem vremenskih nizova  $x$  i  $y$ , gdje je vremenski niz  $y$  pravokutna funkcija (poglavlje 2.1.2). Kako je množenje u vremenskoj domeni jednako konvoluciji u frekvencijskoj domeni, potrebno je izračunati diskretni Fourierov transformat pravokutne funkcije. Neka je funkcija  $y$  definirana izrazom

$$\begin{aligned} y_k &= 1; & k &= 0, 1, \dots, M, \\ &= 0; & k &= M, M+1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Uz definiciju diskretnog Fourierovog transformata (2.86) i faktor normiranja  $N$  primjenom izraza za geometrijsku sumu  $\sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1-r^N}{1-r}$  dobiva se

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi n k/N} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-i2\pi n M/N}}{1 - e^{-i2\pi n/N}} = e^{-i\pi n(M-1)/N} \frac{\sin(\pi n M/N)}{N \sin(\pi n/N)}. \quad (2.106)$$

Uz prethodno izračunati diskretni Fourierov transformat pravokutne funkcije može se izračunati konvolucija dvaju niza,  $x$  i  $y$

$$C_n = \sum_{p=0}^{N-1} Y_p X_{n-p} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\sin(\pi p M / N)}{\sin(\pi p / N)} e^{-\pi i p (M-1) / N} X_{n-p} \quad (2.107)$$

Relacija (2.107) predstavlja interpolaciju spektra  $X$  tako da umjesto  $M$  točaka postoji  $N$  točaka unutar istog frekvencijskog pojasa diskretnog Fourierovog transformata. Odnosno, zbog dodavanja nula na kraju niza  $\Delta t$  ostaje isti, međutim ukupan broj točaka  $N\Delta t$  se povećava, što znači da se udaljenost između frekvencija u spektru smanjuje,  $\frac{1}{N\Delta t}$ . Ovaj postupak je jako koristan, jer nikakve informacije se ne dodaju niti oduzimaju, dok s druge strane dodatne frekvencijske točke unutar spektara mogu spektar učiniti jasnijim. U praksi, ovaj proces se često provodi jer je to najlakši način kako interpolirati puno točaka unutar spektra od interesa.

## 2.3 Metoda

### 2.3.1 Autoregresijski modeli

U statistici i teoriji obrade signala autoregresijski modeli (engl. *autoregressive model*, *AR model*) predstavljaju vrstu slučajnog procesa. Svaki stacionarni vremenski niz može se opisati sa svojom determinističkom komponentom (komponenta koja se može predvidjeti) i nedeterminističkom komponentom (komponenta koja se ne može predvidjeti). AR modeli omogućuju prikaz stacionarnih vremenskih nizova pomoću rekurzivnih procesa tako da je niz opisan komponentom koja ovisi o prijašnjim događajima i nepredvidljivom komponentom. Jedan od prikaza diskretnog, slučajnog procesa je autoregresijski model pomičnog srednjaka (engl. *autoregressive moving-average model*)

$$y_j = \sum_{k=1}^M \alpha_k y_{j-k} + \sum_{l=0}^L \beta_l x_{j-l}, \quad \beta_0 = 1, \quad (2.108)$$

gdje je  $(x_j)$  bijeli šum sa slučajnom Gaussovom raspodjelom

$$\xi[x_j x_{j+k}] = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{za } k = 0 \\ 0 & \text{ostali} \end{cases}$$

i

$$\xi[x_j] = 0.$$

Jednadžba (2.108) naziva se ARMA(M,L) proces, odnosno ARMA proces reda M,L (npr. Buttkus, 2000). Posebni slučajevi ovog modela su



- model pomičnog srednjaka (engl. *moving-average model*), MA

$$y_j = \sum_{l=0}^L \beta_l x_{j-l}, \quad (2.109)$$

- autoregresijski model (engl. *autoregressive model*), AR

$$y_j = \sum_{k=1}^M \alpha_k y_{j-k} + x_j. \quad (2.110)$$

Bijeli šum (engl. *white sequence*)  $x_j$  u (2.110) predstavlja komponentnu koja se ne može predvidjeti. Radi se o "inovaciji" AR procesa jer je  $x_j$  "novi" dio  $y_j$  i nije linearno ovisan o prošlim zapažanjima. Jednadžba (2.109) predstavlja MA(L) proces (model pomičnog srednjaka reda L), dok je (2.110) AR(M) proces.

AR modeli često se koriste kako bi se modelirali pojedini vremenski ovisni procesi u prirodi. U takvim modeliranjima pretpostavlja se da su mjereni podaci nekog procesa zapravo jedna od realizacija AR modela. Mjereni podaci koriste se kako bi se procijenili parametri modela. Izračunati parametri modela mogu se dalje iskoristiti, na primjer, za računanje spektralne snage vremenskog niza. Tri gore navedena procesa imaju različiti spektar. Dok AR spektar karakteriziraju polovi, MA spektar ima nul točke, a spektar ARMA procesa ima i polove i nul točke (npr. Buttkus, 2000). Razvijene su različite spektralne analize za različite tipove vremenskih nizova i da bi se primijenila točna procedura, prvo se mora odrediti koji od ova tri modela najbolje opisuje podatke. Prednost prilagođavanja AR modela na niz podataka je što se može postići visoka rezolucija čak i kada je prisutan vremenski niz relativno kratak. U ovom radu glavni naglasak stavit će se na AR proces zbog njegove povezanosti s modelom eksponencijalno prigušenih funkcija u kontekstu Pronyjeve relacije, koja će biti objašnjena u sljedećem poglavlju.

### 2.3.2 Geometrijska interpretacija koeficijenata autoregresivnog modela

Ako se za jednako udaljene realne podatke  $\{x(n); n = 1, 2, \dots, N\}$  pretpostavi da su dobro opisani AR modelom može se pisati

$$x(n) = \sum_{k=1}^M S_k x(n-k) + e(n), \quad n = M+1, \dots, N \quad (2.111)$$

gdje je  $M$  red AR modela, dok su  $\{S_k; k = 1, 2, \dots, M\}$  realni AR koeficijenti i  $\{e_n; n = 1, 2, \dots, N\}$  bijeli šum standardne devijacije  $\langle e^2 \rangle$ . U praksi se najčešće iz niza realnih podataka  $\{x(n); n = 1, 2, \dots, N\}$  žele odrediti parametri AR modela: red AR modela,  $M$ , i koeficijenti AR modela,  $S_k$ . U ovom poglavlju neće se opisivati načini kako odrediti parametre AR modela, nego kakvu informaciju nose AR koeficijenti  $S_k$  kada

su već izračunati. U tu svrhu, na (2.111) primijenit će se z-transform i dobit će se

$$X(z) = \frac{z^M E(z)}{H(z)} \quad (2.112)$$

gdje su  $X(z)$  i  $E(z)$  z-transformati nizova  $x(n)$  i  $e(n)$ , dok je

$$H(z) = z^M - S_1 z^{M-1} - \dots - S_M \quad (2.113)$$

polinom stupnja  $M$  kompleksne varijable  $z$ . Na temelju (2.113) može se definirati realna funkcija spektralne snage (Chao, 1990b) u kompleksnoj z-ravnini

$$P(z) = \frac{|z|^{2M} \langle e^2 \rangle}{|H(z)|^2}. \quad (2.114)$$

Očito je da rješavanjem polinoma (2.113) rješenja zapravo predstavljaju polove AR modela (2.111). Kako su polinomni koeficijenti  $\{1, -S_1, \dots, -S_M\}$  realni, ti su polovi također realni ili tvore kompleksno-konjugiranje parove. Pretpostavit će se da je  $M$  paran i da spomenuti polovi (njih  $M_1 = \frac{M}{2}$ ) tvore kompleksno konjugirane parove, tada se polinom  $H(z)$  može napisati u obliku

$$H(z) = \prod_{j=1}^{M_1} (z - Z_j)(z - Z_j^*), \quad (2.115)$$

gdje su  $\{Z_j, Z_j^*; j = 1, 2, \dots, M_1\}$  polovi AR modela. Supstitucijom (2.115) u (2.114) dobiva se

$$P(z) = \frac{|z|^{2M} \langle e^2 \rangle}{\prod_{k=1}^M d_k^2(z)}, \quad (2.116)$$

gdje je  $d_k = |z - Z_k|$  geometrijska udaljenost između točke  $z$  i  $k$ -tog pola  $Z_k$  u z-ravnini. Prema (2.116) vrijednost  $P(z)$  inverzno je proporcionalna kvadratu udaljenosti između kompleksne točke  $z$  i bilo kojeg pola i njena vrijednost teži u beskonačnost u vrijednosti svakog pola. U takvom slučaju, svi spektralni šiljci identičnog su oblika i s matematičkog gledišta ni jedan pol nije bitniji od onog drugog. Na jediničnoj kružnici,  $C_0$ , spektar  $P$  poprima oblik

$$P(\omega) = \frac{\langle e^2 \rangle}{\prod_{k=1}^M d_\omega^2(z)} \quad (2.117)$$

gdje je  $d_k(\omega) = |e^{i\omega} - Z_k|$  udaljenost između  $e^{i\omega}$  (na  $C_0$ ) i  $Z_k$ . Jedino oni polovi koji se nalaze na ili blizu jedinične kružnice ( $C_0$ ) manifestiraju se kao spektralni šiljci. Prema navedenim tvrdnjama očito je da se pomoću ovih polova može opisati prisutnost periodičnih harmoničkih funkcija u vremenskim nizovima. Da bi se to

postiglo potrebno je prvo definirati jedan takav vremenski niz. Ako se pretpostavi da vremenski niz sadrži  $M_1$  harmoničkih funkcija kompleksnih frekvencija  $\sigma_j = \omega + i\alpha$  i kompleksnih amplituda  $A_j$  on se može zapisati u obliku jednadžbe

$$x(n) = \sum_{j=1}^{M_1} [A_j e^{in\sigma_j} + A_j^* e^{-in\sigma_j^*}], \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.118)$$

U sljedećem koraku nužno je pokazati kako je AR model definiran relacijom (2.111) jednak (2.118). To se postiže kada je  $e_n = 0$  i korištenjem jednadžbe

$$Z_j = e^{i\sigma_j}. \quad (2.119)$$

Ako se upotrijebi (2.119), (2.118) može se također zapisati kao

$$x(k) = \sum_j [A_j Z_j^k + A_j^* Z_j^{*k}] \quad (2.120)$$

za prvih  $M = 2M_1$  točaka niza. Sljedeći korak je formirati polinom stupnja  $M$

$$H(z) = \prod_{j=1}^M (z - Z_j)(z - Z_j^*) = z^M - S_1 z^{M-1} - \dots - S_M \quad (2.121)$$

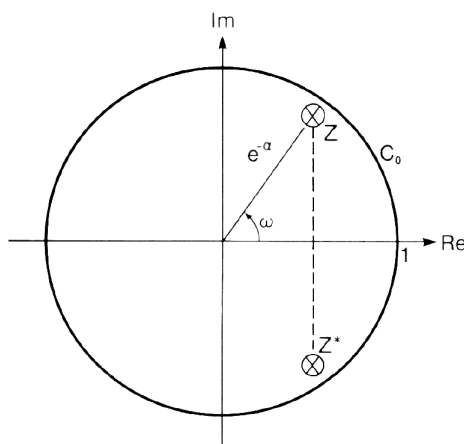
gdje su koeficijenti  $1, -S_1, \dots, -S_M$  realni. Tada za  $n > M$  slijedi

$$\begin{aligned} x(n)H(z) &= x(n) - S_1 x(n-1) - S_2 x(n-2) - \dots - S_M x(n-M) = \\ &= \sum_j A_j Z_j^{n-M} H(Z_j) + [\text{kompleksno konjugirani dio}]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Kako je implicitno  $H(Z) = 0$  (2.122) postaje

$$x(n) = \sum_{k=1}^M S_k x(n-k), \quad n = M+1, \dots, N. \quad (2.123)$$

Iz toga slijedi da su (2.118) i (2.123) jednake preko relacije (2.121). Jednadžba (2.119) naziva se Pronyjeva relacija i zapravo predstavlja osnovnu ideju metode opisane u poglavlju 2.3.3. Njena geometrijska interpretacija nalazi se na slici (2.5).



**Slika 2.5** Geometrijska interpretacija Pronyjeve relacije: položaj kompleksno-konjugiranog para polova  $Z_j, Z_j^*$  u kompleksnoj z ravnini u odnosu s odgovarajućom kompleksnom frekvencijom  $\sigma = \omega + i\alpha$ . Preuzeto iz Chao (1990b).

U realnim situacijama gdje je  $e(n) \neq 0$ , (2.119) predstavlja aproksimaciju (na primjer, u smislu najmanjih kvadrata) koja ovisi o algoritmu koji se koristi za procjenu parametara. U osnovi, Pronyjeva relacija povezuje reprezentaciju vremenskog niza u z-domeni i vremenskoj domeni. U z-domeni vremenski niz je modeliran pomoću  $M_1$  kompleksno konjugiranih parova, dok je u vremenskoj domeni vremenski niz modeliran linearnom kombinacijom  $M_1$  harmoničkih funkcija. Ove dvije interpretacije su jednake na taj način da svaki par polova odgovara jednoj harmoničkoj funkciji. Polovi se mogu nalaziti i na realnoj osi z-ravnine i kao takvi oni također zadovoljavaju Pronyjevu relaciju (Pronyjeva metoda originalno je bila osmišljena za analizu realnih eksponencijalnih funkcija (npr. Fröberg, 1969)).

Ako se pretpostavi da se pol  $e^{i\sigma_0}$  nalazi blizu jedinične kružnice  $C_0$ , gdje je  $\sigma_0 = \omega_0 + i\alpha_0$ , tada je  $|\alpha_0| \ll 1$  što odgovara izrazito visokom faktoru dobrote,  $Q \equiv \omega_0/2\alpha_0 \gg 1$ . Koristeći kosinsov poučak i razvoj u Taylorov red za udaljenost  $d_0$  između  $e^{i\sigma_0}$  i  $e^{i\omega}$  (na jediničnoj kružnici  $C_0$ ) dobiva se

$$d_0^2 = 1 + e^{-2\alpha_0} - 2e^{-\alpha_0} \cos(\omega - \omega_0) \simeq \alpha_0^2 + (\omega - \omega_0)^2. \quad (2.124)$$

Pretpostavljajući da je spektralni šiljak izoliran u z-ravnini, u smislu da njegova pozicija kao i njegov oblik nisu pod utjecajem ostalih polova, tada se iz jednažbi (2.117) i (2.124) može dobiti spektar harmoničkih funkcija visokih vrijednosti faktora dobrote

$$P(\omega) = \frac{c\langle e^2 \rangle}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (2.125)$$

gdje je parametar  $c = (\prod' d_k)^{-2}$  ( $\prod'$  predstavlja produkt svih ostalih polova  $d_k$  osim  $d_0$  pola) uglavnom konstantan u ovisnosti o  $\omega$ . Jednažba (2.125) je Lorentzova funkcija frekvencije  $\omega$  sa šiljkom u  $\omega = \omega_0$ , što spektar (2.125) čini efektivnim procjeniteljem fekvencije  $\omega_0$ .

Može se zaključiti da je (2.117) korisna za prikaz harmoničkog sadržaja vremenskog niza u frekvencijskoj domeni. Njena prednost temelji se na tome da postoja-  
nje harmoničkog signala interpretiramo postojanjem polova čija se prisutnost može  
identificirati pojavljivanjem Lorentzovog šiljka u frekvencijskoj domeni. Polovi nose  
sve bitne informacije što se tiče kompleksnih frekvencija signala, tako se npr., peri-  
odičnosti signala mogu se identificirati traženjem polova koji se nalaze blizu jedinične  
kružnice  $C_0$ ).

### 2.3.3 Autoregresijska metoda u frekvencijskoj domeni

Pomak bilo koje točke na površini Zemlje može biti vrlo kompliciran, ali se može  
shvatiti kao suma diskretnih modova oscilacija, gdje je svaki mod opisan karakte-  
rističnom svojstvenom frekvencijom, potom parametrom opadanja, koji ovisi o struk-  
turi Zemlje, te inicijalnom amplitudom koja ovisi o izvoru pobude, što je najčešće  
potres. Daleko od neposredne blizine izvora potresa, amplituda pomaka Zemlje je  
mala i ukupni pomak na nekoj seizmološkoj stanici može se jednostavno zapisati kao  
suma opadajućih kosinusa

$$x(t) = \sum_j^M B_j \cos(\omega_j t + \phi_j) e^{-\alpha_j t} \quad (2.126)$$

gdje je  $B_j$  amplituda,  $\alpha_j$  parametar opadanja,  $\omega_j$  frekvencija i  $\phi_j$  faza  $j$ -tog moda, dok  
se preko  $\omega_j$  i  $\alpha_j$  može izraziti faktor dobrote,  $Q$ ,  $j$ -tog moda

$$Q_j = \frac{\omega_j}{2\alpha_j}. \quad (2.127)$$

Prema (2.127) računanje faktora dobrote pojedinog moda ovisi o kompleksnoj frek-  
venciji moda koja se definira kao

$$\sigma_j = \omega_j + i\alpha_j. \quad (2.128)$$

Postoji niz metoda za procjenu i mjerenje kompleksnih frekvencija iz vremenskog  
niza nakon potresa, gdje se većina uglavnom temelji na računanju Fourierovog tran-  
sformata seizmograma. U ovom radu primjenit će se autoregresijska metoda koju  
su inicijalno predložili Chao i Gilbert (1980). Metoda se u osnovi temelji na dvije  
činjenice. Prva je da se seizmogram može aproksimirati kompleksno eksponencijal-  
nim opadajućim funkcijama i druga je da se iz tako aproksimiranog seizmograma  
korisne informacije mogu dobiti korištenjem Pronyjeve metode. Tu je metodu razvio  
Gaspard Riche de Prony, 1795. godine (Chao i Gilbert, 1980). On je u svom original-  
nom radu predložio da se jednako uzorkovani podaci mogu aproksimirati eksponen-  
cijalnim funkcijama i opisao je kako iz tako postavljenog problema dobiti informacije  
o nizu podataka. Autoregresijska metoda, koja će se ovdje koristiti, provodi se u

frekvencijskoj domeni što ovu metodu čini brzom i točnom. Relacija (2.126) može se preoblikovati u kompleksno eksponencijalan oblik ako se iskoristi trigonometrijski indentitet  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , tako da se dobije

$$x(n) = \sum_{j=1}^M [A_j e^{in\sigma_j} + A_j^* e^{in\sigma_j^*}], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.129)$$

gdje  $N$  predstavlja broj jednako razmaknutih uzorkovanih podataka,  $M$  broj harmoničkih funkcija s kompleksnim frekvencijama  $\{\sigma_j; j = 1, 2, \dots, M\}$ , dok je  $A_j$  kompleksna amplituda ( $A_j = \frac{1}{2}B_j e^{i\phi_j}$ ). Valja napomenuti da je (2.129) jednaka (2.118) iz prethodnog poglavlja. Izraz (2.129) linearan je za amplitude  $A_j$ , dok je nelinearan za kompleksne frekvencije  $\sigma_j$ . Kako se oba niza vrijednosti računaju iz izmjerenog niza vrijednosti  $\{x(n); n = 1, \dots, N\}$ , koristit će se prikladniji izraz za  $x(n)$ , a to je izraz za AR metodu (2.123) iz prethodnog poglavlja

$$x(n) = \sum_{i=1}^{2M} S_i x(n-i), \quad n = 2M+1, \dots, N. \quad (2.130)$$

U prethodnom poglavlju pokazano je da prema Pronyjevoj metodi vremenski niz  $\{x(n); n = 1, \dots, N\}$  zadovoljava autoregresijski proces reda  $2M$  definiranog relacijom (2.130), tako da su autoregresijski koeficijenti  $\{S_i, i = 1, 2, \dots, 2M\}$  povezani s kompleksnim frekvencijama harmoničkih funkcija  $\{\sigma_j; j = 1, 2, \dots, M\}$  na sljedeći način

$$z^{2M} - S_1 z^{2M-1} - S_2 z^{2M-2} - \dots - S_{2M} = \prod_{j=1}^M [z - e^{i\sigma_j}] \cdot [z - e^{-i\sigma_j^*}]. \quad (2.131)$$

Polinom stupnja  $2M$  kompleksne varijable  $z$  definiran pomoću  $2M$  realnih autoregresijskih koeficijenata ima rješenje u obliku kompleksno konjugiranih parova  $\{e^{i\sigma_j}, e^{-i\sigma_j^*}; j = 1, 2, \dots, M\}$ . Najjednostavniji slučaj je slučaj jedne harmoničke funkcije kompleksne frekvencije  $\sigma$  koja zadovoljava autoregresijski model stupnja 2  $x(n) = S_1 x(n-1) + S_2 x(n-2)$ , gdje su  $e^{i\sigma}$  i  $e^{-i\sigma^*}$  nulta rješenja polinoma drugog stupnja  $H(z) = z^2 - S_1 z - S_2$ . Da bi se našle kompleksne frekvencije harmoničkih funkcija mora se riješiti (2.131), a da bi se postavila prethodno spomenuta jednadžba potrebno je pronaći  $\{S_i\}$  koeficijente pomoću (2.130).

Radi preglednosti (2.129) može se zapisati u obliku matrice

$$\begin{bmatrix} x(2M) & x(2M-1) & \cdots & x(1) \\ x(2M+1) & x(2M) & \cdots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(N-2M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{2M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(2M+1) \\ x(2M+2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Određivanje realnih koeficijenata  $\{S_j\}$  svodi se na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Međutim, rješavanje ovog sustava jednadžbi u vremenskoj domeni teško je izvedivo. Razlog tome je što, na primjer, u seizmogramu nakon potresa postoji veliki broj modova (broj  $M$  je velik) ili u još nepovoljnijoj situaciji broj modova je nepoznat. Iz tog razloga problem je gotovo nemoguće riješiti u vremenskoj domeni. Međutim, različiti modovi odvajaju se u individualne šiljke ( $\delta$  funkcije) u frekvencijskoj domeni (za većinu normalnih modova). Kako bi se ta činjenica iskoristila na (2.132) primjenjuje se Fourierova transformacija. Tada će se sustav rastaviti na niz manjih podsustava, gdje će svaki podsustav odgovarati uskom frekvencijskom pojasu koji sadrži mali broj modova. Na taj način Fourierov transformat se koristi kao filter ili izolator bazičnih funkcija. Kako bi se bazične funkcije u frekvencijskoj domeni još bolje razlučile, koristi se prozorska funkcija u vremenskoj domeni. Korištenje prozorskih funkcija smanjuje proširenja spektralnih šiljaka (engl. *sidebands*) uzrokovano konačnom duljinom zapisa te uklanja utjecaj spektralnog propuštanja.

Postupak je takav da se svaki stupac u (2.132) množi s Hannovom prozorskom funkcijom  $\{W_n; n = 1, \dots, N - 2M\}$  i nakon toga se na svaki stupac primjenjuje Fourierova transformacija. Tada se (2.130) može izraziti

$$X_0(\omega_k) = \sum_{j=1}^{2M} X_j S_j, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.133)$$

gdje je

$$X_j(\omega_k) = \sum_{n=1}^{N-2M} W_n x(2M + n - j) e^{i\omega_k n}. \quad (2.134)$$

Jednadžba (2.133) također se može zapisati u obliku matrice

$$\begin{bmatrix} X_1(\omega_1) & X_2(\omega_1) & \cdots & X_{2M}(\omega_1) \\ X_1(\omega_2) & X_2(\omega_2) & \cdots & X_{2M}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(\omega_K) & X_2(\omega_K) & \cdots & X_{2M}(\omega_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{2M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(\omega_1) \\ X_0(\omega_2) \\ \vdots \\ X_0(\omega_K) \end{bmatrix}. \quad (2.135)$$

Sustav (2.135) predstavlja novi sustav linearnih jednadžbi za koeficijente  $\{S_i, i = 1, 2, \dots, 2M\}$ .  $M$  postaje broj kosinusa koji se nalazi u frekvencijskom pojasu od interesa. Iz tog razloga  $M$  je najčešće mali broj - na primjer,  $M$  je jedan za izolirani mod, odnosno  $M = 2$  za dva interferirajuća moda bliskih frekvencija. Također, važno je naglasiti da se broj frekvencija  $\{\omega_k; k = 1, 2, \dots, K\}$ , pomoću kojih se postavlja sustav (2.135), može proizvoljno izabrati (za  $M = 1$ ,  $K$  je najčešće tri, dok za  $M = 2$ ,  $K$  je najmanje 2). U slučaju kada se pretpostavi da se signal sastoji od samo jednog moda tada je  $M = 1$  i postoje samo dva autoregresijska koeficijenta  $S_1$  i  $S_2$ . Kako se

(2.135) sastoji od imaginarnog i realnog dijela, za  $K = 1$  (2.135) se može zapisati

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(X_1(\omega_1)) & \text{Re}(X_2(\omega_1)) \\ \text{Im}(X_1(\omega_1)) & \text{Im}(X_2(\omega_1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(X_0(\omega_1)) \\ \text{Im}(X_0(\omega_1)) \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

Dakle,  $M=K$  je dovoljno kako bi se pronašli koeficijenti  $\{S_j\}$  iz (2.135), a kada je  $K > M$  jednostavan način rješavanje (2.135) je metoda najmanjih kvadrata. Jednom kada su koeficijenti  $\{S_j\}$  izračunati, mogu se izračunati kompleksno konjugirani polovi.

Zadnji korak je proračun kompleksnih amplituda  $\{A_n\}$ . Ovaj postupak svodi se na još jednu metodu najmanjih kvadrata. Procjena kompleksnih amplituda se također provodi u frekvencijskoj domeni postavljanjem sustava linearnih jednadžbi,  $V_{i,j} = \alpha_j^i$ , za (2.129). Za svaki stupac ponavlja isti postupak kao i ranije - množi se s Hannovom prozorskom funkcijom i primjenjuje se Fourierov transformat

$$X(\omega_k) = \sum_{j=1}^M [A_j E_j(\omega_k) + A_j^* E_j^*(\omega_k)], \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.137)$$

gdje  $X$  dolazi od niza  $\{x(n); n = 1, 2, \dots, N\}$ , dok  $E$  dolazi od niza  $\{e^{in\sigma_j}; n = 1, 2, \dots, N\}$ . Nakon što se izračuna kompleksna frekvencija i amplituda konkretnog moda, signal tog moda možemo rekonstruirati i oduzeti iz seizmograma i time otkriti slabije pobuđene modove.

Opisani proces poznat je pod nazivom autoregresijska metoda u frekvencijskoj domeni, a dalje u tekstu skraćeno će se zvati ARFD. Iz (2.135) vidljivo je da se ovom metodom mogu istovremeno procesuirati višestruki zapisi u svrhu poboljšanja omjera signala i šuma (SNR).

### 2.3.4 Spektar analitički produljenog signala

Ponovno će se razmatrati pomak Zemlje definiran relacijom (2.126)

$$u(t) = \sum_k^M B_k \cos(\omega_k t + \phi_k) e^{-\alpha_k t}. \quad (2.138)$$

Obzirom da je duljina vremenskog zapisa  $u(t)$  ograničena,  $t \in [0, T]$ , Fourierov transformat vremenske funkcije normalnog moda poprima izraz

$$C_k(t) = \cos(\omega_k t) e^{-\alpha_k t}.$$



Onda je

$$\begin{aligned}
C_k(\omega, t) &= \int_0^T C_k(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T e^{i\omega_k t} e^{-\alpha_k t} e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-i\omega_k t} e^{-\alpha_k t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{i\omega_k T - \alpha_k T - i\omega T} - 1}{i(\omega_k - \omega) - \alpha_k} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i\omega_k T - \alpha_k T - i\omega T} - 1}{-i(\omega_k - \omega) - \alpha_k}.
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Kada je  $\omega > 0$  i  $|\omega - \omega_k| \ll \omega$  prvi član u prethodnoj relaciji dominira nad drugim članom tako da vrijedi

$$2C_k(\omega_k, T) = F(\omega, T) = \frac{e^{i(\omega_0 - \omega) - \alpha_0 T} - 1}{i(\omega_0 - \omega) - \alpha_0} \tag{2.140}$$

gdje su  $(\omega_0, \alpha_0)$  zamijenjeni s parametrima  $(\omega_k, \alpha_k)$ . Kako je  $F(\omega, T)$  funkcija kompleksne varijable  $\omega$ , za konačan  $T < \infty$  funkciju  $F(\omega, T)$  možemo analitički produljiti iz realne osi varijable  $\omega$  u kompleksnu ravninu varijable  $\omega$  (Buland i Gilbert, 1978)

$$F(\omega, T) = F(\omega + i\alpha) = \frac{e^{i(\omega_k - \omega) + (\alpha - \alpha_0)T} - 1}{i(\omega_k - \omega) + (\alpha - \alpha_0)}. \tag{2.141}$$

Ako je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{2.142}$$

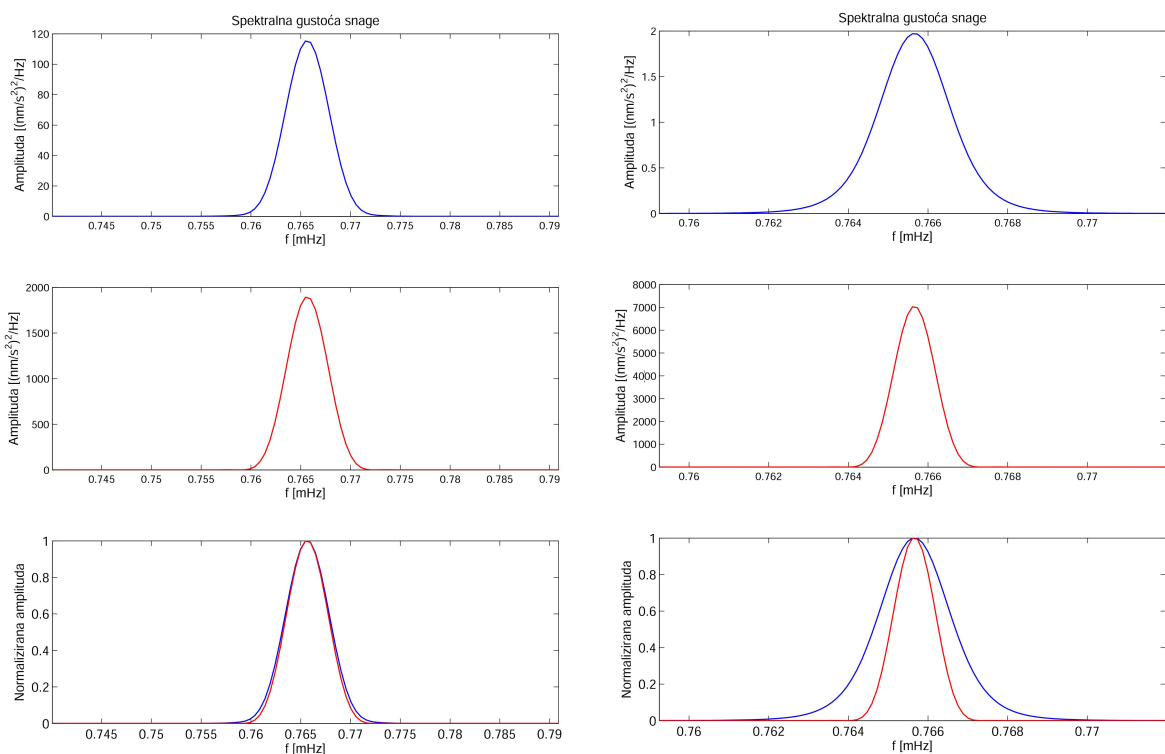
tada se može napisati

$$F(\omega + i\alpha) = \int_0^T [f(t) e^{\alpha t}] e^{-i\omega t} dt \tag{2.143}$$

Dakle, prema (2.143) spektar  $F(\omega)$  može biti analitički produljen iz ravnine  $\omega$  u ravninu  $\omega + i\alpha$  množenjem vremenske funkcije  $f(t)$  s  $e^{\alpha t}$  i provođenjem Fourierovog transformata navedenog produkta (Buland i Gilbert, 1978). Kako su svi seizmički zapisi vremenski ograničeni, svaki spektar takvog seizmičkog zapisa može biti analitički produljen.

Prethodno opisan proces predstavlja matematički alat za računanje Fourierovog transformata specijalnog slučaja, kao što je suma eksponencijalno opadajućih sinusa, ograničenog vremenskog niza kao funkciju kompleksne varijable,  $\omega + i\alpha$ . Općenito, radi se o Fourierovom transformatu eskponencijalno amplificiranog vremenskog niza prema (2.143). Analitičko produljenje zapravo je nestabilan proces jer intuitivno se očekuje smanjenje trenutno prisutnog omjera signala i šuma, kako su visoki signali na početku zapisa smanjeni u korist relativno visoke razine šuma na kraju zapisa (Buland i Gilbert, 1978).

Karakteristike analitički kontinuiranog spektra (eksponencijalno amplificiranog spektra) prikazane su na slici (2.6). Kada je parametar opadanja,  $\alpha$ , s kojim se provodi analitička kontinuiranost blizak parametru opadanja analiziranog moda, spektralna gustoća snage raste zbog amplifikacije što je prikazano na slici (2.6) u drugom retku. Također oblik šiljka spektralne gustoće snage se sužuje i time položaj šiljka bolje opisuje frekvenciju moda što je prikazano na istoj slici samo u trećem retku. Efekt analitičke kontinuiranosti bolje se uočava kada se koristi više od 1 Q ciklusa moda, jer u tom će slučaju signal koji nije analitički kontinuiran u procesu koji traje dulje od 1 Q ciklusa izgubiti puno više energije. To će rezultirati time da će spektar biti širi i niži, dok će spektar u kojem je provedena analitička kontinuiranost biti uži i viši.



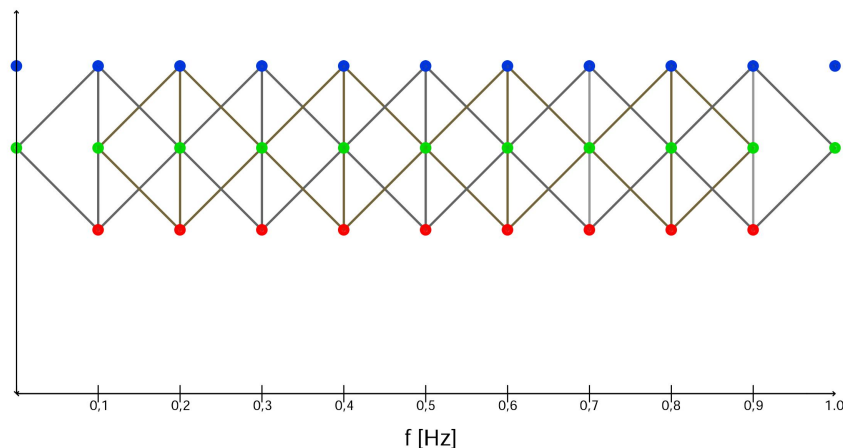
**Slika 2.6** Umjetno generiran signal  ${}_0T_4$  moda PREM frekvencije  $f_{PREM} = 0.76566$  mHz i faktora dobrote  $Q = 228$ . Na lijevoj slici koristio se vremenski niz od 1 Q ciklusa, dok se na desnoj slici koristio vremenski niz duljine 4 Q ciklusa. Prvi redak predstavlja spektralnu gustoću snage običnog signala, drugi redak predstavlja spektralnu gustoću snage analitički kontinuiranog signala, dok su u trećem retku uspoređeni signali iz prva dva retka, ali prikazi odgovaraju normiranoj spektralnoj gustoći snage.

### 2.3.5 Autoregresijski spektar u z-domeni

Autoregresijski spektar (AR spektar) u z-domeni je produljenje ARFD metode na cijeli frekvencijski niz Fourierovog spektra (Dinga i Chao, 2015a). Ovaj spektar kao bitnu činjenicu koristi geometrijsku interpretaciju koeficijenata autoregresijskog modela (2.116). Definira se na sljedeći način: svaka frekvencija u Fourierovom spektru smatra se mogućom frekvencijom moda i zbog toga se za svaku frekvenciju u Fourierovom spektru postavlja sustav (2.135) i računa se kompleksna frekvencija.

Izračunata kompleksna frekvencija, na primjer  $\sigma_0$ , općenito neće biti bliska središnjoj frekvenciji, recimo  $\omega_0$ , ako u konkretnom frekvencijskom pojasu postoji samo šum. Definirana udaljenost  $d_0 = |\sigma_0 - \omega_0|$  općenito neće biti mala i  $P(z)$  neće imati šiljak u okolici  $\omega_0$ . S druge strane, ako u okolici od  $\omega_0$  postoji harmonički signal tada u ovisnosti o tome kako je signal opažen ARFD metodom procijenjena  $\sigma_0$  biti će bliska  $\omega_0$  i odgovarajuća udaljenost  $d_0$  biti će mala. Udaljenost  $d_0$  će se približavati nuli kada je  $Q \gg 1$ , što će uzrokovati pojavljivanje Lorentzovog šiljka u okolici  $\omega_0$ . Variranjem  $\omega_0$  duž cijele frekvencijske domene Fourireovog transformata od nule pa sve do Nyquistove frekvencije može se izgraditi cijeli spektar  $P(\omega)$ , gdje će pojavljivanje Lorentzovog spektralnog šiljka ukazivati na postojanje harmoničkog signala u vremenskom nizu.

Kako bi se poboljšala sposobnost AR spektra, za detekciju harmoničkih signala vremenskog niza, može se provesti nekoliko procesa sljedećim redoslijedom: analitičko produljenje signala, produljivanje signala dodavanjem nula na kraju signala i provođenje geometrijskog usrednjavanja. Uzimajući u obzir da vrijednost spektra  $P(z)$  teži u beskonačnost u vrijednosti pola, umjesto računanja spektra  $P(z)$  na kružnici  $C_0$  u frekvencijskoj domeni, spektar se može računati na kružnici  $C'$  koja se nalazi unutar  $C_0$  i koja odgovara faktoru dobrote  $Q$  opadajućeg sinusa. Drugim riječima, kao da je spektar  $P(\omega)$ , definiran na kružnici  $C_0$  proširen u  $z$ -domenu procesom analitičkog produljenja. Nakon analitičkog produljenja slijedi produljenje signala dodavanjem nula. Ovim postupkom se postiže povećavanje gustoće točaka frekvencija Fourireovog spektra, na primjer ako se signal produlji na duljinu trostruko veću od originalne, između dvije originalne frekvencije u Fourireovom spektru tada će postojati još dvije dodatne frekvencije. Upravo te dodatne frekvencije iskoristiti će se za provođenje geometrijskog usrednjavanja. Shema postupka prikazana je na slici (2.7).



**Slika 2.7** Shema provođenja geometrijskog usrednjavanja za točke Fourierovog spektra. Plave točke su točke za koje se računaju kompleksne frekvencije pomoću ARFD metode. Svaka plava točka povezana je s tri susjedne zelene točke u kojima se redom računaju spektri  $P(z_{k-1})$ ,  $P(z_k)$  i  $P(z_{k+1})$ . Tri susjedne zelene točke spajaju se u crvenu točku u kojoj se računa geometrijski srednjak tri  $P(z)$  spektra izračunata u zelenim točkama.

Slika prikazuje frekvencijski niz Fourireovog spektra. Plave točke su točke u kojima se računaju kompleksne frekvencije pomoću ARFD metode. Svaka plava točka povezana je s tri zelene točke u kojima se računa spektar  $P(z)$  u odnosu na kompleksnu frekvenciju izračunatu u plavoj točki. Što znači, ako s  $\omega_k$  označimo jednu plavu točku i s  $\omega_k^* + i\alpha_k^*$  kompleksnu frekvenciju izračunatu u plavoj točki, tada se spektar u tri zelene susjedne frekvencije računa za  $P(z_{k-1})$ ,  $P(z_k)$  i  $P(z_{k+1})$  (Ding i Chao, 2015b)

$$\begin{aligned} P(z_{k-1}) &= \frac{1}{(e^{i\omega_{k-1}-\bar{\alpha}} - e^{i\omega_k^*-\alpha_k^*})^2} \\ P(z_k) &= \frac{1}{(e^{i\omega_k-\bar{\alpha}} - e^{i\omega_k^*-\alpha_k^*})^2} \\ P(z_{k+1}) &= \frac{1}{(e^{i\omega_{k+1}-\bar{\alpha}} - e^{i\omega_k^*-\alpha_k^*})^2} \end{aligned} \quad (2.144)$$

gdje je  $\bar{\alpha}$  parametar opadanja s kojim se provodi analitičko produljenje. Konačna vrijednost spektra  $P(z_k)$  u frekvenciji  $\omega_k$  (crvene točke) je usrednjena vrijednost tri izračunata spektra

$$P(z_k) = |(P(z_{k-1}) \times P(z_k) \times P(z_{k+1}))|^{\frac{1}{3}} \quad (2.145)$$

Ovaj postupak se provodi za ostatak frekvencija u Fourierovom spektru, a glavni cilj je onemogućiti pojavljivanje lažnih spektralnih šiljaka u AR spektru uslijed niskog omjera signala i šuma (Ding i Chao, 2015a).

### 2.3.6 Metoda usrednjavanja

Metoda usrednjavanja (engl. *stacking method*) je metoda koja poboljšava omjer signala i šuma i teži uklanjanju svih ostalih susjednih singleta (unutar multiplleta) osim onog koji se trenutno analizira. Neka je izolirani multiplet predstavljen jednadžbom (Masters i sur., 2000)

$$u_j(t) = \sum_k^{2l+1} R_{jk} a_k(t) e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.146)$$

gdje  $j$ -ti redak matrice  $R_{jk}$  predstavlja  $2l + 1$  vektor sfernih harmonika koji opisuju gibanje singleta sferne Zemlje na položaju  $j$ -tog prijarnika,  $\bar{\omega}$  je degenerirana frekvencija multiplleta, dok je  $a_k(t)$  sporo varirajuća funkcija vremena koja ovisi o mehanizmu u izvoru potresa te nosi informacije o 3D strukturi Zemlje. Neka je  $L = 2l + 1$  jednak broju singleta multiplleta koji se proučava, dok je  $N$  broj vremenskih nizova koji odgovaraju pojedinim stanicama čiji je položaj određen parom kutova  $(\theta_j, \varphi_j)$ ,

tada će matrica  $R_{jk}$  poprimiti dimenzije  $[N \times L]$

$$R = \begin{bmatrix} Y_l^{-l}(\theta_j, \varphi_j) & \dots & Y_l^{+l}(\theta_j, \varphi_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_l^{-l}(\theta_N, \varphi_N) & \dots & Y_l^{+l}(\theta_N, \varphi_N) \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

što znači da će svaki redak odgovarati vektoru sfernih harmonika analiziranog moda izračunatih u položaju  $j$ -te postaje. Sferni harmonici za pozitivne vrijednosti azimutalnog reda ( $m > 0$ ) računaju se prema (2.23), dok za negativne vrijednosti azimutalnog reda vrijedi relacija  $Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$ . Neka je  $U(\omega, \theta_j, \varphi_j)$  matrica koja je sastavljena tako da u svakom retku sadrži spektar vertikalne komponente na  $j$ -toj stanici

$$U_j(\omega, \theta_j, \varphi_j) = \sum_k^{2l+1} R_{jk} A_k C_k(\omega) \quad (2.148)$$

gdje je  $A_k$  koeficijent pobuđenja i  $C_k(\omega)$  spektar singleta. Ako je duljina Fourierovog transformata  $K$ , tada će dimenzije ove matrice biti  $[N \times K]$ . Lijeva i desna strana (2.148) pomnožit će se s inverzom matrice  $R$  i na taj način će se formirati matrica usrednjenih spektara  $B(\omega)$ , koja se prema radu Masters i sur. (2000) naziva trake prijavnika (engl. *receiver strips*), čije će dimenzije poprimiti vrijednosti  $[L \times K]$

$$B(\omega) = R^{-1}U(\omega), \quad (2.149)$$

$$[L \times K] = [L \times N] \times [N \times K],$$

u formi matrice

$$B(\omega) = \begin{bmatrix} B_{1,1}(\omega_1) & \dots & B_{1,K}(\omega_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{L,1}(\omega_1) & \dots & B_{L,K}(\omega_K) \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} Y_l^{-l}(\theta_j, \varphi_j) & \dots & Y_l^{+l}(\theta_j, \varphi_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_l^{-l}(\theta_N, \varphi_N) & \dots & Y_l^{+l}(\theta_N, \varphi_N) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$U(\omega) = \begin{bmatrix} U_{1,1}(\omega_1, \theta_1, \varphi_1) & \dots & U_{1,K}(\omega_K, \theta_1, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N,1}(\omega_1, \theta_N, \varphi_N) & \dots & U_{N,K}(\omega_K, \theta_N, \varphi_N) \end{bmatrix}.$$

Matrica usrednjenih spektara  $B(\omega)$  sadržavat će onoliko redaka koliko analizirani multiplet ima singleta, odnosno svaki redak odgovarat će spektru koji sadrži samo jedan pobuđeni singlet, dok će ostali singleti u multipletu biti u potpunosti prigušeni. Ova procedura smatra se stabilnom jer je matrica  $R$  u većini slučajeva dobro uvjetovana za tipičnu raspodjelu stanica. Matrica  $R$  bila bi loše uvjetovana kada bi se svaka

stanica nalazila na čvornoj liniji singleta sferne Zemlje. Opisana metoda još se naziva i postupak usrednjavanja sfernih harmonika (engl. *spherical harmonic stacking procedure*). Numerički, ovim se postupkom postiže poboljšanje omjera signala i šuma ciljanog  $(l, m)$  singleta i prigušenje ostalih singleta u spektru, istog angularnog stupnja, ali različitog azimutalnog reda. Metoda je izuzetno korisna kada je vrlo teško međusobno razdvojiti singlete u spektru, a kada se iz određenih razloga ne mogu koristiti vremenski nizovi veće duljine.

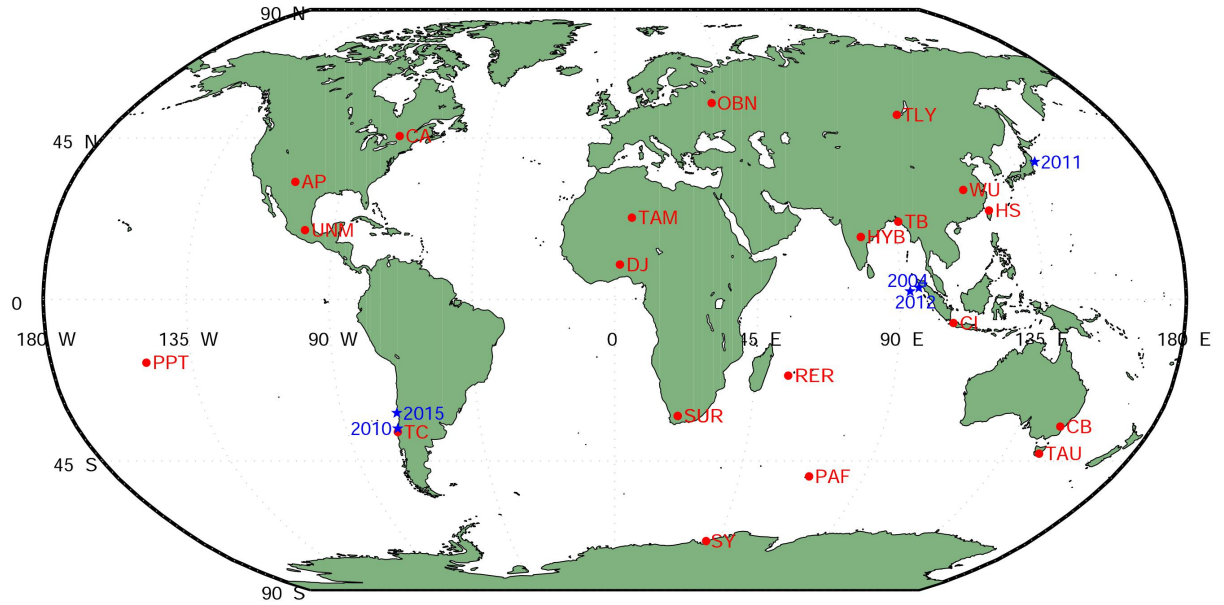
## 3 Obrada podataka

### 3.1 Podaci

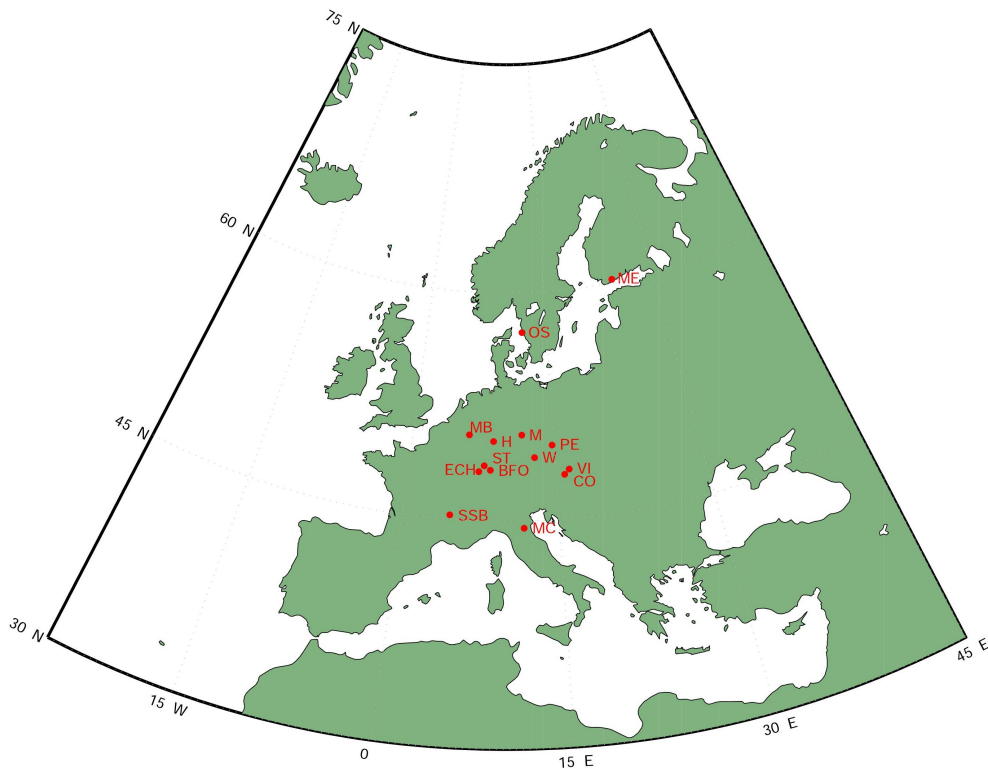
U ovom radu korišteni su podaci seizmometara i gravimetara nakon pet mega potresa u razdoblju od 2004. do 2015. godine. Popis potresa, hipocentralno vrijeme, pripadna momentna magnituda i točan broj korištenih gravimetara i seizmometara nalazi se u tablici (3.1). Prema navedenoj tablici u analizi su korištena 82 gravimetra i 31 seizmometar, što čini ukupno 113 vremenskih nizova (s intervalom uzorkovanja od 60 s) zabilježenih na sveukupno 46 korištenih stanica čija je geografska raspodjela prikazana na slici (3.1), u Europi na slici (3.2) i u Japanu na slici (3.3). Instrumenti korišteni na postajama su supravodljivi gravimetri (Goodkind, 1999), široko-pojasni Wielandt-Streickeisen STS-1 i Wielandt-Streickeisen STS-2 seizmometri. Prema Banka i Crossley (1999), Widmer-Schmidriga (2003) te Rosat i Hinderer (2011) supravodljivi gravimetri pokazuju najnižu razinu šuma u frekvencijskom pojasu ispod 0.6 mHz, dok u frekvencijskom pojasu od 0.6 do 1.5 mHz supravodljivi gravimetri su usporedivi s najboljim gravimetrima što ove instrumente čini pogodnim za proučavanje normalnih modova Zemlje. U frekvencijskom području iznad 3 mHz najnižu razinu šuma postižu STS-1 i STS-2 seizmometri. Podaci o izabranim stanicama kao što su njihove kratice, pripadni instrumenti na stanicama te njihove geografske koordinate prikazani su u tablici (3.2). Podaci su preuzeti s globalne mreže podataka, koju održava IGETS-International Geodynamics and Earth Tide Service (u prošlosti vođeno GGP-om, *Global Geodynamic Project*), mreže IRIS i japanske F-net mreže.

**Tablica 3.1** Popis korištenih potresa u analizi podataka s pripadnim vremenom nastanka, momentnom magnitudom i brojem gravimetra, odnosno seizmometra od pojedinog potresa.

Potres	Datum	Vrijeme (UTC)	$M_w$	Broj gravimetara	Broj seizmometara
Sumatra (Indonezija)	26.12.2004.	00:58	9.1	27	15
Maule regija (Čile)	27.02.2010.	06:34	8.8	21	7
Tohoku (Japan)	11.03.2011.	05:46	9.0	26	-
Aceh (Indonezija)	11.04.2012.	08:38, 10:43	8.6, 8.2	8	-
Illapel (Čile)	16.09.2015.	22:54	8.3	-	9

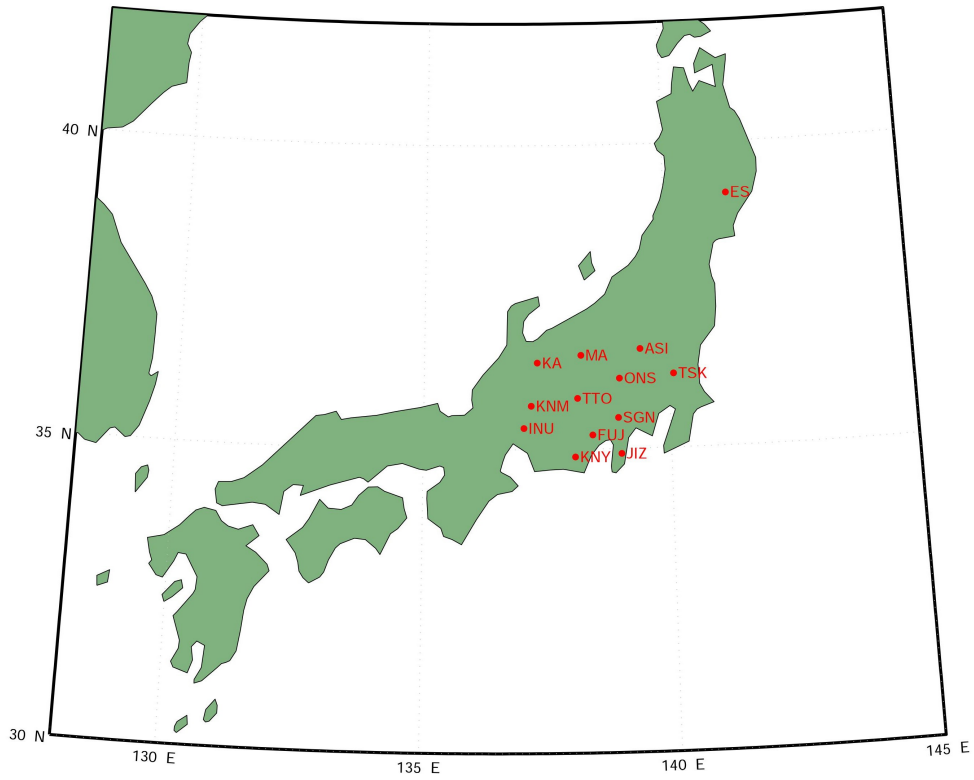


Slika 3.1 Karta svijeta s označenim korištenim postajama (crvene točke) i potresima (plave zvijezdice) u analizi podataka.



Slika 3.2 Karta europskog područja s označenim korištenim postajama (crvene točke) u analizi podataka.





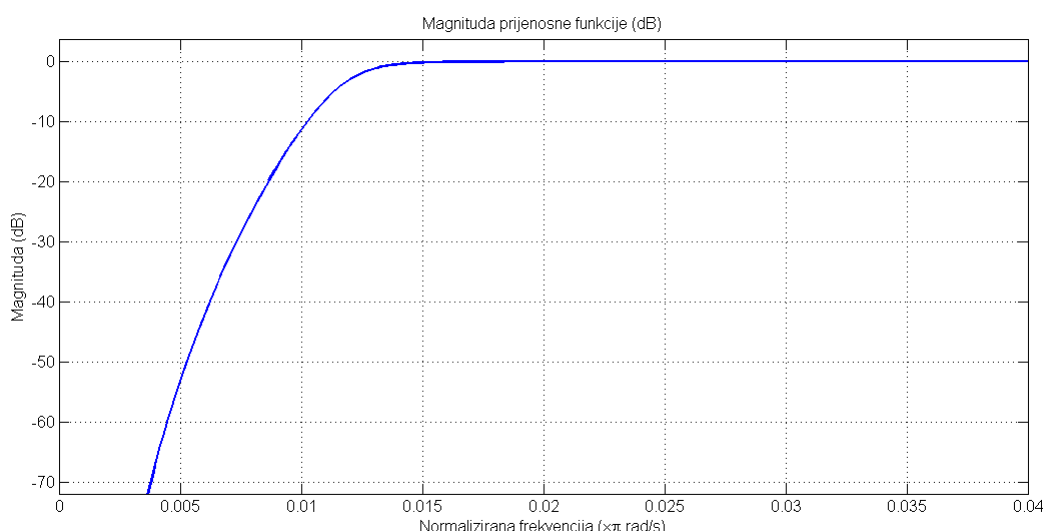
**Slika 3.3** Karta japanskog područja s označenim korištenim postajama (crvene točke) u analizi podataka.

**Tablica 3.2** Postaje korištene u analizi podataka, pripadajuće kratice, države u kojima se postaje nalaze, instrumenti na postajama i njihove geografske koordinate.

Stanica	Država	Instrument	Latituda	Longituda
Djougou (DJ)	Benin	OSG-O60	9.7424	1.6056
Tamanrasset (TAM)	Alžir	STS-1	22.7915	5.5284
Sutherland (SUR,SU)	Južna Afrika	STS-2; CD037 L,U	-32.3797	20.8117
Apache Point (AP)	Novi Meksiko, SAD	OSG-046	32.7800	-105.8200
Unam, Mexico City (UNM)	Meksiko	STS-1	19.3297	-99.1781
Tigo-Concepcion (TC)	Čile	T038	-36.8438	-73.0256
Hyderabad (HYB, HY)	Indija	STS-1	17.4187	78.5521
Talaya (TLY)	Indija	STS-1	51.6807	103.6438
Cibinong (CI)	Indonezija	CT022	-6.4903	106.8498
Ashio (ASI)	Japan	STS-2	36.6342	139.4206
Fujigawa (FUJ)	Japan	STS-1	35.2307	138.4181
Nakaizu (JIZ)	Japan	STS-2.5	34.9167	138.9938
Kanayama (KNM)	Japan	STS-2	35.7168	137.1781
Kanaya (KNY)	Japan	STS-2	34.8738	138.0628
Onishi (ONS)	Japan	STS-2	36.1557	138.9822
Turusugeno (SGN)	Japan	STS-1	35.5096	138.9444
Takato (TTO)	Japan	STS-1	35.8363	138.1209
Tsukuba (TSK)	Japan	STS-1	36.2141	140.0898
Inuyama (INU)	Japan	STS-1	35.35	137.029
Mizusawa (ES)	Japan	T007, TT70	39.1511	141.3318
Kamioka (KA)	Japan	T016	36.4253	137.3084
Matsushiro (MA)	Japan	T011, TT70	36.5439	138.2032
Wuhan (WU)	Kina	T004, TT70	30.5159	114.4898
Obninsk (OBN)	Rusija	STS-1	55.1146	36.5674
Hsinchu (HS)	Tajvan	T048	24.7888	120.9966
Tibet (TB)	Tibet	-	21.6800	91.1667
Canberra (CB,CAN)	Australija	STS-1; C031	-35.3206	149.0077
Hobart, Tasmania (TAU)	Australija	STS-2.5	-42.9099	147.3204
Conrad Observatory(CO)	Austrija	C025	47.9283	15.8598
Vienna (V,VI)	Austrija	C025	48.2493	16.3579
Membach (MB)	Belgija	C021	50.6101	6.0073
Pecny (PE)	Češka	OSG-050	49.9137	14.7856
Medicina (MC)	Italija	C023	44.5219	11.645
Metsähovi (ME)	Finska	T020 TT70	60.2172	24.3958
Strasbourg (ST)	Francuska	C026	48.6217	7.6838
Echery (ECH)	Francuska	STS-1	48.2163	7.1590
Saint Sauveur en Rue (SSB)	Francuska	STS-1	45.279	4.542
Bad Homburg (H)	Njemačka	CD030 L,U, OSG-044	50.2285	8.6113
Schiltach (BF0,B)	Njemačka	OSG-056 L,U	48.3298	8.3273
Moxa (MO,M)	Njemačka	CD034 L,U	50.6450	11.6160
Wetzlar (W)	Njemačka	CD029 L,U	49.1440	12.8780
Onsala (OS)	Švedska	OSG-054	57.3858	11.9266
Pamatai-Papeete-Tahiti (PPTF)	Francuska Polinezija	STS-1	-17.569	-149.5760
Riviere de l'Est-Sainte Rose (RER)	Réunion	STS-1	-21.1712	55.7399
Port aux Francais(PAF)	Kerguelen	STS-1	-49.351	70.2107
Syowa Station (SY)	Antartika	T016	-69.0067	39.5857

## 3.2 Priprema podataka za obradu

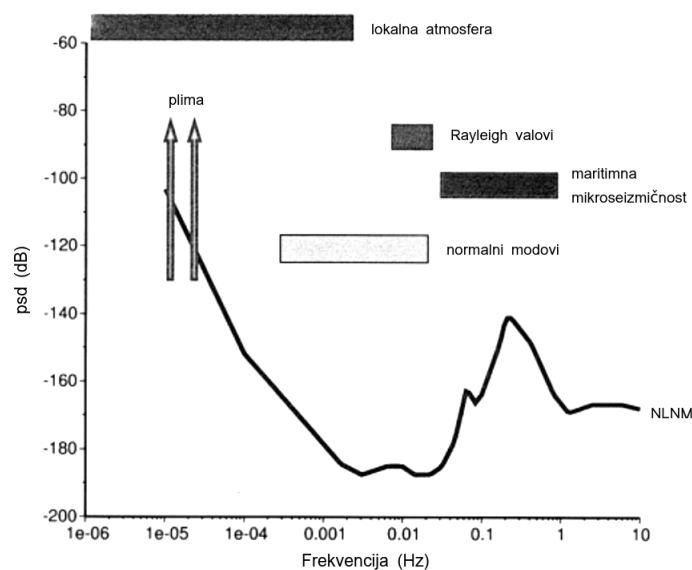
Prije same obrade vremenskih nizova pomoću autoregresijske metode u frekven-  
cijskoj domeni neobrađeni podaci morali su se pripremiti za obradu. Set vremenskih  
nizova najčešće se sastojao od dva mjeseca podataka, mjesec u kojem se potres do-  
godio i mjesec nakon potresa. Signali su originalno bili zapisani u mjernoj jedinici  
Volt i kao takvi morali su se preračunati u mjernu jedinicu akceleracije,  $\text{nm/s}^2$ , što  
se postiglo množenjem vremenskog niza odgovarajućim instrumentalnim faktorom.  
U praksi iz signala uklanja se utjecaj morske plime korištenjem visoko-frekvencijskog  
filtra granične frekvencije 0.1 mHz, jer je mod s najnižom frekvencijom,  ${}_0S_2$  mod,  
svojevrsne degenerirane frekvencije 0.30935 mHz prema teorijskom modelu PREM.  
Visoko-frekvencijskim filtriranjem odbacili su se svi signali frekvencija manjih od  
granične frekvencije, a postupak se provodio u Matlabu korištenjem funkcija `butter` i  
`filter`. Funkcija `butter`, koja se poziva u obliku `[b,a]=butter(n,wn,'high')`, kao ulazne po-  
datke prima red prijenosne funkcije, normiranu -3 dB graničnu frekvenciju i tip filtra.  
Normirana -3 dB granična frekvencija je ona frekvencija gdje se magnituda signala  
smanji za pola, a normirana je frekvencijom uzorkovanja signala. Primjer konstru-  
irane prijenosne funkcije koja se koristila u obradi podataka prikazana je na slici  
(3.4), gdje uz graničnu frekvenciju od 0.1 mHz slijedi da je  $wn = 0.012$  Hz. Funkcija  
`butter` kao izlazne vrijednosti ima koeficijente digitalnog filtra što funkcija `filter` uzima  
kao ulazne vrijednosti i time definira prijenosnu funkciju. Jedan od problema koji se  
javljao tijekom predprocesiranja bile su i vremenske praznine, nastale najvjerojatnije  
kao posljedica zasićenja senzora instrumenta, i naknadni potresi. Takvi vremenski  
nizovi su bili rijetki i nisu se uzeli u obzir.



**Slika 3.4** Magnituda prijenosne funkcije (dB) za graničnu frekvenciju 0.0001 Hz konstruirana pomoću Matlab funkcije `butter`.

Postoji niz izvora pozadinskog seizmičkog šuma koji ograničavaju detekciju malih  
seizmičkih signala od interesa. U tu svrhu, razvile su se studije o tipičnim i minimal-  
nim razinama šuma, koje se koriste kao reference za kvalitetu stanica. Jedan primjer

takvog razmatranja nalazi se na slici (3.5), a radi se o novom modelu niskog šuma (eng. *new low-noise model*, *NLNM*, Peterson, 1993) i predstavlja ovojnici niske razine šuma svih stanica iz globalne seizmičke mreže (Widmer-Schmidrig, 2003). Ako se pogleda slika (3.5) najdominantnije izvore šuma čini plima i marinska mikrosezizmičnost, gdje marinsku mikrosezizmičnost (frekvencijski pojas između 30 mHz i 1 Hz sa šiljkom oko 0.14 Hz) čine valovi koji induciraju seizmičke valove čvrste Zemlje. Frekvencijski pojas normalnih modova nalazi se između 0.3 i 20 mHz i može se uočiti da se poklapa sa frekvencijskim pojasom lokalne atmosfere, gdje pod pojmom lokalne atmosfere spadaju razni meteorološki fenomeni.



**Slika 3.5** Dominantni izvori seizmičkih šumova na vertikalnim sensorima (gravimetrima i seizmometrima) zajedno s novim modelom niskog šuma (engl. *new low-noise model*, *NLNM*, Peterson, 1993). Izvori šuma spomenuti na slici stvaraju ograničenja u detekciji malih signala normalnih modova. Preuzeto iz Widmer-Schmidrig (2003).

Na frekvencijama ispod 2 mHz, gdje se najčešće nalaze normalni modovi od interesa, meteorološki fenomeni uzrokuju šum na sve tri komponente seizmičkog zapisa kroz niz fizičkih uzoraka djelovanjem nepromjenjive i pokretljive zračne mase (Zürn i Widmer, 1995), kao što je

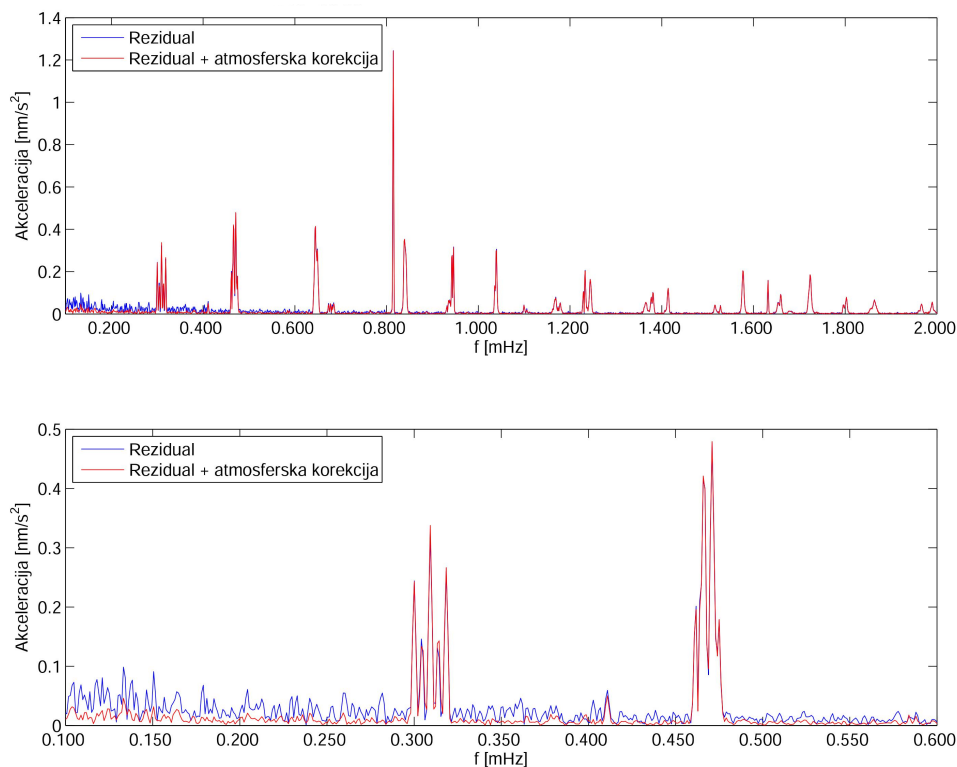
1. privlačenje mase senzora i zračne mase prema Newtonovom zakonu gravitacije;
2. uzgon mase senzora;
3. deformacije instrumenta zbog lokalne promjene atmosferskog tlaka.

Eksperimentalno je pokazano da postoje korelacije između atmosferskog tlaka i zapisa gravitacije i da se utjecaj meteoroloških fenomena može smanjiti jednostavnim oduzimanjem istovremeno zapsanog atmosferskog tlaka (Warburton i Goodkind, 1977) iz zapisa gravitacije. Pri oduzimanju atmosferskog utjecaja iz gravimetrijskog zapisa, zapis atmosferskog tlaka množi se s linearno procijenjenim faktorom. Spomenuti linearni faktori procjenjuju se iz korelacije varijacije tlaka i gravimetrijskih

zapisa oceanskih plima. Oni iznose oko  $-3.5 \text{ (nm/s}^2\text{)/hPa}$ , ali se razlikuju od zapisa do zapisa i od stanice do stanice oko  $\pm 20 \%$ . Teoretski najveći doprinos, od gore navedena četiri uzroka, ima Newtonov zakon gravitacije između mase senzora i promjenjive gustoće atmosfere iznad instrumenta, dok manji doprinos ima deformacija Zemljine kore uslijed prolaza zračnih masa. Prema gore objašnjenom postupku slijedi jednostavna relacija

$$\Delta g_e = \Delta g - \alpha \Delta p \quad (3.1)$$

gdje je  $\Delta g_e$  gravitacijski rezidual nakon uklanjanja atmosferskog utjecaja,  $\Delta g$  preračunati gravitacijski signal bez utjecaja plime,  $\alpha$  linearni faktor za provođenje korekcije atmosferskog utjecaja te  $\Delta p$  promjena atmosferskog tlaka u hPa. Jedan primjer provođenja atmosferske korekcije prikazan je na slici (3.6) za potres kod otočja Sumatra-Andaman iz 2004. godine i postaju H, Njemačka. Nakon što je signal u potpunosti obrađen odbacuje se prvih 5 sati nakon potresa kako bi se izostavio utjecaj površinskih i prostornih valova i tada su vremenski nizovi spremni za analizu.



**Slika 3.6** Prikaz vremenskog niza prije (plava linija) i nakon (crvena linija) provođenja atmosferske korekcije za potres kod otočja Sumatra-Andaman iz 2004. godine i postaju H, Njemačka.

### 3.3 Postupak analize

Kompletna obrada podataka, od pripreme podataka za analizu do primjene autoregresijska metode na vremenske nizove, provedena je i isprogramirana u programskom jeziku Matlab. Svaki signal prošao je kroz standardiziranu proceduru s ciljem mjerenja svojstvenih frekvencija i faktora dobrote normalnih modova Zemlje. Ona uključuje vizualno utvrđivanje pobuđenja moda od interesa, primjenu ARFD metode i provođenje *bootstrap* eksperimenta.

Utvrđivanje da li je konkretan mod pobuđen, ili se samo radi, o šumu postiglo se računanjem:

- pomičnog srednjaka,
- spektralne gustoće snage pomičnih vremenskih prozora,
- spektra analitički produljenog signala,
- autoregresijskog spektra u z-domeni analitički produljenog signala.

Pomični srednjak dizajniran je pomoću Matlab funkcije  $\text{filter}(b,a,x)$ , gdje su  $b$  i  $a$  brojnik i nazivnik prijenosne funkcije, dok je  $x$  niz podataka koji se filtrira. Ako je  $m$  duljina prozora pomičnog srednjaka, prijenosna funkcija se definira jednadžbom

$$y(n) = \frac{1}{m}(x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-m+1)), \quad (3.2)$$

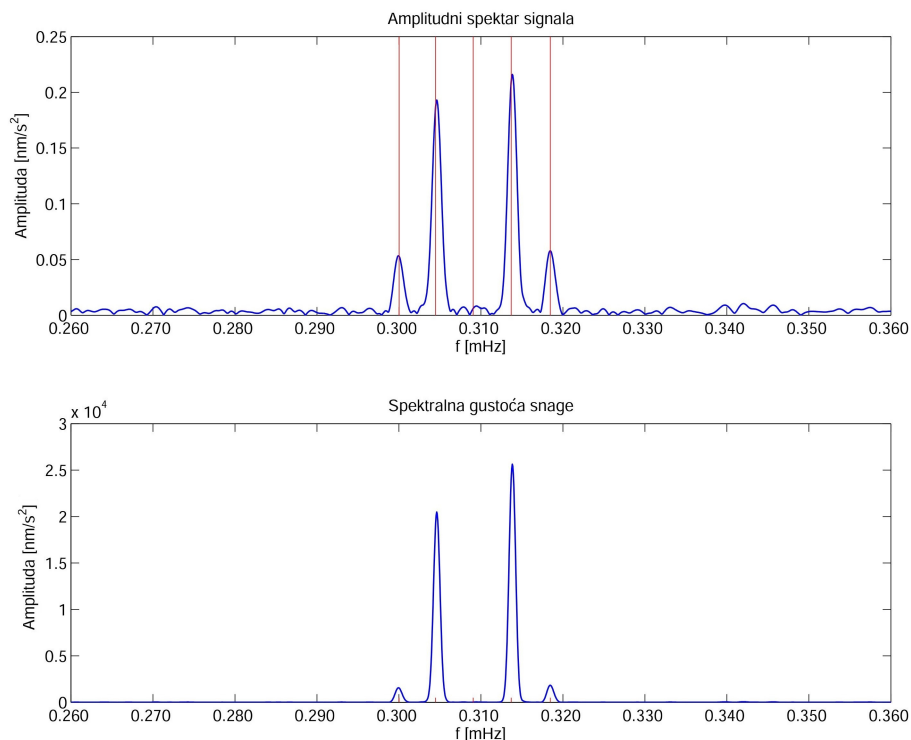
koja se dobiva postavljanjem brojnika kao  $b = \frac{1}{m}(1, 2, \dots, m)$  i nazivnika kao  $a = 1$ . Očekuje se da će ovaj postupak izgladiti šum i time pomoći u razotkrivanju postojećih signala u šumu.

U postupku pomičnih vremenskih prozora definira se duljina prozora i vremenski pomak. Na primjer, kao duljina vremenskog prozora najčešće je uzeta duljina 1.1 Q ciklusa moda (ili veća duljina ako je to zahtijevala frekvencijska razlučivost), dok je vremenski pomak najčešće bio 24 sata. Za svaki definirani vremenski niz, računa se spektralna gustoća snage i ako je mod zaista bio pobuđen u konkretnom zapisu u spektru prvih par vremenskih pomaka biti će uočen šiljak na frekvenciji moda od interesa, a kako će vremenski pomak biti veći, tako će mod gubiti na snazi i nestajati sa spektra. U slučaju da se radi samo o šumu, za očekivati je da će spektralna gustoća snage biti jednaka u svim vremenskim prozorima.

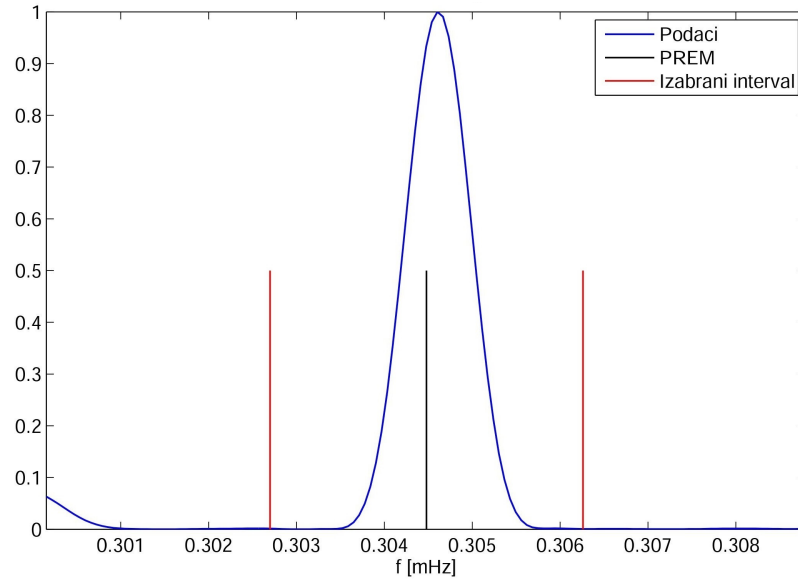
Analitičko produljenje signala prema relaciji (2.143) provodi se za parametar opadanja definiran faktorom dobrote i frekvencijom analiziranog moda. Ako je analizirani mod doista pobuđen, očekuje se da će spektar analitički produljenog signala rezultirati povećanjem amplitude moda, u odnosu na normalan spektar moda, kao posljedica uklanjanja eksponencijalnog opadanja moda. Računanje autoregresijskog spektra u z-domeni, opisano u poglavlju 2.3.5., redovito se primjenjivalo na uzak

frekvencijski spektralni pojas koji je uključivao šiljak moda analitički produljenog signala. Ako se na temelju spomenutih analiza utvrdilo da je mod zaista bio pobuđen, pronađeni položaj šiljka u autoregresijskom spektru koristio se kao ulazni parametar središnje frekvencije ARFD metode.

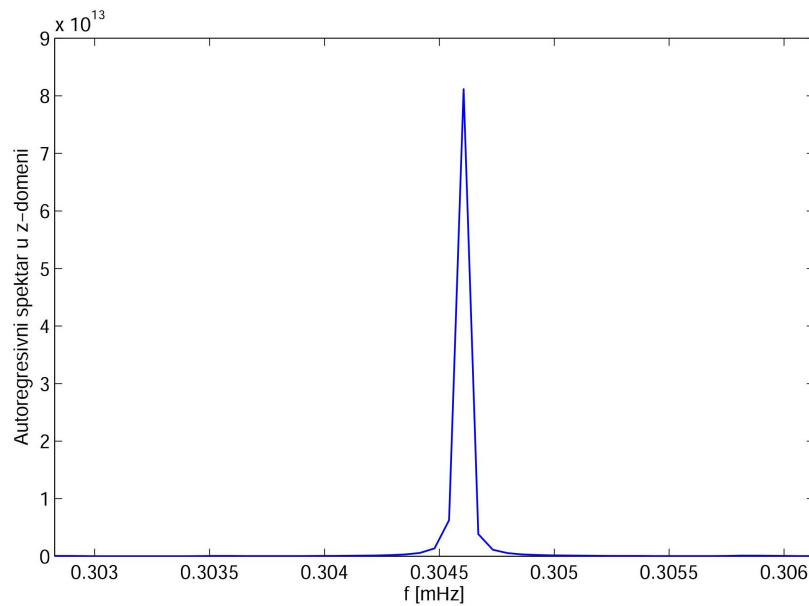
Nakon utvrđivanja prisutnosti signala u šumu i prije provođenja autoregresijske metode u frekvencijskoj domeni bitno je definirati niz ulaznih parametara. Ako je mod zapravo multiplet i sastoji se od niza singleta, na samom početku određivao se redosljed obrade pojedinog singleta, od onog najbolje pobuđenog do onog najslabije pobuđenog. Zatim, vrlo je bitno odrediti duljinu signala prije primjene metode. Prema istraživanjima (npr. Dahlen, 1982) optimalna duljina zapisa za proučavanje slobodnih oscilacija Zemlje je ona duljina za koju je omjer signala i šuma najveći. Za slučaj kada se koristi Hannova prozorska funkcija, optimalna duljina signala za procjenu frekvencije singleta i parametra opadanja je  $1.1 Q$  ciklusa, gdje faktor dobrote  $Q$  opisuje vrijeme potrebno da se amplituda signala smaji za  $e^{-\pi}$ . Za procjenu amplitude i faze signala optimalna duljina iznosi  $0.5 Q$  ciklusa. U praksi se često koriste i signali dužeg vremenskog niza zbog veće frekvencijske rezolucije koja je bitna u slučaju kada se mod sastoji od više singleta bliskih frekvencija. Nedostatak u slučaju korištenja vremenskog niz duljeg od  $1.1 Q$  ciklusa je činjenica da omjer signala i šuma u tom slučaju postaje manji.



**Slika 3.7** Amplitudni spektar i spektralna gustoća snage za signal nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka). Prikazan je  ${}_0S_2$  mod i razdvajanje moda na njegove singlete. Na spektru nije pobuđen  $m = 0$  singlet.

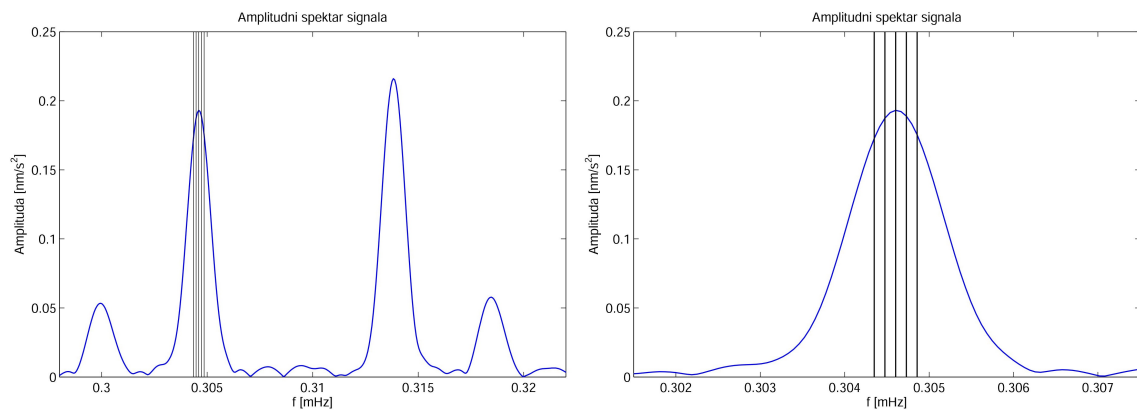


**Slika 3.8** Normirana spektralna gustoća snage za analitički produljen signal nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka). Prikazan je  $m = -1$  singlet  ${}_0S_2$  moda. Dodatno je označen položaj vrijednosti frekvencije  $m = -1$  singlet modela PREM, kao i frekvenzijski pojas oko singleta za koji se računa autoregresijski spektar u z domeni.



**Slika 3.9** Autoregresijski spektar u z domeni za analitički produljen signal nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka). Prikazan je  $m = -1$  singlet  ${}_0S_2$  moda.





**Slika 3.10** Amplitudni spektar signala nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka). Lijevo je prikazan cijeli  ${}_0S_2$  mod i izabrane frekvencije za koje se provodi autoregresijska metoda u frekvencijskoj domeni, dok se s desne strane nalazi uvećani prikaz oko  $m = -1$  singleta  ${}_0S_2$  moda.

Kako je smisao metode usredotočenost na određeni frekvencijski pojas od interesa, u kojem se očekuje pojavljivanje modova, glavni ulazni parametar je frekvencija moda kojeg proučavamo. U tom slučaju kao ulazni podatak mogu se koristiti frekvencije modova izračunate pomoću modela Zemlje PREM. Međutim, očekuje se da će frekvencija moda u spektru realnog vremenskog niza odstupati od frekvencije izračunate modelom PREM, zbog postojanja lateralnih heterogenosti, što će rezultirati pomakom spektralnog šiljka od vrijednosti modela PREM. Kako bi se metoda pravodobno centrirala na frekvenciju moda u realnom spektru, kao vrijednost središnje ulazne frekvencije od interesa koristila se ona frekvencija dobivena računanjem autoregresijskog spektra u  $z$  domeni. Nadalje, ako se proučava multiplet, što je najčešće slučaj, sljedeći bitni parametri su broj pobuđenih modova,  $M$  i broj frekvencija unutar frekvencijskog pojasa oko moda,  $K$  (parametri  $M$  i  $K$  imaju isto značenje kao u poglavlju 2.3.3). Tijekom analize parametar  $M$  najčešće je poprimio vrijednost 1. Razlog tome je korištenje dovoljno dugačkog vremenskog niza što je omogućilo vizualno razdvajanje šiljaka pojedinih singleta unutar multipleta tako da se svaki pojedini singlet mogao pojedinačno analizirati. Broj frekvencija,  $K$ , koje definiraju položaj spektralnog šiljka u amplitudnom spektru najčešće je poprimio vrijednost 3 ili 5, s time da se u obzir obavezno uzimala frekvencija koja definira položaj spektralnog šiljka moda (središnja frekvencija) i jedna ili dvije frekvencije s obje strane središnje frekvencije. Udaljenost između odabranih frekvencija definirana je frekvencijskom rezolucijom Fouriereovog transformata,  $\Delta f$ . Drugim riječima, ako je  $f_c$  središnja frekvencija analiziranog moda, niz frekvencija koje su se uzimale u obzir prilikom formiranja matrice (2.135), su  $\{f_c - 2\Delta f, f_c - \Delta f, f_c, f_c + \Delta f, f_c + 2\Delta f\}$ . Navedeni postupak analize popraćen je slikama. Na slici (3.7), koja odgovara dijelu vizualnog utvrđivanja pobuđenog moda, prikazan je amplitudni spektar i spektralna gustoća snage proučavanog  ${}_0S_2$  moda nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka). Kako je prilično jasno s prošle slike da su četiri od pet singleta  ${}_0S_2$  moda pobuđena, u ovom slučaju nije bilo potrebno računati pomični

srednjak i spektralne gustoće snage pomičnih vremenskih prozora. U sljedećem koraku odredio se uski frekvencijski pojas koji sadrži signal jednog singleta (slika (3.8)), a za koji se računa autoregresijski spektar u z-domeni, izračunat i prikazan na slici (3.9). Šiljak na prethodnoj slici označava položaj središnje frekvencije ARFD metode, odnosno  $f_c$ , dok je na slici (3.10) prikazan amplitudni spektar signala izabranog  $m = -1$  singleta  ${}_0S_2$  moda zajedno s izabranim nizom frekvencija s kojima se formira matrica (2.135).

Kako bi se postojeća frekvencijska rezolucija Fourierovog transformata, definirana duljinom korištenog vremenskog niza, interpolirala (u smislu povećanja broja frekvencija između već postojećih frekvencija), koristi se proces produljivanja signala na duljinu 6 puta veću od originalne duljine niza (poglavlje 2.2.7). Poznavajući parametar  $M$  postavlja se linearan sustav jednačbi oblika  $Ax = b$  definiran matricom (2.132) gdje su nepoznanice realni koeficijenti  $S_j$ . Kao što je već ranije spomenuto, svaki stupac u matrici  $A$ , kao i vektor desne strane  $b$ , predstavljaju vremenske nizove koji se množe s Hannovom prozorskom funkcijom i na koje se primjenjuje Fourierova transformacija, nakon što je duljina svakog niza povećana dodavanjem nula na kraju niza. Također, prije provođenja Fourierovog transformata, iz svakog signala uklanjala se njegova srednja vrijednost. Opravdanost ovog postupka nalazi se u definiciji diskretnog Fourierovog transformata za nultu frekvenciju

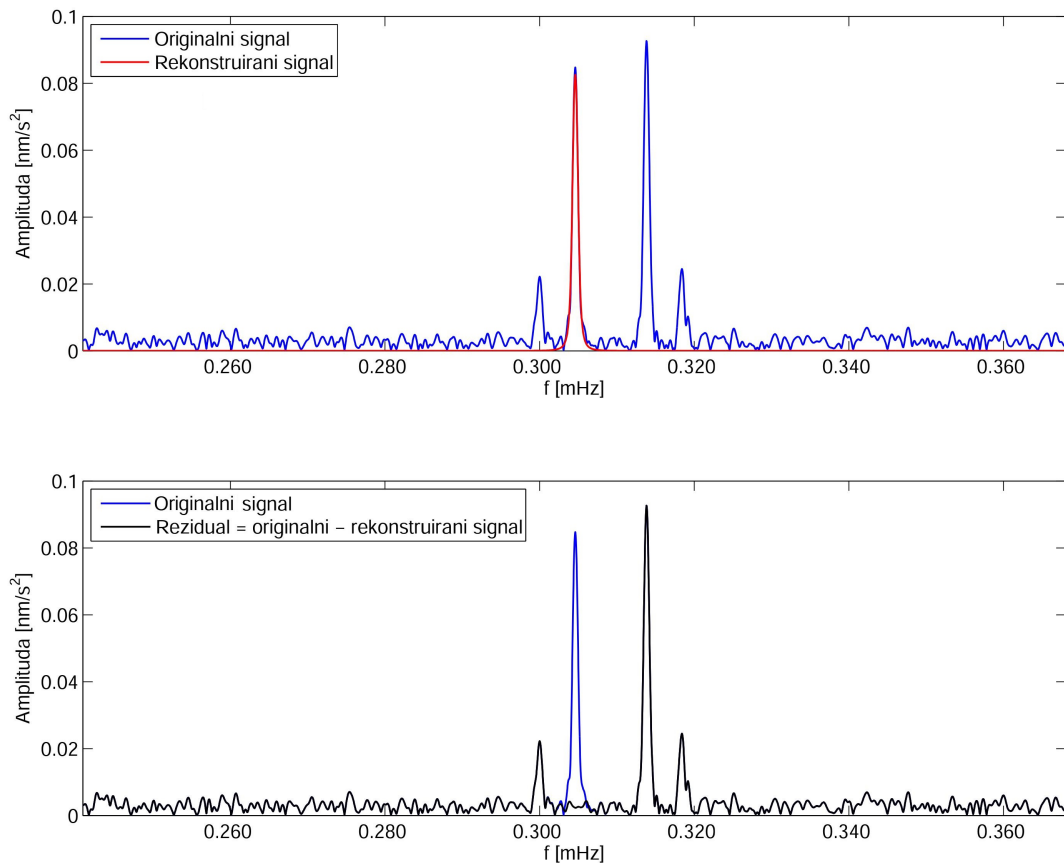
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi nk} \Big|_{k=0} \Rightarrow X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi n0} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad (3.3)$$

odnosno nakon što se Fourierov transformat izračuna i podijeli s brojem točaka vremenskog niza, vrijednost u nultoj frekvenciji sadrži srednju vrijednost signala koju je potrebno ukloniti. Rješavanje matrice (2.135) u svrhu dobivanja  $S_j$  koeficijenata postiglo se dekompozicijom matrice na singularne vrijednosti pomoću Matlab funkcije `svd(x)`. Nakon što su realni koeficijenti,  $S_j$ , pronađeni formiran je polinom definiran relacijom (2.131) te su se nul točke ovog polinoma tražile pomoću Matlab funkcije `roots`. Nakon što su polovi pronađeni, kompleksna frekvencija moda, parametar opadanja te faktor dobrote računaju se pomoću relacija

$$\begin{aligned} e^{i\sigma} &= e^{i(\omega+i\alpha)} = e^{i\omega-\alpha}, \\ \omega &= \text{angle}(e^{i\sigma})/2\pi, \\ \alpha &= -\ln(\text{abs}(e^{i\sigma})) \\ Q &= \frac{\omega}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dobiveni polovi, koji odgovaraju analiziranom modu, koriste se za računanje amplitude moda koristeći (2.137). Nakon što su iz vremenskog niza na pojedinoj stanici od pojedinog potresa za mod od interesa određena tri parametra kojima mod opisuemo, frekvencija, faktor dobrote i amplituda, taj isti mod može se rekonstruirati i

ukloniti iz vremenske domene. Ovaj postupak najčešće se primjenjuje kada je od interesa razotkriti slabije pobuđene modove, manjih amplituda. Rekonstrukcija signala prikazana je na slici (3.11) za prethodno korišteni primjer  ${}_0S_2$  moda.



**Slika 3.11** GORE: Usporedba  ${}_0S_2$  moda u originalnom signalu nakon potresa u području Tohoku iz 2011. godine za postaju BFO (Njemačka) (plava linija) i rekonstruiranog  $m = -1$  singleta pomoću izračunatih parametara singleta: frekvencije, faktora dobrote i amplitude (crvena linija).

DOLJE: Usporedba  ${}_0S_2$  moda u originalnom signalu (plava linija) i rezidualnog signala dobivenog oduzimanjem rekonstruiranog signala iz originalnog signala (crna linija).

### 3.4 Procjena pogrešaka mjerenja pomoću bootstrap metode

*Bootstrap* metoda je statistička metoda koja spada u vrstu metoda ponovljenog uzorkovanja. Prednost metoda ponovljenog uzorkovanja, pa tako i *bootstrap* metode, u usporedbi s ostalim statističkim metodama je jednostavnost, točnost, manje pretpostavki o modelu i time općenitost (npr. Tomić, 2015). Osnovna ideja metode je ponovljeno uzorkovanje nezavisnih događaja iz izvornog skupa podataka (engl. *resampling*) kako bismo procijenili određene statističke parametre. Metoda je primjenjiva čak i onda kada ne postoji vjerojatnosni model za podatke. Kako bi se pronašao robusni procjenitelj standardne devijacije parametara singleta, provedeni su *bootstrap* eksperimenti prema Häfner i Widmer-Schnidrig (2013). U ovim eksperimentima veliki skupovi podataka se ne generiraju iz osnovnog skupa podataka, već se generira niz sintetičkih seizmograma prema relaciji

$$x(t) = \sum_j B_j \cos(2\pi f_j t) e^{-\alpha_j t} + \eta(t) \quad (3.5)$$

gdje su ulazni parametri singleta izračunati pomoću autoregresijske metode u frekvencijskoj domeni:  $B_j = 2A_j, f_j, \alpha_j$ , dok je  $\eta(n)$  umjetno generirani šum. Korišten srednje vrijednosti kvadrata (engl. *root mean square*) amplitude šuma,  $\eta(t)$ , prilagođavao se tako da bude jednak onom u originalnom vremenskom nizu i računao se iz spektra množenog Hannovom prozorskom funkcijom uzimajući u obzir samo dva frekvencijska pojasa koja omeđuju multiplet od interesa. Dva spomenuta frekvencijska pojasa biraju se tako da ne sadrže utjecaj susjednih modova. Svaki sintetički vremenski niz kontaminiran umjetno generiranim šumom procesuiran je na isti način kao i originalni vremenski niz, što znači da svaki ekperiment generira novi niz parametara singleta  $B_j = 2A_j, f_j, \alpha_j$ . Konačno standardna devijacija frekvencije,  $\sigma_{f_j}$ , i parametra opadanja,  $\sigma_{\alpha_j}$ , računa se uzimajući u obzir cijeli niz izračunatih parametara, dok se standardna devijacija faktora dobrote,  $\sigma_{Q_j}$ , računa prema

$$\sigma_{Q_j} = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial f}\right)^2 \cdot \sigma_{f_j}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_j}^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_j}}{\bar{\alpha}_j}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\alpha_j} \bar{f}_j}{\bar{\alpha}_j^2}\right)^2} \quad (3.6)$$

gdje su  $\bar{f}_j$  i  $\bar{\alpha}_j$  srednje vrijednosti seta izračunatih parametara. Kako bi pogreška konvergirala generirano je 500 *bootstrap* eksperimenata.

Nakon što su izračunate standardne devijacije frekvencija singleta,  $\sigma_{f_j}$ , za svaki odabrani vremenski niz, sljedeći korak je izračunati konačnu procjenu frekvencije iz postojećeg skupa izračunatih frekvencija. U ovom slučaju izračunate pogreške frekvencija koriste se kao težine, što znači da će manje pouzdana mjerenja imati veću pogrešku i time manju težinu. Težinska vrijednost za  $i$ -tu frekvenciju singleta

za određeni vremenski niz definira se pomoću relacije (Ding i Shen, 2013)

$$P_j = \frac{(1/\sigma_{f_j}^2)}{\sum_j^N 1/\sigma_{f_j}^2} \quad (3.7)$$

gdje je  $N$  broj izabranih vremenskih nizova,  $\sigma_{f_j}$  ima isto značenje kao i ranije te je nazivnik  $\sum_j^N 1/\sigma_{f_j}^2$  izabran zbog normiranja, tako da zbroj svih težina bude jedan,  $\sum_j^N P_j = 1$ . Ovim normirajućim faktorom postiže se da su međusobni omjeri težina  $P_j$  očuvani. Za svaki singlet konačna procjena frekvencije kao i konačna procjena njezine pogreške, računa se prema formuli

$$f_f = \sum_{i=1}^N P_j \cdot f_j, \quad e(f_f) = \frac{1}{\sqrt{\sum_j^N \frac{1}{\sigma_{f_j}^2}}}. \quad (3.8)$$

Ovako izračunata konačna vrijednost frekvencije zove se težinska srednja vrijednost. Isti postupak ponovio se i za konačnu težinsku srednju vrijednost faktora dobrote i njegove konačne pogreške mjerenja.

## 4 Rezultati

U ovom radu analizirani su radijalan mod  ${}_0S_0$ , tri fundamentalna moda  ${}_0S_2$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  i jedan viši harmonik  ${}_2S_1$  slobodnih oscilacija. Svaki od navedenih modova identificiran je na pojedinačnim spektrima vertikalnih vremenskih zapisa pod uvjetom da su isti bili pobuđeni nakon događaja čiji su se zapisi koristili. Dobiveni rezultati prezentirani su pojedinačno za svaki mod u obliku tablica i slika odgovarajućih izračunatih kompleksnih frekvencija (2.128).

Dahlen (1982) je pokazao kako je atenuacija,  $\alpha$ ,  $2 \cdot Q$  manja nego frekvencija da će relativne greške atenuacije biti  $2 \cdot Q$  puta veće nego relativne greške frekvencije, odnosno da vrijedi  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \geq 2Q \frac{\Delta f}{f}$ . Uz prethodno navedenu relaciju i jednadžbu za srednju kvadratnu pogrešku faktora dobrote  $\Delta Q = Q \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2}$  slijedi

$$\Delta Q = Q \cdot \frac{\Delta f}{f} \sqrt{1 + 4Q^2}. \quad (4.1)$$

Izračunate pogreške frekvencija i faktora dobrote dobivene *bootstrap* eksperimentima zadovoljavaju (4.1) što će biti pokazano za  ${}_0S_2$  mod. Osim što su pogreške konzistentne s (4.1), izračunate frekvencije konzistentne su i s radovima drugih autora. Također, konačne pogreške izračunatih frekvencija i faktora dobrote ovog rada nisu u potpunosti usporedive s konačnim pogreškama iz literature. Postoje tri razloga tome. Prvi razlog je taj što se u ovom radu koriste *bootstrap* eksperimenti za izračun standardnih devijacija. Zatim, drugi razlog je činjenica da se u ovom radu koristi velika grupa podataka. I treći razlog je taj što se konačna pogreška računa kao težinski srednjak svih pogrešaka pojedinačnih mjerenja dobivenih *bootstrap* eksperimentima. Usporedbom s konačnim pogreškama ostalih radova iz literature, pogreške ovog rada čine se manjima, ali to ne znači da one nisu konzistentne i realistične, što će biti i pokazano.

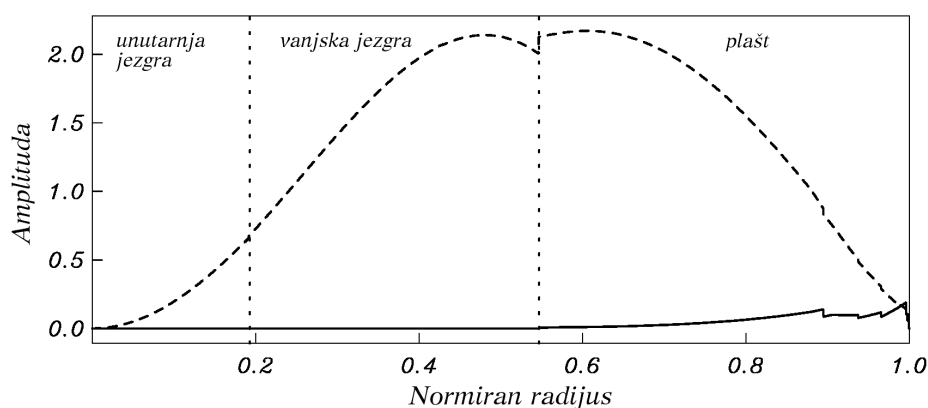
U rezultatima će biti prezentirano kako postoje pojedine vrijednosti izmjerenih frekvencija koje strše od izračunate težinske srednje vrijednosti. Ove rezultate poželjno je dodatno provjeriti i jedna od najboljih metoda za to je metoda računanja vektora faze (engl. *phasor walk*, *phasor-walkout*) (Zürn i Rydelek, 1994). Fourierov transformat vremenskog niza predstavlja usrednjenu vrijednost frekvencija određenog vremenskog intervala. Pomoću metode računanja vektora faze moguće je provjeriti postoje li nelinearnosti u signalu koje se ne vide na Fourierovom transformatu i koje mogu biti uzrok pojave lažnih signala ili poremećenih signala. Više o metodi računanja vektora faze u Dodatku A.

Kao referentni model Zemlje prezentirane su teorijske vrijednosti modela PREM (engl. *Preliminary Reference Earth Model*, Dziewonski i Anderson, 1981). Dugi niz godina ovo je široko korišteniji jednodimenzionalni model seizmičkih brzina Zemlje. Model je osmišljen tako da odgovara različitim skupovima podataka, kao što su mjerenja svojstvenih frekvencija slobodnih oscilacija Zemlje, disperzije površinskih va-

lova, vremena putovanja prostornih valova te osnovni astronomski podaci (Zemljin radijus, masa, moment inercije). Vrijednosti, kao što su brzine  $P$  i  $S$  valova, gustoća, tlak i ostali, prikazane su u ovisnosti o Zemljinom radijusu.

#### 4.1 Izračunate kompleksne frekvencije normalnih modova

Fundamentalni radijalni mod  ${}_0S_0$  koji se još naziva i mod "disanja" (engl. "breathing mode") Zemlje, perioda 20.5 minuta, sastoji se od gotovo čiste kompresije i dilatacije u slučaju sferno simetrične nerotirajuće Zemlje. Ovaj mod ima jedinstvenu svojstvenu frekvenciju jer u slučaju lateralno heterogene Zemlje ne dolazi do njenog razdvajanja pa amplituda ovog moda nije pod utjecajem pulsiranja ostalih singleta. Iz tog razloga geografski uzorak amplitude ovog moda može se koristiti za proučavanje lateralno heterogene strukture Zemlje (Rosat i sur., 2007). Mod se može uočiti jedino na zapisima nakon snažnih potresa magnituda većih od 8 kako bi se razlikovao od vrlo bliskog susjednog moda,  ${}_0S_5$  moda. Mod  ${}_0S_0$  uključuje gibanja paralelna radijusu Zemlje i kao takav osjetljiv je na cijelu strukturu Zemlje prikazano na slici (4.1). Na slici (4.1) prikazana je ovisnost gustoće energije longitudinalnog i smicajnog vala o normiranom radijusu Zemlje (tako da je radijus na površini 1), odnosno prikazuje kako je energija valova raspodijeljena u Zemljinoj unutrašnjosti, pa time i na koje područje u unutrašnjosti Zemlje je mod najosjetljiviji ili nije uopće osjetljiv (Masters i Widmer, 1995). U mjerenju svojstvene frekvencije nije se koristio vremenski niz duljine 1.1 Q ciklusa, jer on u slučaju ovog moda iznosi 2.5 mjeseca. Dobar omjer signala i šuma postigao se za duljine vremenskog niza od 750 sati.



**Slika 4.1** Ovisnosti gustoće energije  ${}_0S_0$  moda o radijusu Zemlje za model Zemlje PREM. Puna linija predstavlja gustoću energije longitudinalnog vala, dok crtkana linija gustoću energije smicajnog vala. Preuzeto iz Widmer-Schnidrig, 2009.

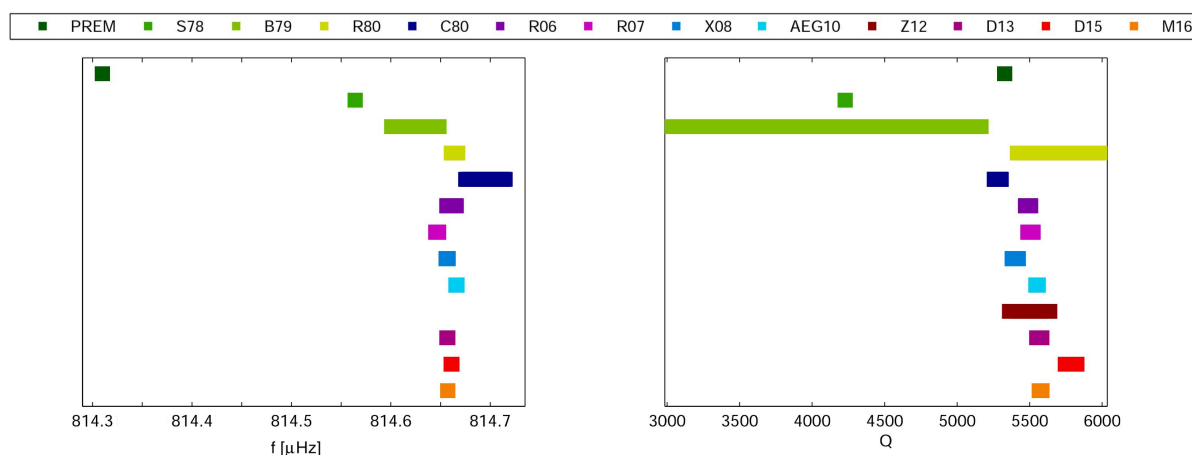
Rezultat ovog rada, u obliku težinske srednje vrijednosti svih izmjerenih frekvencija i faktora dobrote iz onih vremenskih nizova gdje je ovaj mod bio pobuđen, prikazan je u tablici (4.1) zajedno s teorijskom svojstvenom frekvencijom i faktorom dobrote modela Zemlje PREM i vrijednostima iz literature. Na slici (4.2) prikazane su vrijednosti iz prethodne tablice radi lakše usporedbe podataka, dok su na slici (4.3)

prikazane sve izmjerene frekvencije svih korištenih vremenskih nizova u ovisnosti o geografskoj širini. Mjerenja koja su prikazana na slici (4.3) su ona koja su se koristila u računanju konačne težinske vrijednosti prezentirane u tablici (4.1). Sva opažanja frekvencija ovog rada, kao i vrijednosti iz literature, pokazuju pomak frekvencije od PREM vrijednosti prema višoj frekvenciji. Pomak u slučaju ovog rada iznosi  $3.5 \cdot 10^{-4}$  mHz. Kako sustavno sva mjerenja ukazuju na pomak frekvencije, očito da parametri koji su korišteni za teorijski izračun svojstvene frekvencije PREM modela ne odgovaraju opažanjima. U tom slučaju, izmjerene vrijednosti mogu pomoći u izračunu tih istih parametara, ali bolje rezolucije. S druge strane, izmjereni faktor dobrote ovog rada iznosi 5578, što je konzistentno i s PREM teorijskom vrijednosti kao i s rezultatima u literaturi.

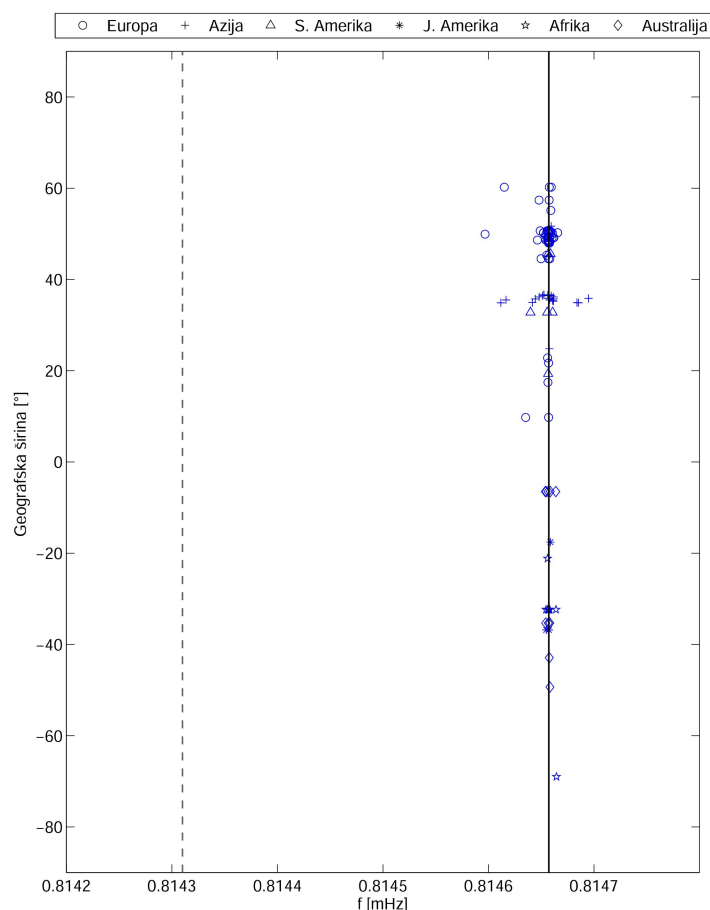
**Tablica 4.1** Izračunati težinski srednjak svojstvene frekvencija (mHz) i faktora dobrote  ${}_0S_0$  moda u usporedbi s vrijednostima modela PREM i vrijednostima iz literature.(\* ) Ding i Shen (2013).

${}_0S_0$	Frekvencija (mHz)	Q
PREM*	0.81431	5327
Sailor i Dziewonski (1978)	0.814564	4229
Buland i sur. (1979)	$0.8146246 \pm 2.4 \cdot 10^{-5}$	$4100 \pm 1066$
Riedesel i sur. (1980)	$0.814664 \pm 3.3 \cdot 10^{-6}$	$5700 \pm 285$
Chao i Gilbert (1980)	$0.814695 \pm 2.0 \cdot 10^{-5}$	$5280 \pm 25$
Roult i sur. (2006)	$0.814661 \pm 5.0 \cdot 10^{-6}$	$5489.1 \pm 19$
Rosat i sur. (2007)	$0.8146466 \pm 1.6 \cdot 10^{-6}$	$5506 \pm 19$
Xu i sur. (2008)	$0.8146565 \pm 1.2 \cdot 10^{-6}$	$5400.94 \pm 22.4$
Abd El-Gelil i sur. (2010)	$0.814666 \pm 0.7 \cdot 10^{-6}$	$5551.0 \pm 9.1$
Zábranová i sur. (2012)	-	$5500 \pm 140$
Ding i Shen (2013)	$0.8146568 \pm 6.5 \cdot 10^{-7}$	$5566.6 \pm 18.8$
Ding i Chao (2015a)	$0.814661 \pm 5.0 \cdot 10^{-7}$	$5786 \pm 41$
<b>Ovaj rad</b>	$0.8146572 \pm 1.3 \cdot 10^{-7}$	$5575.7 \pm 10.2$





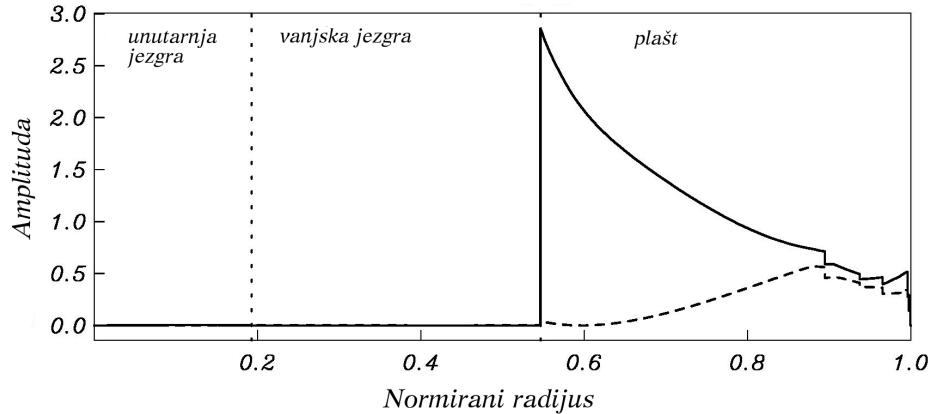
**Slika 4.2** Izračunate težinske vrijednosti svojstvene frekvencije i pripadne standardne devijacije (lijevo) te faktora dobrote i pripadne standardne devijacije (desno) u usporedbi s teorijskom vrijednosti modela PREM i vrijednostima iz literature za  ${}_0S_0$  mod (kratice autora odgovaraju inicijalima u tablici (4.1)).



**Slika 4.3** Ovisnost izmjerenih frekvencija svakog pojedinog vremenskog niza  ${}_0S_0$  moda o geografskoj širini. Siva crtkana linija predstavlja teorijsku PREM vrijednost frekvencije, dok crna puna linija predstavlja izračunatu težinsku vrijednost frekvencije.

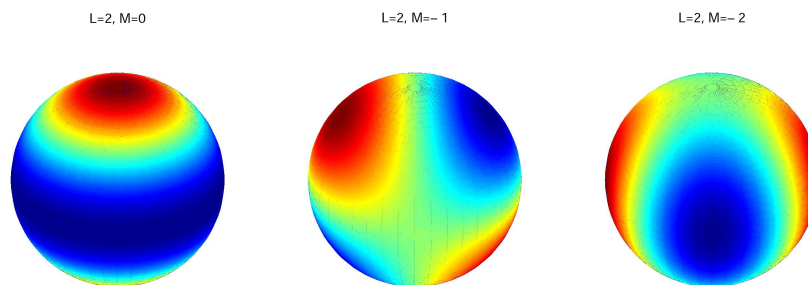
Mod  ${}_0S_2$ , koji se još naziva i "nogometni" mod, pripada grupi sferoidalnih fundamentalnih modova te je mod s najduže zabilježenim periodom (53.9 min). Ovaj mod vidljiv je i na vertikalnoj komponenti seizmometra i u zapisu gravimetra. Nje-

govo razdvajanje smatra se normalnim zbog osjetljivosti ovog moda na strukturu u plaštu, što je prikazano na slici (4.4) te se također smatra da je pretežito pod utjecajem Coriolisove sile kao posljedica rotacije. Pri analizi ovog moda koristila se duljina vremenskog niza od 1.1 Q ciklusa, koja u slučaju ovog moda iznosi otprilike 457 sati i predstavlja dovoljnu frekvencijsku rezoluciju kao i dobar omjer signala i šuma kako bi se singleti međusobno razdvojili i pojedinačno analizirali.



Slika 4.4 Isti prikaz kao na slici (4.1) za  ${}_0S_2$  moda.

Kutni stupanj ovog moda je dva i iz tog razloga sferoidalno  ${}_0S_2$  mod se, u slučaju realne Zemlje, razdvaja na 5 singleta:  ${}_0S_2^{-2}$ ,  ${}_0S_2^{-1}$ ,  ${}_0S_2^0$ ,  ${}_0S_2^1$ ,  ${}_0S_2^2$ . Karakteristike sfernih harmonika za  ${}_0S_2^0$ ,  ${}_0S_2^{-1}$ ,  ${}_0S_2^{-2}$  singlete prikazani su na slici (4.5), dok za njihove azimutalne parove vrijedi relacija  $Y_l^m = (-1)^m (Y_l^{-m})^*$ . Singlet  ${}_0S_2^0$  ima azimutalni red jednak 0, tako da se ovaj singlet naziva još i zonalni harmonik, jer su čvorne linije kružnice oko pola. Singleti  ${}_0S_2^2$  i  ${}_0S_2^{-2}$  imaju  $m=2$  te se ovi singleti još zovu sektorski harmonici, jer su čvorne linije kružnice koje prolaze kroz polove. Singleti  ${}_0S_2^1$  i  ${}_0S_2^{-1}$  nazivaju se teseralni harmonici.



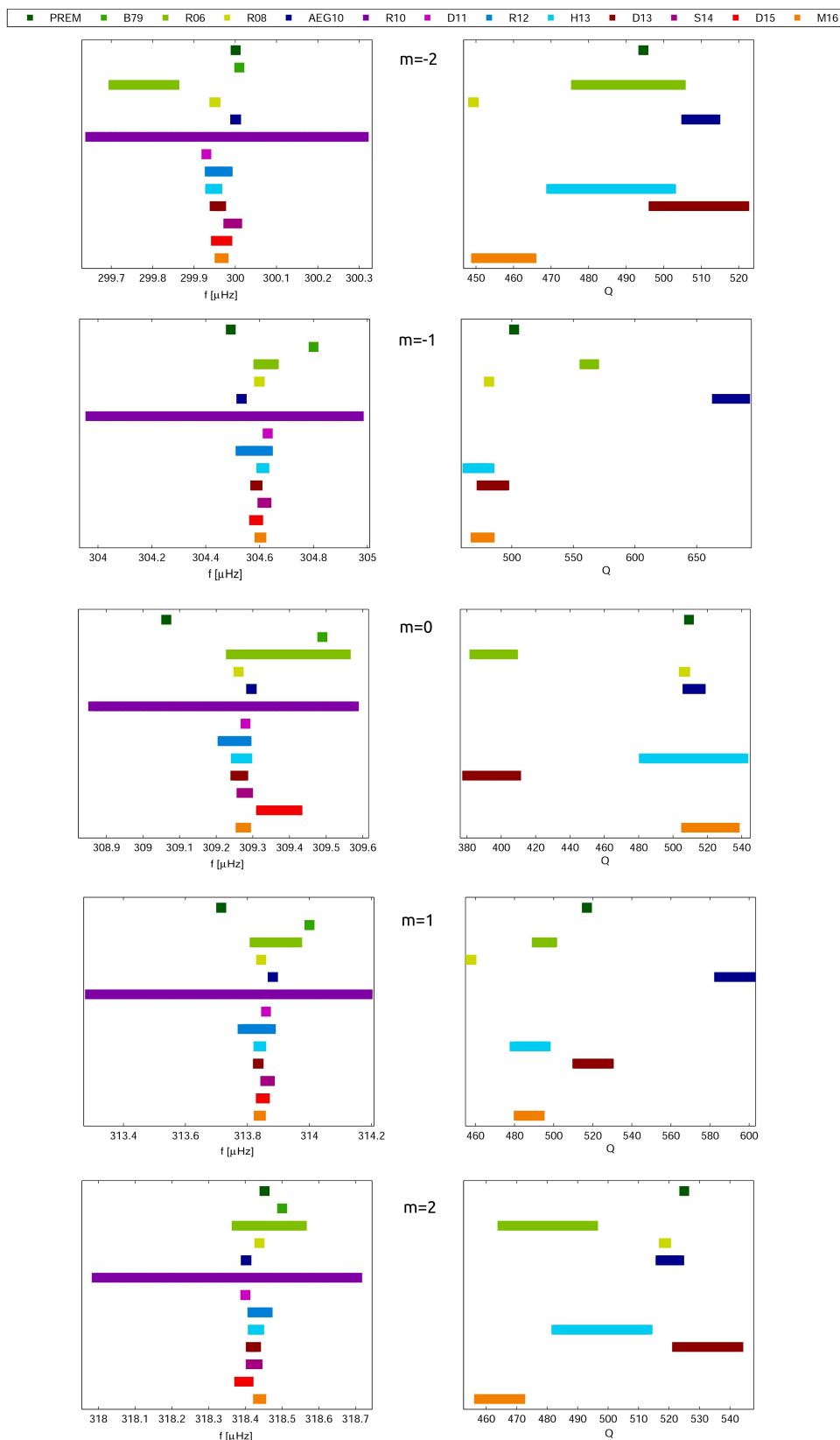
Slika 4.5 Sferni harmonici  ${}_0S_2^0$ ,  ${}_0S_2^{-1}$ ,  ${}_0S_2^{-2}$ .

Rezultati i usporedba ovog moda s teorijskim vrijednostima i onima iz literature nalazi se u tablici (4.2), te na slikama (4.6), (4.7). Uspoređujući izmjerene frekvencije singleta  ${}_0S_2$  moda sa teorijskim vrijednostima modela PREM, uočava se dobro slaganje vrijednosti, dok se najveće odstupanje postiže za singlete  $m=0$  i  $m=-1$ . Usporedbom frekvencija s vrijednostima iz literature također se uočava dobro slaganje

s većinom radova, što je opravdano činjenicom da se izmjerene frekvencije ovog rada nalaze unutar standardnih devijacija frekvencija iz literature i obrnuto. Uzimajući u obzir izmjerene faktore dobrote pojedinih singleta dobiva se potpuno drukčija situacija, ali ne iznenađujuća. Kako je faktor dobrote puno teže izračunati, time su i rezultati dosta raspršeni. Ali kao zadovoljavajuću činjenicu primjećuje se dobro slaganje izmjerenih vrijednosti faktora dobrote ili sa teorijskom vrijednosti ili sa vrijednostima iz literature. U ovom kontekstu najveće odstupanje pokazuje vrijednost faktora dobrote singleta  $m=2$ , iako i u ovom slučaju postoji preklapanje standardne vrijednosti ovog rada  $s$ , na primjer, Roullet i sur. (2006).

**Tablica 4.2** Izračunati težinski srednjak frekvencija singleta (mHz) i pripadnih faktora dobrote za  ${}_0S_2$  mod u usporedbi s vrijednostima modela PREM i vrijednostima iz literature. (\*) Ding i Shen (2013).

${}_0S_2$		$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
PREM*	f	0.30000117	0.30449303	0.30906353	0.31371556	0.31845238
	Q	494.6	501.8	509.3	517.0	525.0
Buland i sur. (1979)	f	0.30001	0.30480	0.30949	0.31400	0.31850
Roullet i sur. (2006)	f	0.299779 $\pm 7.4 \cdot 10^{-5}$	0.304624 $\pm 2.9 \cdot 10^{-5}$	0.309397 $\pm 1.57 \cdot 10^{-4}$	0.313892 $\pm 6.9 \cdot 10^{-5}$	0.318465 $\pm 8.9 \cdot 10^{-5}$
	Q	490.6 $\pm 14.0$	562.9 $\pm 4$	395.6 $\pm 11.3$	495.3 $\pm 4.0$	480.2 $\pm 14.9$
Rosat i sur. (2008)	f	0.299951 $\pm 1.5 \cdot 10^{-6}$	0.304599 $\pm 1.6 \cdot 10^{-6}$	0.3092607 $\pm 2.5 \cdot 10^{-7}$	0.3138446 $\pm 2.6 \cdot 10^{-7}$	0.3184385 $\pm 2.8 \cdot 10^{-7}$
	Q	449.3 $\pm 0.1$	481.5 $\pm 0.1$	506.7 $\pm 0.4$	457.7 $\pm 0.3$	518.7 $\pm 0.4$
Abd El-Gelil i sur. (2010)	f	0.300001 $\pm 1.2 \cdot 10^{-6}$	0.304533 $\pm 1.1 \cdot 10^{-6}$	0.309296 $\pm 1.1 \cdot 10^{-6}$	0.313882 $\pm 0.5 \cdot 10^{-6}$	0.318402 $\pm 1.0 \cdot 10^{-6}$
	Q	509.9 $\pm 3.9$	677.9 $\pm 11.5$	512.3 $\pm 3.9$	592.7 $\pm 8.1$	520.3 $\pm 3.1$
Roullet i sur. (2010)	f	0.29998 $\pm 3.313 \cdot 10^{-4}$	0.30447 $\pm 4.985 \cdot 10^{-4}$	0.30922 $\pm 3.560 \cdot 10^{-4}$	0.31374 $\pm 4.480 \cdot 10^{-4}$	0.31835 $\pm 3.548 \cdot 10^{-4}$
Deuss i sur. (2011)	f	0.29993	0.30463	0.30928	0.31386	0.31840
Rosat i sur. (2012)	f	0.29996 $\pm 2.2 \cdot 10^{-5}$	0.30458 $\pm 5.1 \cdot 10^{-5}$	0.30925 $\pm 3.3 \cdot 10^{-5}$	0.31383 $\pm 4.6 \cdot 10^{-5}$	0.31844 $\pm 2.1 \cdot 10^{-5}$
Häfner i Widmer-Schmidrig (2013)	f	0.299948 $\pm 9.0 \cdot 10^{-6}$	0.304612 $\pm 6.0 \cdot 10^{-6}$	0.309269 $\pm 1.6 \cdot 10^{-5}$	0.313840 $\pm 5.0 \cdot 10^{-6}$	0.318429 $\pm 9.0 \cdot 10^{-6}$
	Q	486 $\pm 16$	473 $\pm 9$	512 $\pm 29$	488 $\pm 8$	498 $\pm 15$
Ding i Shen (2013)	f	0.299958 $\pm 8.1 \cdot 10^{-6}$	0.304588 $\pm 4.6 \cdot 10^{-6}$	0.309263 $\pm 1.1 \cdot 10^{-5}$	0.313835 $\pm 1.4 \cdot 10^{-6}$	0.318422 $\pm 7.4 \cdot 10^{-6}$
	Q	509.4 $\pm 12.1$	484.7 $\pm 9.3$	394.4 $\pm 14.3$	520.2 $\pm 8.1$	532.7 $\pm 10.1$
Shen i Ding (2014)	f	0.299994 $\pm 1.1 \cdot 10^{-5}$	0.304618 $\pm 7.8 \cdot 10^{-6}$	0.309278 $\pm 9.1 \cdot 10^{-6}$	0.313865 $\pm 7.7 \cdot 10^{-6}$	0.318424 $\pm 9.6 \cdot 10^{-6}$
Ding i Chao (2015a)	f	0.299967 $\pm 1.4 \cdot 10^{-5}$	0.304587 $\pm 7.8 \cdot 10^{-6}$	0.309372 $\pm 5.0 \cdot 10^{-5}$	0.313850 $\pm 6.9 \cdot 10^{-6}$	0.318396 $\pm 1.3 \cdot 10^{-5}$
Ovaj rad	f	0.299967 $\pm 5.1 \cdot 10^{-6}$	0.304603 $\pm 3.7 \cdot 10^{-6}$	0.309274 $\pm 7.7 \cdot 10^{-6}$	0.313840 $\pm 3.6 \cdot 10^{-6}$	0.318439 $\pm 4.7 \cdot 10^{-6}$
	Q	457.4 $\pm 7.4$	476.3 $\pm 5.8$	521.8 $\pm 14.2$	487.5 $\pm 5.4$	464.4 $\pm 6.8$

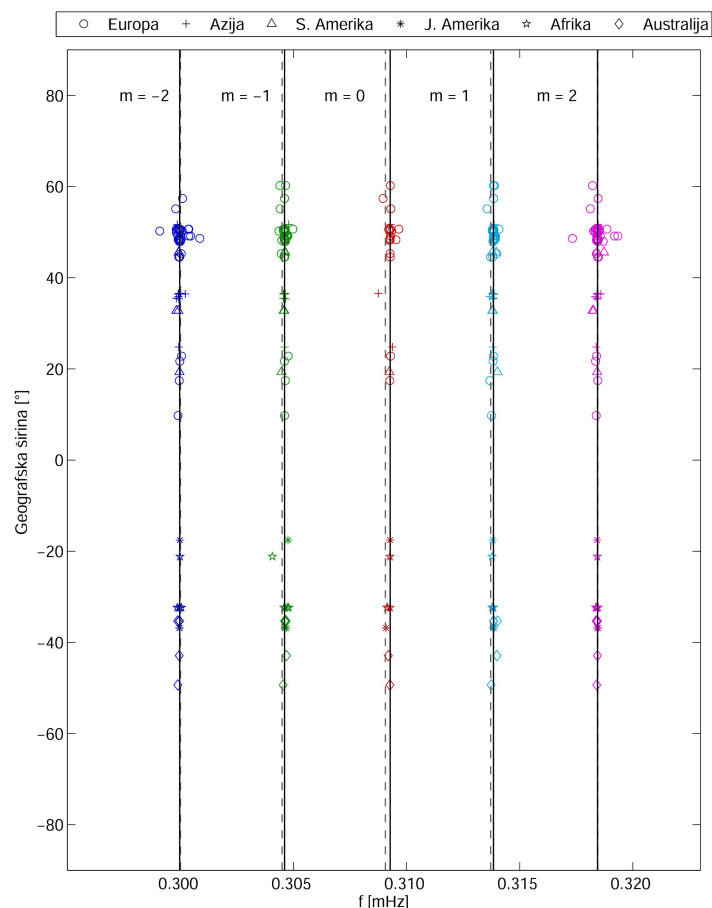


Slika 4.6 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}_0S_2$  mod (kratice autorima odgovaraju tablici (4.2)).

U tablici (4.3) prikazana je direktna usporedba izmjerenih frekvencija singleta iz ovog rada s rezultatima Häfnera i Widmer-Schnidriga (2013) i Rosat i sur. (2012) za postaju ST nakon potresa kod otočja Sumatra-Andaman iz 2004. godine čiji se

amplitudni spektar nalazi na slici (4.8). Na slici se uočava da su svih pet singleta  ${}_0S_2$  moda bili pobuđeni nakon spomenutog potresa, kao i činjenica da su same frekvencije singleta pomaknute od teorijske PREM vrijednosti uslijed unutarnje Zemljine strukture. Iako su spomenuti autori koristili drukčiju metodu za mjerenje frekvencija, dobiva se dobro slaganje s rezultatima ovog rada. Što se tiče standardnih devijacija, u ovom je radu preuzet algoritam računanja standardnih devijacija prema Häfneru i Widmer-Schnidrigu (2013) pomoću *bootstrap* eksperimenata. Direktnom usporedbom standardnih devijacija, pogreške ovog rada su oko 1.2 puta veće od pogrešaka iz Häfnera i Widmer-Schnidriga (2013). Jedan od kriterija konzistentnosti standardnih devijacija temelji se na činjenici da oni singleti koji imaju veći omjer signala i šuma (veće amplitude) trebaju imati manju pogrešku i obratno. U slučaju navedenog primjera na slici (4.8), najveći omjer signala i šuma ima  ${}_0S_2^0$  singlet, pa redom  ${}_0S_2^2$ ,  ${}_0S_2^{-2}$ ,  ${}_0S_2^{-1}$ ,  ${}_0S_2^1$  singleti. Ako se obrati pozornost na standardne devijacije u tablici (4.3), očito je da pogreške iz ovog rada i iz Häfnera i Widmer-Schnidriga (2013) slijede navedeni kriterij, dok u Rosat i sur. (2012) najmanju pogrešku ima  ${}_0S_2^{-2}$ , iako to nije singlet s najvećom amplitudom. Dodatno u tablici postoje stupci koji odgovaraju standardnim devijacijama faktora dobrote izračunatih prema (4.1) za rezultate prezentirane u tablici te su označeni kao  $\bar{\sigma}_Q$ . Prema navedenoj tablici uočava se dobro slaganje standardnih devijacija faktora dobrote izračunatih *bootstrap* eksperimenata i pomoću formule (4.1). Kako su rezultati ovog rada konzistentni s (4.1) te s Häfner i Widmer-Schnidrig (2013) i Rosat i sur. (2012), zaključuje se da su izmjerene frekvencije i standardne devijacije, dobivene *bootstrap* eksperimentima, realistične.

Kako bi se bolje razumjele stršeće vrijednosti i kako one utječu na konačno rješenje, koncentracija će se usmjeriti na osam izmjerenih svojstvenih frekvencija i njihovih pripadnih standardnih devijacija i omjere signala i šuma koje ti singleti poprimaju. Izabrane su svojstvene frekvencije za singlet  $m=2$ ,  ${}_0S_2$  moda prikazane na slici (4.9) a), dok su pripadni omjeri signala i šuma kao i standardne devijacije prikazane na slici (4.9) b). Očekuje se da će vrijednosti izračunatih svojstvenih frekvencija koje su najudaljenije od izračunate težinske vrijednosti frekvencije singleta  $m=2$  imati najmanji omjer signala i šuma i da će zbog toga njihove pogreške biti najveće. Iako frekvencija izabrana najbliže izračunatoj težinskoj vrijednosti ima najveći omjer signala i šuma i time najmanju pogrešku, stršeće vrijednosti nisu one koje imaju najmanji omjer signala i šuma. Iz tog razloga, stršeće vrijednosti će doprinosti izračunatom težinskom srednjaku više nego što se očekuje, a konkretno stršeća vrijednost najniže frekvencije na slici (4.9) a) može biti ona koja je uzrokovala pomak izračunate težinske frekvencije prema nižoj frekvenciji u odnosu na teorijsku PREM vrijednost. Ovakve vrijednosti potrebno je dodatno provjeriti i najbolja metoda je spomenuta metoda računanja vektora faze (Dodatak A).



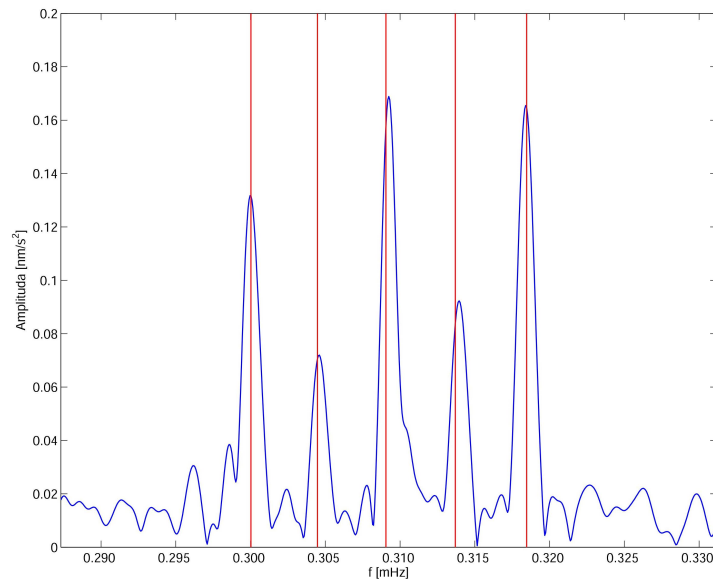
Slika 4.7 Isti prikaz kao na slici (4.3) za  ${}_0S_2$  mod.

Na manjem setu podataka  ${}_0S_2$  moda provela se i metoda usrednjavanja opisana u poglavlju 2.3.6. Cilj je na istom nizu podataka na dva načina dobiti konačne frekvencije singleta i faktora dobrote kako bi se njihovom međusobnom usporedbom mogli donijeti zaključci o samim metodama. Na slici (4.10) prikazane su postaje čiji su se vremenski nizovi koristili u formiranju matrice usrednjenih spektara  $B$  te iz kojih su izmjerene svojstvene frekvencije i faktori dobrote. Spektri dobiveni usrednjavanjem prikazani su na slici (4.11), gdje svaki spektar prikazuje spektralni šiljak vezan uz samo jedan singlet, dok su ostali prigušeni. Na takav spektar, gdje je pobuđen bio samo jedan singlet, primjenjivala se ARFD metoda kako bi se izmjerila svojstvena frekvencija i faktor dobrote te se provodio *bootstrap* eksperiment za procjenu pogrešaka. Rezultati izmjerenih frekvencija i faktora dobrote, zajedno s pripadnim pogreškama, dobiveni pomoću metode usrednjavanja i ARFD metode prikazani su na slici (4.12) tamno zelenom bojom. Na istoj slici, s ostale dvije boje, prikazana je usrednjena vrijednost frekvencija i faktora dobrote izmjerenih samo pomoću ARFD metode i sa najsvjetlijom zelenom bojom težinska usrednjena vrijednost izmjerenih vrijednosti. Ono što se očekivalo je da će konačni rezultat dobiven samo usrednjavanjem izmjerenih vrijednosti imati najveće pogreške što se može i vidjeti na slici (4.12). Konačni rezultati svojstvenih frekvencija singleta dobiveni težinskim usrednjavanjem i metodom usrednjavanja slažu se odlično. Situacija je malo drukčija što se tiče rezultata faktora dobrote, jer vrijednosti svih singleta izračunate težinskim usred-

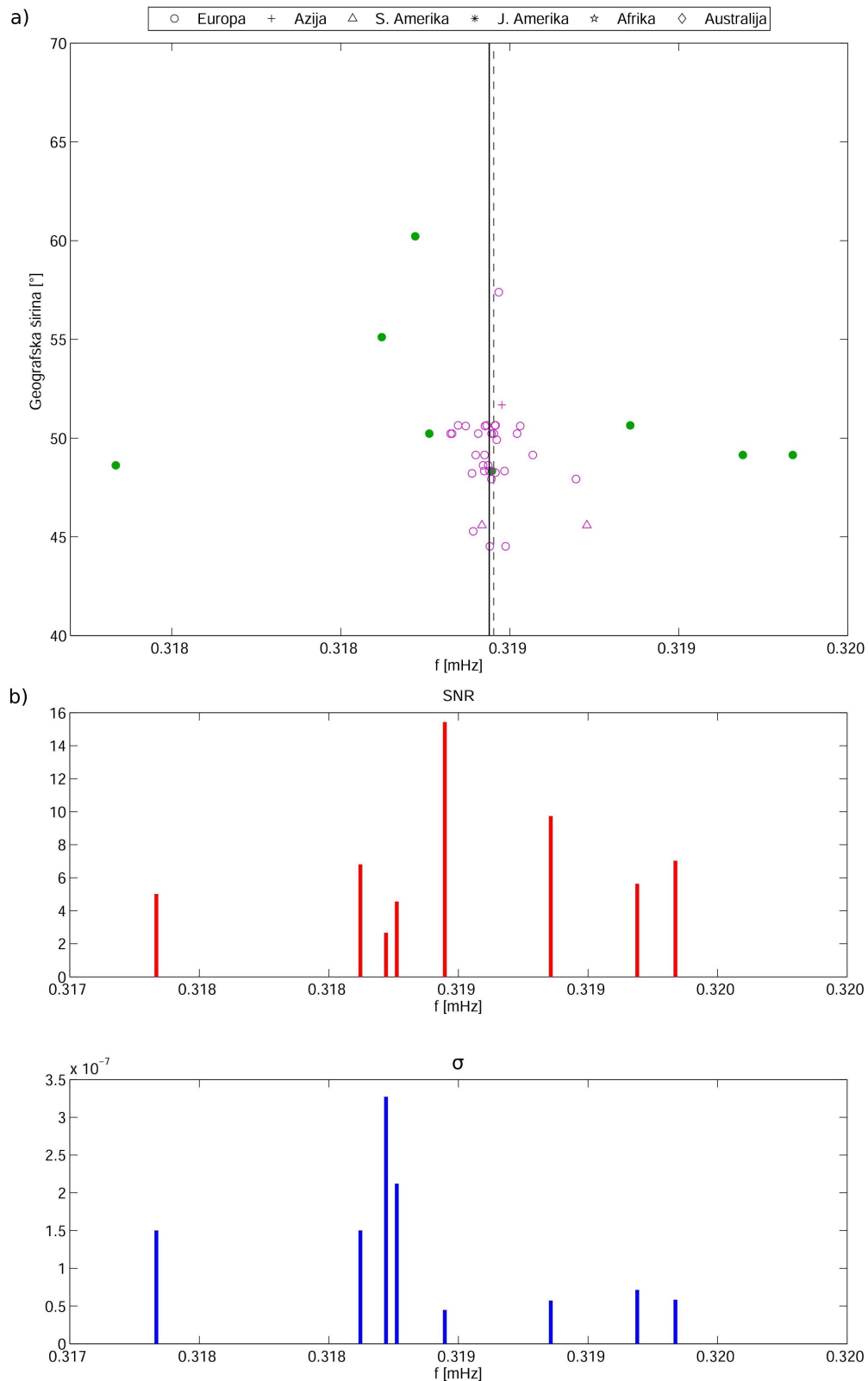
njavanjem su pomaknute prema nižim vrijednostima u odnosu na one dobivene metodom usrednjavanja. Razlog tome leži u činjenici da je faktor dobrote općenito teže izračunati, a njegove pogreške su nestabilnije i raspršenije, tako da će onaj rezultat s najmanjom pogreškom imati puno veći utjecaj u procesu težinskog usrednjavanja i dominirati rezultatom.

**Tablica 4.3** Usporedba izmjerenih frekvencija i pripadnih standardnih devijacija singleta  ${}_0S_2$  moda s Häfnerom i Widmer-Schmidrigom (2013) (HWS) i Rosat i sur. (2012) (RS) za postaju ST nakon potresa iz 2004. Rezultati uspoređeni i s vrijednostima frekvencija singleta modela PREM te s standardnim devijacijama faktora dobrote prema (4.1),  $\bar{\sigma}_Q$ . Mjerna jedinica frekvencije je mHz.

$m$	PREM	Ovaj rad			HWS			RS
	$f \pm \sigma_f$	$Q \pm \sigma_Q$	$\bar{\sigma}_Q$	$f \pm \sigma_f$	$Q \pm \sigma_Q$	$\bar{\sigma}_Q$	$f \pm \sigma_f$	
-2	0.30000117	$0.29997 \pm 6.2 \cdot 10^{-5}$	$437 \pm 75$	79	$0.299944 \pm 4.8 \cdot 10^{-5}$	$446 \pm 71$	64	$0.29997 \pm 5.7 \cdot 10^{-5}$
-1	0.30449303	$0.30458 \pm 13.1 \cdot 10^{-5}$	$549 \pm 272$	259	$0.304611 \pm 9.1 \cdot 10^{-5}$	$437 \pm 118$	114	$0.30462 \pm 1.2 \cdot 10^{-4}$
0	0.30906353	$0.30926 \pm 4.3 \cdot 10^{-5}$	$582 \pm 91$	94	$0.309256 \pm 4.0 \cdot 10^{-5}$	$531 \pm 74$	73	$0.30929 \pm 6.2 \cdot 10^{-5}$
1	0.31371556	$0.31393 \pm 8.3 \cdot 10^{-5}$	$600 \pm 180$	190	$0.313835 \pm 7.8 \cdot 10^{-5}$	$456 \pm 115$	103	$0.31389 \pm 1.0 \cdot 10^{-4}$
2	0.31845238	$0.31842 \pm 4.6 \cdot 10^{-5}$	$612 \pm 108$	108	$0.318442 \pm 4.2 \cdot 10^{-5}$	$512 \pm 72$	69	$0.31845 \pm 6.5 \cdot 10^{-5}$

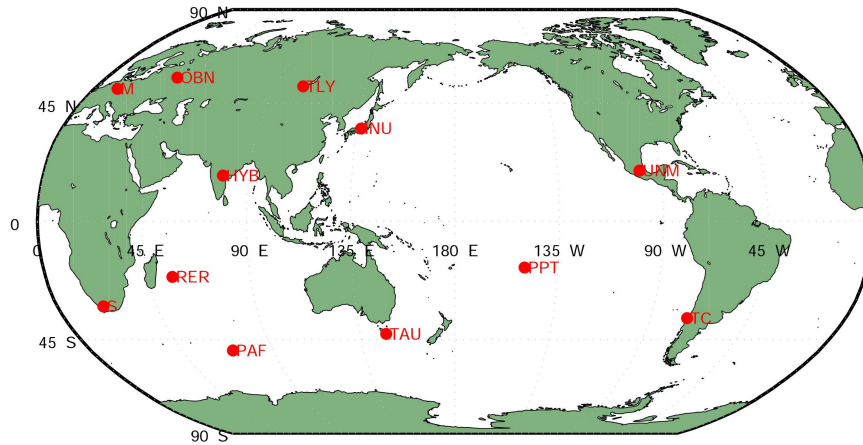


**Slika 4.8** Amplitudni spektar  ${}_0S_2$  moda nakon potresa iz 2004. godine zabilježen na postaji ST, Francuska. Crvene linije su teorijske vrijednosti frekvencija modela PREM.

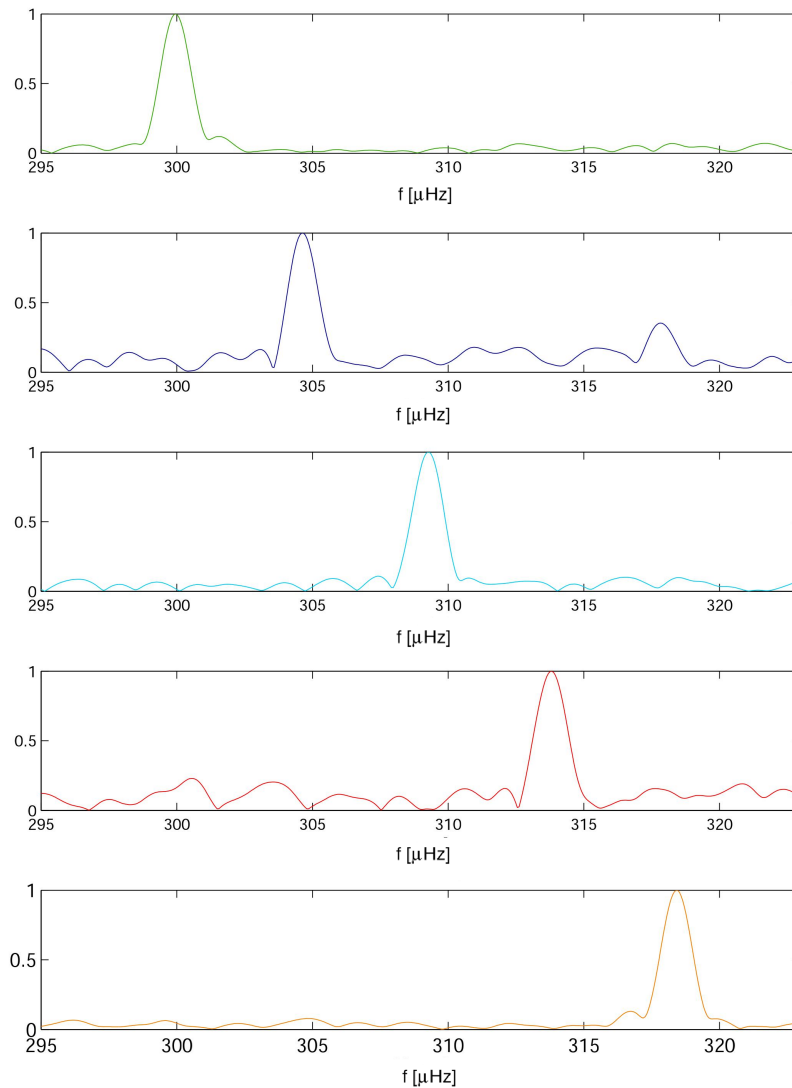


**Slika 4.9** a) Ovisnost izračunatih svojstvenih frekvencija singleta  $m=2$ ,  ${}_0S_2$  moda pojedinog vremenskog niza o geografskoj širini između  $40^\circ$  i  $70^\circ$ . Zeleno označene frekvencije su frekvencije čiji su omjeri signala i šuma kao i njihove pripadne standardne devijacije prikazane na donjoj slici b). Puna linija odgovara izračunatom težinskom srednjaku frekvencija singleta  $m=2$ , dok crtkana linija odgovara vrijednosti modela PREM.





Slika 4.10 Stanice koje su se koristile u provedbi metode usrednjavanja za  ${}_0S_2$  mod.

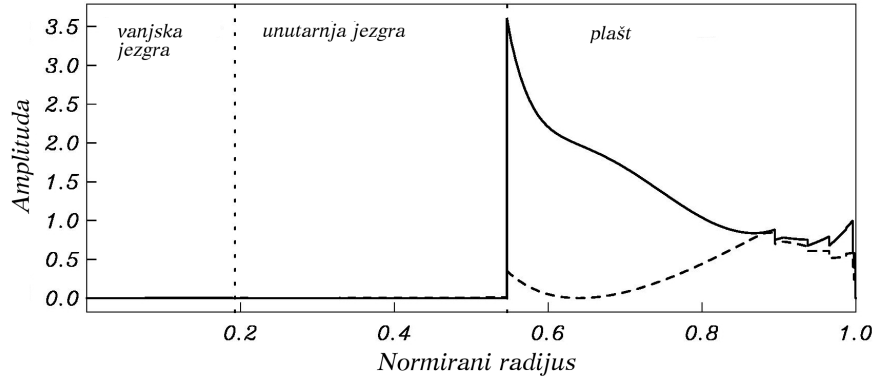


Slika 4.11 Normirani amplitudni spektri izračunate matrice usrednjenih spektara,  $B$ , za  ${}_0S_2$  mod, gdje se uočava isticanje jednog singleta u svakom spektru i prigušenje ostalih singleta uslijed svojstva metode usrednjavanja. Korišten niz podataka uključuje postaje prikazane na slici (4.10).



**Slika 4.12** Izračunate svojstvene frekvencije (lijevo) i faktori dobrote (desno) zajedno s pripadnim pogreškama za  ${}_0S_2$  mod gdje korišteni niz podataka uključuje postaje na slici (4.10). Tri boje redom označavaju: vrijednosti izmjerene primjenom ARFD metode na usrednjeni spektar  $B$  (tamno zelena), usrednjene vrijednosti frekvencija i faktora dobrote izmjerenih samo pomoću ARFD metode (srednje zelena), težinske usrednjene vrijednosti frekvencija i faktora dobrote izmjerenih samo pomoću ARFD metode (svijetlo zelena).

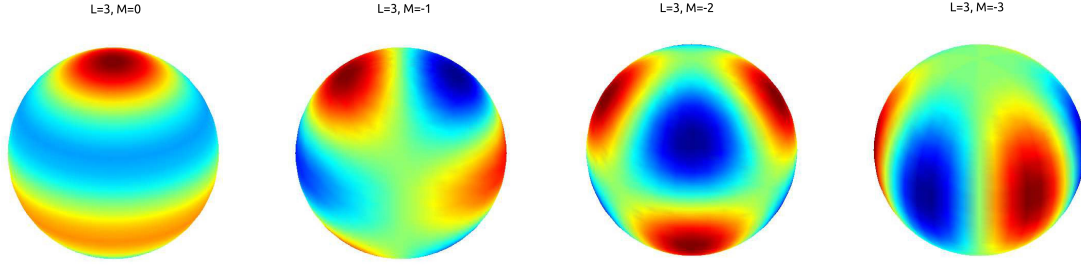
Mod  ${}_0S_3$  pripada grupi sferoidalnih fundamentalnih modova. Razdvajanje ovog moda smatra se normalnim i prema slici (4.13) osjetljiv je većinom na strukturu u plaštu Zemlje. Osim što je razdvajanje moda normalno, ono je najviše pod utjecajem rotacije Zemlje kao i u slučaju  ${}_0S_2$  moda. Tijekom obrade podataka nije se koristila 1.1  $Q$  duljina vremenskog niza, koja u slučaju ovog moda iznosi oko 250 sati, nego vremenski nizovi od oko 500 sati. Time se postigla bolja frekvencijska rezolucija i bolje odvajanje pobuđenih singleta.



**Slika 4.13** Isti prikaz kao na slici (4.1) za  ${}_0S_3$  moda.

Kako je kutni stupanj ovog moda tri,  $l = 3$ , mod se razdvaja na sedam singleta:  ${}_0S_3^{-3}$ ,  ${}_0S_3^{-2}$ ,  ${}_0S_3^{-1}$ ,  ${}_0S_3^0$ ,  ${}_0S_3^1$ ,  ${}_0S_3^2$ ,  ${}_0S_3^3$ . Grafički prikaz sfernih harmonika  ${}_0S_3^0$ ,  ${}_0S_3^{-1}$ ,  ${}_0S_3^{-2}$ ,  ${}_0S_3^{-3}$  singleta prikazan je na slici (4.14). Na toj slici vidimo da  ${}_0S_3^0$  singlet zonalni harmonik,  ${}_0S_3^{-3}$  i  ${}_0S_3^3$  singleti su sektorski harmonici, dok su svi ostali teseralni harmonici.

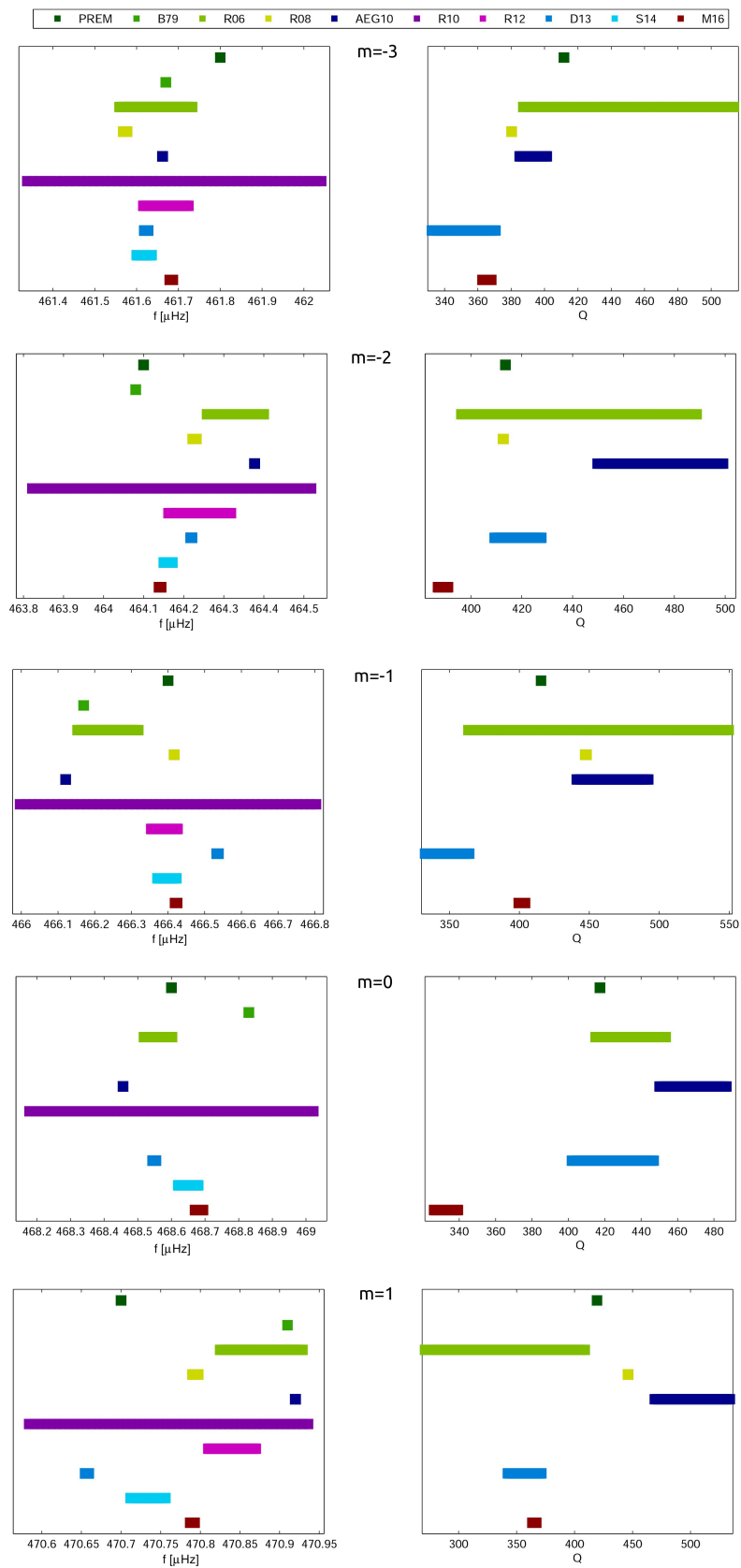
Rezultati i usporedba ovog moda s teorijskim vrijednostima i onima iz literature nalazi se u tablici (4.4), te na slikama (4.15), (4.16), (4.17). Kako je općenito puno teže mjeriti frekvencije singleta  ${}_0S_3$  moda jer se radi o sedam singleta, koji se rasprostiru na užem frekvencijskom pojasu čak i od  ${}_0S_2$  moda, tako su i rezultati izmjerenih frekvencija raspršeniji nego u slučaju  ${}_0S_2$  moda. Općenito, trebaju se koristiti dulji vremenski nizovi ako želimo prepoznati, razdvojiti i izmjeriti singlete moda, što opet uzrokuje niži omjer signala i šuma, a time više problema u prepoznavanju pravog signala od šuma. I u slučaju  ${}_0S_3$  moda konačne vrijednosti frekvencija singleta ovog rada postižu preklapanje s rezultatima većeg broja radova iz literature i nalaze se unutar njihovih pogrešaka. Na slici (4.17) uočava se da pojedine konačne težinske vrijednosti ukazuju na pomak frekvencija prema nižim ili višim vrijednostima u odnosu na teorijsku PREM vrijednost, međutim neke od njih sadrže i dosta stršećih vrijednosti. Konkretno, radi se o singletima  $m = -1, m = 0, m = 3$ , čije stršeće vrijednosti bilo korisno dodatno provjeriti, kako bi se utvrdilo jesu li prisutni pomaci u frekvencijama rezultati heterogene strukture i sprege između modova, ili prisutnosti različitih nelinearnosti unutar signala. Još jedan nedostatak u vezi  ${}_0S_3^0$  je bila njegova slaba pobuđenost nakon potresa u nizu korištenih vremenskih nizova. Zbog slabe pobuđenosti postoji mali niz izmjerenih frekvencija ovog singleta koje ulaze u konačnu težinsku vrijednost i time je rješenje podložnije postojećim stršećim vrijednostima. To za posljedicu ima i činjenicu da faktor dobrote ovog singleta poprima znatno veće odstupanje u usporedbi s faktorima dobrote ostalih singleta.



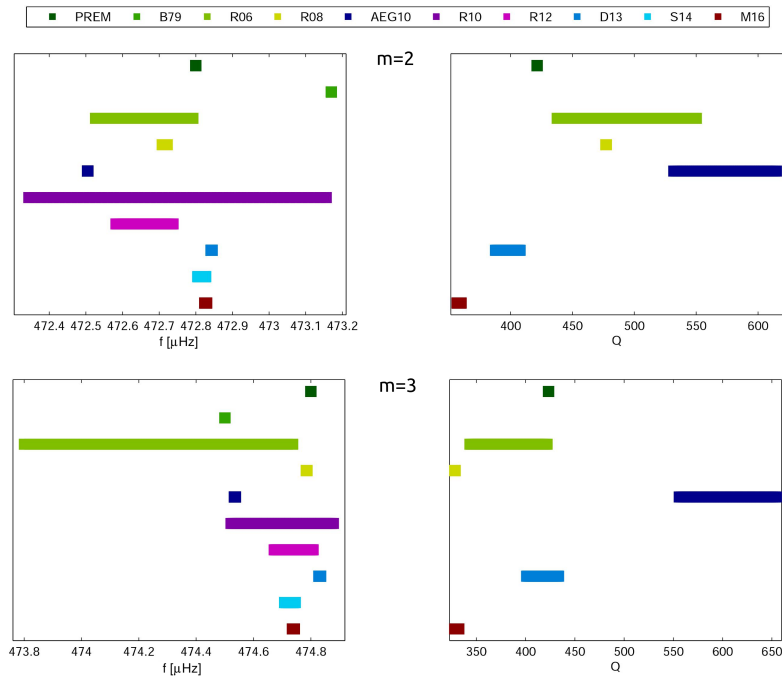
Slika 4.14 Sferni harmonici  ${}_0S_3^0, {}_0S_3^{-1}, {}_0S_3^{-2}, {}_0S_3^{-3}$ .

Tablica 4.4 Izračunati težinski srednjak frekvencija singleta (mHz) i pripadnih faktora dobrote za  ${}_0S_3$  mod u usporedbi s vrijednostima modela PREM i vrijednostima iz literature. (\*) Ding i Shen (2013).

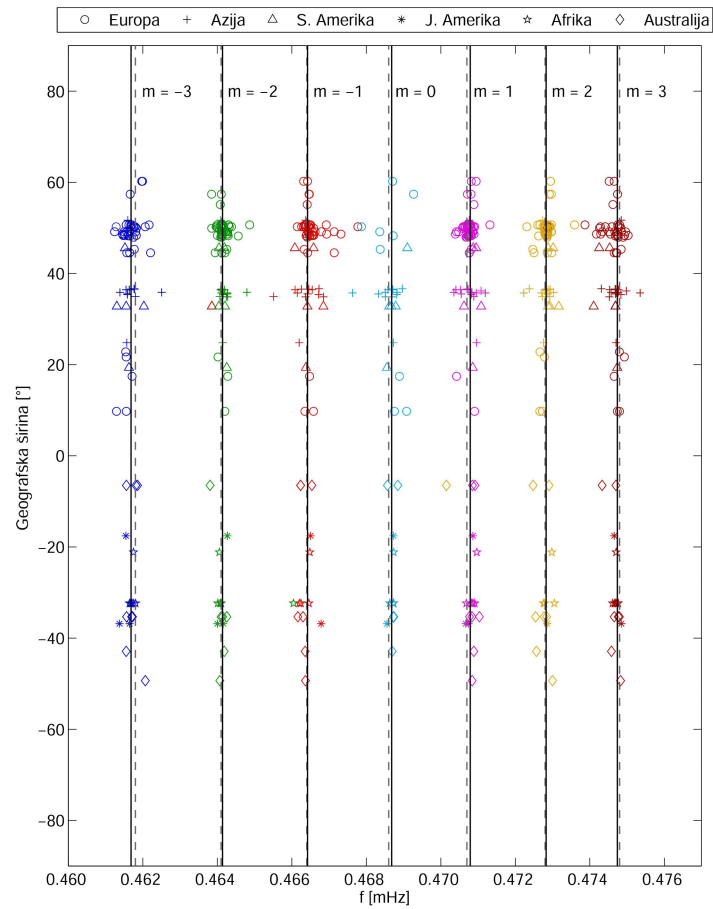
${}_0S_3$		m=-3	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3
PREM*	f	0.4618	0.4641	0.4664	0.4686	0.4707	0.4728	0.4748
	Q	411.7	413.6	415.5	417.4	419.30	421.3	423.3
Buland i sur. (1979)	f	0.46167	0.46408	0.46617	0.46883	0.47091	0.47317	0.47450
Roult i sur. (2006)	f	0.461646 $\pm 8.7 \cdot 10^{-5}$	0.464329 $\pm 7.1 \cdot 10^{-5}$	0.466236 $\pm 8.3 \cdot 10^{-5}$	0.468560 $\pm 4.2 \cdot 10^{-5}$	0.470877 $\pm 5.2 \cdot 10^{-5}$	0.472659 $\pm 1.33 \cdot 10^{-4}$	0.474269 $\pm 4.68 \cdot 10^{-4}$
	Q	450.5 $\pm 63.3$	442.5 $\pm 46.3$	456.6 $\pm 93.0$	434.2 $\pm 19.3$	339.9 $\pm 68.9$	493.9 $\pm 56.3$	382.6 $\pm 39.2$
Rosat i sur. (2008)	f	0.4615728 $\pm 4.9 \cdot 10^{-6}$	0.4642270 $\pm 4.9 \cdot 10^{-6}$	0.4664168 $\pm 4.6 \cdot 10^{-7}$	-	0.4707937 $\pm 3.8 \cdot 10^{-6}$	0.4727150 $\pm 6.9 \cdot 10^{-6}$	0.4747854 $\pm 1.1 \cdot 10^{-6}$
	Q	380.3 $\pm 0.04$	412.7 $\pm 0.1$	447.5 $\pm 0.5$	-	446.1 $\pm 0.1$	477.2 $\pm 0.2$	328.2 $\pm 0.3$
Abd El-Gelil i sur. (2010)	f	0.461662 $\pm 0.4 \cdot 10^{-6}$	0.464377 $\pm 0.5 \cdot 10^{-6}$	0.466121 $\pm 0.2 \cdot 10^{-6}$	0.468456 $\pm 0.2 \cdot 10^{-6}$	0.470920 $\pm 0.3 \cdot 10^{-6}$	0.472505 $\pm 0.7 \cdot 10^{-6}$	0.474535 $\pm 2.1 \cdot 10^{-6}$
	Q	393.2 $\pm 8.2$	474.5 $\pm 24.7$	466.6 $\pm 25.6$	468.5 $\pm 18.4$	501.5 $\pm 32.4$	573.4 $\pm 41.5$	605.3 $\pm 49.4$
Roult i sur. (2010)	f	0.46169 $\pm 3.515 \cdot 10^{-4}$	0.46417 $\pm 3.480 \cdot 10^{-4}$	0.46640 $\pm 4.036 \cdot 10^{-4}$	0.46860 $\pm 4.220 \cdot 10^{-4}$	0.47076 $\pm 1.760 \cdot 10^{-4}$	0.47275 $\pm 4.059 \cdot 10^{-4}$	0.47470 $\pm 1.7860 \cdot 10^{-4}$
Rosat i sur. (2012)	f	0.46167 $\pm 5.4 \cdot 10^{-5}$	0.46424 $\pm 7.8 \cdot 10^{-5}$	0.46639 $\pm 3.6 \cdot 10^{-5}$	-	0.47084 $\pm 3.0 \cdot 10^{-5}$	0.47266 $\pm 7.8 \cdot 10^{-5}$	0.47474 $\pm 6.8 \cdot 10^{-5}$
Ding i Shen (2013)	f	0.461623 $\pm 4.9 \cdot 10^{-6}$	0.464219 $\pm 1.8 \cdot 10^{-6}$	0.466535 $\pm 2.6 \cdot 10^{-6}$	0.468549 $\pm 5.2 \cdot 10^{-6}$	0.470657 $\pm 2.4 \cdot 10^{-6}$	0.472843 $\pm 1.7 \cdot 10^{-6}$	0.474831 $\pm 3.5 \cdot 10^{-6}$
	Q	351.5 $\pm 19.1$	418.5 $\pm 9.2$	348.4 $\pm 15.8$	424.4 $\pm 22.5$	356.9 $\pm 14.5$	397.7 $\pm 10.0$	417.2 $\pm 16.3$
Shen i Ding (2014)	f	0.461618 $\pm 1.8 \cdot 10^{-5}$	0.464161 $\pm 1.1 \cdot 10^{-5}$	0.466397 $\pm 2.6 \cdot 10^{-5}$	0.468650 $\pm 3.0 \cdot 10^{-5}$	0.470734 $\pm 2.2 \cdot 10^{-5}$	0.472816 $\pm 1.1 \cdot 10^{-5}$	0.474727 $\pm 1.9 \cdot 10^{-5}$
Ovaj rad	f	0.461683 $\pm 3.8 \cdot 10^{-6}$	0.464141 $\pm 2.9 \cdot 10^{-6}$	0.466422 $\pm 3.0 \cdot 10^{-6}$	0.468682 $\pm 1.2 \cdot 10^{-5}$	0.470790 $\pm 2.9 \cdot 10^{-6}$	0.472827 $\pm 2.9 \cdot 10^{-6}$	0.474739 $\pm 3.8 \cdot 10^{-6}$
	Q	365.4 $\pm 2.7$	389.0 $\pm 2.0$	401.8 $\pm 2.3$	332.7 $\pm 6.6$	365.3 $\pm 1.7$	358.3 $\pm 1.7$	330.0 $\pm 2.2$



Slika 4.15 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}_0S_3^{-3}$ ,  ${}_0S_3^{-2}$ ,  ${}_0S_3^{-1}$ ,  ${}_0S_3^0$ ,  ${}_0S_3^1$  singlete (kratice autora odgovaraju tablici (4.4)).



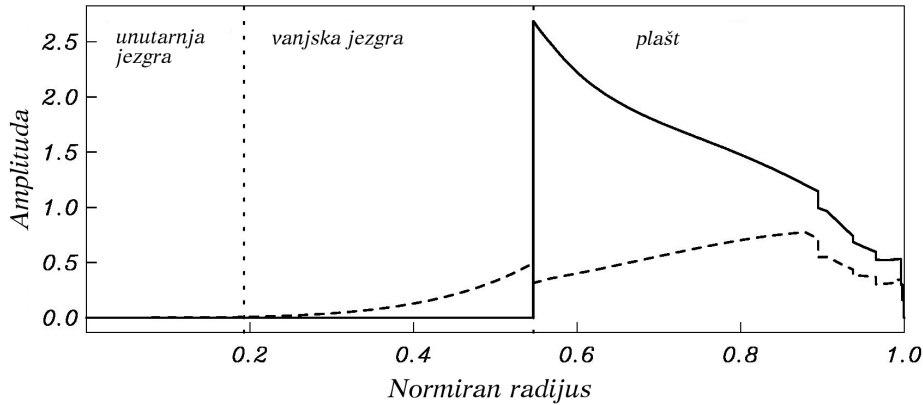
Slika 4.16 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}_0S_3^2, {}_0S_3^3$  singlete (kratice autora odgovaraju tablici (4.4)).



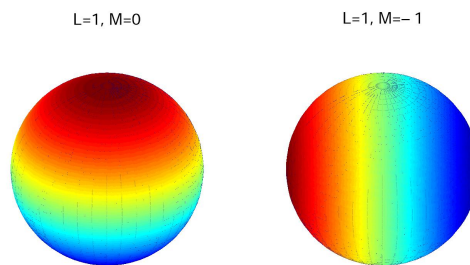
Slika 4.17 Isti prikaz kao na slici (4.3) za  ${}_0S_3$  mod.

Mod  ${}_2S_1$  pripada grupi sferoidalnih modova. Prema Okalovoj nomenklaturi (Okal, 1978) za modove čije su frekvencije niže od 5 mHz ovaj mod pripada obitelji hibridnih modova (H modovi) što podrazumijeva da ovi modovi imaju usporediv vertikalni

i horizontalni pomak. Osim ove obitelji modova unutar Okalove nomenklature, koja se temelji na fizikalnoj klasifikaciji, pripadaju i obitelji modova unutarnje kore (K modovi), modovi pretežito vertikalne, radijalne komponente (V modovi) i modovi pretežito transverzalne komponente (C modovi). Mod  ${}_2S_1$  uglavnom je osjetljiv na strukturu u plaštu, što je prikazano na slici (4.18), a prema radu Rosat i sur. (2007) veže se i uz translaciju jezgre. Tijekom obrade podataka koristila se duljina vremenskih nizova oko 1.1 Q ciklusa, što otprilike odgovara 270 sati.



Slika 4.18 Isti prikaz kao na slici (4.1) za  ${}_2S_1$  moda.



Slika 4.19 Sferni harmonici  ${}_2S_1^0, {}_2S_1^{-1}$ .

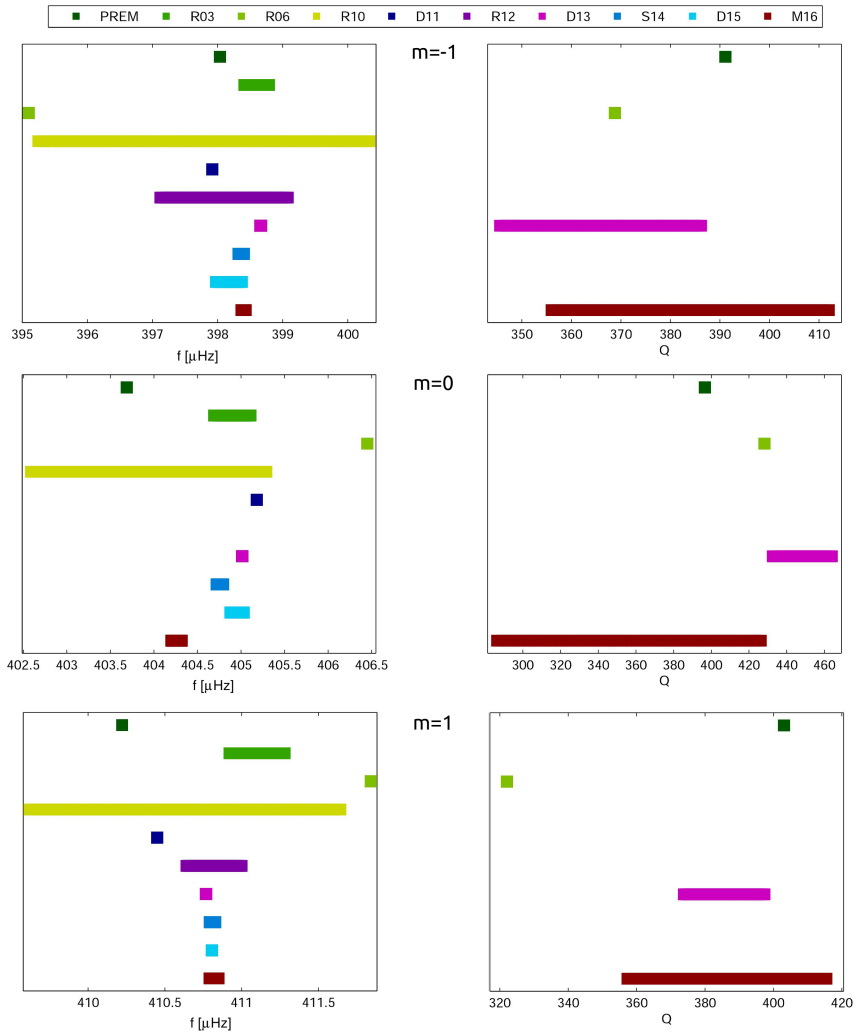
Rezultati i usporedba ovog moda s teorijskim vrijednostima i onima iz literature nalazi se u tablici (4.5), te na slikama (4.20), (4.21). Usporedbi rezultata ovog moda s rezultatima do sada obrađenih modova, uočava se bitno veća raštrkanost izmjerenih frekvencija singleta (slika (4.21)). Zbog vrlo niske amplitude i velike raštrkanosti podataka metoda računanja vektora faze ovdje bi bila korisna. Veliki problem u slučaju ovog moda predstavljala je njegova slaba pobuđenost, pogotovo u usporedbi sa susjednim  ${}_0S_2$  i  ${}_0S_3$  modovima. Zbog vrlo niskih amplituda pobuđenih singleta, raspoznavanje signala u prisutnom šumu unosilo je velike nepouzdanosti u mjerenja. Od tri singleta na koje se ovaj mod razdvaja,  ${}_2S_1^{-1}, {}_2S_1^0$  (grafički prikazani na slici (4.19)) i  ${}_2S_1^1$ , najslabije je bio pobuđen  ${}_2S_1^0$  singlet što je rezultiralo manjim setom izmjerenih frekvencija i time većom izračunatom greškom. Posljedica ovog malog seta izmjerenih frekvencija najbolje se očituje na grešci faktora dobrote i činjenici da konačna vrijednost svojstvene frekvencije ovog singleta najviše odstupa od literaturnih vrijednosti. Za određene stanice, ponekad je bilo nejasno kojem azimutalnom

redu odgovara pripadni signal i u takvom slučaju ako susjedni signali nisu bili jasno izraženi vremenski nizovi se nisu uzimali u obzir. Zanimljivo je uočiti da velika većina izračunatih svojstvenih frekvencija, za sva tri singleta, ukazuju na frekvencijski pomak prema višim frekvencijama u odnosu na teorijsku PREM vrijednost.

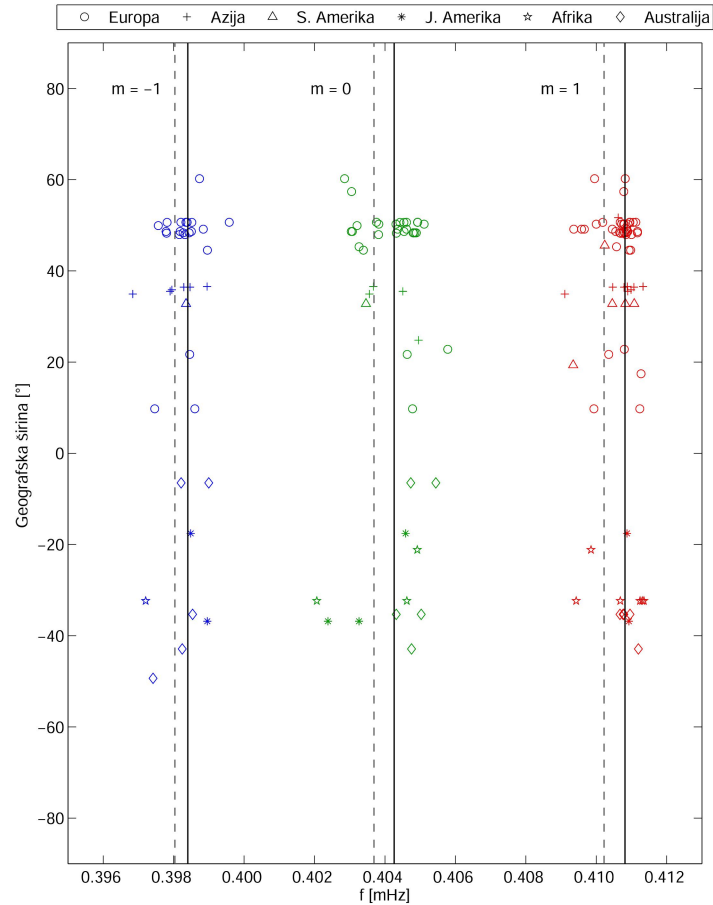
**Tablica 4.5** Izračunati težinski srednjak frekvencija singleta (mHz) i pripadnih faktora dobrote za  ${}_2S_1$  mod u usporedbi s vrijednostima modela PREM i vrijednostima iz literature. (\*) Ding i Shen, 2013.

${}_2S_1$		m=-1	m=0	m=1
PREM*	f	0.39803582	0.40368712	0.41022196
	Q	391.1	396.6	403.1
Rosat i sur. (2003)	f	$0.3986 \pm 1.9 \cdot 10^{-4}$	$0.4049 \pm 2.1 \cdot 10^{-4}$	$0.4111 \pm 1.8 \cdot 10^{-4}$
Roult i sur. (2006)	f	0.39510	0.40645	0.41184
	Q	368.8	428.2	322.1
Roult i sur. (2010)	f	$0.39779 \pm 2.543 \cdot 10^{-3}$	$0.40394 \pm 1.352 \cdot 10^{-3}$	$0.41063 \pm 1.012 \cdot 10^{-3}$
Deuss i sur. (2011)	f	0.39792	0.40518	0.41045
Rosat i sur. (2012)	f	$0.39810 \pm 9.8 \cdot 10^{-4}$	-	$0.41082 \pm 1.8 \cdot 10^{-4}$
Ding i Shen (2013)	f	$0.398662 \pm 8.5 \cdot 10^{-6}$	$0.405014 \pm 2.7 \cdot 10^{-6}$	$0.410768 \pm 1.2 \cdot 10^{-6}$
	Q	$365.9 \pm 20.3$	$448.3 \pm 15.7$	$385.6 \pm 11.8$
Shen i Ding (2014)	f	$0.398363 \pm 4.3 \cdot 10^{-5}$	$0.404757 \pm 3.9 \cdot 10^{-5}$	$0.410810 \pm 1.9 \cdot 10^{-5}$
Ding i Chao (2015a)	f	$0.398174 \pm 2.0 \cdot 10^{-4}$	$0.404955 \pm 7.9 \cdot 10^{-5}$	$0.410806 \pm 1.2 \cdot 10^{-6}$
<b>Ovaj rad</b>	f	$0.39840 \pm 3.4 \cdot 10^{-5}$	$0.40426 \pm 6.1 \cdot 10^{-5}$	$0.41082 \pm 3.0 \cdot 10^{-5}$
	Q	$384.0 \pm 28.0$	$356.3 \pm 70$	$386.4 \pm 29.1$



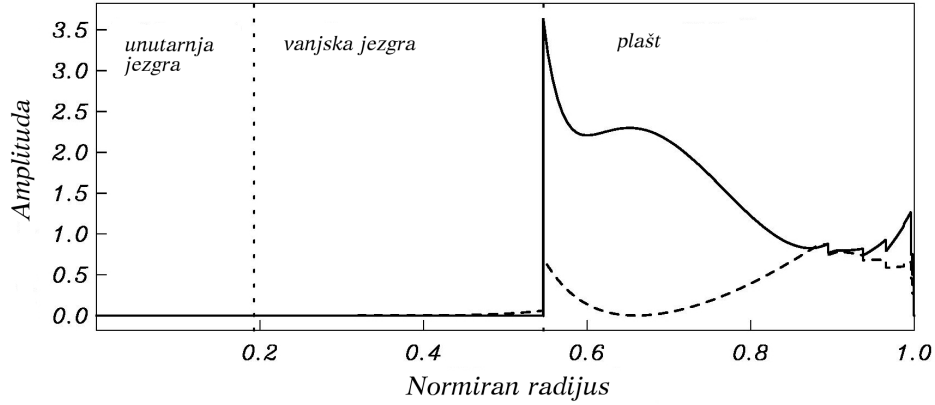


Slika 4.20 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}_2S_1$  mod (kratice autorima odgovaraju tablici (4.5)).



Slika 4.21 Isti prikaz kao na slici (4.3) za  ${}_2S_1$  moda.

Mod  ${}_0S_4$  pripada grupi sferoidalnih fundamentalnih modova te je kao i prethodni modovi ove grupe pretežito osjetljiv na strukturu u plaštu (slika (4.22)). Kutni stupanj jednak mu je četiri,  $l = 4$ , te se zbog toga razdvaja na 9 singleta:  ${}_0S_4^{-4}$ ,  ${}_0S_4^{-3}$ ,  ${}_0S_4^{-2}$ ,  ${}_0S_4^{-1}$ ,  ${}_0S_4^0$ ,  ${}_0S_4^1$ ,  ${}_0S_4^2$ ,  ${}_0S_4^3$ ,  ${}_0S_4^4$ , gdje je prvih pet grafički prikazano na slici (4.25). Vidimo da je  ${}_0S_4^0$  singlet zonalni harmonik,  ${}_0S_3^{-4}$  i  ${}_0S_3^4$  singleti sektorski harmonici, dok su svi ostali teseralni harmonici. Prema PREM teorijskim vrijednostima frekvencija singleta, ovaj mod rasprostire se na još užem frekvencijskom pojasu od prethodno obrađenih modova. To za posljedicu povlači činjenicu da se tijekom obrade podataka mora koristiti vrlo dugačak vremenski niz. U konkretnom slučaju, koristio se niz od otprilike 32 dana, odnosno 760 sati. Naravno, kao i do sada, to znači da omjer signala i šuma postaje nizak, ali frekvencijska rezolucija je bolja i omogućuje međusobno razdvajanje singleta.

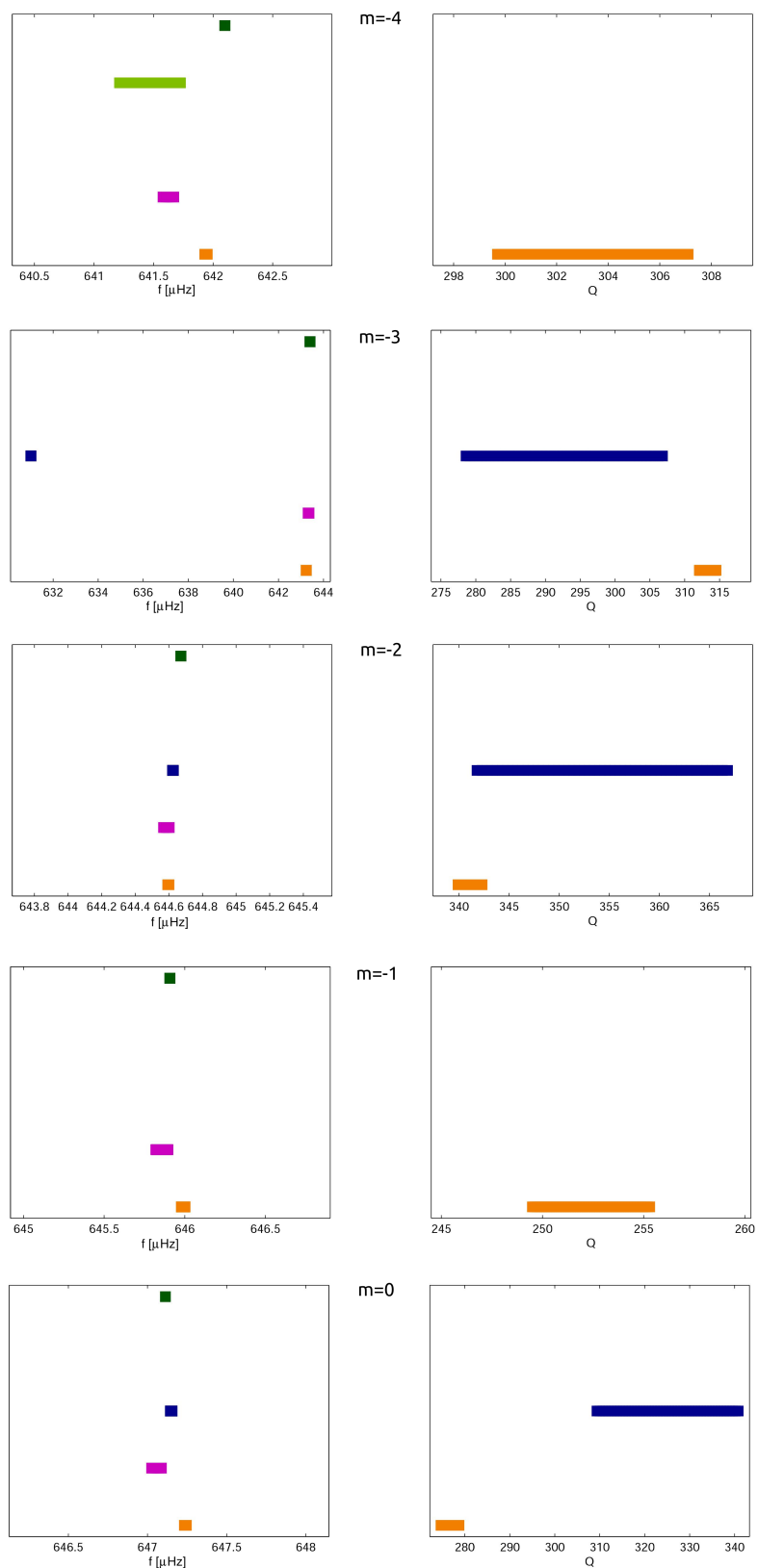


Slika 4.22 Isti prikaz kao na slici (4.1) za  ${}_0S_4$  moda.

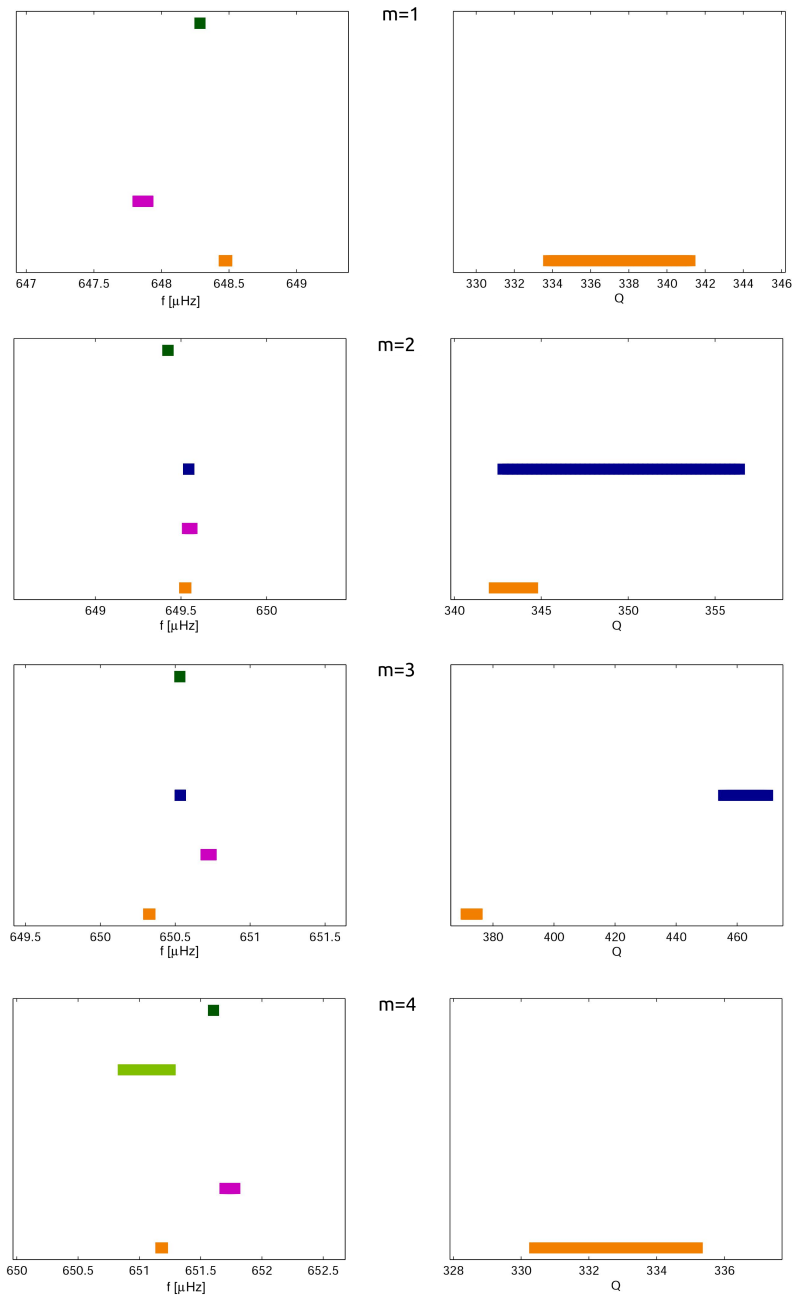
Rezultati i usporedba ovog moda s teorijskim vrijednostima i onima iz literature nalazi se u tablici (4.6), te na slikama (4.23), (4.24), (4.26). Zbog velikog broja singleta na uskom frekvencijskom pojasu i korištenje dugog vremenskog niza, mjerenje frekvencija singleta je nestabilno i često je teško određenim signalima pripisati azimutalan red. Zato su i setovi izmjerenih frekvencija određenih singleta manji. Izmjerene frekvencije sa slike (4.26) su dosta raštrkane za određene modove. Konkretno, radi se o  ${}_0S_4^{-4}$ ,  ${}_0S_4^{-1}$ ,  ${}_0S_4^1$ ,  ${}_0S_4^4$  singletima, koji osim što imaju raštrkani niz podataka imaju i manje setove podataka iz kojih se računa konačna težinska vrijednost. Usporedbom vrijednosti s teorijskim PREM vrijednostima i onima iz literature dobiva se uglavnom dobro preklapanje frekvencijskih vrijednosti, dok se vrijednosti faktora dobrote ne mogu usporediti, zbog nedostatka referentnih vrijednosti iz teorije i literature.

**Tablica 4.6** Izračunati težinski srednjak frekvencija singleta (mHz) i pripadnih faktora dobrote za  ${}_0S_4$  mod u usporedbi s vrijednostima modela PREM i vrijednostima iz literature. (\*) Roult i sur. (2010).

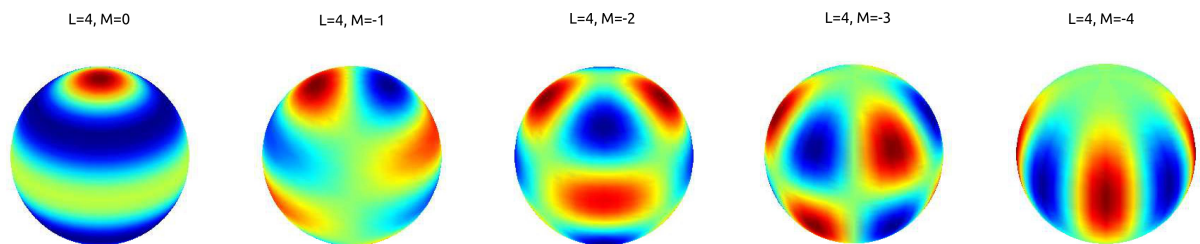
${}_0S_4$		m=-4	m=-3	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
PREM*	f	0.642098	0.643401	0.644671	0.645908	0.647113	0.648285	0.649424	0.650531	0.651605
Roult i sur. (2010)	f	0.64147 $2.562 \cdot 10^{-4}$	-	-	-	-	-	-	-	0.65106 $1.908 \cdot 10^{-4}$
Ding i Shen (2013)	f	-	0.631015 $\pm 2.2 \cdot 10^{-6}$	0.644624 $\pm 2.4 \cdot 10^{-6}$	-	0.64715 $\pm 5.5 \cdot 10^{-6}$	-	0.649545 $\pm 4.5 \cdot 10^{-7}$	0.650534 $\pm 5.9 \cdot 10^{-7}$	-
	Q	-	292.7 $\pm 14.1$	354.3 $\pm 12.5$	-	325.1 $\pm 15.7$	-	349.6 $\pm 6.8$	462.8 $\pm 7.2$	-
Shen i Ding (2014)	f	0.641624 $\pm 4.5 \cdot 10^{-5}$	0.643336 $\pm 2.0 \cdot 10^{-5}$	0.644585 $\pm 1.7 \cdot 10^{-5}$	0.645858 $\pm 3.8 \cdot 10^{-5}$	0.647057 $\pm 3.1 \cdot 10^{-5}$	0.647863 $\pm 3.7 \cdot 10^{-5}$	0.649551 $\pm 1.3 \cdot 10^{-5}$	0.650723 $\pm 1.7 \cdot 10^{-5}$	0.651738 $\pm 4.0 \cdot 10^{-5}$
Ovaj rad	f	0.64194 $\pm 1.0 \cdot 10^{-5}$	0.643235 $\pm 3.6 \cdot 10^{-6}$	0.644597 $\pm 3.3 \cdot 10^{-6}$	0.64599 $\pm 1.2 \cdot 10^{-5}$	0.647239 $\pm 6.2 \cdot 10^{-6}$	0.648474 $\pm 9.4 \cdot 10^{-6}$	0.649525 $\pm 2.8 \cdot 10^{-6}$	0.650327 $\pm 3.8 \cdot 10^{-6}$	0.651182 $\pm 6.3 \cdot 10^{-6}$
	Q	303.4 $\pm 3.7$	313.3 $\pm 1.2$	341.1 $\pm 1.2$	252.4 $\pm 2.9$	276.7 $\pm 2.0$	337.5 $\pm 3.7$	343.4 $\pm 1.1$	373.0 $\pm 1.8$	332.8 $\pm 2.4$



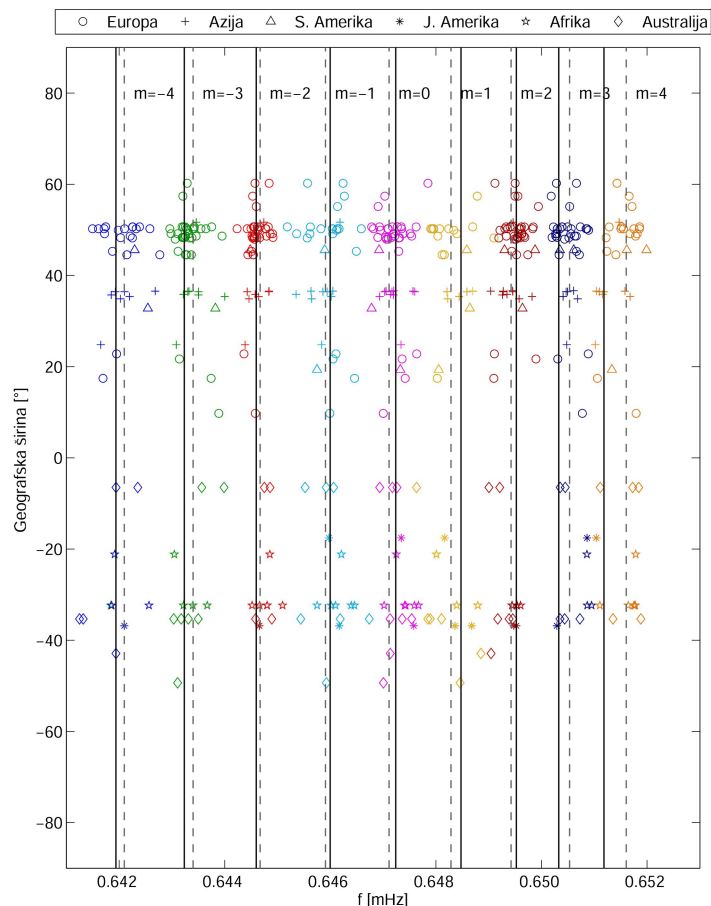
Slika 4.23 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}^0S_4^{-4}$ ,  ${}^0S_4^{-3}$ ,  ${}^0S_4^{-2}$ ,  ${}^0S_4^{-1}$ ,  ${}^0S_4^0$  singlete (kratice autora odgovaraju tablici (4.6)).



Slika 4.24 Isti prikaz kao na slici (4.2) za  ${}_0S_4^1, {}_0S_4^2, {}_0S_4^3, {}_0S_4^4$  singlete (kratice autora odgovaraju tablici (4.6)).



Slika 4.25 Sferni harmonici  ${}_0S_4^0, {}_0S_4^{-1}, {}_0S_4^{-2}, {}_0S_4^{-3}, {}_0S_4^{-4}$ .



Slika 4.26 Isti prikaz kao na slici (4.3) za  ${}_0S_4$  moda.

## 4.2 Strukturni koeficijenti

Nakon završene obrade podataka dobiven je novi niz izmjerenih frekvencija singleta koji će se iskoristiti u računanju strukturnih koeficijenata i degenerirane frekvencije multiplleta u ovom slučaju  ${}_0S_2$  moda. Kako frekvencije singleta slijede (2.46), ova jednadžba zajedno sa izračunatim frekvencijama iskoristit će se za provedbu još jednog *bootstrap* eksperimenta prema Häfneru i Widmer-Schnidrigu (2013). Spomenuta jednadžba može se raspisati

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}(1+a) \\ \bar{\omega}b \\ \bar{\omega}c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

što predstavlja problem koji se može riješiti metodom najmanjih kvadrata s tri nepoznane  $e = \bar{\omega}(1+a)$ ,  $\bar{\omega}b$ ,  $\bar{\omega}c$ , gdje vektor desne strane predstavlja izmjerene frekvencije singleta  ${}_0S_2$  moda. Dok se strukturni koeficijenti  $b$  i  $c$  mogu neovisno izračunati, isto pravilo ne vrijedi za degeneriranu frekvenciju  $\bar{\omega}$  i strukturni koeficijent  $a$ . Kako bi se ovaj problem mogao uspješno riješiti metodom najmanjih kvadrata, koristila se

teorijski izračunata vrijednost strukturnog koeficijenta  $a$  iz Dahlena i Sailora (1979), tako da procjena degenerirane frekvencije postaje  $\bar{\omega} = e/(1+a)$ . Pogreške strukturnih koeficijenata i degenerirane frekvencije multiplleta dobivene su *bootstrap* eksperimentima, tako da se eksperiment u ovom slučaju sastojao od rješavanja problema (4.2) metodom najmanjih kvadrata, gdje je vektor desne strane bila slučajno odabrana varijabla iz svih postojećih setova izmjerenih frekvencija singleta. U obzir se uzimao samo onaj niz frekvencija singleta u kojem su postojale izmjerene vrijednosti svih pet frekvencija. U tablici (4.7) prikazane su dobivene vrijednosti strukturnih koeficijenata  $b$ ,  $c$  i degenerirane frekvencije multiplleta  $\bar{\omega}$  s pripadnim pogreškama.

**Tablica 4.7** Izmjerena degenerirana frekvencija  $\bar{f} = \bar{\omega}/2\pi$  [mHz], rotacijski parametar razdvajanja  $b$  i parametar eliptičnosti  $c$  za  ${}_0S_2$  mod.

$\bar{f}$	$0.309125 \pm 1.1 \cdot 10^{-5}$	Häfner i Widmer-Schnidrig (2013)
$\bar{f}$	$0.309134 \pm 1.3 \cdot 10^{-4}$	
Q	$486 \pm 10$	Häfner i Widmer-Schnidrig (2013)
Q	$481 \pm 150$	
b(e-3)	14.905	Dahlen i Sailor (1979)
b(e-3)	14.905	Rogister (2003)
b(e-3)	$14.935 \pm 0.010$	Häfner i Widmer-Schnidrig (2013)
b(e-3)	$14.938 \pm 0.061$	
c(e-3)	-0.267	Dahlen i Sailor (1979)
c(e-3)	-0.268	Rogister (2003)
c(e-3)	$-0.048 \pm 0.012$	Häfner i Widmer-Schnidrig (2013)
c(e-3)	$-0.041 \pm 0.088$	

Za usporedbu prikazane su i izmjerene vrijednosti iz Häfnera i Widmer-Schnidriga (2013) te teorijske vrijednosti strukturnih koeficijenata prema Dahlenu i Sailoru (1979) i Rogisteru (2003) izračunate za sferno simetrični model Zemlje 1066A (Gilbert i Dziewonski, 1975). Dahlen i Sailor (1979) i Rogister (2003) koristili su drukčiji pristup računanja frekvencija singleta, ali su dobili izuzetno dobra poklapanja. Usporedbom vrijednosti ovog rada s vrijednostima Häfnera i Widmer-Schnidriga (2013) također se dobiva dobro preklapanje svih vrijednosti, međutim očito je da postoji odstupanje između teorijski izračunatog i izmjerenog strukturnog koeficijenta  $c$ . Razlog tome leži u činjenici da izmjereni strukturni koeficijent  $c$  sadrži doprinos i teorijski izračunatog koeficijenta  $c$  (tablica (4.7)) kao i doprinos strukturnog koeficijenta osjetljivog na osnosimetričnu lateralno heterogenu strukturu, odnosno doprinos drugog člana u (2.52). Kako bi se izračunala vrijednost tog doprinosa postaviti će se još jedan problem koji će se rješavati metodom najmanjih kvadrata. U potpoglavlju 2.1.7. naglašeno je da multiplet harmoničkog stupnja  $l = 2$  osjetljiv samo na harmoničku strukturu reda  $s = 2$  i  $s = 4$  lateralno heterogene strukture, zato se relacija

(2.52) može raspisati i zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \bar{f}^{ds}(1 + a^{ds} - 2b^{ds} + 4c^{ds}) \\ \bar{f}^{ds}(1 + a^{ds} - b^{ds} + c^{ds}) \\ \bar{f}^{ds}(1 + a^{ds}) \\ \bar{f}^{ds}(1 + a^{ds} + b^{ds} + c^{ds}) \\ \bar{f}^{ds}(1 + a^{ds} + 2b^{ds} + 4c^{ds}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_2^{-2-2} \\ \gamma_2^{-1-1} \\ \gamma_2^{00} \\ \gamma_2^{11} \\ \gamma_2^{22} \end{bmatrix} c_2^0 + \begin{bmatrix} \gamma_4^{-2-2} \\ \gamma_4^{-1-1} \\ \gamma_4^{00} \\ \gamma_4^{11} \\ \gamma_4^{22} \end{bmatrix} c_4^0 = \begin{bmatrix} f_{-2}^e \\ f_{-1}^e \\ f_0^e \\ f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

gdje su veličine označene s eksponentom  $ds$  teorijske vrijednosti prema Dahlenu i Sailoru (1979), dok veličine označene eksponentom  $e$  predstavljaju izmjerene frekvencije singleta. Realni koeficijenti  $\gamma_s^{mm'}$  definirani su u (2.50). Sve veličine prvog člana lijeve strane (4.3) su poznate i kao takve mogu se izračunati i oduzeti od izmjerenih frekvencija s desne strane (4.3). Kao zadnji korak ostaje rješavanje problema s dvije nepoznanice  $c_2^0$  i  $c_4^0$ . Izračunati strukturni koeficijent  $c_2^0$  prikazan je u tablici (4.8) zajedno s izmjerenim koeficijentom iz Deuss i sur. (2011) i teorijski izračunatog koeficijenta za S40RTS model (Ritsema i sur., 2011) dobivenog u osobnoj komunikaciji sa Sophie Lambotte (2016). Rezultat ovog rada ulazi u izračunatu standardnu devijaciju iz rada Deuss i sur. (2011).

**Tablica 4.8** Izmjereni strukturni koeficijent  $c_2^0$  [ $\mu\text{Hz}$ ] uspoređen s koeficijentom iz literature i s teorijskim koeficijentom.

	Ovaj rad	Deuss i sur. (2010)	S. Lambotte
$c_2^0$	-0.78	$-0.66 \pm 0.32$	-0.59

Računanje strukturnih koeficijenata predstavlja sljedeći korak u procesu obrade podataka slobodnih oscilacija, jer oni direktno sadrže perturbacije brzina  $P$  i  $S$  valova, gustoće i ostalih varijabli strukture Zemlje. Ovim jednostavnim modelom pokazano je kako nizovi izmjerene frekvencije singleta doprinose njihovom računanju. Naravno, da bi se mogao donijeti ikakav zaključak o perturbacijama u strukturi Zemlje, trebaju se provesti mjerenja frekvencija velikog niza normalnih modova i formirati kompleksniji model za izračun strukturnih koeficijenata. Jednom kada postoji novi skup strukturnih koeficijenata provođenjem inverznih modela računaju se vrijednosti perturbacija, koje se direktno koriste za ograničavanje postojećih modela Zemlje.



## 5 Zaključak

Nakon svakog dovoljno snažnog potresa, kada dolazi do oslobađanja velike količine energije, cijela Zemlja pobuđena je na osciliranje oko novog ravnotežnog stanja koje može trajati danima ili čak tjednima. Postoji beskonačan broj modova osciliranja Zemlje jer je Zemlja dinamički sustav sa  $N$  stupnjeva slobode, gdje je  $N$  beskonačno velik. Dok uobičajena teorija rasprostiranja seizmičkih valova promatra gibanje u Zemlji kao poremećaj koji je zahvatio mali dio Zemlje u nekom trenutku, teorija slobodnih oscilacija promatra gibanje cijele Zemlje simultano. U ovom je radu predstavljen dio teorije slobodnih oscilacija te zašto je ova teorija važna i korisna u otkrivanju unutrašnjosti Zemlje. Kao bitna činjenica ističe se osjetljivost Zemlje na rotaciju, eliptičnost, lateralnu heterogenost i anizotropiju koje utječu na pojavljivanje određenih procesa Zemljinih normalnih modova. U kontekstu ovog rada, promatra se proces razdvajanja degenerirane frekvencije moda (definirane sferno simetričnom nerotirajućom potpuno elastičkom i izotropnom Zemljom) na pojedine frekvencije singleta moda.

Prezentirana su mjerenja svojstvenih frekvencija singleta i faktora dobrote za pet normalnih modova Zemlje, četiri fundamentalna moda  ${}_0S_0$ ,  ${}_0S_2$ ,  ${}_0S_3$ ,  ${}_0S_4$  i jedan viši harmonik  ${}_2S_1$ . Mjerenje modova postignuto je provođenjem autoregresijske metode u frekvencijskoj domeni prema Chao i Gilbert (1980) koja se temelji na Pronyjevoj metodi. Pronyjeva metoda omogućuje prilagođavanje kompleksno eksponencijalnih funkcija bilo koje prirode (čiste sinusoide, eksponencijalno opadajući ili rastućih funkcija) na niz fiksno uzorkovanih podataka. Pogreške mjerenja dobivene su *bootstrap* eksperimentima prema Häfneru i Widmer-Schnidrigu (2013). Za provedbu metode korištena je velika skupina podataka i po prvi put kombinirana su mjerenja dobivena iz gravimetra i seizmometra. Odnosno, ukupno je korišteno 113 gravimetara i seizmometara nakon 5 mega potresa iz 2004. (otočje Sumatra-Andaman, Indonezija), 2010. (Maule regija, Čile), 2011. (Tohoku, Japan), 2012. (Aceh, Indonezija) i 2015. (Illapel, Čile) godine, magnituda većih od 8, zabilježenih na 46 postaja u svijetu. Prije korištenja vremenskih nizova podaci su se pripremili za obradu provođenjem filtriranja, atmosferske korekcije i odbacivanja prvih 5 sati nakon potresa.

Rezultati izračunatih svojstvenih frekvencija i faktora dobrote singleta mjerenih modova pokazuju dobro slaganje s prijašnjim radovima većine autora. Odstupanja u izračunatim pogreškama mogu se javiti zbog tri sljedeća razloga: u ovom radu koristili su se *bootstrap* eksperimenti za izračun standardnih devijacija, koristila se velika grupa podataka vremenskih nizova na koje se primjenjivala autoregresijska metoda te se konačna pogreška računala kao težinski srednjak svih pogrešaka pojedinačnih mjerenja dobivenih *bootstrap* eksperimentima. I zato, usporedbom s konačnim pogreškama iz literature, pogreške ovog rada čine se manjima, ali to ne znači da one nisu realistične. Da jesu realistične i konzistentne, pokazano je usporedbom poje-

dinačnim mjerenja svojstvenih frekvencija i faktora dobrote  ${}_0S_2$  moda ovog rada s Häfnerom i Widmer-Schnidrigom (2013) te usporedbom dobivenih standardnih devijacija s omjerima signala i šuma vremenskih nizova gdje je potvrđena relacija da za veći omjer signala i šuma slijedi manja standardna devijacija. Manja skupinu izračunatih rezultata, dobivenu autoregresijskom metodom i računanjem težinskog srednjaka, uspoređivala se s rezultatima dobivenim korištenjem dodatne metode, a to je metoda usrednjavanja. Rezultati su očekivano ukazivali na dobro poklapanje vrijednosti frekvencija dobivenih korištenjem samo autoregresijske metode i vrijednosti dobivenih korištenjem metode usrednjavanja i autoregresijske metode, ali se pokazalo kako mjerenja s manjom standardnom devijacijom mogu prevagnuti u konačnom rješenju težinskog srednjaka faktora dobrote. Također, mjerenja očekivano ukazuju na odstupanja vrijednosti svojstvenih frekvencija singleta od teorijskih vrijednosti modela Zemlje PREM. To potvrđuje činjenicu da korišteni model nije dovoljan za opis efekata koje opažamo na realnim podacima zbog Zemljine kompleksnosti.

Metoda je dala zadovoljavajuće rezultate u usporedbi s ostalim radovima iz literature. Međutim, prilikom korištenja autoregresijske metode bitno je napomenuti da čak i umjeren broj praznina u podacima ili nelinearnosti u instrumentu će manje ili više uništiti autoregresijsku prirodu vremenskog niza i time unijeti određenu pristranost u mjerenjima. Zato je izuzetno važno prije donošenja bitnih zaključaka na temelju izmjerenih podataka provjeriti postojanje nelinearnosti u korištenim vremenskim nizovima metodom kao što je računanje hoda vektora faze. Općenito, metoda se pokazala iznimno korisnom, jer za razliku od Fourierovog transformata, uz računanje amplitude i frekvencije signala računa i parametar opadanja/rasta eksponencijalnih funkcija. Ova metoda se može koristiti za sve signale koji imaju ispunjen uvjet periodičnosti.

Teorija slobodnih oscilacija, iako je jako korisna, veoma je kompleksna teorija koja uključuje 3D rasprostiranje valova unutar heterogene anizotropne rotirajuće Zemlje. Glavni cilj teorije je prepoznati i izmjeriti što veći broj normalnih modova, kako bi se iste iskoristile u poboljšanju postojećih modela gustoće i modela seizmičkih brzina Zemlje. Konkretni podaci koji se mogu koristiti u poboljšavanju i ograničavanju postojećih modela su perturbacije brzina i gustoće. Direktna veza između izmjerenih svojstvenih frekvencija normalnih modova i spomenutih perturbacija su strukturni koeficijenti. Oni opisuju kako i zašto dolazi do odstupanja realne Zemlje od teorijski usrednjenog modela. Njihovo računanje temelji se na nizu inverznih metoda, koje zahtijevaju veliki skup podataka, pogotovo ako se žele dobiti perturbacije finije skale. Podaci dobiveni računanjem svojstvenih frekvencija redovito se koriste i u seizmičkoj tomografiji, koja se bavi modeliranjem detaljnijih prikaza polja brzina u podzemlju. Kao primjer kompleksnosti problema, mogu se navesti podaci jednog rada gdje se za modeliranje 3D heterogene strukture brzina transverzalnih valova unutar Zemljinog plašta invertirao skup podataka koji se sastojao od 27 000 dugoperiodičkih seizmograma kao i 14 000 očitanih vremena nailaska seizmičkih valova (Su i sur., 1994).

# Dodaci

## Dodatak A Metoda računanja hoda vektora faze

Nesumnjivo Fourier transformat jedna je od najčešće korištenih metoda za analizu vremenskih nizova, pogotovo u otkrivanju malih harmoničkih signala u prisutnosti šuma. Međutim, ponekad se u Fourierovom transformatu mogu pojaviti spektralni šiljci čiji uzrok nije sasvim poznat i ako ne postoje dodatne informacije taj spektralni šiljak ne može se sa sigurnošću interpretirati – radi li se o slučajnoj konstruktivnoj interferenciji šuma ili se radi o harmoničkom signalu uz prisutnost visoke razine šuma. Jedna mogućnost analize ovakvih signala je odvojeno proučavanje dijelova vremenskih signala i zapravo se radi o metodi računanja grafičkog Fourierovog transformata kojom se može shvatiti što se događa na pojedinoj frekvenciji u vremenskom nizu. Pregled i primjena ovih metoda nalazi se u Zürn i Rydelek (1994).

Uzet će se u obzir vremenski niz  $x_i, i = 1, \dots, N$  uzorkovan  $\Delta t$  intervalom uzorkovanja u kojem se pretpostavlja da postoji signal frekvencije  $f_s$ . Doprinos svakog uzorka vektoru faze i Fourierovom transformatu predstavljen je relacijom ( $j = \sqrt{-1}$ ):

$$p_i(\omega_s) = x_i e^{-j\omega_s(i-1)\Delta t}. \quad (\text{A.1})$$

Ovaj doprinos se može shvatiti kao vektor u kompleksnoj ravnini. Dodavanje ovih vektora grafički za niz  $i = 1, \dots, N$  proizvodi se vektor faze. Vektorski zbroj svih doprinosa je grafički prikaz Fourierovog transformata vremenskog niza za probnu frekvenciju  $f_s$ :

$$X(\omega_s) = \sum_i^N p_i. \quad (\text{A.2})$$

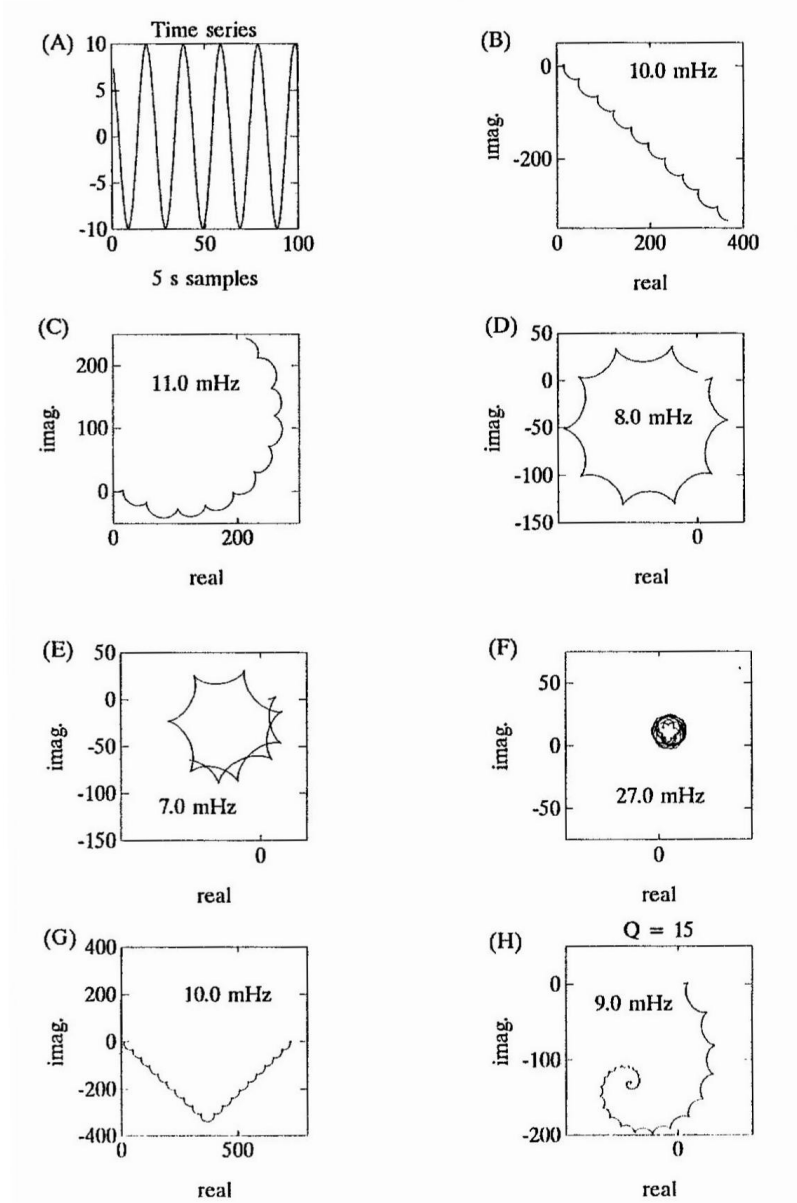
Vremenski razvoj vektora faze sadrži vrlo važne informacije koje se izgube kada se promatra konačan rezultat Fourierovog transformata. Očito, ako je probna frekvencija identična frekvenciji signala, tada će udaljenost u kompleksnoj ravnini između početne točke i zadnje točke vektorskog hoda, tj. magnituda Fourierovog transformata, biti veća nego u slučaju probne frekvencije u okolini prave frekvencije signala.

Na slici (A.1) prikazan je primjer harmoničkog vremenskog niza

$$x_i = 10 \cos(2\pi f_0 i \Delta t + 0.75),$$

frekvencije  $f_0$  i nekoliko vektorskih faznih hodova s nekoliko probnih frekvencija. Kada je probna frekvencija jednaka frekvenciji harmoničkog signala, tada se promjene u predznaku i smjeru vektora javljaju uvijek u fazi i uglavnom je vektorski hod

ravna linija. Razlog tome je što su veliki doprinosi uvijek usmjereni u istom smjeru, dok su mali doprinosi uglavnom usmjereni ortogonalno na smjer glavnih doprinosa (slika (A.1), B). Za probnu frekvenciju koja je različita od frekvencije signala, krivulja vektor hoda postaje lagano zakrivljena (slika (A.1), C), dok smjer zakrivljenosti ovisi o predznaku ( $f_0 - f_s$ ). Kako se zakrivljenost krivulje povećava s povećanje različitosti između probne frekvencije i prave frekvencije signala, linearnost krivulje vektorskog hoda može se koristiti za određivanje prave frekvencije signala.



**Slika A.1** (A)-(F): Umjetno generirani signal frekvencije  $f_0 = 10$  mHz, intervala uzorkovanja  $\Delta t = 5$  s, amplitude  $A = 10$ , faze  $\phi = 0.75$ , broj točaka u vremenskom nizu  $N = 100$  i izračunati hodovi vektora faze korištenjem probnih frekvencija  $f_s = 10, 11, 8, 7, 27$  mHz. (G): Dodano još 100 uzoraka nakon faznog skoka  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $f_0 = f_s = 10$  mHz. (H): Dodano još 500 uzoraka nakon uključena atenuacije opisane faktorom dobrote  $Q = 15$ ,  $f_s = 9$  mHz. Preuzeto iz Zürn i Rydelek (1994).

Jedan puni krug za ukupni vremenski niz postiže se kada je  $\frac{1}{N} = |f_0 - f_s|\Delta t$ , tj. kada razlika u frekvencijama poprimi nultu vrijednost za Fourierov transformat

(slika (A.1), D). Izvan spomenute frekvencijske razlike (slika (A.1), E,F) krivulja se i dalje povećava i zbog toga je amplituda ukupnog vektorskog hoda manja nego prije. Zapravo, ako se kružni uzorci pojavljuju u vektorskom hodu, može se odrediti frekvencijska razlika između probne frekvencije i frekvencije signala. Nagle promjene faze harmoničkog signala (kao što je pobuda slobodnih oscilacija) rezultirat će naglom promjenom hoda vektora faze (slika (A.1), G). Slika (A.1), H pokazuje vektor hoda faze za signal gdje je uključena atenuacija opisana faktorom dobrote  $Q = 15$ . Magnitude hoda koje čine vektor hoda sada se smanjuju kako vrijeme prolazi. Kada probna frekvencija nije slična stvarnoj frekvenciji signala tada je vektor faze opisan logaritamskom spiralom.

## Literatura

- [1] Abd El-Gelil, M., Pagiatakis, S., El-Rabbany, A. (2010): *Normal mode detection and splitting after Sumatra–Andaman earthquake*, J. Geodyn., 50, 49-56.
- [2] Banka, D., Crossley, D. (1999): *Noise levels of superconducting gravimeters at seismic frequencies*, Geophys. J. Int., 139, 87–97.
- [3] Buland, R., Gilbert, F., (1978): *Improved resolution of complex eigenfrequencies in analytically continued seismic spectra*, Geophys. J. Int., 52, 457–470.
- [4] Buland, R., Berger, J., Gilbert. F. (1979): *Observations from the IDA network of attenuation and splitting during a recent earthquake*, Nature, 277, 358-362.
- [5] Buttkus, B. (2000): *Spectral Analysis and Filter Theory in Applied Geophysics*, Springer, Berlin.
- [6] Chao, B.F., Gilbert, F. (1980): *Autoregressive estimation of complex eigenfrequencies in low frequency seismic spectra*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 63, 641-657.
- [7] Chao, B.F. (1990b): *On the use of maximum entropy autoregressive spectrum in harmonic analysis of time series*, Pageoph, 134 (2), 303-311.
- [8] Dahlen, F.A. (1968): *The normal modes of a rotating, elliptical earth*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 16, 329–367.
- [9] Dahlen, F. A., Sailor, R. V. (1979): *Rotational and elliptical splitting of the free oscillation of the Earth*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 58, 609–623.
- [10] Dahlen, F.A. (1982): *The effect of data windows on the estimation of free oscillations parameters*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 69, 537-549.
- [11] Deuss, A., Ritsema, J. Heijst, H., (2011): *Splitting function measurements for Earth’s longest period normal modes using recent large earthquakes*, Geophys. Res. Lett., 38, L04303.
- [12] Ding, H., Shen. W. (2013): *Determination of the complex frequencies for the normal modes below 1mHz after the 2010 Maule and 2011 Tohoku earthquakes*, Annals of geophysics, 56, 5.
- [13] Ding, H., Chao, B. F. (2015a): *Detecting harmonic signals in a noisy time series: The z-domain AutoRegressive (AR-z) spectrum*, Geophys. J.Int., 201, 1287–1296.
- [14] Ding, H., Chao, B. F. (2015b): *The Slichter mode of the Earth: Revisit with optimal stacking and autoregressive methods on full superconducting gravimeter data set*, J. Geophys. Res. Solid Earth, 120.

- [15] Dziewonski, A.M. Gilbert, F. (1971): *Solidity of the inner core of the Earth inferred from normal mode observations*, Nature, 234, 465-466.
- [16] Dziewonski, A.M., Anderson, D.L. (1981): *Preliminary reference Earth model*, Phys. Earth Planet. Int., 25, 297-356.
- [17] Edmonds, A.R. (1960): *Angular Momentum and Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [18] Fröberg, C., E. (1969): *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [19] Gilbert, F., Dziewonski, A.M. (1975): *An Application of Normal Mode Theory to the Retrieval of Structural Parameters and Source Mechanisms from Seismic Spectra*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 278, 187–269.
- [20] Goodkind, J., M., (1999): *The superconducting gravimeter*, Rev. Sci. Instrum., 70, 4131-4152.
- [21] Gubbins, D. (2004): *Time Series Analysis and Inverse Theory for Geophysicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 272 p.
- [22] Hanka, W., Kind, R. (1994): *The GEOFON Program*, IRIS Newsletter, XIII, 1–4.
- [23] Harris, F. J. (1978): *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proc IEEE, 66, 51-83.
- [24] Häfner, R., Widmer-Schmidrig, R. (2013): *Signature of 3D density structure in superconducting gravimeter spectra of the OS2 multiplet*, Geophys. J. Int., 192, 285-294.
- [25] Masters, G., Widmer, R. (1995): *Free oscillation: frequencies and attenuations*, Global Earth Physics, A Handbook of Physical Constants, AGU Reference Shelf 1.
- [26] Masters, G., Laske, G., Gilbert, F. (2000): *Matrix autoregressive analysis of free-oscillation coupling and splitting*, Geophys. J. Int., 143, 478–489.
- [27] Oliver, J., Murphy, L. (1971): *WWNSS: Seismology's Global Network of Observing Stations*, Science, 174, 254–261.
- [28] Okal, E.A. (1978): *A physical classification of the Earth's spheroidal modes*, J. Geophys. Earth, 26, 75-103.
- [29] Peterson, J., Hutt, C.R., Holcomb, L.G. (1980): *Test and Calibration of the Seismic Research Observatory*, U. S. Geol. Surv, 80–187, 1–86.

- [30] Peterson, J., Tilgner, E.E. (1985): *Description and Preliminary Testing of the DCSN Seismic Sensor Systems*, U. S. Geol. Surv., 85–288, 1–60.
- [31] Peterson, J. (1993): *Observations and modeling of seismic background noise*, U.S. Geol. Surv. Open-file Rept., 93-322, 1–45.
- [32] Ritsema, J., Deuss, A., Van Heijst, H. J., Woodhouse, J. H. (2011): *S4ORTS: a degree-40 shear-velocity model for the mantle from new Rayleigh wave dispersion, teleseismic traveltime and normal-mode splitting function measurements*, Geophys. J. Int., 184, 1223–1236.
- [33] Ritzwoller, M., Masters, G. Gilbert, F. (1986): *Observations of anomalous splitting and their interpretation in terms of aspherical structure*, J. Geophys. Res., 91, 10, 203–10, 228.
- [34] Rogister, Y. (2003): *Splitting of seismic-free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal, Earth*, Phys. Earth Planet. Inter., 140, 169–182.
- [35] Romanowicz, B., Cara, M., Fels, J. F., Roullet, G. (1984): *GEOSCOPE: A French initiative in long period three component global seismic networks.*, Eos Transactions of the American Geophysical Union, 65, 753-756.
- [36] Romanowicz, B., Dziewonski, A.M. (1986): *Toward a federation of broadband seismic networks*, Eos Transactions of the American Geophysical Union, 67, 541-542.
- [37] Rosat, S., Hinderer, J., River, L. (2003): *First observation of 2S1 and study of the splitting of the football mode OS2 after the June 2001 Peru earthquake of magnitude 8.4*, Geophys. Res. Lett., 30, 10-11.
- [38] Rosat, S., Watada, S., Sato, T., (2007): *Geographical variations of the OS0 normal mode amplitude: predictions and observations after the Sumatra-Andaman earthquake*, Earth Planets Space, 59, 307–311.
- [39] Rosat, S., Fukushima, T., Sato, T., Tamura, Y. (2008): *Application of a non-linear damped harmonic analysis method to the normal modes of the Earth*, J. Geodyn., 45, 63-71.
- [40] Rosat, S., Hinderer, J. (2011): *Noise Levels of Superconducting Gravimeters: Updated Comparison and Time Stability*, Bull. Seismol. Soc. Am., 101 (3), 1233-1241.
- [41] Rosat, S., Sato, T., Imanishi, Y., Hinderer, J., Tamura, Y., McQueen, H., Ohashi, M. (2012): *Correction to “High-resolution analysis of the gravest seismic normal modes after the 2004 Mw = 9 Sumatra earthquake using superconducting gravimeter data”*, Geophys. Res. Lett., 39, L22601.



- [42] Roullet, G., Rosat, S., Clévéde, E., Millot-Langet, R., Hinderer, J. (2006): *New determinations of Q quality factors and eigenfrequencies for the whole set of singlets of the Earth's normal modes OS0, OS2, OS3 and 2S1 using superconducting gravimeter data from the GGP network*, J. Geodyn., 41, 345-357.
- [43] Roullet, G., Roch, J., Clévéde, E. (2010): *Observation of split modes from the 26th December 2004 Sumatra-Andaman mega-event*, Phys. Earth Planet. Int., 179, 45-59.
- [44] Sailor, R. V., Dziewonski, A. M. (1978): *Measurements and interpretation of normal mode attenuation*, Geophys. J. R. astr. Soc, 53 (3), 559–581.
- [45] Savino, J., Murphy, A., Rynn, J.M., Tatham, R., Sykes, L., Choy, G., McCamy, K. (1972): *Results from the high-gain long-period seismograph experiment*, Geophys. J. R. astr. Soc, 31, 179–204.
- [46] Shannon, C. E. (1948): *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Techn. Journal, 27, 379–423, 623–656.
- [47] Shen, W., Ding, H. (2014): *Observation of spheroidal normal mode multiplets below 1 mHz using ensemble empirical mode decomposition*, Geophys. J. Int., 196, 1631–1642.
- [48] Smolić, I. (2016): *Matematičke metode fizike*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, skripta (<http://www.phy.pmf.unizg.hr/is-molic/>).
- [49] Stein, S., Wysession, M. (2003): *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*, Blackwell Publishing Ltd., Oxford, 499 p.
- [50] Su, W., J., Woodward, R., L., Dziewonski, A., M. (1994): *Degree-12 Model of Shear Velocity Heterogeneity in the Mantle*, J. Geophys. Res., 99, 4, 4945-4980.
- [51] Tomić, B. (2015): *Bootstrap metoda u prilagodbi linearnog regresijskog modela*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu.
- [52] Tromp, J. (1993): *Support for anisotropy of the Earth's inner core from free oscillations*, Nature, 366, 678–681.
- [53] Warburton, R. J., Goodkind, J. M. (1977): *The influence of barometric pressure variations on gravity*, Geophys. J. R. astr. Soc., 48, 3, 281-292.
- [54] Widmer-Schmidrig, R. (2003): *What can superconducting gravimeters contribute to normal mode seismology?*, Bull. Seismol. Soc. Am., 93 (3), 1370-1380.
- [55] Widmer-Schmidrig, R., Laske, G. (2007): *Theory and observation - Normal modes and surface wave measurements*, Treatise on Geophysics, 2nd Edition, Elsevier B.V.

- [56] Widmer-Schmidrig, R. (2009): *Compute a Terrestrial Eigenfrequency and Eigenfunction of your choice*, <http://stuplots.geophys.uni-stuttgart.de/~plots/Modes/modes.html>. Stranici pristupljeno 14.12.2015.
- [57] Woodhouse, J. H., Giardini, D., Li, X. (1986): *Evidence for inner core anisotropy from free oscillations*, *Geophys. Res. Lett.*, 13 (13), 1549–1552.
- [58] Zábřanová, E., Matyska, C., Hanyk, L., Pálinkáš, V. (2012): *Constraints on the centroid moment tensors of the 2010 Maule and 2011 Tohoku earthquakes from radial modes*, *Geophys. Res. Lett.*, 39, L18302.
- [59] Zürn, W., Rydelek, P. A. (1994): *Revisiting the phasor - walkout method for detailed investigation of harmonic signals in time series*, *Surveys in Geophysics*, 15, 409-431.
- [60] Zürn, W., Widmer, R., (1995): *On noise reduction in vertical seismic records below 2 mHz using local barometric pressure*, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 3537–3540.