

# Plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom prostoru

---

**Devald, Davor**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:506214>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Davor Devald

**PLOHE KONSTANTNE SREDNJE  
ZAKRIVLJENOSTI U  
MINKOWSKIJEVOM PROSTORU**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Plohe u Minkowskijevom 3-prostoru</b>	<b>3</b>
1.1 Trodimenzionalni prostor Minkowskog . . . . .	3
1.2 Plohe u prostoru Minkowskog. Tangencijalna ravnina i normala . . . . .	10
1.3 Operator oblika plohe. Prva i druga fundamentalna forma . . . . .	17
1.4 Gaussova i srednja zakrivljenost. Normalna i glavne zakrivljenosti . . . . .	22
<b>2 Minimalne i maksimalne plohe u Minkowskijevom 3-prostoru</b>	<b>27</b>
2.1 Minimalne i maksimalne plohe . . . . .	27
2.2 Rotacijske minimalne i maksimalne plohe . . . . .	36
2.3 Pravčaste minimalne i maksimalne plohe . . . . .	43
2.4 Weierstrassova reprezentacijska formula . . . . .	53
2.5 Ostale minimalne i maksimalne plohe . . . . .	66
<b>3 Prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom 3-prostoru</b>	<b>71</b>
3.1 Rotacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . . .	71
3.2 Pravčaste i helikoidalne prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . . .	80
3.3 Translacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . . .	93
<b>Bibliografija</b>	<b>103</b>

# Uvod

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti (kraće cmc-plohe) važna su klasa ploha u diferencijalnoj geometriji. Dije se na dvije potklase: minimalne plohe ( $H = 0$ ) i prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti ( $H = \text{const.} \neq 0$ ), koje se obično proučavaju odvojeno. Te plohe se intenzivno proučavaju zato što imaju primjenu u prirodnim znanostima. Navest ćemo nekoliko primjera. U fizici, minimalne plohe se pojavljuju u teoriji relativnosti kao tzv. pojavni horizont (engl. *apparent horizon*), rub crne rupe u prostor-vremenu. U kemiji se cmc-plohe pojavljuju u proučavanju sapunica (engl. *soap bubble*). Sapunica uvijek prima oblik takav da se minimizira površina. U biologiji, minimalne plohe se pojavljuju u proučavanju samopovezivanja molekula u veće strukture (engl. *molecular self-assembly*). Primjerice, ljudska DNA ima oblik helikoida (dvostruka zavojnica s poprečnim vezama). Cmc-plohe se pojavljuju i u arhitekturi te likovnoj umjetnosti.

Sada ćemo dati kratki povijesni pregled istraživanja cmc-ploha. Minimalne plohe u euklidskom prostoru prvi je proučavao Joseph-Louis Lagrange 1762. god. Tražio je plohe koje su graf funkcije i na dijelu omeđenom zadanom zatvorenom krivuljom imaju najmanju površinu. Izveo je tzv. Euler-Lagrangeovu jednadžbu čija rješenja su tražene funkcije. Međutim, nije ju uspio riješiti, samo je pokazao da ravnina zadovoljava jednadžbu. Francuski matematičar Jean Baptiste Meusnier je 1776. god. otkrio helikoid i katenoid pokazavši da oni zadovoljavaju EL jednadžbu. 19. stoljeće je tzv. zlatno doba diferencijalne geometrije. U 19. st. dolazi i do otkrića neeuklidskih geometrija. Francuska matematičarka i fizičarka Sophie Germain (18./19. st.) uvela je pojam srednje zakrivljenosti u svojim radovima iz teorije elastičnosti. 1841. god. francuski matematičar Charles-Eugene Delaunay dokazao je da su jedine rotacijske cmc-plohe ravnina, cilindar, sfera, katenoid, unduloid i nodoid. Alfred Enneper i Karl Weierstrass proučavali su minimalne plohe od 1863. god. i njihov važan doprinos je Weierstrass-Enneperova reprezentacijska formula za minimalne plohe. 1905. god. Albert Einstein je objavio svoju specijalnu teoriju relativnosti. Na temelju toga je 1907. god. njemački matematičar Hermann Minkowski otkrio prostor Minkowskog, četverodim. ambijent u kojem vrijede postulati STR. Krajem 20. i u 21. st. pronađene su razne potklase cmc-ploha u raznim prostorima (ne samo u euklidskom).

U ovom radu izlažemo teoriju cmc-ploha u trodimenzionalnom prostoru Minkowskog. Za razliku od euklidskog prostora, prostor Minkowskog nije Riemannov prostor, tj. metrika

prostora Minkowskog nije pozitivno definitna (ali je nedegenerirana). Posljedica toga je da u prostoru Minkowskog imamo tri tipa ploha: prostorne, vremenske i svjetlosne. Prostorne plohe su slične plohama u euklidskom prostoru, one su Riemannove mnogostrukosti. Vremenske plohe nisu Riemannove mnogostrukosti. Posljedica toga je primjerice da se operator oblika plohe za vremensku plohu općenito ne može dijagonalizirati (ni nad  $\mathbb{C}$ ). Svjetlosne plohe se ne mogu orijentirati poput onih u euklidskom prostoru jer im je normalan prostor degeneriran. Njih nećemo razmatrati. Ovaj rad je podijeljen u tri poglavlja. Prvo poglavlje je lokalna teorija ploha u prostoru Minkowskog. Prvo proučavamo prostor Minkowskog, uvodimo pseudoskalarni i vektorski produkt te proučavamo njihova svojstva. Zatim uvodimo osnovne pojmove lokalne teorije ploha: implicitno i parametarski zadana ploha, tangencijalna ravnina i normala, jedinično normalno polje i orijentacija. Uvodimo pojam operatora oblika plohe te prvu i drugu fundamentalnu formu. Proučavamo konformne parametrizacije. Definiramo Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe te dajemo njihovu vezu s fundamentalnim veličinama. Na kraju uvodimo glavne zakrivljenosti i glavne vektore te proučavamo mogućnost dijagonalizacije operatora oblika plohe.

Drugo poglavlje posvećeno je minimalnim i maksimalnim plohama. Prvo se proučavaju općenita svojstva minimalnih i maksimalnih ploha. Između ostaloga dokazujemo teorem koji opravdava njihove nazive, tj. tvrđnju da minimalne i maksimalne plohe lokalno minimiziraju (maksimiziraju) površinu. Zatim pronalazimo sve rotacijske minimalne i maksimalne plohe (katenoide). Pravčaste minimalne i maksimalne plohe dijelimo u dvije potklase: razvojne i vitopere. Pokazujemo da je jedina maksimalna razvojna ploha ravnina i dajemo karakterizacijski teorem za razvojne pravčaste minimalne i maksimalne plohe. Što se tiče vitoperih ploha, pokazujemo da su jedine takve plohe helikoidi. Zatim izvodimo Weierstrassovu reprezentacijsku formulu za maksimalne i minimalne plohe. Uvodimo pojam familije asociiranih ploha i proučavamo njena svojstva. Na kraju dajemo pregled poznatih minimalnih i maksimalnih ploha.

Treće poglavlje posvećeno je pravim cmc-plohama. Izvodimo ODJ 2. reda i zatim navodimo jednostavnije, ODJ 1. reda za rotacijske prave cmc-plohe. Pokazujemo da su jedine rotacijske prave cmc-plohe tzv. Delaunayeve plohe: sfera, cilindar, unduloid i nodoid. Od razvojnih pravčastih pravih cmc-ploha proučavamo cilindrične i konusne plohe. Dajemo karakterizacijski teorem za cilindrične prave cmc-plohe i primjere takvih ploha. Za konusne prave cmc-plohe ispostavlja se da takvih ploha nema. Pokazujemo da su sve vitopere pravčaste cmc-plohe helikoidalne. Zatim proučavamo helikoidalne plohe općenito (ne nužno pravčaste). Pronalazimo sve helikoidalne plohe kojima su izvodnice grafovi polinoma ili kružnice. Poglavlje završavamo translacijskim cmc-ploha. Pokazujemo da su jedine prave translacijske cmc-plohe kojima obje generatriše leže u koordinatnim ravninama eliptički cilindri. Zatim pronalazimo sve takve minimalne i maksimalne plohe.

Za razumijevanje ovog rada potrebno je predznanje iz sljedećih područja matematike: linearna algebra, diferencijalni i integralni račun te diferencijalna geometrija.

# Poglavlje 1

## Plohe u Minkowskijevom 3-prostoru

### 1.1 Trodimenzionalni prostor Minkowskog

Ovdje ćemo dati osnovne rezultate iz linearne algebre u prostoru Minkowskog. Prvo ćemo definirati pseudoskalarni i vektorski produkt na prostoru Minkowskog i istražiti njihova svojstva.

**Definicija 1.1.1.** *Minkowskijev (Lorentzov, Lorentz-Minkowskijev) 3-prostor  $\mathbb{R}_1^3$  je uređeni par realnog vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$  i preslikavanja  $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  danog formulom  $x \cdot y := -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ , gdje je  $x = (x_1, x_2, x_3)$  i  $y = (y_1, y_2, y_3)$ .*

- Napomena 1.1.2.**
1. Preslikavanje  $\cdot$  može se definirati tako da negativni predznak stavimo ispred bilo kojeg od tri člana u definiciji, ali točno jednog.
  2. Preslikavanje  $\cdot$  je simetrični bilinearni funkcional, tj. simetrično je i linearno po svakoj od dvije varijable.
  3. Preslikavanje  $\cdot$  ima svojstvo nedegeneriranosti: ako je  $x \cdot y = 0$  za sve  $y \in \mathbb{R}_1^3$ , onda je  $x = 0$ .
  4. Preslikavanje  $\cdot$  nije skalarni produkt jer nije pozitivno definitno. Takvo preslikavanje zovemo pseudoskalarni produkt.

**Definicija 1.1.3.** *Za vektor  $x \in \mathbb{R}_1^3$  kažemo da je*

1. *prostorni ako je  $x \cdot x > 0$  ili  $x = 0$ ,*
2. *vremenski ako je  $x \cdot x < 0$ ,*
3. *svjetlosni ako je  $x \cdot x = 0$  i  $x \neq 0$ .*

**Definicija 1.1.4.** Za vektore  $x, y \in \mathbb{R}_1^3$  kažemo da su okomiti (ortogonalni) ako je  $x \cdot y = 0$ . To označavamo  $x \perp y$ .

**Definicija 1.1.5.** U prostoru Minkowskog  $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$  definiramo pseudonormu  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  formulom  $\|x\| := \sqrt{|x \cdot x|}$  i pseudometriku  $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  formulom  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

**Napomena 1.1.6.** 1. Preslikavanje  $\|\cdot\|$  je nenegativno i pozitivno homogeno. Nadalje,  $\|x\| = 0$  ako i samo ako je  $x = 0$  ili je vektor  $x$  svjetlosni.

2. Preslikavanje  $d$  je nenegativno i simetrično. Nadalje,  $d(x, y) = 0$  ako i samo ako je  $x = y$  ili je vektor  $x - y$  svjetlosni.

Nejednakost trokuta za preslikavanje  $\|\cdot\|$  (a time i za  $d$ ) općenito ne vrijedi.

**Definicija 1.1.7.** Za vektor  $x \in \mathbb{R}_1^3$  kažemo da je jedinični (normiran) ako je  $\|x\| = 1$ .

**Napomena 1.1.8.** Svaki prostorni vektor različit od 0 i svaki vremenski vektor može se normirati, tj. ako je  $x \in \mathbb{R}_1^3$ ,  $x \neq 0$  prostorni ili vremenski vektor, onda postoji jedinični vektor  $y \in \mathbb{R}_1^3$  koji je kolinearan s  $x$ . Taj vektor je jedinstven do na orijentaciju i dan je formulom  $y = \pm \frac{x}{\|x\|}$ . Nulvektor i svjetlosni vektori ne mogu se normirati.

**Napomena 1.1.9.** Za tri vektora  $a, b, c \in \mathbb{R}_1^3$ ,  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  označavamo:

$$\det(a, b, c) := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zbog  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$  možemo komponente vektora zapisati i u stupce.

**Propozicija 1.1.10.** Neka su  $u, v \in \mathbb{R}_1^3$ . Tada postoji jedinstveni vektor  $z \in \mathbb{R}_1^3$  takav da za sve  $x \in \mathbb{R}_1^3$  vrijedi:

$$z \cdot x = \det(u, v, x) \quad (1.1)$$

*Dokaz.* Ako za neki vektor  $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_1^3$  vrijedi (1.1) za svaki  $x \in \mathbb{R}_1^3$ , onda to posebno vrijedi za  $x \in \{e_1, e_2, e_3\}$  (kanonska baza za  $\mathbb{R}^3$ ). Uvrštavanjem tih vektora dobivamo:  $z \cdot e_1 = \det(u, v, e_1) \Rightarrow$  (Lapl. razvoj)  $\Rightarrow -z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 0 + z_3 \cdot 0 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \Rightarrow z_1 = -u_2 v_3 + u_3 v_2$  i analogno  $z_2 = -u_1 v_3 + u_3 v_1$ ,  $z_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$ . Time smo pokazali: ako takav vektor  $z$  postoji, onda to mora biti vektor  $z = (-u_2 v_3 + u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$ , tj. pokazali smo jedinstvenost.

Još treba pokazati da taj vektor zadovoljava (1.1) za sve  $x \in \mathbb{R}_1^3$ . Imamo:

$$\begin{aligned} z \cdot x &= z \cdot (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 (z \cdot e_1) + x_2 (z \cdot e_2) + x_3 (z \cdot e_3) \\ &= x_1 \det(u, v, e_1) + x_2 \det(u, v, e_2) + x_3 \det(u, v, e_3) \\ &= \det(u, v, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = \det(u, v, x) \end{aligned}$$



□

**Definicija 1.1.11.** Vektorski produkt vektora  $u, v \in \mathbb{R}_1^3$  je jedinstveni vektor  $u \times v \in \mathbb{R}_1^3$  takav da je  $(u \times v) \cdot x = \det(u, v, x)$  za sve  $x \in \mathbb{R}_1^3$ .

**Napomena 1.1.12.** Iz dokaza propozicije 1.1.10 dobivamo eksplicitnu formulu za vektorski produkt:

$$u \times v = - \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

**Propozicija 1.1.13.** Za sve  $u, v, w \in \mathbb{R}_1^3$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  vrijedi:

1.  $u \times v \perp u, v$ ,
2.  $u \times v = -(v \times u)$ ,
3.  $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$ ,
4.  $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$ ,
5.  $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ ,
6.  $u \times v = 0$  ako i samo ako je skup  $\{u, v\}$  linearno zavisian,
7. skup  $\{u, v, u \times v\}$  je baza za  $\mathbb{R}_1^3$  ako i samo ako je  $u \times v \neq 0$  i vektor  $u \times v$  nije svjetlosni,
8.  $(u \times v) \times w = -(u \cdot w)v + (v \cdot w)u$ ,
9. (Lagrangeov identitet)  $(u \times v) \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} u \cdot v & u \cdot u \\ v \cdot v & u \cdot v \end{vmatrix}$ .

*Dokaz.* Svojstva 1. - 5. slijede izravno iz svojstava determinante i relacije (1.1).

6. Pretpostavimo da je  $u \times v = 0$ . Tada je  $\det(u, v, x) = (u \times v) \cdot x = 0 \cdot x = 0$  za sve  $x \in \mathbb{R}_1^3$ . Pretpostavimo suprotno, da je skup  $\{u, v\}$  linearno nezavisian. Tada se taj skup može nadopuniti do neke baze  $\{u, v, x\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$ . Kako je baza po definiciji linearno nezavisian skup, slijedi da je matrica  $(u, v, x)$  punog ranga (tj. regularna je), što povlači da je  $\det(u, v, x) \neq 0$ . Time smo dobili kontradikciju. Obratno, pretpostavimo da je skup  $\{u, v\}$  linearno zavisian. Tada za svaki  $x \in \mathbb{R}_1^3$  vrijedi  $(u \times v) \cdot x = \det(u, v, x) = 0$  jer matrica  $(u, v, x)$  nije punog ranga. Iz toga zbog nedegeneriranosti pseudoskalarog produkta slijedi da je  $u \times v = 0$ .

7. Kako je  $\dim \mathbb{R}_1^3 = 3$  i skup  $\{u, v, u \times v\}$  se sastoji od tri vektora, taj skup će biti baza za  $\mathbb{R}_1^3$  ako i samo ako je linearno nezavisan. Imamo: skup  $\{u, v, u \times v\}$  je linearno nezavisan  $\Leftrightarrow$  matrica  $(u, v, u \times v)$  je punog ranga  $\Leftrightarrow (u \times v) \cdot (u \times v) = \det(u, v, u \times v) \neq 0 \Leftrightarrow u \times v \neq 0$  i nije svjetlosni.
8. Vektor  $(u \times v) \times w$  rastavimo u komponente u kanonskoj bazi za  $\mathbb{R}^3$  (pomoću formule (1.2)) i vektor s desne strane jednakosti također. Dobit ćemo da ta dva vektora imaju sve odgovarajuće komponente jednake, pa su jednaki.
9. Računamo koristeći 3. i 8.:

$$(u \times v) \cdot (u \times v) = ((u \times v) \times u) \cdot v = -(u \cdot u)v + (v \cdot u)u \cdot v = -(u \cdot u)(v \cdot v) + (u \cdot v)^2$$

□

**Napomena 1.1.14.** Iz svojstava 2., 4., 5. iz propozicije 1.1.13 slijedi da je vektorski produkt bilinearan. Vektorski produkt općenito nije asocijativan (to ne vrijedi ni u euklidskom prostoru). Primjer :  $(e_1 \times e_2) \times (e_1 + e_2) = e_2 - e_1 \neq e_2 = e_1 \times (e_2 \times (e_1 + e_2))$ .

U nastavku proučavamo svojstva ortonormiranih baza u prostoru Minkowskog.

**Definicija 1.1.15.** Za konačan skup  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}_1^3$  kažemo da je ortonormiran ako je  $a_i \perp a_j$  za sve  $i \neq j$  i vektor  $a_i$  je jedinični za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Napomena 1.1.16.** Svaki ortonormirani skup u  $\mathbb{R}_1^3$  je linearno nezavisan. Iz toga zbog  $\dim \mathbb{R}_1^3 = 3$  slijedi: ako je skup  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}_1^3$  ortonormiran, onda je  $n \leq 3$ . Posebno, ako je  $n = 3$ , onda je taj skup baza za  $\mathbb{R}_1^3$ . Takvu bazu zovemo ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Propozicija 1.1.17.** Svaka ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$  sastoji se od točno dva prostorna i jednog vremenskog vektora.

*Dokaz.* Neka je  $\{a_1, a_2, a_3\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada nijedan od vektora  $a_i$  nije svjetlosni jer su svi jedinični.

Pretpostavimo da su svi vektori  $a_i$  prostorni. Neka je  $x \in \mathbb{R}_1^3$ ,  $x \neq 0$  proizvoljan vektor. Tada postoje jedinstveni skalari  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  takvi da je  $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ . Iz toga slijedi:

$$x \cdot x = \alpha_1^2(a_1 \cdot a_1) + \alpha_2^2(a_2 \cdot a_2) + \alpha_3^2(a_3 \cdot a_3) = \alpha_1^2 \cdot 1 + \alpha_2^2 \cdot 1 + \alpha_3^2 \cdot 1 > 0$$

Nejednakost je stroga zbog  $x \neq 0$ . Iz toga slijedi da je svaki vektor  $x \in \mathbb{R}_1^3$ ,  $x \neq 0$  prostorni, što znamo da ne vrijedi (npr., vektor  $e_1$  nije prostorni). Time smo dobili kontradikciju. Analogno se pokaže da ne mogu svi vektori  $a_i$  biti vremenski.

Pretpostavimo da je vektor  $a_1$  prostorni i vektor  $a_2$  vremenski. Pokažimo da tada vektor  $a_3$  nužno mora biti prostorni. Prema propoziciji 1.1.13, 8. vrijedi:

$$(a_1 \times a_2) \times a_3 = -(a_1 \cdot a_3)a_2 + (a_2 \cdot a_3)a_1 = -0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 = 0$$

odakle po propoziciji 1.1.13, 6. slijedi da je vektor  $a_3$  kolinearan s vektorom  $a_1 \times a_2$ . Dakle, dovoljno je pokazati da je vektor  $a_1 \times a_2$  prostorni. No, to slijedi iz Lagrangeovog identiteta:

$$(a_1 \times a_2) \cdot (a_1 \times a_2) = -(a_1 \cdot a_1)(a_2 \cdot a_2) + (a_1 \cdot a_2)^2 = -1 \cdot (-1) + 0^2 = 1 > 0$$

□

**Lema 1.1.18.** *Ako je  $\{u, v\}$  ortonormirani skup u  $\mathbb{R}_1^3$ , onda je skup  $\{u, v, u \times v\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ .*

*Dokaz.* Iz napomene 1.1.16 slijedi da je dovoljno pokazati da je taj skup ortonormiran. Iz propozicije 1.1.13, 1. imamo da je  $u \times v \perp u, v$ . Nadalje, iz Lagrangeovog identiteta imamo da je  $(u \times v) \cdot (u \times v) = -(u \cdot u)(v \cdot v) + (u \cdot v)^2 = -(\pm 1)(\pm 1) + 0^2 = \pm 1 \Rightarrow \|u \times v\| = 1$ . □

**Propozicija 1.1.19.** *Neka je  $v \in \mathbb{R}_1^3$  jedinični vektor. Tada se skup  $\{v\}$  može nadopuniti do ortonormirane baze za  $\mathbb{R}_1^3$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je vektor  $v$  prostorni. Neka je  $w \in \mathbb{R}_1^3$  bilo koji jedinični vremenski vektor (npr.  $w = e_1$ ). Ako je  $w \perp v$ , onda iz leme 1.1.18 imamo da je skup  $\{v, w, v \times w\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$  i to je traženo nadopunjenje.

Pretpostavimo da  $w$  i  $v$  nisu okomiti, tj.  $w \cdot v \neq 0$ . Stavimo  $\tilde{u} := v + \lambda w$  za neki  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tada imamo:  $\tilde{u} \cdot v = v \cdot v + \lambda(w \cdot v) = 1 + \lambda(w \cdot v)$ . Iz toga vidimo da ako odaberemo  $\lambda := -\frac{1}{w \cdot v}$ , bit će  $\tilde{u} \cdot v = 0 \Rightarrow \tilde{u} \perp v$ . Uočimo da je  $\tilde{u} \neq 0$ . Naime, kako je  $\lambda \neq 0$ , iz  $\tilde{u} = 0$  imamo da je  $w = -\frac{1}{\lambda}v$ , odakle slijedi da je vektor  $w$  prostorni, što je kontradikcija. I onda stavimo  $u := \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ . Tada je vektor  $u$  jedinični i  $u \perp v$ , pa opet iz leme 1.1.18 dobivamo da je skup  $\{v, u, u \times v\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ .

Analognu konstrukciju napravimo ako je vektor  $v$  vremenski (vektor  $v$  ne može biti svjetlosni jer je jedinični). □

**Lema 1.1.20.** *Neka je  $v \in \mathbb{R}_1^3$  vremenski vektor. Ako je  $w \in \mathbb{R}_1^3$  vektor okomit na vektor  $v$ , onda je vektor  $w$  prostorni.*

*Dokaz.* Stavimo  $v' := \frac{v}{\|v\|}$ . Tada je  $v'$  jedinični vremenski vektor. Prema propoziciji 1.1.19, skup  $\{v'\}$  može se nadopuniti do ortonormirane baze  $\{v', u_1, u_2\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$ . Zatim iz propozicije 1.1.17 slijedi da su vektori  $u_1$  i  $u_2$  prostorni. Nadalje, postoje jedinstveni skalari  $\beta, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  takvi da je  $w = \beta v' + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ . Ako tu jednakost pomnožimo skalarno s vektorom  $v'$ , dobivamo:  $w \cdot v' = \beta(v' \cdot v') + \alpha_1(u_1 \cdot v') + \alpha_2(u_2 \cdot v') \Rightarrow 0 = \beta \cdot (-1) + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0$

$\Rightarrow \beta = 0$ . Dakle,  $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow w \cdot w = \alpha_1^2(u_1 \cdot u_1) + 2\alpha_1\alpha_2(u_1 \cdot u_2) + \alpha_2^2(u_2 \cdot u_2) = \alpha_1^2 \cdot 1 + 2\alpha_1\alpha_2 \cdot 0 + \alpha_2^2 \cdot 1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geq 0$ . Pri tome se jednakost postiže ako i samo ako je  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$ . Dakle, vektor  $w$  je po definiciji prostorni.  $\square$

**Napomena 1.1.21.** Neka su  $v, w \in \mathbb{R}_1^3$  svjetlosni vektori. Ako su vektori  $v$  i  $w$  kolinearni, onda je  $v \perp w$ . Naime, tada postoji skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je  $v = \lambda w$  (kako je vektor  $w$  svjetlosni, slijedi da je  $w \neq 0$ ). I onda imamo:  $v \cdot w = \lambda(v \cdot v) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow v \perp w$ .

Prema [13], vrijedi i obrat (nećemo dokazivati). Naime, ako je  $v \perp w$ , onda za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vrijedi  $(\alpha v + \beta w) \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha^2(v \cdot v) + 2\alpha\beta(v \cdot w) + \beta^2(w \cdot w) = \alpha^2 \cdot 0 + 2\alpha\beta \cdot 0 + \beta^2 \cdot 0 = 0$ , tj. vektor  $\alpha v + \beta w$  je svjetlosni (ili nulvektor). Kada vektori  $v$  i  $w$  ne bi bili kolinearni, onda bi oni razapinjali potprostor dimenzije 2 koji se sastoji samo od svjetlosnih vektora i 0. Međutim, takav potprostor u prostoru Minkowskog ne postoji. Intuitivno je jasno da ravnina ne može biti podskup svjetlosnog stošca (te pojmove ćemo definirati u idućoj točki).

Za kraj ove točke ćemo definirati različite tipove potprostora prostora Minkowskog i proučiti njihova svojstva.

**Definicija 1.1.22.** Za potprostor  $W \leq \mathbb{R}_1^3$  kažemo da je

1. prostorni ako je svaki vektor  $x \in W$  prostorni,
2. vremenski ako sadrži neki vremenski vektor,
3. svjetlosni ako sadrži neki svjetlosni vektor, ali ne sadrži vremenski vektor,

**Napomena 1.1.23.** 1. Potprostor  $W = \mathbb{R}_1^3$  je vremenski jer sadrži vremenski vektor (npr.  $e_1$ ). Potprostor  $W = \{0\}$  je prostorni jer je 0 po definiciji prostorni vektor.

2. Ako je  $\dim W = 1$ , onda je  $W$  prostorni (vremenski, svjetlosni) potprostor ako i samo ako sadrži prostorni različit od 0 (vremenski, svjetlosni) vektor i tada je svaki vektor  $x \in W$ ,  $x \neq 0$  prostorni (vremenski, svjetlosni).

**Propozicija 1.1.24.** Neka je  $W \leq \mathbb{R}_1^3$  dvodimenzionalni vremenski potprostor. Tada  $W$  sadrži prostorni vektor različit od nulvektora i dva linearno nezavisna svjetlosna vektora.

*Dokaz.* Kako je  $W$  vremenski,  $W$  po definiciji sadrži neki vremenski vektor  $v$ . Tada je posebno  $v \neq 0$ , pa se skup  $\{v\}$  može nadopuniti do neke baze  $\{v, w\}$  za  $W$ . Promotrimo vektor  $w' := -\frac{v \cdot w}{v \cdot v}v + w \in W$  (ovo je dobro definirano zbog  $v \cdot v < 0$ ). Za taj vektor vrijedi:  $w' \cdot v = -\frac{v \cdot w}{v \cdot v}(v \cdot v) + w \cdot v = 0 \Rightarrow w' \perp v$ . No, onda iz leme 1.1.20 slijedi da je vektor  $w'$  prostorni. Nadalje, mora biti  $w' \neq 0$  jer bi u suprotnom slijedilo da je skup  $\{v, w\}$  linearno zavisna, što ne može biti jer je taj skup baza za  $W$ .

Pokažimo sada da  $W$  sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora. Iz propozicije

1.1.13, 1. slijedi da je  $v \times w \perp v$ , pa iz leme 1.1.20 slijedi da je vektor  $v \times w$  prostorni. Za  $\alpha \in \mathbb{R}$  promotrimo vektor  $x := \alpha v + w \in W$ . Za taj vektor vrijedi:  $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow \alpha^2(v \cdot v) + 2\alpha(v \cdot w) + w \cdot w = 0$ . Budući da je vektor  $v$  vremenski, imamo da je  $v \cdot v \neq 0$ , pa smo dobili kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom  $\alpha$ . Njena diskriminanta je  $D = (2(v \cdot w))^2 - 4(v \cdot v)(w \cdot w) = 4((v \times w) \cdot (v \times w)) > 0$  (ovdje smo primijenili Lagrangeov identitet), odakle slijedi da jednadžba ima dva različita realna rješenja  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Stavimo  $x_{1,2} := \alpha_{1,2}v + w$ . Mora biti  $x_{1,2} \neq 0$  jer bi u suprotnom skup  $\{v, w\}$  bio linearno zavisian. Iz jednadžbe onda slijedi da su vektori  $x_1$  i  $x_2$  svjetlosni. Pokažimo da su oni i linearno nezavisni. Neka su  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  proizvoljni skalari. Tada imamo:  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0 \Rightarrow \beta_1(\alpha_1 v + w) + \beta_2(\alpha_2 v + w) = 0 \Rightarrow (\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2)v + (\beta_1 + \beta_2)w = 0$ . Budući da je skup  $\{v, w\}$  linearno nezavisian, iz toga nužno slijedi da je  $\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 0$ . Iz  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  slijedi  $\beta_2 = -\beta_1$ , pa uvrštavanjem toga u  $\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = 0$  dobivamo  $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ . Iz toga zbog  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  nužno slijedi  $\beta_1 = 0$ . Onda je i  $\beta_2 = -\beta_1 = 0$ . Kako su  $\beta_1$  i  $\beta_2$  birani proizvoljno, skup  $\{x_1, x_2\}$  je po definiciji linearno nezavisian.  $\square$

**Definicija 1.1.25.** Neka je  $W \leq \mathbb{R}_1^3$  potprostor. Za pseudoskalarni produkt na  $\mathbb{R}_1^3$  kažemo da je degeneriran na  $W$  ako postoji vektor  $v \in W$ ,  $v \neq 0$  takav da je  $v \perp x$  za svaki  $x \in W$ . U suprotnom kažemo da je pseudoskalarni produkt nedegeneriran na  $W$ .

**Napomena 1.1.26.** Neka je  $W \leq \mathbb{R}_1^3$  potprostor. Tada je pseudoskalarni produkt degeneriran na  $W$  ako i samo ako je  $W$  svjetlosni potprostor.

**Propozicija 1.1.27.** Neka je  $W \leq \mathbb{R}_1^3$  potprostor.

1.  $W$  je prostorni ako i samo ako je  $W^\perp$  vremenski.
2.  $W$  je vremenski ako i samo ako je  $W^\perp$  prostorni.
3.  $W$  je svjetlosni ako i samo ako je  $W^\perp$  svjetlosni.

U prva dva slučaja je  $W \cap W^\perp = \{0\}$ , a u trećem je  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ .

*Dokaz.* 1. Ako je  $\dim W = 0 \Rightarrow W = \{0\}$ , onda je  $W^\perp = \mathbb{R}_1^3$ , pa tvrdnja očito vrijedi (napomena 1.1.23). Iz iste napomene slijedi da ne može biti  $\dim W = 3$ .

Pretpostavimo da je  $\dim W = 1$ .

Pretpostavimo da je  $W$  prostorni. Zbog  $\dim W = 1$  postoji vektor  $v \in W$ ,  $v \neq 0$ . Kako je vektor  $v$  prostorni, možemo ga normirati i onda iz propozicije 1.1.19 slijedi da se skup  $\{v\}$  može nadopuniti do ortonormirane baze  $\{v, u_1, u_2\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$ . No, tada zbog  $u_1, u_2 \perp v$  slijedi da su  $u_1, u_2 \in W^\perp$ . Iz propozicije 1.1.17 slijedi da je jedan od vektora  $u_1$  i  $u_2$  vremenski. Dakle,  $W^\perp$  sadrži vremenski vektor, pa je po definiciji vremenski.

Obratno, pretpostavimo da je  $W^\perp$  vremenski. Tada  $W^\perp$  po definiciji sadrži neki vremenski vektor  $v$ . Po definiciji ortogonalnog komplementa je  $x \perp v$  za svaki  $x \in W$ ,

pa iz leme 1.1.20 slijedi da je svaki vektor  $x \in W$  prostorni. Dakle,  $W$  je prostorni. Pretpostavimo da je  $\dim W = 2$ .

Pretpostavimo da je  $W$  prostorni. Neka je  $\{v, w\}$  bilo koja baza za  $W$ . Budući da su vektori  $v$  i  $w$  prostorni, možemo ih normirati i zatim stavimo  $w' := -(v \cdot w)v + w$ . Tada je  $w' \in W$  i  $v \cdot w' = -(v \cdot w)(v \cdot v) + v \cdot w = -(v \cdot w) \cdot 1 + v \cdot w = 0 \Rightarrow w' \perp v$ . Nadalje,  $w' \neq 0$  jer bi u suprotnom skup  $\{v, w\}$  bio linearno zavisian. Dakle, možemo normirati  $w'$  i tada je skup  $\{v, w'\}$  ortonormirana baza za  $W$ . Onda iz leme 1.1.18 slijedi da je skup  $\{v, w', v \times w'\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ . No, onda iz propozicije 1.1.17 slijedi da je vektor  $v \times w'$  vremenski. Kako je  $v \times w' \perp v, w'$ , slijedi da je  $v \times w' \in W^\perp$ . Dakle,  $W^\perp$  sadrži vremenski vektor, pa je vremenski. Obrat se dokazuje kao u slučaju  $\dim W = 1$ .

2. Ovo se dokazuje slično kao tvrdnja 1. (rastavi se na slučajeve po dimenziji).

3. Oba smjera slijede kontradikcijom iz 1. i 2.

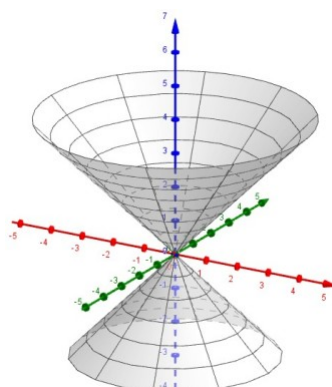
Pretpostavimo da je  $W$  prostorni ili vremenski. Pretpostavimo da je  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ . Tada postoji vektor  $x \in W \cap W^\perp$  takav da je  $x \neq 0$ . Tada iz  $x \in W$  i  $x \in W^\perp$  slijedi da je  $x \perp x$ , pa je vektor  $x$  po definiciji svjetlosni. No, to je nemoguće jer je  $x \in W$  i  $x \in W^\perp$ , a jedan od ta dva potprostora je u oba slučaja prostorni (prema 1. i 2.), odakle slijedi da je vektor  $x$  prostorni. Dakle, pretpostavka je pogrešna, mora biti  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .

Ako je  $W$  svjetlosni, onda sadrži neki svjetlosni vektor  $v$ . Tada je  $v \perp v$ , odakle slijedi da je  $v \in W^\perp$ . Dakle,  $v \in W \cap W^\perp$ . No, po definiciji je  $v \neq 0$ , pa slijedi da je  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ .  $\square$

## 1.2 Plohe u prostoru Minkowskog. Tangencijalna ravnina i normala

U prethodnoj točki smo prostor Minkowskog promatrali kao vektorski prostor (tj. kao algebarsku strukturu). Od sada ćemo elemente prostora  $\mathbb{R}_1^3$  zvati točkama. Skup svih svjetlosnih točaka zovemo svjetlosni stožac. Dio prostora omeđen svjetlosnim stošcem se sastoji od vremenskih točaka, a dio prostora izvan svjetlosnog stošca (uključujući ishodište) čine prostorne točke. U koordinatnom sustavu ćemo  $x$ -os označavati plavom bojom,  $y$ -os crvenom, a  $z$ -os zelenom bojom kao na slici.

U nastavku otvorenim skupom smatramo skup koji pripada euklidskoj topologiji na pripadnom prostoru. To napominjemo jer pseudometrika  $d$  na  $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$  također inducira topologiju na  $\mathbb{R}^3$ . Nadalje, glatkom funkcijom smatramo funkciju klase  $C^\infty$ . Do kraja ovog poglavlja ćemo izostavljati dokaze tvrdnji o plohama u prostoru Minkowskog koje se dokazuju potpuno analogno kao u euklidskom prostoru (vidi [14]). Naglasak će biti na tvrdnjama koje ovise o pseudoskalarnom produktu na  $\mathbb{R}_1^3$ , koji ima slabija svojstva od skalarnog produkta u euklidskom prostoru.



Slika 1.1: Svjetlosni stožac

**Definicija 1.2.1.** Neka je  $p \in \mathbb{R}_1^3$  točka i  $v \in \mathbb{R}_1^3$  vektor. Uređeni par  $(p, v)$  zovemo vektor u točki  $p$ .

**Napomena 1.2.2.** Skup svih vektora u točki  $p$  označavamo  $T_p\mathbb{R}_1^3$ . Na tom skupu definiramo:

1. zbrajanje vektora u točki:  $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ ,
2. množenje vektora u točki skalarom:  $\lambda(p, v) := (p, \lambda v)$ ,
3. pseudoskalarni produkt vektora u točki:  $(p, v) \cdot (p, w) := v \cdot w$ ,
4. vektorski produkt vektora u točki:  $(p, v) \times (p, w) := (p, v \times w)$ .

Uz tako definirane operacije  $T_p\mathbb{R}_1^3$  postaje realan vektorski prostor (izomorfan s  $\mathbb{R}_1^3$ ).

**Definicija 1.2.3.** Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}_1^3$  otvoren. Svaku funkciju  $X$  na  $U$  koja točki  $p \in U$  pridružuje neki vektor  $X(p) = (p, v(p)) \in T_p\mathbb{R}_1^3$  zovemo vektorsko polje na  $U$ . Za polje  $X$  kažemo da je glatko ako je funkcija  $p \mapsto v(p)$  glatka.

**Definicija 1.2.4.** Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}_1^3$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija i  $c \in \mathbb{R}$ . Skup  $f^{-1}(c) := \{p \in A : f(p) = c\}$  zovemo nivo-skup funkcije  $f$  na visini  $c$ .

**Definicija 1.2.5.** Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}_1^3$  otvoren i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^1$ . Vektorsko polje  $\nabla f$  na  $U$  dano formulom  $\nabla f(p) := (p, -\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))$  zovemo gradijent funkcije  $f$ .

**Definicija 1.2.6.** Neprazan skup  $S \subseteq \mathbb{R}_1^3$  zovemo ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  ako postoji otvoreni skup  $U \subseteq \mathbb{R}_1^3$ , glatka funkcija  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  i  $c \in \mathbb{R}$  takvi da je  $S = f^{-1}(c)$ . Za točku  $p \in S$  kažemo da je regularna ako je  $\nabla f(p) \neq 0$ . U suprotnom kažemo da je točka  $p$  singularna. Za plohu

$S$  kažemo da je regularna ako je svaka točka  $p \in S$  regularna. U suprotnom kažemo da je ploha  $S$  singularna.

Za plohu iz definicije 1.2.6 kažemo da je zadana implicitno jednačbom  $f(x, y, z) = c$ .

**Definicija 1.2.7.** Svako glatko preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ , gdje je  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren, zovemo karta (parametrizacija, lokalne koordinate).

**Definicija 1.2.8.** Neprazan skup  $S \subseteq \mathbb{R}_1^3$  zovemo parametrizirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  ako za svaku točku  $p \in S$  postoje otvoreni skupovi  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  i  $V \subseteq \mathbb{R}_1^3$  te karta  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  takvi da je  $p \in V$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  je homeomorfizam. Za točku  $p = \mathbf{x}(u, v)$  kažemo da je regularna ako je operator  $D\mathbf{x}(u, v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\mathbb{R}_1^3$  injektivan.

**Napomena 1.2.9.** Homeomorfizam je neprekidna bijekcija čiji je inverz neprekidan. Uočimo da je u definiciji 1.2.8 dovoljno tražiti da  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  bude bijekcija. Naime, kako je  $\mathbf{x}$  po definiciji karte glatka, slijedi da je  $\mathbf{x}$  neprekidna. Nadalje, iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da je  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  također glatka (posebno, neprekidna).

**Napomena 1.2.10.** Ekvivalentno je:

1. operator  $D\mathbf{x}(u, v)$  je injektivan,
2. matrica  $\nabla\mathbf{x}(u, v)$  je punog ranga,
3.  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0$ , gdje su  $\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \in T_p\mathbb{R}_1^3$  vektori u točki  $p$  čiji su vektorski dijelovi stupci matrice  $\nabla\mathbf{x}(u, v)$ .

Pri tome ekvivalencija 2.  $\Leftrightarrow$  3. slijedi iz propozicije 1.1.13, 6.

**Teorem 1.2.11. (lokalna ekvivalencija implicitno i parametarski zadanih ploha)**

1. Neka je  $S = f^{-1}(c)$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Tada postoje otvoreni skupovi  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  i  $V \subseteq \mathbb{R}_1^3$  te karta  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  takvi da je  $p \in V$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  je homeomorfizam.
2. Neka je  $S$  parametrizirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Tada postoje otvoreni skupovi  $U, V \subseteq \mathbb{R}_1^3$ , glatka funkcija  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  i  $c \in \mathbb{R}$  takvi da je  $p \in V$  i  $V \cap S = f^{-1}(c)$ .

Ovaj teorem je posljedica teorema o inverznom preslikavanju. U nastavku uvodimo pojam tangencijalne ravnine i normale plohe te jediničnog normalnog polja.

**Definicija 1.2.12.** Svako glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval, zovemo parametrizirana krivulja u  $\mathbb{R}_1^3$ .



**Definicija 1.2.13.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  parametrizirana krivulja i  $t \in I$ . Tada vektor  $\dot{c}(t) := (c(t), c'(t)) \in T_{c(t)}\mathbb{R}_1^3$  zovemo tangencijalni vektor krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ .

**Definicija 1.2.14.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  krivulja i  $t_0 \in I$ . Za krivulju  $c$  kažemo da je prostorna (vremenska, svjetlosna) u točki  $c(t_0)$  ako je vektor  $\dot{c}(t_0)$  prostorni (vremenski, svjetlosni).

Ako je krivulja  $c$  prostorna (vremenska, svjetlosna) u svakoj svojoj točki, onda kraće kažemo da je  $c$  prostorna (vremenska, svjetlosna) krivulja. Svjetlosnu krivulju još zovemo nulkrivulja. Uočimo da je  $x$ -os vremenska krivulja, a  $y$ -os i  $z$ -os su prostorne krivulje.

**Definicija 1.2.15.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Za vektor  $v \in T_p\mathbb{R}_1^3$  kažemo da je tangencijalni vektor plohe  $S$  u točki  $p$  ako postoji parametrizirana krivulja  $c : I \rightarrow S$  i  $t_0 \in I$  takvi da je  $c(t_0) = p$  i  $\dot{c}(t_0) = v$ .

**Teorem 1.2.16.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Neka je  $T_pS$  skup svih tangencijalnih vektora plohe  $S$  u točki  $p$ . Tada je  $T_pS$  potprostor od  $T_p\mathbb{R}_1^3$  dimenzije 2.

**Definicija 1.2.17.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Prostor  $T_pS$  zovemo tangencijalna ravnina plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Napomena 1.2.18.** Ako je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$  oko točke  $p$  i  $p = \mathbf{x}(u, v)$ , onda je skup  $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$  baza za  $T_pS$  (to slijedi iz dokaza teorema 1.2.16).

**Teorem 1.2.19.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$  oko točke  $p$ . Stavimo  $p = \mathbf{x}(u, v)$ . Pretpostavimo da je vektor  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  prostorni ili vremenski. Tada je  $\dim T_pS^\perp = 1$ .

*Dokaz.* Kako je točka  $p$  regularna, iz napomene 1.2.10, 3. imamo da je  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0$ . Nadalje, iz napomene 1.2.18 i propozicije 1.1.13, 1. slijedi da je  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \in T_pS^\perp$ . Budući da  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$  nije svjetlosni ni nulvektor, iz propozicije 1.1.13, 7. slijedi da je skup  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\}$  baza za  $T_p\mathbb{R}_1^3$ . Neka je  $v \in T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}_1^3$  proizvoljan vektor. Tada postoje jedinstveni skalari  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  takvi da je  $v = \alpha\mathbf{x}_u + \beta\mathbf{x}_v + \gamma(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$ . Ako tu jednakost pomnožimo skalarno s  $\mathbf{x}_u$  i  $\mathbf{x}_v$ , dobivamo:

$$v \cdot \mathbf{x}_u = \alpha(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \beta(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) + \gamma((\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u)$$

$$v \cdot \mathbf{x}_v = \alpha(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + \beta(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) + \gamma((\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v)$$

Budući da je  $v \in T_pS^\perp$ , slijedi da je  $v \cdot \mathbf{x}_u = v \cdot \mathbf{x}_v = 0$ . Također imamo da je  $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = 0$  (propozicija 1.1.13, 1.). Time dobivamo:

$$0 = \alpha(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \beta(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u)$$

$$0 = \alpha(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + \beta(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)$$

Dobili smo homogen linearni sustav s nepoznicama  $\alpha$  i  $\beta$ . Ovakav sustav ima samo trivijalno rješenje ako i samo ako je matrica sustava  $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{bmatrix}$  regularna. No, kako vektor  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$  nije svjetlosni ni nulvektor, iz Lagrangeovog identiteta imamo da je

$$\det \mathbf{A} = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 = -(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \neq 0$$

što povlači da je matrica  $\mathbf{A}$  regularna. Dakle, mora biti  $\alpha = \beta = 0$ , odakle slijedi da je  $v = \gamma(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$ . Kako je  $v \in T_p S^\perp$  biran proizvoljno, slijedi da je  $T_p S^\perp$  jednodimenzionalan prostor s bazom  $\{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\}$ .  $\square$

**Definicija 1.2.20.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Za plohu  $S$  kažemo da je

1. prostorna u točki  $p$  ako je potprostor  $T_p S$  prostorni,
2. vremenska (Lorentzova) u točki  $p$  ako je potprostor  $T_p S$  vremenski,
3. svjetlosna (izotropna) u točki  $p$  ako je potprostor  $T_p S$  svjetlosni.

Ako je ploha  $S$  prostorna (vremenska, svjetlosna) u svakoj svojoj točki, onda kraće kažemo da je  $S$  prostorna (vremenska, svjetlosna) ploha.

**Propozicija 1.2.21.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$  oko točke  $p$  i  $p = \mathbf{x}(u, v)$ .

1. Ploha  $S$  je prostorna u točki  $p$  ako i samo ako je vektor  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  vremenski.
2. Ploha  $S$  je vremenska u točki  $p$  ako i samo ako je vektor  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  prostorni.
3. Ploha  $S$  je svjetlosna u točki  $p$  ako i samo ako je vektor  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  svjetlosni.

*Dokaz.* Stavimo  $w := \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$ . Budući da je točka  $p$  regularna, iz napomene 1.2.10 slijedi da je  $w \neq 0$ , a iz teorema 1.2.16 slijedi da je  $\dim T_p S = 2$ .

1. Pretpostavimo da je ploha  $S$  prostorna u točki  $p$ . Tada je potprostor  $T_p S$  po definiciji prostorni. Iz propozicije 1.1.27, 1. slijedi da je potprostor  $T_p S^\perp$  vremenski, pa sadrži neki vremenski vektor  $v$ . Pretpostavimo suprotno, da vektor  $w$  nije vremenski. Tada je, zbog  $w \neq 0$ , skup  $\{v, w\}$  linearno nezavisan. Budući da su  $v, w \in T_p S^\perp$ , slijedi da je  $\dim T_p S^\perp \geq 2$ . Onda primjenom Grassmannove formule i činjenice da je  $T_p S + T_p S^\perp \leq \mathbb{R}_1^3$  dobivamo:  $3 = \dim \mathbb{R}_1^3 \geq \dim(T_p S + T_p S^\perp) = \dim T_p S + \dim T_p S^\perp - \dim(T_p S \cap T_p S^\perp) \geq 2 + 2 - \dim(T_p S \cap T_p S^\perp) \Rightarrow \dim(T_p S \cap T_p S^\perp) \geq 1 \Rightarrow T_p S \cap T_p S^\perp \neq \{0\}$ , što je u kontradikciji s propozicijom 1.1.27. Dakle, pretpostavka je pogrešna, vektor  $w$  mora biti vremenski.

Obratno, pretpostavimo da je vektor  $w$  vremenski. Budući da je  $w \in T_p S$ , imamo da potprostor  $T_p S$  sadrži neki vremenski vektor, pa je po definiciji vremenski. No, onda iz propozicije 1.1.27, 1. slijedi da je  $T_p S$  prostorni.

2. Pretpostavimo da je ploha  $S$  vremenska u točki  $p$ . Tada je potprostor  $T_p S$  po definiciji vremenski, pa iz propozicije 1.1.27, 2. slijedi da je  $T_p S^\perp$  prostorni. No, kako je  $w \in T_p S^\perp$ , iz definicije prostornog potprostora onda slijedi da je vektor  $w$  prostorni. Obratno, pretpostavimo da je vektor  $w$  prostorni. Tada iz teorema 1.2.19 slijedi da je  $\dim T_p S^\perp = 1$ . No, kako je  $w \in T_p S^\perp$  i  $w \neq 0$ , slijedi da je svaki vektor iz  $T_p S^\perp$  prostorni (jer su svi kolinearni s vektorom  $w$ ). Dakle, potprostor  $T_p S^\perp$  je po definiciji prostorni, pa iz propozicije 1.1.27, 2. slijedi da je  $T_p S$  vremenski.
3. Oba smjera slijede kontradikcijom iz 1. i 2.

□

**Napomena 1.2.22.** Ako je točka  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$  regularna i vektor  $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$  prostorni ili vremenski, onda ga možemo normirati. Tada vektor  $n := \pm \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \in T_p S^\perp$  zovemo jedinični normalni vektor (jedinična normala) plohe  $S$  u točki  $p$ . Iz teorema 1.2.19 i propozicije 1.2.21 slijedi da je  $\dim T_p S^\perp = 1$ , odakle slijedi da je taj vektor jedinstven do na orijentaciju. Općenito, vektor  $v \in T_p S^\perp$  zovemo normalni vektor.

**Definicija 1.2.23.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Pretpostavimo da je ploha  $S$  prostorna ili vremenska u točki  $p$ . Tada prostor (tj. pravac)  $T_p S^\perp$  zovemo normala plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Propozicija 1.2.24.** Neka je  $S = f^{-1}(c)$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Tada je  $\nabla f(p) \perp T_p S$ .

*Dokaz.* Neka je  $v \in T_p S$  proizvoljan vektor. Tada po definiciji postoji parametrizirana krivulja  $\alpha : I \rightarrow S$  i  $t_0 \in I$  takvi da je  $\alpha(t_0) = p$  i  $\dot{\alpha}(t_0) = v$ . Budući da krivulja  $\alpha$  leži na plohi  $S$ , njene točke zadovoljavaju jednadžbu plohe, tj. vrijedi:  $f(\alpha(t)) = c$  za sve  $t \in I$ . Deriviranjem te jednakosti i korištenjem lančanog pravila dobivamo:  $\nabla f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$  za sve  $t \in I$  (zbog definicije 1.2.5, skalarni produkt koji se ovdje pojavljuje je pseudoskalarni produkt prostora Minkowskog). To posebno vrijedi za  $t = t_0$ , tj. vrijedi:  $\nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(p) \cdot v = 0 \Rightarrow \nabla f(p) \perp v$ . □

**Napomena 1.2.25.** Neka je  $S = f^{-1}(c)$  implicitno zadana ploha i  $p \in S$  regularna točka.

1. Iz propozicije 1.2.24 slijedi: ploha  $S$  je prostorna (vremenska, svjetlosna) u točki  $p$  ako i samo ako je vektor  $\nabla f(p)$  prostorni (vremenski, svjetlosni). To se dokazuje analogno kao propozicija 1.2.21.
2. Ako je ploha  $S$  prostorna ili vremenska u točki  $p$ , onda je jedinična normala plohe  $S$  u točki  $p$  dana formulom  $n(p) = \pm \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ .

**Definicija 1.2.26.** Neka je  $S$  prostorna ili vremenska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Vektorsko polje  $n$  na  $S$  koje svakoj točki  $p \in S$  pridružuje neku jediničnu normalu  $n(p)$  plohe  $S$  u točki  $p$  zovemo jedinično normalno polje plohe  $S$ . Za plohu  $S$  kažemo da je orijentabilna ako postoji glatko jedinično normalno polje  $n$  plohe  $S$ . Tada uređeni par  $(S, n)$  zovemo orijentirana ploha.

**Napomena 1.2.27.** Može se dokazati (vidi [17]) da svaka orijentabilna ploha  $S$  povezana putevima ima točno dva glatka jedinična normalna polja  $n_1$  i  $n_2$  te da za njih vrijedi:  $n_2 = -n_1$ . Ta polja intuitivno zovemo unutarnje i vanjsko jedinično normalno polje plohe  $S$ .

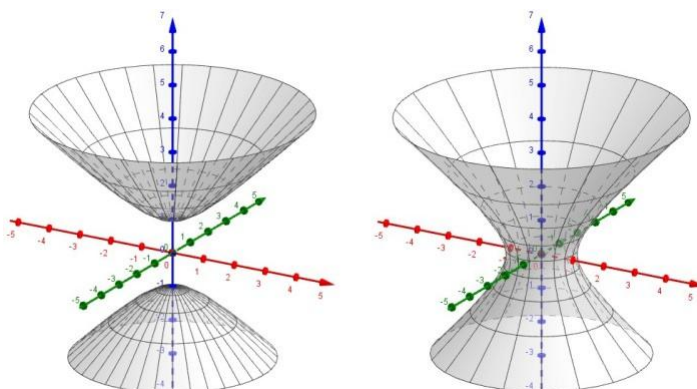
**Primjer 1.2.28.** Neka su  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  takvi da je  $(A, B, C) \neq 0$ . Plohu  $S$  u  $\mathbb{R}_1^3$  danu implicitno jednačbom  $Ax + By + Cz + D = 0$  zovemo ravnina u  $\mathbb{R}_1^3$ . Ravnina je regularna ploha jer za funkciju  $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$  vrijedi  $\nabla f(p) = (p, -A, B, C) \neq 0$  za sve  $p \in \mathbb{R}_1^3$ . Iz toga još slijedi: ravnina  $S$  je prostorna (vremenska, svjetlosna) u svakoj točki  $p \in S$  ako i samo ako je  $-A^2 + B^2 + C^2 > 0$  ( $< 0, = 0$ ).

Ravnina se općenito može parametrizirati jednom kartom  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = L(u, v) + p$ , gdje je  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linearan operator i  $p \in S$  bilo koja točka. Ravnina spada u tzv. jednostavne plohe. To su plohe koje se čitave mogu pokriti samo jednom kartom (tj. imaju globalnu parametrizaciju).

**Primjer 1.2.29.** Neka je  $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}_1^3$  točka i  $r > 0$ . Svaku od ploha  $S_1, S_2, S_3$  danih redom jednačbama

$$\begin{aligned} -(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 &= r^2 \\ -(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 &= 0 \\ -(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 &= -r^2 \end{aligned}$$

zovemo sfera sa središtem u točki  $q$  polumjera  $r$ , odnosno 0. Možemo bez smanjenja općenitosti uzeti da je  $q = 0$ . Za funkciju  $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$  vrijedi:  $\nabla f(p) = (p, 2x, 2y, 2z)$  za sve  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ . Iz toga imamo:  $\nabla f(p) = 0 \Leftrightarrow (2x, 2y, 2z) = 0 \Leftrightarrow p = (x, y, z) = 0$ . Time dobivamo da su sfere  $S_1$  i  $S_3$  regularne plohe (jer je  $0 \notin S_1, S_3$ ). Sfera  $S_2$  (tj. svjetlosni stožac) ima singularnu točku u ishodištu, a ostale točke su joj regularne. Nadalje, imamo:  $\nabla f(p) \cdot \nabla f(p) = 4(-x^2 + y^2 + z^2)$ . Dakle, za sferu  $S_1$  imamo da je  $\nabla f(p) \cdot \nabla f(p) = 4r^2 > 0$ , pa je sfera  $S_1$  vremenska u svakoj točki  $p \in S_1$ . Analogno, sfera  $S_2$  je svjetlosna u svakoj točki  $p \in S_2 \setminus \{0\}$ , a sfera  $S_3$  je prostorna u svakoj točki  $p \in S_3$ . Svaka sfera u prostoru Minkowskog se može pokriti jednom kartom koja nije globalno injektivna (vidi parametrizaciju jednoplošnog hiperboloida, stošca i dvoplošnog hiperboloida u [14]).



Slika 1.2: Jedinična prostorna i vremenska sfera

Za sve pojmove koji su ovdje uvedeni (regularne i singularne točke, tangencijalna ravnina, normala...) može se pokazati da ne ovise o izboru parametrizacije  $x$  plohe  $S$  ili funkcije  $f$  ako je ploha  $S$  zadana implicitno. To se dokazuje pomoću tzv. funkcija prijelaza i time se ovdje nećemo baviti. Dakle, radi se o pojmovima koji su vezani uz samu plohu  $S$ , tj. o geometrijskim pojmovima. Isto vrijedi za pojmove koje uvodimo u ostatku ovog poglavlja.

### 1.3 Operator oblika plohe. Prva i druga fundamentalna forma

**Napomena 1.3.1.** Neka je  $S$  regularna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $X$  vektorsko polje na  $S$  klase  $C^1$ ,  $p \in S$  točka i  $v \in T_p S$  vektor. Derivacija polja  $X$  u točki  $p$  u smjeru vektora  $v$  je vektor  $D_v X(p) \in T_p \mathbb{R}_1^3$  dan formulom  $D_v X(p) := (\frac{d}{dt} X(c(t)))_{t=t_0}$ , gdje je  $c : I \rightarrow S$  krivulja i  $t_0 \in I$  takvi da je  $c(t_0) = p$  i  $\dot{c}(t_0) = v$  (takva krivulja postoji po definiciji tangencijalnog vektora). Ta definicija je dobra, tj. ne ovisi o izboru krivulje  $c$ . Naime, primjenom lančanog pravila dobivamo:  $D_v X(p) = DX(c(t_0))\dot{c}(t_0) = DX(p)v = \nabla X(p)v$ . Pri tome je  $\nabla X(p)$  Jacobijeva matrica polja  $X$  u točki  $p$ .

**Lema 1.3.2.** (Leibnizovo pravilo) Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren i  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  funkcije klase  $C^1$ . Tada je  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$  i  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \times g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}$  za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Dokaz.* Stavimo  $f = (f_1, f_2, f_3)$  i  $g = (g_1, g_2, g_3)$ . Računamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial x_i}(-f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 g_1) + \frac{\partial}{\partial x_i}(f_2 g_2) + \frac{\partial}{\partial x_i}(f_3 g_3)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_1 - f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_2 + f_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_3 + f_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_i} \\
&= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_3\right) + \left(-f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + f_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + f_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_i}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right) \cdot (g_1, g_2, g_3) + (f_1, f_2, f_3) \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \frac{\partial g_2}{\partial x_i}, \frac{\partial g_3}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

U računu smo koristili Leibnizovo pravilo za realne funkcije. Formula za vektorski produkt se dokazuje analogno, tu koristimo relaciju (1.2).  $\square$

**Napomena 1.3.3.** Ako kartu  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  deriviramo po  $u$  ili  $v$ , onda vrijedi Leibnizovo pravilo. To slijedi iz leme 1.3.2 za  $n = 2$ . Ako vektorsko polje  $X$  deriviramo u smjeru vektora  $v \in T_p S$ , onda također vrijedi Leibnizovo pravilo. Naime, po definiciji je  $D_v X(p) := \left(\frac{d}{dt} W(c(t))\right)_{t=t_0}$ , pa primijenimo lemu 1.3.2 na funkciju  $n \circ c$  (ovdje je  $n = 1$ ).

**Definicija 1.3.4.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Preslikavanje  $S_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}_1^3$  dano formulom  $S_p(v) := -D_v n(p)$  zovemo operator oblika plohe (Weingartenovo preslikavanje) plohe  $S$  u točki  $p$ .

Zbog leme 1.3.2 dokazi rezultata koji slijede su analogni kao u euklidskom prostoru.

**Propozicija 1.3.5.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka.

1. Operator  $S_p$  je linearan.
2. Za svaki  $v \in T_p S$  je  $S_p(v) \in T_p S$ .

Zbog propozicije 1.3.5 operator oblika plohe možemo promatrati kao linearni operator  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$ .

**Propozicija 1.3.6.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Tada je operator  $S_p$  simetričan (samoadjungiran), tj. za sve  $v, w \in T_p S$  vrijedi:  $S_p(v) \cdot w = v \cdot S_p(w)$ .

Dokaz propozicije 1.3.6 se temelji na Schwarzovom teoremu za  $C^2$ -funkcije.

**Propozicija 1.3.7.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $c : I \rightarrow S$  krivulja. Tada za svaki  $t \in I$  vrijedi:  $S_{c(t)}(\dot{c}(t)) = -(n \circ c)'(t)$ .

**Primjer 1.3.8.** 1. Za ravninu  $Ax + By + Cz + D = 0$  je  $S_p = 0$  (nuloperator) u svakoj točki  $p$  ravnine.

2. Ako je  $r > 0$ , onda za sferu  $-x^2 + y^2 + z^2 = \pm r^2$  vrijedi  $S_p = \pm \frac{1}{r} I$ . Predznak ovisi o izabranoj orijentaciji sfere.

### 1.3. OPERATOR OBLIKA PLOHE. PRVA I DRUGA FUNDAMENTALNA FORMA 19

**Napomena 1.3.9.** Neka je  $V \neq \{0\}$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$ . Svako bilinearno preslikavanje  $B : V \times V \rightarrow K$  zovemo bilinearna forma. Ako je forma  $B$  simetrična ( $B(v, w) = B(w, v)$ ), onda joj pridružujemo kvadratnu formu  $Q : V \rightarrow K$  danu formulom  $Q(v) := B(v, v)$ . (Općenito, kvadratna forma je svaki homogeni polinom stupnja 2 iz  $K[x]$ .) Neka je  $e = (e_1, \dots, e_n)$  uređena baza za  $V$ . Matricu  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ , gdje je  $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ , zovemo matricni prikaz forme  $B$  u bazi  $e$ . Za  $v, w \in V$ ,  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$  je  $B(v, w) = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$ . Forma  $B$  je simetrična ako i samo ako je matrica  $\mathbf{B}$  simetrična.

**Definicija 1.3.10.** Neka je  $V \neq \{0\}$  konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem  $K$ . Za kvadratnu formu  $Q : V \rightarrow K$  kažemo da je

1. pozitivno (negativno) semidefinitna ako je  $Q(v) \geq 0$  ( $Q(v) \leq 0$ ) za sve  $v \in V$ ,
2. pozitivno (negativno) definitna ako je  $Q(v) > 0$  ( $Q(v) < 0$ ) za sve  $v \in V \setminus \{0\}$ ,
3. indefinitna ako nije pozitivno ni negativno semidefinitna.

**Definicija 1.3.11.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka. Preslikavanje  $I : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dano formulom  $I(v, w) := v \cdot w$  zovemo prva fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Napomena 1.3.12.** Budući da je pseudoskalarni produkt na  $\mathbb{R}_1^3$  simetričan i bilinearan, slijedi da je  $I$  simetrična bilinearna forma. Pripadnu kvadratnu formu  $I(v) := v \cdot v$  također zovemo prva fundamentalna forma.

**Propozicija 1.3.13.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  regularna točka.

1. Ploha  $S$  je prostorna u točki  $p$  ako i samo ako je forma  $I$  pozitivno definitna.
2. Ploha  $S$  je vremenska u točki  $p$  ako i samo ako je forma  $I$  indefinitna.
3. Ploha  $S$  je svjetlosna u točki  $p$  ako i samo ako je forma  $I$  pozitivno semidefinitna i nije pozitivno definitna.

*Dokaz.* Tvrdnje 1. i 3. su trivijalne, a tvrdnja 2. slijedi iz propozicije 1.1.24 (naime, kako je točka  $p$  regularna, po teoremu 1.2.16 je  $\dim T_p S = 2$ ).  $\square$

**Definicija 1.3.14.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Funkcije  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  dane formulama  $E := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $F := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ ,  $G := \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$  zovemo fundamentalne veličine prvog reda plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x}$ .

**Napomena 1.3.15.** Ako je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $p \in S$  regularna točka,  $\mathbf{x}$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$  oko točke  $p$  i  $p = \mathbf{x}(u, v)$ , onda je matični prikaz prve fundamentalne forme plohe  $S$  u točki  $p$  u bazi  $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$  matrica  $\begin{bmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{bmatrix}$ . To slijedi iz napomene 1.3.9.

**Definicija 1.3.16.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Preslikavanje  $II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dano formulom  $II(v, w) := S_p(v) \cdot w$  zovemo druga fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p$ .

**Napomena 1.3.17.** Iz propozicije 1.3.5 slijedi da je  $II$  bilinearно preslikavanje, a iz propozicije 1.3.6 slijedi da je  $II$  simetrično preslikavanje. Dakle, druga fundamentalna forma je također simetrična bilinearна forma. Pripadnu kvadratnu formu  $II(v) := S_p(v) \cdot v$  također zovemo druga fundamentalna forma.

**Definicija 1.3.18.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Funkcije  $L, M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$  dane formulama  $L := S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $M := S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v$ ,  $N := S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v$  zovemo fundamentalne veličine drugog reda plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x}$ .

**Napomena 1.3.19.** Ako je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $p \in S$  točka,  $\mathbf{x}$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$  oko točke  $p$  i  $p = \mathbf{x}(u, v)$ , onda je matični prikaz druge fundamentalne forme plohe  $S$  u točki  $p$  u bazi  $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$  matrica  $\begin{bmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{bmatrix}$ .

**Lema 1.3.20.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada je  $L = \mathbf{x}_{uu} \cdot (n \circ \mathbf{x})$ ,  $M = \mathbf{x}_{uv} \cdot (n \circ \mathbf{x})$ ,  $N = \mathbf{x}_{vv} \cdot (n \circ \mathbf{x})$ .

**Definicija 1.3.21.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada preslikavanje  $g : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , koje paru  $(u, v) \in U$  pridružuje vektorski dio vektora  $n(\mathbf{x}(u, v)) \in T_p S^\perp$ , zovemo Gaussovo preslikavanje plohe  $S$ .

**Napomena 1.3.22.** 1. Neka je  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$  točka. Deriviranjem jednakosti  $g \cdot g = \pm 1$  po  $u$  i po  $v$  te korištenjem Leibnizovog pravila dobivamo da je  $g_u, g_v \perp n \circ \mathbf{x}$ , odakle slijedi da je  $g_u(u, v), g_v(u, v) \in T_p S$ . Posebno, vektori  $g_u(u, v)$  i  $g_v(u, v)$  su linearne kombinacije vektora  $\mathbf{x}_u(u, v)$  i  $\mathbf{x}_v(u, v)$ .

2. Kako je polje  $n$  jedinično, slika preslikavanja  $g$  je podskup jedinične sfere u  $\mathbb{R}_1^3$  sa središtem u ishodištu (vremenske ako je ploha  $S$  prostorna, a prostorne ako je ploha  $S$  vremenska jer je vektor  $g_u(u, v) \times g_v(u, v)$  kolinearан s vektorom  $n(\mathbf{x})(u, v)$ ).



### 1.3. OPERATOR OBLIKA PLOHE. PRVA I DRUGA FUNDAMENTALNA FORMA 21

**Teorem 1.3.23. (Weingartenove formule)** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada je

$$g_u = \frac{MF - LG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

$$g_v = \frac{NF - MG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{MF - NE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

**Definicija 1.3.24.** Neka je  $S$  prostorna (vremenska) ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za kartu  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  kažemo da je konformna ako je  $E = G$  ( $E = -G$ ) i  $F = 0$ .

**Napomena 1.3.25.** Iz napomene 1.3.15 slijedi da je uvjet iz definicije konformne karte ekvivalentan s time da je za svaku točku  $p = \mathbf{x}(u, v) \in \mathbf{x}(U) \subseteq S$  matricni prikaz forme  $I$  plohe  $S$  u točki  $p$  u bazi  $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$  matrica oblika  $\lambda(u, v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$  za neki  $\lambda(u, v) \in \mathbb{R}$  (predznak ovisi o tome je li ploha  $S$  prostorna ili vremenska). Funkciju  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo konformni faktor karte  $\mathbf{x}$ .

Za kraj ove točke ćemo navesti da se svaka prostorna ili vremenska ploha  $S$  u  $\mathbb{R}_1^3$  može lokalno parametrizirati konformnom kartom. Taj rezultat će nam trebati za izvod Weierstrassove reprezentacijske formule. Napraviti ćemo skicu dokaza, tj. opis konstrukcije te karte u slučaju kad je ploha  $S$  vremenska. Pri tome ćemo, radi jednostavnosti, neke tvrdnje u konstrukciji navesti bez dokaza.

**Teorem 1.3.26.** Neka je  $S$  vremenska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada za svaku točku  $p \in S$  postoji otvoreni skup  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  i konformna karta  $\mathbf{x} : W \rightarrow S$  takva da je  $p \in \mathbf{x}(W)$ . Nadalje, može se dodatno postići da za reparametrizaciju  $\hat{\mathbf{x}} : \hat{W} \rightarrow S$  karte  $\mathbf{x}$  danu formulom  $\hat{\mathbf{x}}(s, t) = \mathbf{x}\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{-u+v}{\sqrt{2}}\right)$  vrijedi da su vektori  $\hat{\mathbf{x}}_s(s, t)$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t(s, t)$  svjetlosni za sve  $(s, t) \in \hat{W}$ .

*Dokaz.* Neka je  $p \in S$  točka. Budući da je potprostor  $T_p S$  vremenski, prema propoziciji 1.1.24, u  $T_p S$  postoje dva linearno nezavisna svjetlosna vektora  $a$  i  $b$ . Možemo dodatno pretpostaviti da je  $a \cdot b = 1$ . Naime, iz napomene 1.1.21 slijedi da je  $a \cdot b \neq 0$ , pa vektor  $a$  možemo zamijeniti kolinearnim vektorom  $a' := \frac{a}{a \cdot b}$  i tada je  $a' \cdot b = \frac{1}{a \cdot b}(a \cdot b) = 1$ . Promotrimo vektore  $x := \frac{a+b}{\sqrt{2}} \in T_p S$  i  $y := \frac{-a+b}{\sqrt{2}} \in T_p S$ . Skup  $\{x, y\}$  je ortonormirana baza za  $T_p S$ . Zaista, imamo:  $x \cdot x = \frac{1}{2}(a \cdot a + 2(a \cdot b) + b \cdot b) = \frac{1}{2}(0 + 2 \cdot 1 + 0) = 1$  i slično  $y \cdot y = -1$ ,  $x \cdot y = 0$ . Pomoću Gram-Schmidtovog postupka ortonormiranja može se dokazati da tada postoje glatka vektorska polja  $X$  i  $Y$  na nekoj okolini točke  $p$  takva da je skup  $\{X(q), Y(q)\}$  ortonormirana baza za  $T_q S$  za svaku točku  $q$  i da je  $X(p) = x$ ,  $Y(p) = y$ . Tada su vektorska polja  $U$  i  $V$ , dana formulama  $U := \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$  i  $V := \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ , svjetlosna. Naime,  $U(q) \cdot U(q) = \frac{1}{2}(X(q) \cdot X(q) - 2(X(q) \cdot Y(q)) + Y(q) \cdot Y(q)) = \frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 0 - 1) = 0$  i slično  $Y(q) \cdot Y(q) = 0$ . Nadalje, može se dokazati da postoji karta  $\hat{\mathbf{x}} : \hat{W} \rightarrow S$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(s, t)$

takva da je  $\hat{\mathbf{x}}_s(s, t) = U(\hat{\mathbf{x}}(s, t))$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t(s, t) = V(\hat{\mathbf{x}}(s, t))$  za sve  $(s, t) \in \hat{W}$ . Tada imamo da je  $\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_s = \hat{\mathbf{x}}_t \cdot \hat{\mathbf{x}}_t = 0$ . I sada definirajmo reparametrizaciju  $\mathbf{x} : W \rightarrow S$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  karte  $\hat{\mathbf{x}}$  formulom:  $\mathbf{x}(u, v) := \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{s-t}{\sqrt{2}}, \frac{s+t}{\sqrt{2}}\right)$ . Tada vrijedi (stavimo  $s := \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ ,  $t := \frac{-u+v}{\sqrt{2}}$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) \frac{\partial s}{\partial u} + \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) \frac{\partial s}{\partial v} + \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \\ E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_s) + \hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_t \cdot \hat{\mathbf{x}}_t) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t + \frac{1}{2} \cdot 0 = \hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t \\ F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v &= -\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_s) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t) - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_t \cdot \hat{\mathbf{x}}_s) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_t \cdot \hat{\mathbf{x}}_t) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_s) - \hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_t \cdot \hat{\mathbf{x}}_t) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\hat{\mathbf{x}}_s \cdot \hat{\mathbf{x}}_t = -E\end{aligned}$$

Dakle, karta  $\mathbf{x}$  je konformna. □

Prema [13], vrijedi i sljedeći rezultat.

**Teorem 1.3.27.** *Neka je  $S$  prostorna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada za svaku točku  $p \in S$  postoji otvoreni skup  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  i konformna karta  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  takva da je  $p \in \mathbf{x}(U)$ .*

## 1.4 Gaussova i srednja zakrivljenost. Normalna i glavne zakrivljenosti

Za početak ćemo definirati Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe te dati njihovu vezu s fundamentalnim veličinama prvog i drugog reda.

**Definicija 1.4.1.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha i  $p \in S$  točka. Broj  $K(p) := \det S_p$  zovemo Gaussova (Gauss-Kroneckerova) zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$ . Broj  $H(p) := \frac{1}{2} \text{Tr } S_p$  zovemo srednja zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$ .*

**Lema 1.4.2. (poopćenje Lagrangeovog identiteta)** *Za sve  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_1^3$  vrijedi:*

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot d & a \cdot c \\ b \cdot d & b \cdot c \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

*Dokaz.* Isto kao u dokazu Lagrangeovog identiteta, koristimo propoziciju 1.1.13, 3. i 8.

$$\begin{aligned}(a \times b) \cdot (c \times d) &= ((a \times b) \times c) \cdot d = -(a \cdot c)b + (b \cdot c)a \cdot d \\ &= -(a \cdot c)(b \cdot d) + (b \cdot c)(a \cdot d) = \begin{vmatrix} a \cdot d & a \cdot c \\ b \cdot d & b \cdot c \end{vmatrix}\end{aligned}$$

□

Formula (1.3) nije ista kao u euklidskom prostoru (u euklidskom prostoru ide suprotan predznak), ali zbog te formule sljedeći rezultat je isti kao u euklidskom prostoru.

**Propozicija 1.4.3.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x}$  karta koja parametrizira dio plohe  $S$ . Tada vrijedi:*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.4)$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (1.5)$$

**Teorem 1.4.4.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna karta s konformnim faktorom  $\lambda$ .*

1. *Ako je ploha  $S$  prostorna, onda je  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = -2H\lambda(n \circ \mathbf{x})$ .*
2. *Ako je ploha  $S$  vremenska, onda je  $-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2H\lambda(n \circ \mathbf{x})$ .*

*Dokaz.* 1. Po definiciji fundamentalnih veličina prvog reda je  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = E = \lambda$ ,  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = F = 0$ ,  $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G = \lambda$ . Deriviranjem prve i treće jednakosti po  $u$ , a druge po  $v$  i primjenom Leibnizovog pravila (lema 1.3.2) dobivamo redom:  $2(\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u) = \lambda_u$ ,  $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$ ,  $2(\mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{x}_v) = \lambda_u$ . Iz toga slijedi:  $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}\lambda_u = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv}$ . Ovdje smo primijenili i Schwarzov teorem. Iz toga dalje slijedi da je  $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}) \cdot \mathbf{x}_u = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}) \perp \mathbf{x}_u$ . Slično se dobije da je  $(\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}) \perp \mathbf{x}_v$ . Iz toga slijedi da je taj vektor kolinearan s  $n$ , tj.  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = \alpha(n \circ \mathbf{x})$  za neku skalarnu funkciju  $\alpha$ . Ako tu jednakost skalarno pomnožimo s  $n \circ \mathbf{x}$  i iskoristimo da je  $n \cdot n = -1$ , dobivamo:  $\alpha = -(\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}) \cdot (n \circ \mathbf{x}) = -\mathbf{x}_{uu} \cdot (n \circ \mathbf{x}) - \mathbf{x}_{vv} \cdot (n \circ \mathbf{x}) = -L - N$ . U zadnjoj jednakosti smo iskoristili lemu 1.3.20. S druge strane, iz relacije (1.5) imamo:  $H = \frac{\lambda N - 2 \cdot 0 \cdot M + \lambda L}{2(\lambda \cdot \lambda - 0^2)} = \frac{L + N}{2\lambda}$ . Iz toga slijedi da je  $\alpha = -2H\lambda$ , što je i trebalo dokazati.

2. Račun je isti kao u 1., samo što je ovdje  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = E = \lambda$ ,  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = F = 0$ ,  $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G = -\lambda$  i  $n \cdot n = 1$ .

□

U nastavku definiramo normalnu zakrivljenost. Nadalje, istražujemo svojstva operatora oblika plohe i definiramo glavne zakrivljenosti i glavne vektore.

**Definicija 1.4.5.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $p \in S$  točka i  $v \in T_p S$  vektor koji nije svjetlosni ni nulvektor. Tada broj  $k(v) := \frac{S_p(v) \cdot v}{v \cdot v}$  zovemo normalna zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$  u smjeru vektora  $v$ .*

**Napomena 1.4.6.** Normalna zakrivljenost je dobro definirana, tj. ovisi samo o smjeru vektora  $v$ . Zaista, ako je  $w \in T_p S$  neki vektor kolinearan s  $v$ , onda je  $w = \lambda v$  za neki skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . No, tada je

$$k(w) = \frac{S_p(w) \cdot w}{w \cdot w} = \frac{S_p(\lambda v) \cdot \lambda v}{\lambda v \cdot \lambda v} = \frac{\lambda^2(S_p(v) \cdot v)}{\lambda^2(v \cdot v)} = k(v)$$

**Definicija 1.4.7.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Svojstvene vrijednosti  $k_1(p), k_2(p) \in \mathbb{C}$  operatora  $S_p$  zovemo glavne zakrivljenosti plohe  $S$  u točki  $p$ .

U euklidskom prostoru vrijedi da se za svaku orijentiranu plohu  $(S, n)$  i svaku točku  $p \in S$  operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ . To znači da su svojstvene vrijednosti operatora  $S_p$  realne i postoji (ortonormirana) baza  $\{e_1, e_2\}$  za  $T_p S$  takva da je matrični prikaz operatora  $S_p$  u toj bazi dijagonalna matrica (koja tada ima svojstvene vrijednosti na dijagonali). Pri tome je  $e_i$  svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $k_i(p)$  za  $i \in \{1, 2\}$ . U prostoru Minkowskog to općenito ne vrijedi. Međutim, vrijedi sljedeći slabiji rezultat čiji je dokaz onda isti kao u euklidskom slučaju.

**Propozicija 1.4.8.** Neka je  $V$  potprostor od  $\mathbb{R}_1^3$  dimenzije 2 i  $A : V \rightarrow V$  simetričan linearan operator. Tada se operator  $A$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$  (u ortonormiranoj bazi) ako i samo ako funkcija  $Q(v) = Av \cdot v$  postiže minimum i maksimum na skupu  $\{v \in V : \|v\| = 1\}$ . Tada su svojstvene vrijednosti od  $A$  upravo minimum i maksimum funkcije  $Q$  na tom skupu.

**Teorem 1.4.9.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Tada se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$  u ortonormiranoj bazi.

*Dokaz.* Stavimo  $T := \{v \in T_p S : \|v\| = 1\}$ . Želimo prvo pokazati da je skup  $T$  kompaktan (u  $T_p \mathbb{R}_1^3$  s euklidskom metrikom). Stavimo  $n(p) := (p, A, B, C)$ . Tada ravninu  $T_p S$  možemo prikazati implicitno jednadžbom  $-Ax + By + Cz = 0$ . Naime, normala ravnine  $T_p S$  se podudara  $n(p)$  i  $T_p S$  sadrži nulvektor.

Stavimo  $f(p, x, y, z) = -Ax + By + Cz$  i  $N(v) = \|v\|$  (pseudonorma prostora Minkowskog). Funkcije  $f$  i  $N$  su obje neprekidne (naime, polinomi i drugi korijen su neprekidne funkcije). Budući da su skupovi  $\{0\}$  i  $\{1\}$  zatvoreni u  $\mathbb{R}$ , slijedi da su skupovi  $f^{-1}(\{0\})$  i  $N^{-1}(\{1\})$  zatvoreni u  $T_p \mathbb{R}_1^3$ . I onda imamo da je skup  $T = f^{-1}(\{0\}) \cap N^{-1}(\{1\})$ , kao presjek dva zatvorena skupa, zatvoren u  $T_p \mathbb{R}_1^3$ .

Neka je  $v = (p, x, y, z) \in T$  proizvoljan vektor. Budući da je ploha  $S$  prostorna, slijedi da je vektor  $v$  prostorni  $\Rightarrow v \cdot v = 1$ . Tada je  $x^2 + y^2 + z^2 = -x^2 + y^2 + z^2 + 2x^2 = 1 + 2x^2$ . Želimo taj izraz ograditi odozgo. Budući da je  $n(p) \neq 0$ , barem jedan od brojeva  $A, B, C$  je različit od 0. Pretpostavimo da je  $A \neq 0$  (ostali slučajevi analogno). Tada iz  $-Ax + By + Cz = 0$  slijedi  $x = \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z$ . Uvrštavanjem toga u jednadžbu  $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$  i zatim nadopunjavanjem

do potpunog kvadrata i korištenjem da je  $-A^2 + B^2 + C^2 = -1$  dobivamo:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (A^2 - B^2)y^2 - 2BCyz + (A^2 - C^2)z^2 &= A^2 \\ (1 + C^2)y^2 - 2BCyz + (1 + B^2)z^2 &= A^2 \\ \left(\sqrt{1 + C^2}y - \frac{BC}{\sqrt{1 + C^2}}z\right)^2 + \frac{A^2}{1 + C^2}z^2 &= A^2 \end{aligned}$$

I onda slijedi da je  $\frac{A^2}{1+C^2}z^2 \leq A^2 \Rightarrow z^2 \leq 1 + C^2$ . Time smo dobili traženu gornju ogradu, tj. imamo:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2x^2 \leq 1 + 2(1 + C^2)$ . Kako je  $v \in T$  biran proizvoljno, slijedi da je skup  $T$  omeđen.

Kako je skup  $T$  zatvoren i omeđen u  $T_p\mathbb{R}_1^3$ , slijedi da je  $T$  kompaktan. Budući da je funkcija  $Q(v) := S_p(v) \cdot v$  neprekidna, slijedi da ona postiže minimum i maksimum na  $T$ , pa iz propozicije 1.4.8 slijedi da se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Definicija 1.4.10.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za točku  $p \in S$  kažemo da je pupčasta (umbilička) ako je  $S_p$  skalarni operator, tj  $S_p = \alpha I$  za neki  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Teorem 1.4.11.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka.

1. Operator  $S_p$  se može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$  ako i samo ako je  $H(p)^2 - K(p) > 0$  ili je točka  $p$  pupčasta.
2. Operator  $S_p$  se može dijagonalizirati nad  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ako i samo ako je  $H(p)^2 - K(p) < 0$ .
3. Operator  $S_p$  se ne može dijagonalizirati nad  $\mathbb{C}$  ako i samo ako je  $H(p)^2 - K(p) = 0$  i točka  $p$  nije pupčasta.

Nadalje, vrijedi:

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \tag{1.6}$$

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) \tag{1.7}$$

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  bilo koji matrični prikaz operatora  $S_p$ . Tada za svojstveni polinom  $k_p$  operatora  $S_p$  vrijedi:

$$\begin{aligned} k_p(x) &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc \\ &= x^2 - (\text{Tr}\mathbf{A})x + \det \mathbf{A} = x^2 - (\text{Tr}S_p)x + \det S_p = x^2 - 2H(p)x + K(p) \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je diskriminanta polinoma  $k_p$  jednaka  $D = (2H(p))^2 - 4K(p) = 4(H(p)^2 - K(p))$ . Iz toga slijedi:  $H^2(p) - K(p) > 0$  ( $< 0$ )  $\Leftrightarrow$  polinom  $k_p$  ima dvije realne (kompleksne) nultočke  $\lambda_1$  i  $\lambda_2 \Leftrightarrow$  operator  $S_p$  se dijagonalizira nad  $\mathbb{R}$  (nad  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ). Naime, tada je algebarska kratnost od  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  jednaka 1. No, s druge strane imamo da je geometrijska kratnost od  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  barem 1, a zbroj geom. kratnosti je jednak  $\dim T_p S = 2$ . Dakle, geom. kratnost od  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  je također 1. Iz linearne algebre znamo da se linearan operator može dijagonalizirati nad  $\mathbb{C}$  ako i samo ako je geom. kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka njenoj alg. kratnosti, pa slijedi tvrdnja. Ako je točka  $p$  pupčasta, onda se operator  $S_p$  očito može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ . Ako je  $H(p)^2 - K(p) = 0$  i točka  $p$  nije pupčasta, onda operator  $S_p$  ima jednu svojstvenu vrijednost čija je geom. kratnost jednaka 1. Kako je to dvostruka nultočka polinoma  $k_p$ , njena alg. kratnost je jednaka 2. Budući da je geom. kratnost različita od alg. kratnosti, slijedi da se operator  $S_p$  ne može dijagonalizirati nad  $\mathbb{C}$ . Relacije (1.6) i (1.7) slijede iz Vieteovih formula. Naime, nultočke polinoma  $k_p$  su upravo  $k_1(p)$  i  $k_2(p)$ .  $\square$

**Korolar 1.4.12.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka. Ako je  $K(p) < 0$ , onda se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Budući da je  $H(p)^2 \geq 0$ , iz  $K(p) < 0$  slijedi  $H(p)^2 - K(p) > 0$ , pa se po teoremu 1.4.11, 1. operator  $S_p$  dijagonalizira nad  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Definicija 1.4.13.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $p \in S$  točka takva da se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ . Neka je  $\{e_1(p), e_2(p)\}$  ortonormirana baza za  $T_p S$  u kojoj se  $S_p$  dijagonalizira. Tada vektore  $e_1(p)$  i  $e_2(p)$  zovemo glavni vektori plohe  $S$  u točki  $p$ .*

**Napomena 1.4.14.** Ako se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ , onda za  $i \in \{1, 2\}$  imamo:

$$k(e_i(p)) = \frac{S_p(e_i(p)) \cdot e_i(p)}{e_i(p) \cdot e_i(p)} = \frac{(k_i e_i(p)) \cdot e_i(p)}{e_i(p) \cdot e_i(p)} = k_i(p)$$

Naime, po samoj definiciji svojstvenog vektora je  $S_p(e_i(p)) = k_i(p)e_i(p)$ . Dakle, glavne zakrivljenosti plohe  $S$  u točki  $p$  su zapravo normalne zakrivljenosti plohe  $S$  u točki  $p$  u smjeru glavnih vektora. Relacija (1.7) opravdava naziv srednja zakrivljenost za  $H$ . Naime, iz propozicije 1.4.8 imamo da su  $k_1(p)$  i  $k_2(p)$  minimalna i maksimalna normalna zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$  (normalna zakrivljenost ovisi samo o smjeru vektora, pa ju je dovoljno gledati samo za jedinične vektore), a iz relacije (1.7) imamo da je  $H$  aritmetička sredina od  $k_1(p)$  i  $k_2(p)$ .

## Poglavlje 2

# Minimalne i maksimalne plohe u Minkowskijevom 3-prostoru

### 2.1 Minimalne i maksimalne plohe

U ovoj točki ćemo proučiti neka općenita svojstva minimalnih i maksimalnih ploha.

**Definicija 2.1.1.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana vremenska (prostorna) ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je minimalna (maksimalna) ako je za nju  $H = 0$ .*

Prvo ćemo dokazati karakterizacijski teorem za minimalne i maksimalne plohe koji opravdava njihove nazive.

**Definicija 2.1.2.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada broj*

$$P(\mathbf{x}(U)) = \int_U |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (n \circ \mathbf{x}))| du dv$$

*zovemo površina dijela  $\mathbf{x}(U)$  plohe  $S$ .*

**Napomena 2.1.3.** Diferencijalnu formu  $dA := |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n)| du dv$  zovemo forma površine plohe  $S$ . Ponekad funkciju  $(u, v) \mapsto |\det(\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), n(\mathbf{x}(u, v)))|$  također zovemo forma površine.

Površina plohe je geometrijsko svojstvo, tj. ne ovisi o izboru parametrizacije dijela plohe (vidi [17]).

**Propozicija 2.1.4.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada je*

$$P(\mathbf{x}(U)) = \int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv = \int_U \sqrt{|EG - F^2|} du dv \quad (2.1)$$

*Dokaz.* Računamo:

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (n \circ \mathbf{x}))| &= |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|})| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)| \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} |(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \end{aligned}$$

Druga jednakost u (2.1) slijedi iz definicije fundamentalnih veličina i Lagrangeovog identiteta.  $\square$

Iz formule (2.1) vidimo da možemo izračunati površinu plohe bez da određujemo jedinično normalno polje. To nam omogućuje da pojam površine poopćimo na plohe koje nisu orijentabilne (svjetlosne i singularne plohe). Nadalje, možemo definirati i površinu karte.

**Definicija 2.1.5.** *Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada broj*

$$P(\mathbf{x}(U)) := \int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, du \, dv$$

*zovemo površina dijela  $\mathbf{x}(U)$  plohe  $S$ . Taj broj ujedno zovemo i površina karte  $\mathbf{x}$ .*

**Napomena 2.1.6.** Izravno iz definicije površine plohe slijedi da svjetlosne plohe imaju površinu jednaku 0.

**Definicija 2.1.7.** *Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  karta i  $\epsilon > 0$ . Neka je  $\psi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  glatka funkcija takva da je  $\psi(u, v, 0) = \mathbf{x}(u, v)$  za sve  $(u, v) \in U$ . Tada familiju karata  $\{\mathbf{x}_s : -\epsilon < s < \epsilon\}$ , gdje je karta  $\mathbf{x}_s : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dana formulom  $\mathbf{x}_s(u, v) := \psi(u, v, s)$ , zovemo varijacija karte  $\mathbf{x}$ .*

**Definicija 2.1.8.** *Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  karta. Za varijaciju  $\psi$  karte  $\mathbf{x}$  kažemo da ima kompaktan nosač ako za svaki  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  postoji kompaktan skup  $K \subseteq U$  takav da je  $\psi(u, v, s) = \psi(u, v, 0)$  za sve  $(u, v) \in U \setminus K$ .*

**Definicija 2.1.9.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Za varijaciju  $\psi$  karte  $\mathbf{x}$  kažemo da je normalna ako je oblika  $\psi(u, v, s) = \mathbf{x}(u, v) + s\phi(u, v)n(\mathbf{x}(u, v))$ , gdje je  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna glatka funkcija.*

**Teorem 2.1.10. (karakterizacija minimalnih i maksimalnih ploha)** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Tada je karta  $\mathbf{x}$  minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcionala  $\mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x}(U))$  za svaku normalnu varijaciju karte  $\mathbf{x}$  ako i samo ako je  $H = 0$  i  $K > 0$  ( $K < 0$ ,  $K = 0$ ) na dijelu  $\mathbf{x}(U) \subseteq S$ .*



*Dokaz.* Prvo ćemo napraviti pomoćni račun. Neka je  $\psi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  normalna varijacija karte  $\mathbf{x}$  dana formulom  $\psi(u, v, s) = \mathbf{x}(u, v) + s\phi(u, v)n(\mathbf{x}(u, v))$ . Za  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , neka su  $E_s, F_s, G_s$  fundamentalne veličine prvog reda karte  $\mathbf{x}_s$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u} = (\mathbf{x}_u + s\phi_u(n \circ \mathbf{x}) + s\phi n_u) \cdot (\mathbf{x}_u + s\phi_u(n \circ \mathbf{x}) + s\phi(n \circ \mathbf{x})_u) \\ &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2s\phi_u(\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})) + 2s\phi(\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u) + O(s^2) \\ &= E + 2s\phi(\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u) + O(s^2) \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je  $\mathbf{x}_u \perp (n \circ \mathbf{x})$ , tj.  $\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x}) = 0$ . Analogno dobivamo:

$$\begin{aligned} F_s &= F + s\phi(\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_v) + s\phi(\mathbf{x}_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_u) + O(s^2) \\ G_s &= G + 2s\phi(\mathbf{x}_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_v) + O(s^2) \end{aligned}$$

U gornjem računu smo napravili linearizaciju, tj. odbacili smo članove koji su barem kvadratnog reda veličine po  $s$  kako bismo mogli lakše računati. To možemo jer za  $s \approx 0$  su ti članovi približno jednaki 0.

Neka je  $(u, v) \in U$ . Budući da je  $\mathbf{x}_u(u, v)$  tangencijalni vektor plohe  $S$ , postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$  i  $t_0 \in I$  takvi da je  $c(t_0) = \mathbf{x}(u, v)$  i  $\dot{c}(t_0) = \mathbf{x}_u(u, v)$ . I onda iz propozicije 1.3.7 imamo:  $\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u = \mathbf{x}_u \cdot (n \circ c)' = \mathbf{x}_u \cdot (-S(\dot{c})) = -\mathbf{x}_u \cdot S(\mathbf{x}_u) = -L$ . Potpuno analogno imamo:  $\mathbf{x}_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_v = \mathbf{x}_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_u = -M$ ,  $\mathbf{x}_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_v = -N$ .

I sad imamo:  $E_s = E - 2s\phi L$ ,  $F_s = F - 2s\phi M$ ,  $G_s = G - 2s\phi N$ . Iz definicije fundamentalnih veličina i Lagrangeovog identiteta slijedi da je  $|E_s G_s - F_s^2| = \pm(E_s G_s - F_s^2)$ , ovisno o tome je li ploha  $\mathbf{x}_s(U)$  prostorna ili vremenska. Računamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}\right)_{s=0} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}} (\pm(E_s G_s - F_s^2))'\right)_{s=0} = \left(\pm \frac{E'_s G_s + E_s G'_s - 2F_s F'_s}{2\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}}\right)_{s=0} \\ &= \left(\pm \frac{-2\phi L G_s + E_s(-2\phi N) - 2F_s(-2\phi M)}{2\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}}\right)_{s=0} \\ &= \mp \phi \frac{LG + EN - 2FM}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \phi \frac{LG + EN - 2FM}{EG - F^2} \sqrt{|EG - F^2|} \\ &= 2\phi H \sqrt{|EG - F^2|} \end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti smo primijenili relaciju (1.5). Dalje računamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{ds^2} \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}\right)_{s=0} &= \left(\frac{d}{ds} \left(\mp \phi \frac{LG_s + E_s N - 2F_s M}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}}\right)\right)_{s=0} \\ &= (\mp \phi (LG_s + E_s N - 2F_s M)' \frac{1}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}} \\ &\quad \mp \phi (LG_s + E_s N - 2F_s M) \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}})_{s=0} = (\star) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}} &= -\frac{1}{2} |E_s G_s - F_s^2|^{-\frac{3}{2}} (\pm(E_s G_s - F_s^2))' = \mp \frac{E'_s G_s + E_s G'_s - 2F_s F'_s}{2|E_s G_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \mp \frac{-2\phi L G_s + E_s(-2\phi N) - 2F_s(-2\phi M)}{2|E_s G_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}} = \pm\phi \frac{L G_s + E_s N - 2F_s M}{|E_s G_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}} \\
(\star) &= (\mp\phi(L(-2\phi N) - 2\phi LN - 2(-2\phi M)M) \frac{1}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}} \\
&\quad - \phi(L G_s + E_s N - 2F_s M) \cdot \phi \frac{L G_s + E_s N - 2F_s M}{|E_s G_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}})_{s=0} \\
&= (\pm\phi^2 \frac{4(LN - M^2)}{\sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}} - \phi^2 \frac{(L G_s + E_s N - 2F_s M)^2}{|E_s G_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}})_{s=0} \\
&= \pm 4\phi^2 \frac{LN - M^2}{\sqrt{|EG - F^2|}} - \phi^2 \frac{(LG + EN - 2FM)^2}{|EG - F^2|^{\frac{3}{2}}} \\
&= 4\phi^2 \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \sqrt{|EG - F^2|} - \phi^2 \frac{(LG + EN - 2FM)^2}{4(EG - F^2)^2} \cdot 4|EG - F^2|^{\frac{1}{2}} \\
&= 4\phi^2(K - H^2) \sqrt{|EG - F^2|}
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti smo primijenili relacije (1.4) i (1.5). Time smo gotovi s pomoćnim računom i sada možemo pokazati tvrdnju.

Pretpostavimo da je  $H = 0$  i  $K > 0$  ( $K < 0$ ,  $K = 0$ ) na dijelu  $\mathbf{x}(U)$  plohe  $S$ . Neka je  $\psi$  proizvoljna normalna varijacija karte  $\mathbf{x}$  (dana formulom kao na početku dokaza). Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds} P(\mathbf{x}_s(U))\right)_{s=0} &= \left(\frac{d}{ds} \int_U \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|} du dv\right)_{s=0} = \int_U \left(\frac{d}{ds} \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}\right)_{s=0} du dv \\
&= \int_U 2\phi H \sqrt{|EG - F^2|} du dv = (H = 0) = 0
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je  $s = 0$  stacionarna točka funkcije  $s \mapsto P(\mathbf{x}_s(U))$ . Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{ds^2} P(\mathbf{x}_s(U))\right)_{s=0} &= \left(\frac{d^2}{ds^2} \int_U \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|} du dv\right)_{s=0} = \int_U \left(\frac{d^2}{ds^2} \sqrt{|E_s G_s - F_s^2|}\right)_{s=0} du dv \\
&= \int_U 4\phi^2(K - H^2) \sqrt{|EG - F^2|} du dv = (H = 0) = \int_U 4\phi^2 K \sqrt{|EG - F^2|} du dv
\end{aligned}$$

Budući da je  $K > 0$  ( $K < 0$ ,  $K = 0$ ), slijedi da je  $\left(\frac{d^2}{ds^2} P(\mathbf{x}_s(U))\right)_{s=0} > 0$  ( $< 0$ ,  $= 0$ ), što povlači da je  $s = 0$  minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcije  $s \mapsto P(\mathbf{x}_s(U))$ , što je i trebalo dokazati.

Obratno, pretpostavimo da je  $s = 0$  minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcije  $s \mapsto$

$P(\mathbf{x}_s(U))$  za svaku normalnu varijaciju  $\psi$  karte  $\mathbf{x}$ . Tada je  $s = 0$  posebno i stacionarna točka te funkcije, pa mora biti  $(\frac{d}{ds}P(\mathbf{x}_s(U)))_{s=0} = 0 \Rightarrow \int_U 2\phi H \sqrt{|EG - F^2|} du dv = 0$ . Budući da to vrijedi za svaku glatku funkciju  $\phi$ , to posebno vrijedi za  $\phi = H$ , tj. mora biti:  $\int_U 2H^2 \sqrt{|EG - F^2|} du dv = 0$ , što je moguće jedino ako je  $H = 0$  (jer je podintegralna funkcija neprekidna i nenegativna).  $\square$

**Napomena 2.1.11.** 1. Teorem 2.1.10 posebno vrijedi za var. s kompaktnim nosačem.

Te varijacije napuhuju plohu  $S$  na dijelu  $\mathbf{x}(U)$  (zato što je polje  $n$  okomito na plohu, a zbog kompaktnog nosača, skup  $\mathbf{x}_s(U)$  se na rubu podudara sa skupom  $\mathbf{x}(U)$ ). Iz toga slijedi da ploha  $S$  lokalno minimizira (maksimizira) površinu ako i samo ako je  $H = 0$  i  $K > 0$  ( $K < 0$ ).

2. Iz teorema 1.4.9 i 1.4.11, 1. slijedi: ako je ploha  $S$  prostorna, onda je  $H^2 - K \geq 0$ . Ako je još  $H = 0$ , onda slijedi da je  $K \leq 0$ . Kasnije ćemo pokazati da je jedina prostorna ploha za koju je  $H = K = 0$  (prostorna) ravnina. Onda iz teorema 2.1.10 slijedi da svaka maksimalna ploha, osim ravnine, lokalno maksimizira površinu.

U nastavku navodimo ostala svojstva minimalnih i maksimalnih ploha.

**Definicija 2.1.12.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za krivulju  $c : I \rightarrow S$  kažemo da je asimptotska krivulja plohe  $S$  ako je normalna zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $c(t)$  u smjeru vektora  $\dot{c}(t)$  jednaka 0 za svaki  $t \in I$ .

**Napomena 2.1.13.** Neka je  $p \in S$  točka takva da se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ . Može se pokazati da kroz točku  $p$  prolaze točno dvije asimptotske krivulje plohe  $S$  ako i samo ako je  $K(p) < 0$  (vidi [14]). Drugim riječima, na dijelu plohe  $S$  na kojem je  $K < 0$  imamo mrežu asimptotskih krivulja.

**Teorem 2.1.14.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  takva da je  $K < 0$ . Tada je ploha  $S$  maksimalna ako i samo ako je njena asimptotska mreža ortogonalna.

*Dokaz.* Budući da je  $K < 0$ , slijedi da je  $H^2 - K = 0^2 - K > 0$ , pa iz teorema 1.4.11 i napomene 2.1.13 slijedi da na čitavoj plohi  $S$  imamo asimptotsku mrežu.

Neka je  $p \in S$  točka. Budući da je ploha  $S$  prostorna, svi vektori u  $T_p S$  su prostorni. Neka su  $a_1, a_2 \in T_p S$  jedinični tangencijalni vektori asimptotskih krivulja plohe  $S$  u točki  $p$  (tzv. asimptotski vektori u točki  $p$ ). Nadalje, neka su  $e_1, e_2 \in T_p S$  glavni vektori i  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  glavne zakrivljenosti plohe  $S$  u točki  $p$ . Budući da je skup  $\{e_1, e_2\}$  ortonormirana baza za  $T_p S$ , za  $i \in \{1, 2\}$  postoje jedinstveni skalari  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  takvi da je  $a_i = \alpha_i e_1 + \beta_i e_2$ . Kako su vektori  $a_i$  jedinični, imamo:  $1 = a_i \cdot a_i = (\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) \cdot (\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) = \alpha_i^2 + \beta_i^2$ . Nadalje, kako su vektori  $a_i$  asimptotski, imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= S_p(a_i) \cdot a_i = S_p(\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) \cdot (\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) = (\alpha_i S_p(e_1) + \beta_i S_p(e_2)) \cdot (\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) \\ &= (\alpha_i k_1 e_1 + \beta_i k_2 e_2) \cdot (\alpha_i e_1 + \beta_i e_2) = \alpha_i^2 k_1 + \beta_i^2 k_2 \end{aligned}$$

Time smo dobili sustav jednadžbi:  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ ,  $\alpha_i^2 k_1 + \beta_i^2 k_2 = 0$ . I sada riješimo taj sustav. Iz prve jednadžbe imamo da je  $\beta_i^2 = 1 - \alpha_i^2$ . Uvrštavanjem toga u drugu jednadžbu dobivamo:  $\alpha_i^2 = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}$ . Pri tome je  $k_1 \neq k_2$  zbog  $K(p) = k_1 k_2 < 0$ . I onda slijedi da je  $\beta_i^2 = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1}{k_1 - k_2}$ . Još izračunajmo:  $a_1 \cdot a_2 = (\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2) \cdot (\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2$ . I sada imamo: ploha  $S$  je maksimalna  $\Leftrightarrow H(p) = 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -k_1 \Leftrightarrow \alpha_i^2 = \beta_i^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (*)$ . Budući da imamo dva (različita) asimptotska smjera, ne može biti  $\alpha_1 = \alpha_2$  i  $\beta_1 = \beta_2$  jer bi to povlačilo da je  $a_1 = a_2$ . Ne može biti ni  $\alpha_1 = -\alpha_2$  i  $\beta_1 = -\beta_2$  jer bi tada bilo  $a_1 = -a_2$ , odakle slijedi da vektori  $a_i$  određuju istu asimptotsku krivulju (samo su suprotne orijentacije). Dakle,  $\alpha_i$  su suprotnog predznaka ili su  $\beta_i$  suprotnog predznaka (tačno jedno od toga). No, onda je  $(*) \Leftrightarrow -\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 \perp a_2$ .  $\square$

**Teorem 2.1.15.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Ako je ploha  $S$  maksimalna, onda je Gaussovo preslikavanje  $g$  plohe  $S$  konformno.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna karta s konformnim faktorom  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Koristimo Weingartenove formule (teorem 1.3.23). Zbog uvjeta konformnosti, iz W. formula imamo:  $g_u = \frac{-L}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_v$ ,  $g_v = \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-N}{\lambda} \mathbf{x}_v$ . Nadalje, iz relacije (1.5) imamo:  $0 = H = \frac{N+L}{2\lambda} \Rightarrow N = -L$ . I onda imamo:

$$\begin{aligned} E_g &= g_u \cdot g_u = \left( \frac{-L}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) \cdot \left( \frac{-L}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) = \frac{L^2}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + 2 \frac{LM}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\ &\quad + \frac{M^2}{\lambda^2} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) = \frac{L^2}{\lambda^2} E + 2 \frac{LM}{\lambda^2} F + \frac{M^2}{\lambda^2} G = (E = G = \lambda, F = 0) = \frac{1}{\lambda} (L^2 + M^2) \\ F_g &= g_u \cdot g_v = \left( \frac{-L}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) \cdot \left( \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-N}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) = \frac{LM}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \frac{LN}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\ &\quad + \frac{M^2}{\lambda^2} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) + \frac{MN}{\lambda^2} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) = \frac{LM}{\lambda^2} E + \frac{LN}{\lambda^2} F + \frac{M^2}{\lambda^2} F + \frac{MN}{\lambda^2} G = \frac{M}{\lambda} (L + N) = 0 \\ G_g &= g_v \cdot g_v = \left( \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-N}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) \cdot \left( \frac{-M}{\lambda} \mathbf{x}_u + \frac{-N}{\lambda} \mathbf{x}_v \right) = \frac{M^2}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + 2 \frac{MN}{\lambda^2} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\ &\quad + \frac{N^2}{\lambda^2} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) = \frac{M^2}{\lambda^2} E + 2 \frac{MN}{\lambda^2} F + \frac{N^2}{\lambda^2} G = \frac{1}{\lambda} (M^2 + N^2) = (N = -L) = E_g \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje  $g$  je po definiciji konformno.  $\square$

**Napomena 2.1.16.** Tvrdnja teorema 2.1.15 ne vrijedi za vremenske plohe. Naime, tada su drukčiji uvjeti konformnosti, pa iz  $H = 0$  slijedi  $L - N = 0$ . S druge strane, dobije se  $F_g = \frac{M}{\lambda} (L + N)$ , pa ne možemo zaključiti da je  $F_g = 0$ . Međutim, vrijedi  $E_g = \frac{1}{\lambda} (M^2 + L^2) = G_g$ , ali to nisu uvjeti konformnosti za vremensku plohu (treba biti  $E_g = -G_g$ ).

**Teorem 2.1.17.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Ako je Gaussovo preslikavanje  $g$  plohe  $S$  konformno, onda je ploha  $S$  maksimalna na dijelu  $\mathbf{x}(U)$  ili je dio prostorne sfere.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna karta s konformnim faktorom  $\lambda$ . Kao u dokazu teorema 2.1.15 imamo:  $g_u = \frac{-L}{\lambda}\mathbf{x}_u + \frac{-M}{\lambda}\mathbf{x}_v$ ,  $g_v = \frac{-M}{\lambda}\mathbf{x}_u + \frac{-N}{\lambda}\mathbf{x}_v$  (\*) te  $E_g = \frac{1}{\lambda}(L^2 + M^2)$ ,  $F_g = \frac{M}{\lambda}(L + N)$ ,  $G_g = \frac{1}{\lambda}(M^2 + N^2)$ . Još imamo:  $H = \frac{N+L}{2\lambda}$ . Budući da je preslikavanje  $g$  konformno, imamo:  $E_g = G_g \Rightarrow L = \pm N$  (\*\*). Nadalje,  $0 = F_g = \frac{M}{\lambda}(L + N) = \lambda MH$ . Mora biti  $\lambda(u, v) \neq 0$  za sve  $(u, v) \in U$  jer bi u suprotnom bilo  $E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = 0$  za neki  $(u, v) \in U$ , što ne može biti jer je ploha  $S$  prostorna. Imamo dva slučaja.

Ako je  $H = 0$ , onda je ploha  $S$  po definiciji maksimalna na  $\mathbf{x}(U)$ .

Ako je  $H \neq 0$ , onda je  $H(p) \neq 0$  za neku točku  $p \in \mathbf{x}(U)$ . Kako je  $H$  neprekidna, slijedi da je  $H(q) \neq 0$  za sve  $q \in W$ , gdje je  $W \subseteq \mathbf{x}(U)$  neka otvorena okolina točke  $p$ . Onda slijedi da je  $M = 0$  i zbog (\*\*) slijedi da je  $L = N$  na  $W$ . Iz (\*) onda imamo:  $g_u = \frac{-L}{\lambda}\mathbf{x}_u =: \alpha\mathbf{x}_u$ ,  $g_v = \alpha\mathbf{x}_v$ . Deriviranjem tih jednakosti i primjenom Schwarzovog teorema dobivamo:  $(\alpha\mathbf{x}_u)_v = g_{uv} = g_{vu} = (\alpha\mathbf{x}_v)_u$ . Iz  $(\alpha\mathbf{x}_u)_v = (\alpha\mathbf{x}_v)_u$ , primjenom Leibnizova pravila, dobivamo:  $\alpha_v\mathbf{x}_u + \alpha\mathbf{x}_{uv} = \alpha_u\mathbf{x}_v + \alpha\mathbf{x}_{vu} \Rightarrow \alpha_v\mathbf{x}_u = \alpha_u\mathbf{x}_v$ . Kako su vektori  $\mathbf{x}_u$  i  $\mathbf{x}_v$  linearno nezavisni, slijedi da je  $\alpha_v = \alpha_u = 0 \Rightarrow \alpha = \text{const}$ . Onda integriranjem jednakosti  $g_u = \alpha\mathbf{x}_u$  po  $u$  dobivamo  $g = \alpha\mathbf{x} + c$  za neki  $c \in \mathbb{R}^3$ . Ako je  $\alpha = 0$ , onda slijedi  $L = N = 0 \Rightarrow H = 0$  na  $W$ , što je kontradikcija s pretpostavkom. I onda za  $q = \mathbf{x}(u, v) \in W$  imamo da je  $\|q + \frac{1}{\alpha}c\| = \|\mathbf{x}(u, v) + \frac{1}{\alpha}g(u, v) - \mathbf{x}(u, v)\| = \frac{1}{|\alpha|}|g(u, v)| = \frac{1}{|\alpha|} \cdot 1 = \frac{1}{|\alpha|}$ . Time smo pokazali da je  $W$  sfera sa središtem u točki  $-\frac{1}{\alpha}c$  polumjera  $\frac{1}{|\alpha|}$ .  $\square$

**Definicija 2.1.18.** Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren i  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^2$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je harmonička ako je  $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ .

**Korolar 2.1.19.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta.

1. Ako je ploha  $S$  prostorna, onda je  $S$  maksimalna ako i samo ako je  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ . Tada su posebno komponentne funkcije karte  $\mathbf{x}$  harmoničke.
2. Ako je ploha  $S$  vremenska, onda je  $S$  minimalna ako i samo ako je  $-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ .

*Dokaz.* Ovo slijedi izravno iz teorema 1.4.4. Ako je ploha  $S$  maksimalna (minimalna), samo uvrstimo  $H = 0$  i dobijemo:  $\pm\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = \mp 2 \cdot 0 \cdot \lambda(n \circ \mathbf{x}) = 0$ . Obratno, ako je  $\pm\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ , onda imamo da je  $\mp 2H\lambda(n \circ \mathbf{x}) = 0$ . Ako je  $S$  ravnina, onda znamo da je  $H = 0$ , pa imamo tvrdnju. Ako  $S$  nije ravnina, onda mora biti  $\lambda \neq 0$  (to slijedi iz napomene 1.3.25). Još je i  $n \circ \mathbf{x} \neq 0$  jer je polje  $n$  jedinično, pa nužno slijedi  $H = 0$ .  $\square$

**Definicija 2.1.20.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je translacijska (klizna) ako se može čitava parametrizirati kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje su  $c_1$  i  $c_2$  krivulje u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada krivulje  $c_1$  i  $c_2$  zovemo generatrise plohe  $S$ .

Trivijalan primjer translacijske plohe je ravnina. Sada ćemo dokazati da za vremenske plohe vrijedi da je ploha minimalna ako i samo ako je lokalno translacijska.

**Napomena 2.1.21.** Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren te  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije klase  $C^1$ . Ako je  $f_u = g_u$  i  $f_v = g_v$ , onda je  $f = g + C$  za neku konstantu  $C \in \mathbb{R}$ . Pokažimo to. Integriranjem jednakosti  $f_u(u, v) = g_u(u, v)$  po varijabli  $u$  dobivamo da je  $f(u, v) = g(u, v) + C(v)$ , gdje je  $C = C(v)$  neka funkcija koja ne ovisi o varijabli  $u$ . Deriviranjem te jednakosti po  $v$  dobivamo:  $f_v(u, v) = g_v(u, v) + C'(v)$ . No, kako je  $f_v = g_v$ , iz toga slijedi da je  $C'(v) = 0 \Rightarrow C(v) = \text{const}$ .

**Teorem 2.1.22.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana vremenska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je ploha  $S$  minimalna ako i samo ako za svaku točku  $p \in S$  postoji karta  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje su  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne krivulje, takva da je  $p \in \mathbf{x}(U)$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je ploha  $S$  minimalna. Neka je  $p \in S$  točka. Prema teoremu 1.3.26, ploha  $S$  se može lokalno oko točke  $p$  parametrizirati konformnom kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  takvom da za njenu reparametrizaciju  $\hat{\mathbf{x}} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , danu formulom  $\hat{\mathbf{x}}(s, t) = \mathbf{x}\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{-u+v}{\sqrt{2}}\right)$ , vrijedi da su vektori  $\hat{\mathbf{x}}_s$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosni. Stavimo  $p = \hat{\mathbf{x}}(s_0, t_0)$ . Tvrdimo da je upravo karta  $\hat{\mathbf{x}}$  tražena parametrizacija. Preciznije, pokazat ćemo da je  $\hat{\mathbf{x}}(s, t) = c_1(s) + c_2(t)$  (\*), gdje su  $c_1$  i  $c_2$  krivulje dane formulama:  $c_1(s) := \int_{s_0}^s \hat{\mathbf{x}}_s(z, t) dz + p$ ,  $c_2(t) := \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{x}}_t(s, z) dz$ .

Prvo ćemo pokazati da su krivulje  $c_1$  i  $c_2$  dobro definirane, tj. da funkcija  $(s, t) \mapsto \int_{s_0}^s \hat{\mathbf{x}}_s(z, t) dz + p$  ovisi samo o varijabli  $s$ , a funkcija  $(s, t) \mapsto \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{x}}_t(s, z) dz$  samo o varijabli  $t$ . Kao u dokazu teorema 1.3.26, imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \end{aligned}$$

Deriviranjem tih jednakosti još jednom dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{ss}(s, t) + \hat{\mathbf{x}}_{st}(s, t) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{tt}(s, t) \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{ss}(s, t) - \hat{\mathbf{x}}_{st}(s, t) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{tt}(s, t) \end{aligned}$$

U računanju smo koristili Schwarzov teorem. Sada iskoristimo pretpostavku da je ploha  $S$  minimalna i činjenicu da je karta  $\mathbf{x}$  konformna. Naime, zbrajanjem prve jednakosti, pomnožene s  $-1$ , s drugom i primjenom korolar 2.1.19, 1. dobivamo:  $-2\hat{\mathbf{x}}_{st} = -\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{st} = \hat{\mathbf{x}}_{ts} = 0$ . I sad imamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{s_0}^s \hat{\mathbf{x}}_s(z, t) dz + p \right) = \int_{s_0}^s \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_s}{\partial t}(z, t) dz + 0 = \int_{s_0}^s \hat{\mathbf{x}}_{st}(z, t) dz = \int_{s_0}^s 0 dz = 0$$

U gornjem računu smo mogli parcijalnom derivacijom ući pod integral jer je podintegralna funkcija klase  $C^1$  po varijabli  $s$ . Time smo pokazali da je krivulja  $c_1$  dobro definirana. Potpuno analogno se dobije da je  $\frac{\partial}{\partial s} \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{x}}_t(s, z) dz = 0$ , tj. krivulja  $c_2$  je također dobro definirana. Ako označimo  $F := F(z)$  primitivnu funkciju od  $z \mapsto \hat{\mathbf{x}}_s(z, t)$ , primjenom N-L formule dobivamo:

$$c'_1(s) = \frac{d}{ds} \left( \int_{s_0}^s \hat{\mathbf{x}}_s(z, t) dz + p \right) = \frac{d}{ds} (F(s) - F(s_0) + p) = F'(s) - 0 + 0 = \hat{\mathbf{x}}_s(s, t)$$

Iz toga slijedi da je krivulja  $c_1$  svjetlosna jer je vektor  $\hat{\mathbf{x}}_s$  svjetlosni. Analogno,  $c'_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_t(s, t)$ , odakle slijedi da je krivulja  $c_2$  svjetlosna jer je vektor  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosni. Još preostaje pokazati jednakost (\*). Imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (c_1(s) + c_2(t)) &= c'_1(s) = \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} (c_1(s) + c_2(t)) &= c'_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \end{aligned}$$

Time smo dobili da funkcije  $\hat{\mathbf{x}}$  i  $(s, t) \mapsto c_1(s) + c_2(t)$  imaju jednake obje parcijalne derivacije, pa su one prema napomeni 2.1.21 jednake do na konstantan vektor  $C \in \mathbb{R}_1^3$  (napomenu primijenimo na komponentne funkcije). Jednakost posebno vrijedi za  $(s, t) = (s_0, t_0)$ . Iz

$$p = \hat{\mathbf{x}}(s_0, t_0) = c_1(s_0) + c_2(t_0) + C = \int_{s_0}^{s_0} (\dots) dz + p + \int_{t_0}^{t_0} (\dots) dz + C = 0 + p + 0 + C$$

dobivamo  $C = 0$ , pa vrijedi (\*). Time je jedan smjer dokazan.

Obratno, pretpostavimo da se ploha  $S$  može lokalno parametrizirati kartom  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje su  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne krivulje. Računamo  $H$  pomoću relacije (1.5). Imamo:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_u(u, v) = c'_1(u) \cdot c'_1(u) = 0 \\ G(u, v) &= \mathbf{x}_v(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) = c'_2(v) \cdot c'_2(v) = 0 \\ M(u, v) &= \mathbf{x}_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}(u, v)) = 0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}(u, v)) = 0 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je  $H = \frac{0 \cdot N - 2F \cdot 0 + 0 \cdot L}{0 \cdot 0 - F^2} = 0$ . Dakle, ploha  $S$  je po definiciji minimalna.  $\square$

Iz dokaza teorema 2.1.22 vidimo da se dodatni uvjet da su generatriše  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne krivulje (a ne bilo kakve) ne može izostaviti jer inače u jednom smjeru ne možemo zaključiti da će za takvu plohu biti  $H = 0$ . Uočimo još da gornji dokaz ne možemo provesti ako je ploha  $S$  prostorna jer tada ne postoji parametrizacija  $\hat{\mathbf{x}}$  plohe  $S$  takva da su vektori  $\hat{\mathbf{x}}_s$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosni.

**Korolar 2.1.23.** *Ako je  $(S, n)$  orijentirana vremenska translacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  takva da su joj obje generatriše svjetlosne krivulje, onda je ploha  $S$  minimalna.*

*Dokaz.* Budući da je ploha  $S$  globalno translacijska, slijedi da je ona i lokalno translacijska, pa iz teorema 2.1.22 slijedi da je ploha  $S$  minimalna.  $\square$

**Napomena 2.1.24.** Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada se, po teoremu 2.1.22, ploha  $S$  može lokalno parametrizirati kartom oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje su  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne krivulje. Tada plohu  $\tilde{S}$ , parametriziranu lokalno kartom  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) := c_1(u) - c_2(v)$ , zovemo adjungirana (konjugirana) ploha plohe  $S$ . Uočimo da je tada i  $S$  adjungirana ploha plohe  $\tilde{S}$ , tj. plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  čine par adjungiranih ploha.

**Propozicija 2.1.25.** Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je ploha  $\tilde{S}$  također minimalna.

*Dokaz.* Uz oznake kao u napomeni 2.1.24, za plohu  $\tilde{S}$  imamo:  $\tilde{E}(u, v) = c_1'(u) \times c_1'(u) = 0$ ,  $\tilde{G}(u, v) = (-c_2'(v)) \cdot (-c_2'(v)) = 0$ . Ovdje smo iskoristili činjenicu da su krivulje  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne. Nadalje, imamo:  $\mathbf{x}_{uv}(u, v) = 0 \Rightarrow \tilde{M} = 0 \cdot (\tilde{n} \circ \mathbf{x}) = 0$ . Dakle,  $\tilde{E}\tilde{N} - 2\tilde{F}\tilde{M} + \tilde{G}\tilde{L} = 0 \cdot \tilde{N} - 2\tilde{F} \cdot 0 + 0 \cdot \tilde{L} = 0$ , pa iz relacije (1.5) imamo  $\tilde{H} = 0$ . Nadalje, za sve  $p = \tilde{\mathbf{x}}(u, v) \in \tilde{S}$  vrijedi  $c_1'(u), c_2'(v) \in T_p S$ , a ti vektori su svjetlosni. Iz toga slijedi da ploha  $\tilde{S}$  nije prostorna ni u kojoj točki  $p \in \tilde{S}$ , pa slijedi da je vremenska (ploha  $\tilde{S}$  ne može biti svjetlosna jer je očito orijentabilna). Dakle, ploha  $\tilde{S}$  je po definiciji minimalna.  $\square$

## 2.2 Rotacijske minimalne i maksimalne plohe

Prvo ćemo reći osnovno o rotacijskim plohamo općenito u prostoru Minkowskog.

**Definicija 2.2.1.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  krivulja i  $t \in I$ . Za točku  $c(t)$  kažemo da je regularna ako je  $\dot{c}(t) \neq 0$ . U suprotnom kažemo da je točka  $c(t)$  singularna. Za krivulju  $c$  kažemo da je regularna ako je točka  $c(t)$  regularna za svaki  $t \in I$ . U suprotnom kažemo da je krivulja  $c$  singularna.

**Definicija 2.2.2.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je rotacijska ako postoji pravac  $q$  i regularna krivulja  $c : I \rightarrow S$ , koja leži u istoj ravnini kao pravac  $q$  i ne siječe ga, tako da ploha  $S$  nastaje rotacijom krivulje  $c$  oko pravca  $q$ . Tada pravac  $q$  zovemo os rotacije plohe  $S$ , a krivulju  $c$  zovemo generatrisa plohe  $S$ .

Primjeri rotacijskih ploha su prostorna i vremenska sfera. Uočimo da ravnina ne zadovoljava definiciju rotacijske plohe jer ne možemo postići da generatrisa ne siječe os rotacije (kod ravnine je os rotacije nužno neki pravac okomit na tu ravninu). Uvjet da generatrisa ne siječe os rotacije je dodan u definiciju jer želimo da svaka rotacijska ploha bude regularna. Naime, ako dopustimo da generatrisa siječe os rotacije, onda u točki gdje se one sijeku ploha može imati singularnu točku (primjer: svjetlosna sfera, tj. stožac iz primjera 1.2.29).



**Definicija 2.2.3.** Neka je  $\{a_1, a_2, a_3\}$  baza za  $\mathbb{R}_1^3$ . Tu bazu zovemo nulbaza ako su vektori  $a_1$  i  $a_2$  svjetlosni, vektor  $a_3$  je prostorni,  $a_1, a_2 \perp a_3$  i  $a_1 \cdot a_2 = 1$ .

Za razliku od euklidskog prostora, u prostoru Minkowskog razlikujemo šest (sedam) tipova orijentabilnih rotacijskih ploha. Naime, orijentabilna ploha može biti prostorna ili vremenska, a os rotacije može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac.

**Propozicija 2.2.4.** Neka je  $S$  rotacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $q$  os rotacije plohe  $S$ . Pretpostavimo da je pravac  $q$  prostorni.

1. Ako je ploha  $S$  prostorna, onda postoji ortonormirana baza  $\{a_1, a_2, a_3\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$  takva da je  $q = [\{a_3\}]$  i karta  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$ , koja parametrizira plohu  $S$ , oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u)(\operatorname{ch} v)a_1 + x(u)(\operatorname{sh} v)a_2 + z(u)a_3 \quad (2.2)$$

takva da je generatrisa  $c(t) = \mathbf{x}(t, 0) = x(t)a_1 + z(t)a_3$  prostorna krivulja i  $x(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$ .

2. Ako je ploha  $S$  vremenska, onda postoji ortonormirana baza  $\{a_1, a_2, a_3\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$  takva da je  $q = [\{a_3\}]$  i karta  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$ , koja parametrizira plohu  $S$ , oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = y(u)(\operatorname{sh} v)a_1 + y(u)(\operatorname{ch} v)a_2 + z(u)a_3 \quad (2.3)$$

takva da je  $y(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$ , ili karta oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u)(\operatorname{ch} v)a_1 + x(u)(\operatorname{sh} v)a_2 + z(u)a_3 \quad (2.4)$$

takva da je generatrisa  $c(t) = \mathbf{x}(t, 0) = x(t)a_1 + z(t)a_3$  vremenska krivulja i  $x(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$ .

**Propozicija 2.2.5.** Neka je  $S$  prostorna (vremenska) rotacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $q$  os rotacije plohe  $S$ . Pretpostavimo da je pravac  $q$  vremenski. Tada postoji ortonormirana baza  $\{a_1, a_2, a_3\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$  takva da je  $q = [\{a_1\}]$  i karta  $\mathbf{x} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow S$ , koja parametrizira plohu  $S$ , oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u)a_1 + y(u)(\cos v)a_2 + y(u)(\sin v)a_3 \quad (2.5)$$

takva da je generatrisa  $c(t) = \mathbf{x}(t, 0) = x(t)a_1 + y(t)a_2$  prostorna (vremenska) krivulja i  $y(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$ .

**Propozicija 2.2.6.** Neka je  $S$  prostorna (vremenska) rotacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $q$  os rotacije plohe  $S$ . Pretpostavimo da je pravac  $q$  svjetlosni. Tada postoji nulbaza  $\{a_1, a_2, a_3\}$  za  $\mathbb{R}_1^3$  takva da je  $q = [\{a_2\}]$  i karta  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$ , koja parametrizira plohu  $S$ , oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u)a_1 + \left(-\frac{v^2}{2}x(u) + y(u)\right)a_2 + vx(u)a_3 \quad (2.6)$$

takva da je generatrisa  $c(t) = \mathbf{x}(t, 0) = x(t)a_1 + y(t)a_2$  prostorna (vremenska) krivulja i  $x(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$ .

**Napomena 2.2.7.** Propozicije 2.2.4, 2.2.5 i 2.2.6 nećemo dokazivati. Detaljno o tome se može naći u [13]. Ovdje ćemo samo opisati konstrukciju, koja je ista u svim slučajevima. Bazu  $\{a_1, a_2, a_3\}$  dobijemo tako da za jedan od ta tri vektora odaberemo vektor smjera pravca  $q$ , zatim drugi vektor odaberemo tako da ta dva vektora razapinju ravninu u kojoj leže os rotacije  $q$  i generatrisa  $c$  plohe  $S$  i onda tu bazu nadopunimo do baze za  $\mathbb{R}_1^3$ . Pri tome se pokaže da je moguće postići da ta baza bude ortonormirana, odnosno nulbaza. Formula za parametrizaciju se izvodi na temelju činjenice da je presjek rotacijske plohe ravninom koja je okomita na os rotacije kružnica, koja se onda parametrizira na odgovarajući način. Uvjeti poput  $x(t) \neq 0$  za sve  $t \in I$  dolaze iz zahtjeva da krivulja  $c$  ne siječe pravac  $q$ . Uočimo da u sve tri propozicije pravac  $q$  prolazi kroz ishodište (naime,  $q$  je jednodim. potprostor). Time nismo smanjili općenitost jer ploha  $S$  translacijom ne mijenja oblik.

**Napomena 2.2.8.** U propoziciji 2.2.4, 2. dobivamo dva tipa plohe jer razmatramo dva slučaja. Naime, tada ravnina  $\pi$ , u kojoj leže pravac  $q$  i generatrisa  $c$ , može biti prostorna ili vremenska. Ako je ravnina  $\pi$  prostorna, onda rotacijom krivulje  $c$  oko pravca  $q$  možemo dobiti samo vremensku plohu koja je parametrizirana kartom (2.3) (pri tome krivulja  $c$  može biti bilo kojeg tipa). Ako je ravnina  $\pi$  vremenska, onda možemo dobiti prostornu ili vremensku plohu, ovisno o tome je li krivulja  $c$  prostorna ili vremenska. Te plohe su parametrizirane kartama (2.2) i (2.4). U propoziciji 2.2.5 više nemamo dva slučaja. Naime, tada je ravnina  $\pi$  nužno vremenska jer sadrži vremenski pravac  $q$ . U propozicijama 2.2.4 i 2.2.6 ravnina  $\pi$  ne može biti svjetlosna prema napomeni 1.1.26 jer za nju vrijedi (pomoćna) tvrdnja da je metrika prostora Minkowskog na toj ravnini nedegenerirana (vidi dokaz u [13]). Dakle, u propoziciji 2.2.6 je ravnina  $\pi$  nužno vremenska (prostorna ne može biti jer sadrži svjetlosni pravac).

**Napomena 2.2.9.** Dovoljno je rotacijske plohe promatrati samo u slučaju kad je os rotacije  $z$ -os,  $x$ -os ili svjetlosni pravac  $l := \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Ako je os rotacije  $z$ -os ili  $x$ -os, onda je pripadna ortonormirana baza upravo kanonska baza za  $\mathbb{R}_1^3$ , tj.  $a_1 = e_1$ ,  $a_2 = e_2$  i  $a_3 = e_3$ . Ako je os rotacije pravac  $l$ , onda je pripadna nulbaza  $a_{1,2} = (\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $a_3 = e_2$ . Vidimo da odabirom baze  $\{a_1, a_2, a_3\}$  zapravo mijenjamo koordinatni sustav kako bi se parametrizacija algebarski pojednostavnila.

Sada prelazimo na minimalne i maksimalne rotacijske plohe. Vidjet ćemo da ako odaberemo pravac  $q$ , onda je orijentirana rotacijska ploha  $(S, n)$  za koju je  $H = 0$  i čija je os rotacije pravac  $q$  jedinstvena do na početni uvjet (uz pretpostavku da je ploha  $S$  povezana putevima). Svaku orijentiranu rotacijsku plohu u  $\mathbb{R}_1^3$  za koju je  $H = 0$  zovemo katenoid. U euklidskom prostoru postoji samo jedan tip katenoida, a u prostoru Minkowskog razlikujemo sedam tipova katenoida.

**Primjer 2.2.10. (prostorni i vremenski katenoid s prostornom osi)** Nađimo parametризaciju i implicitnu jednadžbu katenoida  $(S, n)$  čija je os rotacije  $z$ -os. Prema propoziciji 2.2.4 i napomeni 2.2.9, parametризacija rotacijske plohe čija je os rotacije  $z$ -os je oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u) \operatorname{ch} v, x(u) \operatorname{sh} v, z(u))$$

Ako je  $z' = 0 \Rightarrow z = \operatorname{const.}$ , onda je  $S$  ravnina, što nije rotacijska ploha. Dakle, mora biti  $z'(u) \neq 0$  za neki  $u$ , pa time i na nekom intervalu  $I$  (jer je  $z'$  neprekidna). Onda možemo reparametризirati tako da bude  $z(u) = u$  za sve  $u \in I$ . Iz relacije (1.5) imamo:  $H = 0 \Leftrightarrow EN - 2FM + GL = 0$ . Računamo:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), x'(u) \operatorname{ch} v, x'(u) \operatorname{sh} v, 1)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), x(u) \operatorname{sh} v, x(u) \operatorname{ch} v, 0)$$

$$E(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_u(u, v) = -x'(u)^2 + 1$$

$$F(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) = 0$$

$$G(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) = x(u)^2$$

Fundamentalne veličine drugog reda možemo izračunati pomoću leme 1.3.20. Računamo:

$$n(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} = \frac{(\mathbf{x}(u, v), x(u) \operatorname{ch} v, x(u) \operatorname{sh} v, x(u)x'(u))}{\sqrt{x(u)^2|1 - x'(u)^2|}}$$

Mora biti  $x'(u) \neq 0$  za sve  $u \in I$  jer je ploha  $S$  prostorna ili vremenska. Kako je  $x'$  neprekidna i  $I$  povezan putevima, slijedi da mora biti  $x' > 0$  ili  $x' < 0$  na  $I$ . Analogno, mora biti  $x^2 > 1$  ili  $x^2 < 1$  na  $I$ . Dalje računamo:

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), x''(u) \operatorname{ch} v, x''(u) \operatorname{sh} v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv}(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), x'(u) \operatorname{sh} v, x'(u) \operatorname{ch} v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv}(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), x(u) \operatorname{ch} v, x(u) \operatorname{sh} v, 0)$$

$$L(u, v) = \mathbf{x}_{uu}(u, v) \cdot n(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{-x(u)x''(u)}{\sqrt{x(u)^2|1 - x'(u)^2|}}$$

$$M(u, v) = \mathbf{x}_{uv}(u, v) \cdot n(\mathbf{x}(u, v)) = 0$$

$$N(u, v) = \mathbf{x}_{vv}(u, v) \cdot n(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{-x(u)^2}{\sqrt{x(u)^2|1 - x'(u)^2|}}$$

Kada to uvrstimo gore i sredimo, dobivamo sljedeću ODJ:  $x'(u)^2 - 1 - x(u)x''(u) = 0$ . Preostaje riješiti tu jednadžbu. Budući da je  $x'(u) \neq 0$  za sve  $u \in I$ , slijedi da je funkcija  $x$  invertibilna na  $I$  (po teoremu o inverznom preslikavanju), tj.  $u$  možemo promatrati kao funkciju varijable  $x$ , tj.  $p(x) = x'(u(x))$ . Stavimo  $p := x' \circ u$ . Ideja je ovdje da i  $x'$

promatramo kao funkciju varijable  $x$ . Tada imamo:  $x''(u) = (p \circ x)'(u) = p'(x(u))x'(u) = p'(x)p(x)$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $p = x' > 0$  (ako je  $x' < 0$ , možemo reparametrizirati tako da bude  $x' > 0$ ). Kad uvrstimo supstituciju, jednačba postaje:  $p^2 - 1 - x \cdot \frac{dp}{dx}p = 0$ . Dobili smo separabilnu jednačbu. Uočimo da mora biti  $x(u) \neq 0$  za sve  $u \in I$ . Naime, kad bi bilo  $x(u) = 0$  za neki  $u \in I$ , onda bi bilo  $p(x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x'(u)^2 = p(x)^2 = 1$ , što smo vidjeli ranije da ne može biti. Iz toga slijedi da je jednačba ekvivalentna s  $\frac{dx}{x} = \frac{p}{p^2-1}dp$ . Integriranjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\ln|x| + C' = \int \frac{p}{p^2-1} dp = \left| \frac{t = p^2 - 1}{dt = 2p dp} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln|p^2 - 1|$$

To je dalje ekvivalentno sa (stavimo  $C' = \ln C''$ ,  $C'' > 0$ ):  $\ln C''|x|^2 = \ln|p^2 - 1| \Leftrightarrow C''x^2 = \pm(p^2 - 1) \Leftrightarrow p^2 - 1 = C''x^2$  ( $C'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )  $\Leftrightarrow p^2 = C''x^2 + 1 \Leftrightarrow (p > 0) \Leftrightarrow p = \sqrt{C''x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = \sqrt{C''x^2 + 1} \Leftrightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{C''x^2 + 1}}$ . Ponovo smo dobili separabilnu jednačbu. Ako je  $C'' > 0$ , integriranjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$u + D' = \int \frac{dx}{\sqrt{C''x^2 + 1}} = \left| \frac{\text{sh } t = \sqrt{C''}x}{\text{ch } t dt = \sqrt{C''} dx} \right| = \frac{1}{\sqrt{C''}} \int dt = \frac{t}{\sqrt{C''}} = \frac{\text{Arsh}(\sqrt{C''}x)}{\sqrt{C''}}$$

Iz toga slijedi da je  $x(u) = \frac{1}{\sqrt{C''}} \text{sh}(\sqrt{C''}(u + D')) = (C := \sqrt{C''} > 0) = \frac{1}{C} \text{sh}(Cu + D)$ . Ako je  $C'' < 0$ , dobivamo:

$$u + D' = \int \frac{dx}{\sqrt{-(-C'')x^2 + 1}} = \left| \frac{\sin t = \sqrt{-C''}x}{\cos t dt = \sqrt{-C''} dx} \right| = \frac{1}{\sqrt{-C''}} \int dt = \frac{t}{\sqrt{-C''}} = \frac{\arcsin(\sqrt{-C''}x)}{\sqrt{-C''}}$$

Iz toga slijedi da je  $x(u) = \frac{1}{\sqrt{-C''}} \sin(\sqrt{-C''}(u + D')) = \frac{1}{C} \sin(Cu + D)$ . Uočimo da se u oba slučaja rješenje može proširiti na čitav  $\mathbb{R}$  (iako te funkcije imaju izolirane nultočke). Time smo izveli parametrizaciju prostornog katenoidea oko  $z$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \frac{1}{C} \sin(Cu + D) \text{ch } v, \frac{1}{C} \sin(Cu + D) \text{sh } v, u \right)$$

Da je taj katenoid prostorni, provjeri se izravnim računom (pokaže se da je  $EG - F^2 < 0$ ). Implicitna jednačba tog katenoidea je  $C^2(x^2 - y^2) = \sin^2(Cz + D)$ ,  $C > 0$ ,  $D \in \mathbb{R}$ . Izveli smo i parametrizaciju vremenskog katenoidea oko  $z$ -osi:

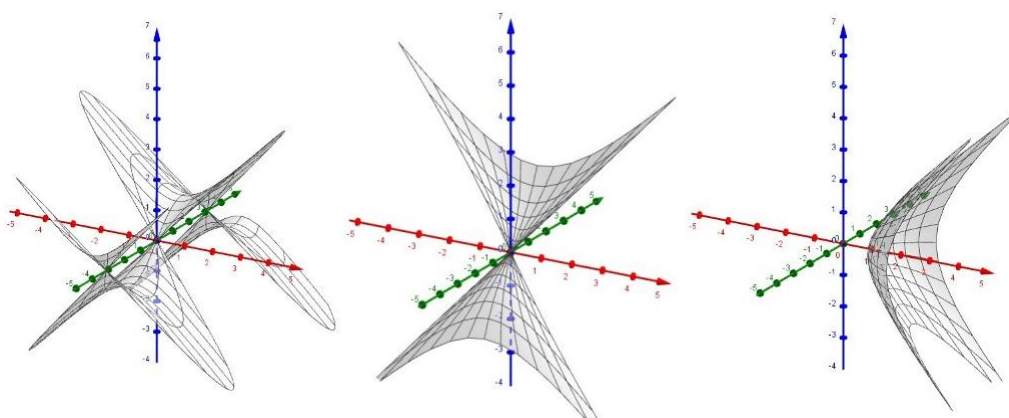
$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \frac{1}{C} \text{sh}(Cu + D) \text{ch } v, \frac{1}{C} \text{sh}(Cu + D) \text{sh } v, u \right)$$

Implicitna jednačba tog katenoidea je  $C^2(x^2 - y^2) = \text{sh}^2(Cz + D)$ ,  $C > 0$ ,  $D \in \mathbb{R}$ . Ujedno smo pokazali i jedinstvenost takvih ploha do na početni uvjet.

U slučaju vremenskih ploha imamo još jednu moguću parametrizaciju rotacijske plohe oko  $z$ -osi oblika  $\mathbf{x}(u, v) = (y(u) \operatorname{sh} v, y(u) \operatorname{ch} v, u)$ . U tom slučaju napravimo isti račun kao gore i dobijemo ODJ  $y''y - y'^2 - 1 = 0$ , čije je jedinstveno rješenje  $y(u) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cu + D)$ ,  $C > 0$ ,  $D \in \mathbb{R}$  (ta ODJ se rješava istom metodom kao gore). Time smo dobili još jedan vremenski katenoid oko  $z$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cu + D) \operatorname{sh} v, \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Cu + D) \operatorname{ch} v, u \right)$$

Implicitna jednačina tog katenoida je  $C^2(-x^2 + y^2) = \operatorname{ch}^2(Cz + D)$ ,  $y > 0$ .



Slika 2.1: Katenoidi  $x^2 - y^2 = \sin^2 z$ ,  $x^2 - y^2 = \operatorname{sh}^2 z$  i  $-x^2 + y^2 = \operatorname{ch}^2 z$

**Primjer 2.2.11. (prostorni i vremenski katenoid s vremenskom osi)** Nađimo parametrizaciju i implicitnu jednačinu katenoida  $(S, n)$  čija je os rotacije  $x$ -os. Prema propoziciji 2.2.5 i napomeni 2.2.9, karta koja parametrizira rotacijsku plohu čija je os rotacije  $x$ -os je oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u), y(u) \cos v, y(u) \sin v)$$

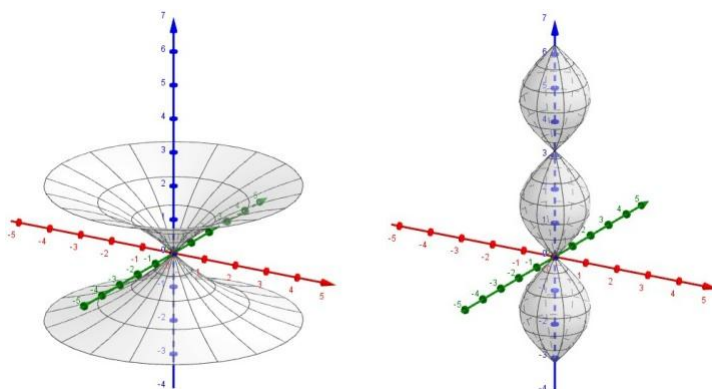
Kao u primjeru 2.2.10, možemo reparametrizirati ovako:  $\mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) \cos v, y(u) \sin v)$ . Zatim, opet kao u primjeru 2.2.10, izvedemo sljedeću ODJ (za funkciju  $y$ ):  $y'(u)^2 - 1 - y(u)y''(u) = 0$ . Dobijemo istu jednačinu kao u primjeru 2.2.10, njena rješenja su  $y(u) = \frac{1}{C} \sin(Cu + D)$  i  $y(u) = \frac{1}{C} \operatorname{sh}(Cu + D)$ ,  $C > 0$ ,  $D \in \mathbb{R}$ . Time smo dobili parametrizaciju prostornog katenoida oko  $x$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, \frac{1}{C} \operatorname{sh}(Cu + D) \cos v, \frac{1}{C} \operatorname{sh}(Cu + D) \sin v \right)$$

Implicitna jednadžba tog katenoida je  $C^2(y^2 + z^2) = \text{sh}^2(Cx + D)$ . Dobili smo i parametризaciju vremenskog katenoida oko  $x$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, \frac{1}{C} \sin(Cu + D) \cos v, \frac{1}{C} \sin(Cu + D) \sin v\right)$$

Implicitna jednadžba tog katenoida je  $C^2(y^2 + z^2) = \sin^2(Cx + D)$ .



Slika 2.2: Katenoidi  $y^2 + z^2 = \text{sh}^2 x$  i  $y^2 + z^2 = \sin^2 x$

**Primjer 2.2.12. (prostorni i vremenski katenoid sa svjetlosnom osi)** Nađimo parametризaciju katenoida čija je os rotacije pravac  $l$ . Stavimo  $a_{1,2} = (\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $a_3 = e_2$ . Iz propozicije 2.2.6 i napomene 2.2.9 imamo da je parametризacija rotacijske plohe oko pravca  $l$  oblika:

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u)a_1 + \left(-\frac{v^2}{2}x(u) + y(u)\right)a_2 + vx(u)a_3$$

To možemo reparametrizirati ovako:  $\mathbf{x}(u, v) = x(u)a_1 + \left(-\frac{v^2}{2}x(u) + u\right)a_2 + vx(u)a_3$ . Kao u primjeru 2.2.10, za funkciju  $x$  dobivamo sljedeću ODJ:  $x(u)''x(u) + 2x'(u)^2 = 0$ . Pri tome mora biti  $x(u), x'(u) \neq 0$  za sve  $u \in I$ , gdje je  $I$  neki interval. Riješimo tu jednadžbu.

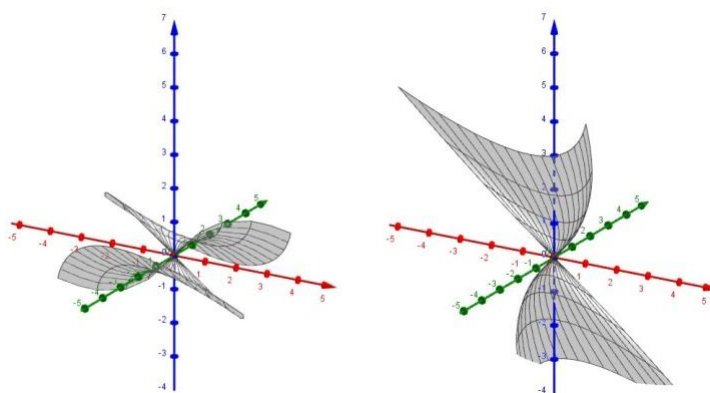
Opet stavimo  $p := x'$  i  $p$  promatrajmo kao funkciju varijable  $x$ . Kao i prije, imamo da je  $x''(u) = p'(x)p(x)$ , pa jednadžba postaje:  $p'px + 2p^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}px = -2p^2 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -2\frac{dx}{x}$ . Integriranjem lijeve i desne strane dobivamo:  $\ln|p| = -2\ln|x| + C' \Leftrightarrow (C' = \ln C, C > 0) \Leftrightarrow \ln|p| = \ln \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow p = \pm \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow p = \frac{C}{x^2} (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \Leftrightarrow x' = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow x^2 dx = Cdu$ . Integriranjem toga dobivamo:  $\frac{x^3}{3} = Cu + D \Rightarrow x(u) = \sqrt[3]{Cu + D}$ . Time smo dobili parametризaciju prostornog (vremenskog) katenoida oko pravca  $l$ :

$$\mathbf{x}(u, v) = \sqrt[3]{Cu + D}a_1 + \left(-\frac{v^2}{2}\sqrt[3]{Cu + D} + u\right)a_2 + v\sqrt[3]{Cu + D}a_3$$

Pri tome je  $C > 0$  ( $C < 0$ ) i  $D \in \mathbb{R}$ . Ta ploha se može reparametrizirati tako da stavimo  $s := \sqrt[3]{Cu + D}$ ,  $t := v$ , tj.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(s, t) &= sa_1 + \left(-\frac{t^2}{2}s + \frac{s^3 - D}{C}\right)a_2 + tsa_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1 + \frac{t^2}{2})s - \frac{s^3 - D}{C}\right), ts, \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1 - \frac{t^2}{2})s + \frac{s^3 - D}{C}\right)\right)\end{aligned}$$

Iz ove parametrizacije vidimo da je  $S$  algebarska ploha 3. reda.



Slika 2.3: Katenoidi  $\tilde{\mathbf{x}}(s, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1 + \frac{t^2}{2})s \mp s^3\right), ts, \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1 - \frac{t^2}{2})s \pm s^3\right)\right)$

**Napomena 2.2.13.** Generatrisa katenoida je krivulja koju zovemo lančanica. U primjerima 2.2.10, 2.2.11 i 2.2.12 smo usput izveli i jednadžbe lančanica u prostoru Minkowskog:  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ,  $c(t) = \mathbf{x}(t, 0)$ . Te krivulje su analogni lančanice iz euklidskog prostora. Geometrijska definicija katenoida jest da je katenoid rotacijska ploha nastala rotiranjem lančanice oko svoje središnje osi.

## 2.3 Pravčaste minimalne i maksimalne plohe

**Definicija 2.3.1.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je pravčasta ako se može parametrizirati kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ , gdje je  $c$  regularna krivulja i  $e$  glatko polje duž krivulje  $c$ . Krivulju  $c$  zovemo bazna krivulja plohe  $S$ . Za fiksirani  $u \in I$ , pravac  $\{c(u) + ve(u) : v \in \mathbb{R}\}$  zovemo izvodnica plohe  $S$ .

**Napomena 2.3.2.** Kartu  $\mathbf{x}$  možemo reparametrizirati tako da bude  $c'(u) \cdot e'(u) = 0$  za svaki  $u \in I$ . Nadalje, ako vektor  $e(u)$  nije svjetlosni ni nulvektor ni za koji  $u \in I$ , onda

možemo reparametrizirati tako da bude  $\|e(u)\| = 1$  za svaki  $u \in I$  (naime, vektor  $e(u)$  je vektor smjera izvodnice  $\{c(u) + ve(u) : v \in \mathbb{R}\}$ , a općenito promjenom pseudonorme vektora smjera nekog pravca dobivamo isti pravac). Analogno vrijedi za  $e'$  (naime, polje  $e$  možemo promatrati kao krivulju i onda možemo napraviti tzv. parametrizaciju duljinom luka). Uočimo da je  $e(u), e''(u) \perp e'(u)$  za svaki  $u \in I$ . Zaista, ako je polje  $e$  svjetlosno, onda deriviranjem jednakosti  $e(u) \cdot e(u) = 0$  i primjenom Leibnizova pravila dobivamo  $e(u) \cdot e'(u) = 0$ . Ako je  $e(u_0) \cdot e(u_0) \neq 0$  za neki  $u_0 \in I$ , onda zbog neprekidnosti vrijedi  $e(u) \cdot e(u) \neq 0$  za svaki  $u \in I'$ , gdje je  $I' \subseteq I$  neki otvoreni interval oko  $u_0$ . Tada možemo  $e$  na  $I'$  reparametrizirati tako da bude  $e(u) \cdot e(u) = \pm 1$  za svaki  $u \in I'$ , pa deriviranjem opet dobijemo da je  $e(u) \cdot e'(u) = 0$ . Analogno dobivamo da je  $e' \cdot e'' = 0$  (primijenimo isti postupak na polje  $e'$ ).

**Definicija 2.3.3.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je razvojna ako je  $K = 0$ . U suprotnom kažemo da je ploha  $S$  vitopera.*

Pravčaste minimalne i maksimalne plohe možemo podijeliti u dvije potklase: razvojne ( $H = K = 0$ ) i vitopere ( $H = 0$  i  $K \neq 0$ ). Svaku od te dvije potklase ćemo istražiti zasebno. Prvo ćemo se baviti plohama za koje je  $H = K = 0$ . Primjer takve plohe je ravnina.

**Teorem 2.3.4.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Pretpostavimo da se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$  za svaku točku  $p \in S$ . Tada je  $H = K = 0$  ako i samo ako je  $S$  ravnina.*

*Dokaz.* Neka je  $p \in S$  točka. Budući da se operator  $S_p$  može dijagonalizirati nad  $\mathbb{R}$ ,

matrica  $\begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}$  je jedan matrični prikaz operatora  $S_p$ .

Ako je  $H = K = 0$ , iz relacija (1.6) i (1.7) slijedi da je  $k_1(p) = k_2(p) = 0$ . Iz toga slijedi da je  $S_p$  nuloperator (naime, tada je nulmatrica jedan matrični prikaz). Kako to vrijedi za sve točke  $p \in S$ , iz same definicije operatora oblika plohe slijedi da je  $n = \text{const.}$ , pa je  $S$  ravnina.

Obratno, ako je  $S$  ravnina, onda za svaku točku  $p \in S$  je  $S_p = 0$ , odakle slijedi da je  $H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr } S_p = 0$  i  $K(p) = \det S_p = 0$ .  $\square$

**Korolar 2.3.5.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je  $H = K = 0$  ako i samo ako je  $S$  (prostorna) ravnina.*

*Dokaz.* Tvrdnja slijedi izravno iz teorema 1.4.9 i 2.3.4.  $\square$

Sada ćemo dati opći karakterizacijski teorem za pravčaste plohe za koje je  $H = K = 0$ .

**Teorem 2.3.6.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana pravčasta ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizirana kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$ ,  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ . Pretpostavimo da vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni ni za koji  $u \in I$ . Tada je  $H = K = 0$  ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:*



1.  $e$  je konstantno svjetlosno polje,
2.  $e$  je svjetlosno polje i vektor  $c'(u)$  je kolinearan s vektorom  $e(u)$  za svaki  $u \in I$ ,
3. vektori  $c'(u)$  i  $e''(u)$  su kolinearni s vektorom  $e(u)$  za svaki  $u \in I$ ,
4.  $e = \text{const.}$  i skup  $\{c'(u), e(u), c''(u)\}$  je linearno zavisian za svaki  $u \in I$ .

*Dokaz.* Prema napomeni 2.3.2, možemo reparametrizirati tako da je  $c' \cdot e' = 0$ . Imamo:  $\mathbf{x}_u(u, v) = c'(u) + ve'(u)$ ,  $\mathbf{x}_v(u, v) = e(u)$ ,  $\mathbf{x}_{uu}(u, v) = c''(u) + ve''(u)$ ,  $\mathbf{x}_{uv}(u, v) = e'(u)$ ,  $\mathbf{x}_{vv}(u, v) = 0$ . Nadalje,  $n = \frac{w}{\|w\|}$ , gdje je  $w = (c'(u) + ve'(u)) \times e(u) = c'(u) \times e(u) + v(e'(u) \times e(u))$ . Fundamentalne veličine prvog reda su:  $F = (c'(u) + ve'(u)) \cdot e(u) = c'(u) \cdot e(u)$  (prema napomeni 2.3.2 je  $e'(u) \perp e(u)$ ),  $G = e(u) \cdot e(u)$ . Fundamentalne veličine drugog reda računamo koristeći lemu 1.3.20:  $M = e'(u) \cdot \frac{1}{\|w\|} [c'(u) \times e(u) + v(e'(u) \times e(u))] = \frac{1}{\|w\|} [e'(u) \cdot (c'(u) \times e(u))]$  (naime,  $e'(u) \cdot (e'(u) \times e(u)) = \det(e'(u), e(u), e'(u)) = 0$  jer ta determinanta ima dva jednaka retka),  $N = 0 \cdot n = 0$ .

Iz relacije (1.4) imamo:  $K = 0 \Leftrightarrow EN - M^2 = 0 \Leftrightarrow E \cdot 0 - M^2 = 0 \Leftrightarrow M = 0$ . Zatim iz relacije (1.5) imamo:  $H = 0 \Leftrightarrow EN - 2FM + GL = 0 \Leftrightarrow E \cdot 0 - 2F \cdot 0 + GL = 0 \Leftrightarrow GL = 0$ . Dakle,  $H = K = 0 \Leftrightarrow M = GL = 0$ .

Pretpostavimo da je  $H = K = 0$ . Razlikujemo dva slučaja.

*Slučaj 1.* Pretpostavimo da je  $M = G = 0$ . Iz  $G = 0$  slijedi da je polje  $e$  svjetlosno. Pretpostavimo da je  $e \neq \text{const.} \Rightarrow e' \neq 0$ . Tada je, zbog neprekidnosti,  $e'(u) \neq 0$  za svaki  $u$  iz nekog otvorenog intervala  $I' \subseteq I$  (kao u napomeni 2.3.2). Iz  $e'(u) \perp c'(u)$  i  $e'(u) \perp e(u)$  slijedi da je vektor  $e'(u)$  kolinearan s vektorom  $c'(u) \times e(u)$  (to slijedi iz propozicije 1.1.13, 8. i 6.). Ako je  $c'(u) \times e(u) = 0$  za svaki  $u \in I'$ , onda su vektori  $c'(u)$  i  $e(u)$  kolinearni. Dakle, tada vrijedi tvrdnja 2. U suprotnom, opet zbog neprekidnosti, imamo da je  $c'(u) \times e(u) \neq 0$  za svaki  $u$  iz nekog otvorenog intervala  $I'' \subseteq I'$ , pa onda za  $u \in I''$  imamo da je  $e'(u) = \alpha(c'(u) \times e(u))$  za neki  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Onda imamo:  $M = \frac{1}{\|w\|} [e'(u) \cdot \alpha e'(u)] = \frac{\alpha}{\|w\|} (e'(u) \cdot e'(u))$ . Mora biti  $\alpha \neq 0$  zbog  $e'(u) \neq 0$ . I onda, kako vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni ni nulvektor, slijedi da je  $M \neq 0 \Rightarrow K = -M^2 \neq 0$ , što je kontradikcija. Dakle, pretpostavka je pogrešna, mora biti  $e = \text{const.}$  Dakle,  $e$  je konstantno svjetlosno polje, tj. vrijedi tvrdnja 1.

*Slučaj 2.* Pretpostavimo da je  $M = L = 0$ . Imamo:  $M = \det(c'(u), e(u), e'(u)) = 0$  (\*).

Pretpostavimo da je  $e' = 0$ . Tada slijedi da je  $e = \text{const.}$  Nadalje,  $e'' = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_{uu}(u, v) = c''(u)$  i  $n = c'(u) \times e(u)$ , pa imamo:  $L = c''(u) \cdot (c'(u) \times e(u)) = \det(c'(u), e(u), c''(u))$ . Iz  $L = 0$  onda slijedi da je skup  $\{c'(u), e(u), c''(u)\}$  linearno zavisian. Dakle, vrijedi tvrdnja 4. Pretpostavimo sada da je  $e' \neq 0$ . Tada je zbog neprekidnosti  $e'(u) \neq 0$  za svaki  $u$  iz nekog otvorenog intervala  $I' \subseteq I$ . Tada za  $u \in I'$  vektor  $e(u)$  ne može biti svjetlosni jer u suprotnom dobijemo kontradikciju kao u slučaju 1. Onda slijedi da je skup  $\{e(u), e'(u)\}$  linearno nezavisian. Naime, tada je  $e(u), e'(u) \neq 0$  i  $e(u) \perp e'(u)$  (prema napomeni 2.3.2). Ne može biti  $e(u) = 0$  jer bi tada bilo  $n = 0$ , što je kontradikcija jer je  $n$  jedinično polje

(tj. to je kontradikcija s regularnošću plohe  $S$ ). Kad bi vektori  $e(u)$  i  $e'(u)$  bili kolinearni, onda bi zbog okomitosti slijedilo da su oba vektora svjetlosna, što je kontradikcija jer vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni. Iz (\*) slijedi da je skup  $\{c'(u), e(u), e'(u)\}$  linearno zavisian. Kako je skup  $\{e(u), e'(u)\}$  linearno nezavisian, slijedi da je  $c'(u) = \alpha e(u) + \beta e'(u)$  za neke  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ako tu jednakost skalarno pomnožimo s  $e'(u)$ , dobivamo:  $c'(u) \cdot e'(u) = \alpha(e(u) \cdot e'(u)) + \beta(e'(u) \cdot e'(u))$ . Prema napomeni 2.3.2 je  $c'(u) \cdot e'(u) = e(u) \cdot e'(u) = 0$ , a kako vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni ni nulvektor, slijedi da je  $e'(u) \cdot e'(u) \neq 0$ . Dakle,  $\beta = 0 \Rightarrow c'(u) = \alpha e(u)$ , tj. vektor  $c'(u)$  je kolinearan s vektorom  $e(u)$ . Iz toga onda slijedi da je  $c'(u) \times e(u) = 0 \Rightarrow n = v(e'(u) \times e(u)) \Rightarrow L = (c''(u) + ve''(u)) \cdot (v(e'(u) \times e(u))) = v[c''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] + v^2[e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))]$ . Ako fiksiramo  $u \in I'$ , onda je  $L$  polinom u varijabli  $v$ . Kako je  $L = 0$  za svaki  $v \in \mathbb{R}$ , po teoremu o nulpolinomu slijedi da je  $e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u)) = \det(e'(u), e(u), e''(u)) = 0$ . Opet, kako je skup  $\{e(u), e'(u)\}$  linearno nezavisian, slijedi da je  $e''(u) = \gamma e(u) + \delta e'(u)$  za neke  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Ako to skalarno pomnožimo s  $e'(u)$  i iskoristimo da vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni ni nulvektor, dobivamo da je  $\delta = 0 \Rightarrow e''(u) = \gamma e(u)$ , tj. vektor  $e''(u)$  je kolinearan s vektorom  $e(u)$ . Time smo dobili da vrijedi tvrdnja 3.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi neka od tvrdnji 1. - 4. Redom po slučajevima pokazujemo da je  $H = K = 0 \Leftrightarrow M = GL = 0$ .

1. Imamo da je  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve$ , gdje je  $e \in \mathbb{R}_1^3$  svjetlosni vektor. Tada je  $G = e \cdot e = 0$ . Nadalje,  $\mathbf{x}_{uv} = 0 \Rightarrow M = \mathbf{x}_{uv} \cdot n = 0$ .
2. Kao u 1. imamo da je  $G = 0$ . Nadalje, kako su vektori  $c'(u)$  i  $e(u)$  kolinearni, imamo da je  $c'(u) \times e(u) = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{\|w\|}[v(e'(u) \times e(u))] \Rightarrow M = e'(u) \cdot \frac{1}{\|w\|}[v(e'(u) \times e(u))] = \frac{v}{\|w\|}[e'(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] = \frac{v}{\|w\|}\det(e'(u), e(u), e'(u)) = 0$ .
3. Kao u 2. imamo da je  $n = \frac{1}{\|w\|}[v(e'(u) \times e(u))]$  i  $M = 0$ . Nadalje, imamo:  $L = (c''(u) + ve''(u)) \cdot n = \frac{v}{\|w\|}[c''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] + \frac{v^2}{\|w\|}[e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] = \frac{v}{\|w\|} \cdot 0 + \frac{v^2}{\|w\|} \cdot 0 = 0$ . Ovdje je  $c''(u) \cdot (e'(u) \times e(u)) = 0$  jer je  $c'(u) = \lambda(u)e(u)$ , pa kad to deriviramo, dobivamo  $c''(u) = \lambda'(u)e(u) + \lambda(u)e'(u)$ .
4. Imamo:  $e = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{x}_{uv} = e' = 0 \Rightarrow M = \mathbf{x}_{uv} \cdot n = 0$ . Nadalje,  $e' = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{\|w\|}(c'(u) \times e(u)) \Rightarrow L = (c''(u) + ve''(u)) \cdot n = \frac{1}{\|w\|}[c''(u) \cdot (c'(u) \times e(u))] + \frac{v}{\|w\|}[e''(u) \cdot (c'(u) \times e(u))]$ . Kako je skup  $\{c'(u), e(u), c''(u)\}$  linearno zavisian, slijedi da je  $c''(u) \cdot (c'(u) \times e(u)) = 0$ , a kako je  $e' = 0$ , imamo da je i  $e'' = 0$ , pa je  $e''(u) \cdot (c'(u) \times e(u)) = 0$ . Dakle,  $L = 0$ .

□

**Napomena 2.3.7.** Slučaj kad je  $e'(u)$  svjetlosni vektor za neki  $u \in I$  nećemo razmatrati.

Plohe za koje je  $H = K = 0$  su potklasa ploha za koje je  $H^2 = K$ . Te plohe zovemo  $B$ -namotajne plohe (ako im se operator oblika plohe ne može dijagonalizirati). One su zanimljive jer nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru (vidi teorem 1.4.11). Naime, za plohe u euklidskom prostoru, operator oblika plohe se uvijek dijagonalizira.

Sada prelazimo na pravčaste plohe za koje je  $H = 0$  i  $K \neq 0$ .

**Napomena 2.3.8.** Krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  za koju postoji pravac  $q \subseteq \mathbb{R}_1^3$  takav da vektor  $c'(u)$  zatvara konstantan kut s pravcem  $q$  zovemo zavojnica (spirala). Pravac  $q$  zovemo os zavojnice  $c$ .

Definicija koja slijedi je geometrijska definicija helikoida.

**Definicija 2.3.9.** Plohu  $S$  u  $\mathbb{R}_1^3$  za koju postoji pravac  $q \subseteq \mathbb{R}_1^3$  tako da za svaku točku  $p \in S$  postoji zavojnica koja prolazi točkom  $p$ , čitava leži na plohi  $S$  i njena os je pravac  $q$  zovemo helikoid. Pravac  $q$  zovemo os helikoida  $S$ .

**Napomena 2.3.10.** Može se pokazati da je svaki helikoid pravčasta ploha i ako je orijentiran, onda je za njega  $H = 0$  i  $K \neq 0$ .

Sada ćemo kroz primjere upoznati različite tipove helikoida u prostoru Minkowskog. Razlikujemo sedam tipova (orijentabilnih) helikoida. Os helikoida može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac, a orijentabilni helikoid može biti prostorni ili vremenski. Kao i kod katenoida, radi jednostavnosti ćemo promatrati samo helikoide čija je os  $z$ -os,  $x$ -os ili pravac  $l$ .

**Primjer 2.3.11. (prostorni i vremenski helikoid s prostornom osi)** Helikoid  $S$  oko  $z$ -osi je dan nekom od sljedeće dvije karte:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \operatorname{sh} u, v \operatorname{ch} u, hu) = (0, 0, hu) + v(\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u, 0)$$

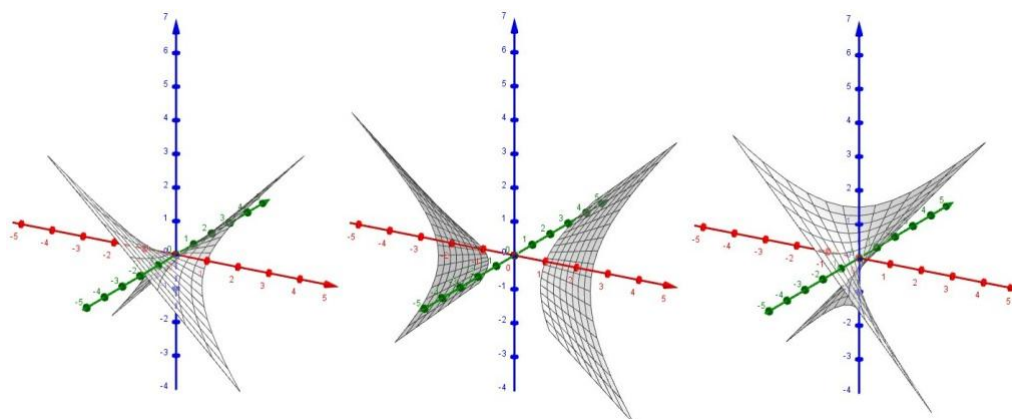
$$\mathbf{x}(u, v) = (v \operatorname{ch} u, v \operatorname{sh} u, hu) = (0, 0, hu) + v(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u, 0)$$

Pri tome je  $h \neq 0$  konstanta. Uočimo da te parametrizacije zadovoljavaju uvjete iz napomene 2.3.2. Za prvu parametrizaciju primjenom Lagrangeovog identiteta dobivamo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) = (-v \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + v \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + h \cdot 0)^2 \\ &\quad - (-v^2 \operatorname{ch}^2 u + v^2 \operatorname{sh}^2 u + h^2)(-\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u + 0^2) = v^2 - h^2 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi: ploha  $S$  je prostorna (vremenska) ako i samo ako je  $v^2 - h^2 < 0$  ( $> 0$ )  $\Leftrightarrow v \in (-|h|, |h|)$  ( $v \in (-\infty, -|h|) \cup (|h|, +\infty)$ ). Implicitna jednadžba tih dvaju helikoida je  $(-x^2 + y^2) \operatorname{ch}^2 \frac{z}{h} = y^2$ .

Za drugu parametrizaciju imamo:  $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = \dots = v^2 + h^2 > 0$ . Iz toga slijedi da je ploha  $S$  vremenska. Implicitna jednadžba tog helikoida je  $(x^2 - y^2) \operatorname{ch}^2 \frac{z}{h} = x^2$ .

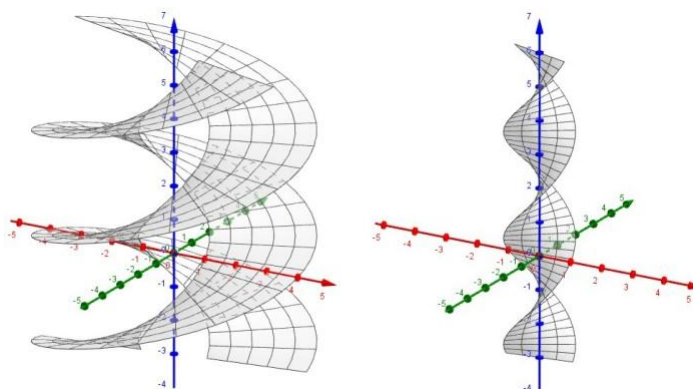


Slika 2.4: Prostorni i vremenski helikoid  $(-x^2 + y^2) \operatorname{ch}^2 z = y^2$  te helikoid  $(x^2 - y^2) \operatorname{ch}^2 z = x^2$

**Primjer 2.3.12. (prostorni i vremenski helikoid s vremenskom osi)** Helikoid  $S$  oko  $x$ -osi je dan kartom  $\mathbf{x}(u, v) = (hu, v \cos u, v \sin u) = (hu, 0, 0) + v(0, \cos u, \sin u)$ . Ova parametrizacija također zadovoljava uvjete iz napomene 2.3.2. Računamo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) = (-h \cdot 0 - v \sin u \cos u + v \cos u \sin u)^2 \\ &\quad - (-h^2 + v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u)(-0^2 + \cos^2 u + \sin^2 u) = h^2 - v^2 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi: ploha  $S$  je prostorna (vremenska) ako i samo ako je  $v \in (-\infty, -|h|) \cup (|h|, +\infty)$  ( $v \in (-|h|, |h|)$ ). Implicitna jednadžba tih helikoida je  $(x^2 + y^2) \cos^2 \frac{x}{h} = y^2$ .

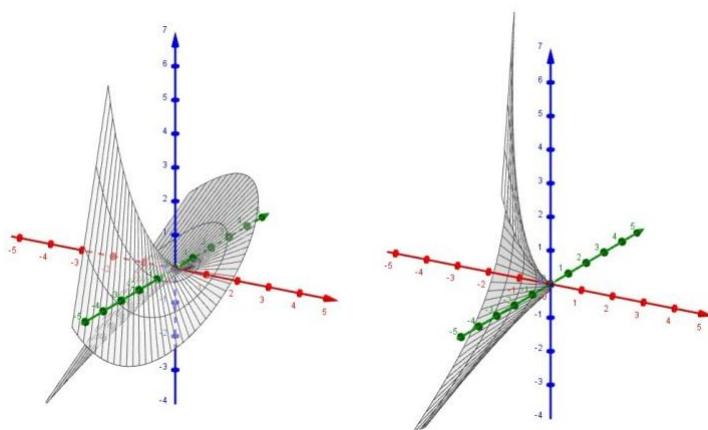


Slika 2.5: Prostorni i vremenski helikoid  $(x^2 + y^2) \cos^2 x = y^2$

**Primjer 2.3.13. (prostorni i vremenski helikoid sa svjetlosnom osi)** Stavimo  $a_{1,2} = (\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  i  $a_3 = e_2$ . Helikoid  $S$  oko pravca  $l$  je dan kartom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \frac{1}{6\sqrt{6}}(-6ua_1 + u^3a_2 - 3u^2a_3) + v \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}(0 \cdot a_1 + ua_2 - a_3) \\ &= \frac{1}{36}(6u\sqrt{3} + u^3\sqrt{3} + 18uv\sqrt{3}, -3u^2\sqrt{6} - 18v\sqrt{6}, -6u\sqrt{3} + u^3\sqrt{3} + 18uv\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Može se pokazati da je ploha  $S$  vremenska za  $v > 0$  i prostorna za  $v < 0$  (vidi [13]). Izvedimo implicitnu jednadžbu plohe  $S$  iz prikaza u nulbazi  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Stavimo  $x' = -\frac{u}{\sqrt{6}}$ ,  $y' = \frac{u^3}{6\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{2}uv$ ,  $z' = -\frac{u^2}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{2}v$ . Tada je  $u = -x'\sqrt{6}$ , a iz druge i treće jednakosti dobivamo:  $v = \frac{2}{u\sqrt{6}}y' - \frac{u^2}{18}$ ,  $v = -\frac{2}{\sqrt{6}}z' - \frac{u^2}{6}$ . I sada izjednačimo desne strane u tim dvjema jednakostima i uvrstimo u to izraz za  $u$  te sredimo. Dobijemo:  $2x'^3 - y' + \sqrt{6}x'z' = 0$ . Pri tome su  $x', y', z'$  koordinate točke  $p = (x, y, z) \in S$  u bazi  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , tj.  $p = x'a_1 + y'a_2 + z'a_3 = (\frac{-x'+z'}{\sqrt{2}}, y', \frac{x'+z'}{\sqrt{2}})$ . Iz  $x = \frac{-x'+z'}{\sqrt{2}}$ ,  $y = y'$ ,  $z = \frac{x'+z'}{\sqrt{2}}$  slijedi  $x' = \frac{x-z}{\sqrt{2}}$ ,  $y' = y$ ,  $z' = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$ . Kad to uvrstimo gore, dobivamo traženu implicitnu jednadžbu:  $(x-z)^3 + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}(x^2 - z^2) = 0$ . Helikoid sa svjetlosnom osi je algebarska ploha 3. reda.



Slika 2.6: Prostorni i vremenski helikoid  $(x-z)^3 + \sqrt{2}y + 2\sqrt{3}(x^2 - z^2) = 0$

**Primjer 2.3.14.** Vremenski katenoidi i helikoidi čine parove adjungiranih ploha. Preciznije, vremenski katenoid i helikoid s prostornom (vremenskom, svjetlosnom) osi su adjungirane plohe. Pokazat ćemo to na primjeru vremenskog katenoida i helikoida oko  $x$ -osi. Prema primjeru 2.2.11, parametrizacija vremenskog katenoida oko  $x$ -osi je  $\mathbf{x}(u, v) =$

$(u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$  (radi jednostavnosti smo uzeli  $C = 1, D = 0$ ). To možemo reparametrizirati tako da stavimo  $u = \frac{s-t}{\sqrt{2}}, v = \frac{s+t}{\sqrt{2}}$ . Tada primjenom formula za pretvaranje umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj dobivamo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(s, t) &= \left( \frac{s-t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s-t}{\sqrt{2}} \cos \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s-t}{\sqrt{2}} \sin \frac{s+t}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left( \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} + \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left( \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right) + \left( -\frac{t}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right) = c_1(s) + c_2(t)\end{aligned}$$

Odmah se vidi da su krivulje  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne, tj. da je  $c_1'(s) \cdot c_1'(s) = c_2'(t) \cdot c_2'(t) = 0$ . Po definiciji, adjungirana ploha je

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(s, t) = c_1(s) - c_2(t) = \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

Sada ponovo reparametriziramo tako da vratimo stare parametre, ali ih zamijenimo, tj. stavimo  $u = \frac{s-t}{\sqrt{2}}, v = \frac{s+t}{\sqrt{2}}$ . I onda primjenom adicijskih formula dobivamo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(u, v) &= \left( u, \sin \frac{u+v}{2} + \sin \frac{u-v}{2}, -\cos \frac{u+v}{2} - \cos \frac{u-v}{2} \right) \\ &= \left( u, 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}, -2 \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \right) \\ &= \left( u, -2 \sin \left(-\frac{u}{2}\right) \cos \frac{v}{2}, -2 \cos \left(-\frac{u}{2}\right) \cos \frac{v}{2} \right)\end{aligned}$$

I sada reparametriziramo ovako:  $u' = -\frac{u}{2}, v' = -2 \cos \frac{v}{2}$ . Dobivamo:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(u', v') = (-2u', v' \sin u', v' \cos u')$$

Ovo je upravo parametrizacija vremenskog helikoida oko  $x$ -osi iz primjera 2.3.12. Uočimo da je ovdje  $h = -2$  i  $v' = -2 \cos \frac{v}{2} \in (-2, 2)$ , što i treba biti da bi helikoid bio vremenski. Sličan račun je i za ostale parove vremenskih katenoida i helikoida (vidi [13]).

Za kraj ćemo dokazati da su helikoidi jedine pravčaste vitopere minimalne i maksimalne plohe.

**Teorem 2.3.15.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana pravčasta ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizirana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ . Pretpostavimo da vektori  $e(u)$  i  $e'(u)$  nisu svjetlosni ni nulvektori ni za koji  $u$ . Ako je  $H = 0$  i  $K \neq 0$ , onda je  $S$  helikoid.*

*Dokaz.* Izračunajmo fundamentalne veličine kao na početku dokaza teorema 2.3.6. Prema napomeni 2.3.2 možemo pretpostaviti da je  $\|e(u)\| = \|e'(u)\| = 1$  i  $c'(u) \cdot e'(u) = 0$  za sve  $u \in I$ . Stavimo  $e(u) \cdot e(u) =: \epsilon$ ,  $e'(u) \cdot e'(u) =: \eta$ . Uočimo da  $\epsilon$  i  $\eta$  moraju biti konstante jer su to neprekidne funkcije iz povezanog skupa  $I$  u skup  $\{-1, 1\}$ . I sad imamo:  $F = c'(u) \cdot e(u)$ ,  $G = \epsilon$ .

Da bismo izračunali fund. veličine drugog reda, koristimo sljedeći trik: skup  $\{e(u), e'(u)\}$  je ortonormiran, pa iz leme 1.1.18 slijedi da je skup  $\{e(u), e'(u), e(u) \times e'(u)\}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}_1^3$ . Onda možemo vektor  $c'(u)$  prikazati u toj bazi:  $c'(u) = \alpha e(u) + \beta e'(u) + \gamma(e(u) \times e'(u))$ . Ako tu jednakost skalarno pomnožimo s  $e(u)$ , dobivamo da je  $\alpha = \epsilon(c'(u) \cdot e(u)) = \epsilon F(u)$ . Analogno dobivamo:  $\beta = 0$ ,  $\gamma = -\epsilon\eta[c'(u) \cdot (e(u) \times e'(u))]$  (naime, iz Lagr. id. slijedi da je  $(e(u) \times e'(u)) \cdot (e(u) \times e'(u)) = -\epsilon\eta$ ). Označimo  $Q(u) := c'(u) \cdot (e(u) \times e'(u))$ . Analogno prikažemo vektor  $e''(u)$  u toj bazi:  $e''(u) = \epsilon(e''(u) \cdot e(u))e(u) - \epsilon\eta[e''(u) \cdot (e(u) \times e'(u))] = \epsilon\eta[-e(u) + J(u)(e(u) \times e'(u))]$ . Ovdje smo označili  $J(u) := \det(e''(u), e'(u), e(u))$  i još smo deriviranjem  $e'(u) \cdot e(u) = 0$  dobili da je  $e''(u) \cdot e(u) = -\eta$ . Jedinična normala je  $n = \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}[c'(u) \times e(u) + v(e'(u) \times e(u))]$ , pa imamo:

$$\begin{aligned} L &= (c''(u) + ve''(u)) \cdot n = \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}[c''(u) \cdot (c'(u) \times e(u)) \\ &\quad + v[c''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] + v[e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))] + v^2[e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u))]] \\ &= \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}[\epsilon Q(u)(F(u) - Q(u)J(u)) - Q'(u)v + J(u)v^2] \end{aligned}$$

Treba opravdati zadnju jednakost. Deriviranjem jednakosti  $c'(u) = \epsilon F(u)e(u) - \epsilon\eta Q(u)(e(u) \times e'(u))$  dobivamo izraz za  $c''(u)$ . Za deriviranje vektorskog produkta koristimo Leibnizovo pravilo (lema 1.3.2). I onda izraze za  $c'(u)$  i  $c''(u)$  uvrstimo u  $c''(u) \cdot (c'(u) \times e(u))$  i sredimo te dobijemo da je to jednako  $\epsilon Q(u)(F(u) - Q(u)J(u))$ . Analogno:  $c''(u) \cdot (e'(u) \times e(u)) + e''(u) \cdot (e'(u) \times e(u)) = -Q'(u)$ . Taj račun ćemo preskočiti jer je dugačak. Još imamo:  $M = \frac{1}{\|w\|}[e'(u) \cdot (c'(u) \times e(u))] = \frac{Q(u)}{\sqrt{|EG-F^2|}}$  i  $N = 0$ . I sada iz relacija (1.4) i (1.5) imamo:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-Q(u)^2}{(EG-F^2)^2} \\ H &= \frac{-2F(u)Q(u) + \epsilon^2 Q(u)(F(u) - Q(u)J(u)) + \epsilon Q'(u)v + \epsilon J(u)v^2}{2|EG-F^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= (\epsilon^2 = 1) = \frac{-Q(u)(F(u) + Q(u)J(u)) + \epsilon Q'(u)v + \epsilon J(u)v^2}{2|EG-F^2|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Za fiksirani  $u$ ,  $H$  je polinom u varijabli  $v$ . Iz  $H = 0$ , po teoremu o nulpolinomu, slijedi da je  $J(u) = Q'(u) = -Q(u)(F(u) + Q(u)J(u)) = 0$ . Onda imamo:  $Q(u)(F(u) + Q(u) \cdot 0) = 0$ ,

odakle zbog  $K \neq 0 \Leftrightarrow Q(u) \neq 0$  slijedi  $F(u) = 0$ . Time smo dobili da je  $J = F = Q' = 0$ . Kad to uvrstimo u izraze za  $c'(u)$  i  $e''(u)$ , dobivamo:

$$\begin{aligned}c'(u) &= -\epsilon\eta Q(e(u) \times e'(u)) \\ e''(u) &= -\epsilon\eta e(u)\end{aligned}$$

Uočimo da iz  $Q' = 0$  slijedi  $Q = \text{const.}$ . Time smo zapravo dobili jedan sustav ODJ, koji sada samo treba riješiti. U drugoj jednadžbi se pojavljuje samo jedna funkcija. To je linearna ODJ 2. reda koju rješavamo standardnom metodom. Karakteristični polinom je  $p(\lambda) = \lambda^2 + \epsilon\eta$ , nultočke su  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\epsilon\eta}$ . Budući da je  $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ , imamo dvije mogućnosti.

*Slučaj 1.* Pretpostavimo da je  $\epsilon\eta = -1$ . Tada je opće rješenje  $e(u) = e^u a + e^{-u} b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_1^3$ . Računamo:  $e(u) \times e'(u) = (e^u a + e^{-u} b) \times (e^u a - e^{-u} b) = -(a \times b) + b \times a = -2(a \times b)$ . I onda iz prve jednadžbe imamo:  $c(u) = -2Q(\int du)(a \times b) = -2Q(u + C)(a \times b)$ . Još imamo:  $Q = c'(u) \cdot (e(u) \times e'(u)) = (-2Q(a \times b)) \cdot (-2(a \times b)) = 4Q((a \times b) \cdot (a \times b))$ . Iz ove jednadžbe slijedi da mora biti  $(a \times b) \cdot (a \times b) = \frac{1}{4}$ . Mora biti  $Q \neq 0$  jer bi u suprotnom iz prve jednadžbe slijedilo da je  $c' = 0$ , što je kontradikcija jer je ploha  $c$  regularna. Dobili smo:

$$\mathbf{x}(u, v) = -2Q(u + C)(a \times b) + v(e^u a + e^{-u} b)$$

Ovo je poopćena parametrizacija helikoida s prostornom osi.

*Slučaj 2.* Pretpostavimo da je  $\epsilon\eta = 1$ . Tada je opće rješenje druge jednadžbe  $e(u) = (\cos u)a + (\sin u)b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_1^3$ . Računamo:  $e(u) \times e'(u) = ((\cos u)a + (\sin u)b) \times (-\sin u)a + (\cos u)b = (\cos^2 u)(a \times b) - (\sin^2 u)(b \times a) = a \times b$ . I onda iz prve jednadžbe imamo:  $c(u) = -Q(\int du)(a \times b) = -Q(u + C)(a \times b)$ . Još imamo:  $Q = -Q(a \times b) \cdot (a \times b) \Rightarrow (a \times b) \cdot (a \times b) = -1$ . Dakle, mora biti

$$\mathbf{x}(u, v) = -Q(u + C)(a \times b) + v((\cos u)a + (\sin u)b)$$

Ovo je poopćena parametrizacija helikoida s vremenskom osi. □

**Napomena 2.3.16.** Parametrizacije dobivene u dokazu teorema 2.3.15 zaista jesu poopćenja parametrizacija helikoida iz primjera 2.3.11 i 2.3.12. Primjerice, ako u formulu iz slučaja 1. uvrstimo  $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ ,  $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ ,  $C = 0$ , dobivamo:  $\mathbf{x}(u, v) = -2Q(u + 0)(-\frac{1}{4}e_3) + \frac{1}{2\sqrt{2}}v(e^u(1, 1, 0) + e^{-u}(1, -1, 0)) = (\frac{v}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} u, \frac{v}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} u, \frac{Q}{2}u)$ . Reparametriziranjem  $v' := \frac{v}{\sqrt{2}}$  dobivamo:  $\mathbf{x}(u, v') = (v' \operatorname{ch} u, v' \operatorname{sh} u, \frac{Q}{2}u)$ , što je parametrizacija jednog od helikoida iz primjera 2.3.11 uz  $h = \frac{Q}{2}$ .

**Napomena 2.3.17.** Tvrdnja teorema 2.3.15 vrijedi i bez dodatnih pretpostavki na polje  $e$ . Preciznije, postoje još dva dodatna slučaja uz ovaj iz teorema:



1. za svaki  $u$  vektor  $e'(u)$  je svjetlosni ili nulvektor, ali vektor  $e(u)$  nije svjetlosni (mora biti  $e \neq 0$  jer inače ploha  $S$  ne bi bila regularna),
2. za svaki  $u$  vektor  $e(u)$  je svjetlosni.

U prvom slučaju se dobije da je  $S$  helikoid sa svjetlosnom osi, a u drugom slučaju se dobije da za plohu  $S$  vrijedi  $H^2 = K$ , tj. da je  $S$   $B$ -namotajna ploha, pa se tada uopće ne može postići da bude  $H = 0$  i  $K \neq 0$ . Te dvije tvrdnje nećemo dokazivati. O tome se može pročitati u [1].

## 2.4 Weierstrassova reprezentacijska formula

Prije nego krenemo na izvod Weierstrassove reprezentacijske formule, trebamo se prisjetiti nekih osnovnih pojmova i rezultata iz kompleksne analize (bez dokaza).

**Definicija 2.4.1.** *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren skup. Za kompleksnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je holomorfna ako je  $f$  derivabilna i  $f'$  je neprekidna. Za funkciju  $f$  kažemo da je holomorfna u točki  $z_0 \in \Omega$  ako postoji otvorena okolina točke  $z_0$  na kojoj je  $f$  holomorfna.*

**Napomena 2.4.2.** 1. Funkcije  $f_1 := \operatorname{Re} f$  i  $f_2 := \operatorname{Im} f$  zovemo komponentne funkcije od  $f$ . Skup  $\mathbb{C}$  može se poistovjetiti s  $\mathbb{R}^2$  bijekcijom  $x + yi \mapsto (x, y)$ . Na taj način možemo  $f_1$  i  $f_2$  promatrati kao realne funkcije dviju realnih varijabli i tada možemo govoriti o njihovoj diferencijabilnosti.

2. Ako je  $f$  derivabilna, onda se  $f'$  može računati po sljedećim formulama:

$$f' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}i = \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}i$$

3. Vrijedi:  $f$  je derivabilna  $\Leftrightarrow f$  je holomorfna  $\Leftrightarrow f$  je derivabilna po volji mnogo puta  $\Leftrightarrow f$  je analitička. To ne vrijedi za realne funkcije realne varijable. Posebno, ako je  $f$  holomorfna, onda su  $f_1$  i  $f_2$  glatke (tj. klase  $C^\infty$ ) kao realne funkcije dviju realnih varijabli.

**Teorem 2.4.3. (Cauchy-Riemannov teorem)** *Kompleksna funkcija  $f = f_1 + f_2i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je holomorfna u točki  $z_0 = x_0 + y_0i \in \Omega$  ako i samo ako su funkcije  $f_1$  i  $f_2$  diferencijabilne u točki  $(x_0, y_0)$  te zadovoljavaju tzv. Cauchy-Riemannove uvjete:  $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)$ .*

**Napomena 2.4.4.** Ako je  $f = f_1 + f_2i$  holomorfna, onda su  $f_1$  i  $f_2$  harmoničke. Naime, kako je  $f$  holomorfna, slijedi da su  $f_1$  i  $f_2$  glatke, posebno i klase  $C^2$ . Deriviranjem jednakosti  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$  po  $x$  i jednakosti  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$  po  $y$  dobivamo:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$$

odakle slijedi  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0$ . Analogno se dokazuje da je  $f_2$  harmonička. Obrat ne vrijedi. Primjer: za funkciju  $f(x+yi) = x$ , komponentne funkcije  $f_1(x, y) = x$  i  $f_2(x, y) = 0$  su očito harmoničke, ali  $f$  svejedno nije holomorfna jer  $f_1$  i  $f_2$  ne zadovoljavaju C-R uvjete.

**Lema 2.4.5.** Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren i  $f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmonička funkcija. Tada postoji funkcija  $f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je kompleksna funkcija  $f := f_1 + f_2i : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfna.

*Dokaz.* Budući da je  $f_1$  harmonička, ona je po definiciji klase  $C^2$ , pa su njene parcijalne derivacije 1. reda neprekidne, odakle slijedi da su one integrabilne po objema varijablama. Ako integriramo jednakost  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$  po  $y$ , dobivamo:  $f_2(x, y) = \int \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) dy + C(x)$ , gdje je  $C(x)$  neka funkcija koja ovisi samo o  $x$ . Ako tu jednakost sada deriviramo po  $x$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) dy + C'(x) = \int \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) dy + C'(x) \\ &= - \int \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) dy + C'(x) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + C_1'(x) + C'(x) \end{aligned}$$

Ovdje smo redom koristili da je funkcija  $\frac{\partial f_1}{\partial x}$  klase  $C^1$  po varijabli  $x$ , pa smijemo parcijalnom derivacijom ući pod integral, zatim da je  $f_1$  harmonička (tj.  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0$ ) i na kraju N-L formulu. Iz toga vidimo da ako izaberemo  $C' := -C_1'$ , onda funkcije  $f_1$  i  $f_2$  zadovoljavaju C-R uvjete. Nadalje, funkcije  $f_1$  i  $f_2$  su obje klase  $C^2$ , pa su posebno i diferencijabilne. Onda iz C-R teorema slijedi da je funkcija  $f = f_1 + f_2i$  holomorfna.  $\square$

**Definicija 2.4.6.** Neka je  $\gamma = \xi + \eta i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  po dijelovima gladak put i  $f = f_1 + f_2i : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija. Integral funkcije  $f$  duž puta  $\gamma$  je dan formulom

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt := \int_a^b [f_1(\gamma(t)) \xi'(t) - f_2(\gamma(t)) \eta'(t)] dt \\ &+ i \int_a^b [f_2(\gamma(t)) \xi'(t) + f_1(\gamma(t)) \eta'(t)] dt \end{aligned}$$

**Napomena 2.4.7.** 1. Za skup  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  kažemo da je jednostavno povezan (1-povezan) ako je povezan putevima i intuitivno, nema "rupe". Primjer jednostavnog povezanog skupa je  $\mathbb{R}^n$ , a primjer skupa koji je povezan putevima, ali nije jednostavno povezan je  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

2. Za put  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je zatvoren ako je  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Teorem 2.4.8. (Cauchyjev teorem za derivaciju)** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren jednostavno povezan skup i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija. Ako  $f$  ima primitivnu funkciju, onda za svaki zatvoren po dijelovima gladak put  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  vrijedi  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

**Korolar 2.4.9.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  otvoren jednostavno povezan skup i  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija koja ima primitivnu funkciju  $F$ .

1. Za svaki po dijelovima gladak put  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  vrijedi  $\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .

2. Ako su  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$  putevi takvi da je  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$  i  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , onda je  $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$ .

**Napomena 2.4.10.** Holomorfna funkcija  $f \neq 0$  može imati samo izolirane nultočke. Ako je  $z_0 \in \Omega$  nultočka od  $f$ , onda najmanji broj  $m \in \mathbb{N}$  takav da je  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$  zovemo red nultočke  $z_0$  (ako postoji). To je poopćenje pojma kratnosti nultočke polinoma.

**Definicija 2.4.11.** Za kompleksnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da ima singularitet u točki  $z_0 \in \text{Int } \bar{\Omega}$  ako  $f$  nije holomorfna u točki  $z_0$  ili uopće nije definirana u  $z_0$ .

**Napomena 2.4.12. (vrste singulariteta)** Neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija i  $z_0 \in \text{Int } \bar{\Omega}$  singularitet od  $f$ . Za singularitet  $z_0$  kažemo da je izoliran ako postoji  $r > 0$  takav da je  $K(z_0, r) \subseteq \Omega$  i  $f$  je holomorfna na  $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ . Za izolirani singularitet  $z_0$  kažemo da je

1. uklonjiv ako se  $f$  može predefinirati ili dodefinirati u točki  $z_0$  tako da bude holomorfna na  $K(z_0, r)$ ,
2. pol ako  $f$  nije uklonjiv singularitet funkcije  $f$ , ali postoji  $m \in \mathbb{N}$  takav da je  $z_0$  uklonjiv singularitet funkcije  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ ,
3. bitan ako nije uklonjiv ni pol.

Ako je  $z_0$  pol od  $f$ , onda najmanji  $m \in \mathbb{N}$  sa svojstvom iz definicije zovemo red pola  $z_0$ .

**Definicija 2.4.13.** Za kompleksnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je meromorfna ako njen skup singulariteta nema gomilište u  $\Omega$  i ako su svi singulariteti od  $f$  uklonjivi ili polovi.

**Napomena 2.4.14.** Za meromorfne funkcije vrijedi sljedeći netrivialan rezultat: za svaku meromorfnu funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  postoje holomorfne funkcije  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h \neq 0$  takve da je  $f = \frac{g}{h}$ . Tada su polovi od  $f$  upravo nultočke od  $h$ . Drugim riječima, meromorfne funkcije su poopćenje racionalnih funkcija.

**Propozicija 2.4.15.** *Neka su  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcije takve da je  $f$  holomorfna i  $g$  meromorfna. Neka je  $S \subseteq \Omega$  skup svih singulariteta od  $g$ . Ako je  $f = g$  na  $\Omega \setminus S$ , onda je  $f = g$ . Posebno,  $g$  je holomorfna (tj. svi singulariteti od  $g$  su uklonjivi).*

Sada ćemo definirati pojam adjungirane plohe za maksimalne plohe. Kao i kod minimalnih ploha, konstrukcija adjungirane plohe se temelji na činjenici da svaku prostornu plohu možemo lokalno parametrizirati konformnom kartom (teorem 1.3.27). Nadalje, uvest ćemo pojam asocirane familije maksimalne plohe.

**Napomena 2.4.16.** *Neka je  $(S, n)$  maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  lokalno parametrizirana konformnom kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ ,  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Tada su funkcije  $x, y, z$ , prema korolaru 2.1.19, harmoničke. Onda iz leme 2.4.5 slijedi da postoje funkcije  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} : U \rightarrow \mathbb{R}$  takve da su kompleksne funkcije  $f_1 := x + \tilde{x}i$ ,  $f_2 := y + \tilde{y}i$ ,  $f_3 := z + \tilde{z}i$  holomorfne. Tada plohu  $\tilde{S}$  u  $\mathbb{R}_1^3$ , lokalno parametriziranu kartom  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) := (\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v), \tilde{z}(u, v))$ , zovemo adjungirana (konjugirana) ploha plohe  $S$ . Uočimo da je tada i ploha  $S$  adjungirana ploha plohe  $\tilde{S}$ . Naime, općenito vrijedi: ako je  $f = f_1 + f_2i$  holomorfna, onda je  $\tilde{f} = -f_2 + f_1i$  također holomorfna (samo se provjere C-R uvjeti). Negativan predznak ovdje ne smeta jer je kartom  $-\mathbf{x}(u, v)$  dana ponovo ploha  $S$ , samo s promijenjenim položajem u koordinatnom sustavu (centralna simetrija). Drugim riječima, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  čine par adjungiranih ploha.*

**Definicija 2.4.17.** *Neka su  $S_1$  i  $S_2$  regularne plohe u  $\mathbb{R}_1^3$ . Preslikavanje  $F : S_1 \rightarrow S_2$  takvo da za svaku točku  $p \in S_1$  vrijedi  $v \cdot w = DF(v) \cdot DF(w)$  za sve  $v, w \in T_p S_1$  zovemo lokalna izometrija ploha  $S_1$  i  $S_2$ . Ako je  $F$  još bijekcija, onda ju zovemo izometrija ploha  $S_1$  i  $S_2$ . Za plohe  $S_1$  i  $S_2$  kažemo da su (lokalno) izometrične ako postoji (lokalna) izometrija  $F : S_1 \rightarrow S_2$ .*

**Napomena 2.4.18.** 1. Kako je  $DF|_{T_p S_1} : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ , vrijedi  $DF(v), DF(w) \in T_{F(p)} S_2$ . Drugim riječima, lokalna izometrija čuva skalarni produkt između odgovarajućih vektora u tangencijalnim ravninama ploha  $S_1$  i  $S_2$  u točkama  $p$  i  $F(p)$ .

2. Zbog bilinearosti pseudoskalarog produkta na  $\mathbb{R}_1^3$ , svojstvo lokalne izometrije iz definicije dovoljno je provjeriti na bilo kojoj bazi za  $T_p S_1$ .

3. (Lokalna) izometričnost ploha je relacija ekvivalencije. Naime,  $id_S : S \rightarrow S$  je očito izometrija (posebno i lokalna izometrija) ploha, kompozicija dviju (lokalnih) izometrija ploha je (lokalna) izometrija ploha i inverz (lokalne) izometrije ploha je (lokalna) izometrija ploha.

**Teorem 2.4.19.** *Neka je  $(S, n)$  maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  lokalno parametrizirana konformnom kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ . Tada je formulom  $\mathbf{x}_\theta(u, v) := \mathbf{x}(u, v) \cos \theta + \tilde{\mathbf{x}}(u, v) \sin \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (lokalno) definirana jednoparametarska familija  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$  lokalno izometričnih maksimalnih ploha. Nadalje, za fiksni  $(u, v) \in U$ , tangencijalne ravnine ploha  $S_\theta$  u točkama  $\mathbf{x}_\theta(u, v)$  su međusobno paralelne za sve  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\theta \in \mathbb{R}$  proizvoljan. Neka je  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$  proizvoljna točka i  $p_\theta := \mathbf{x}_\theta(u, v) \in S_\theta$ . Deriviranjem jednakosti  $\mathbf{x}_\theta(u, v) = \mathbf{x}(u, v) \cos \theta + \tilde{\mathbf{x}}(u, v) \sin \theta$  po  $u$  i po  $v$  dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u}(u, v) &= \mathbf{x}_u(u, v) \cos \theta + \tilde{\mathbf{x}}_u(u, v) \sin \theta = (\text{C-R}) = \mathbf{x}_u(u, v) \cos \theta - \mathbf{x}_v(u, v) \sin \theta \\ \frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v}(u, v) &= \mathbf{x}_v(u, v) \cos \theta + \tilde{\mathbf{x}}_v(u, v) \sin \theta = (\text{C-R}) = \mathbf{x}_v(u, v) \cos \theta + \mathbf{x}_u(u, v) \sin \theta\end{aligned}$$

Gornje jednakosti su samo jednakosti vektorskih dijelova vektora u točki. Iz toga slijedi:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v} = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cos^2 \theta - (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \sin^2 \theta = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

Ovdje smo iskoristili da je  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_v = 0$  (propozicija 1.1.13, 6.). Iz toga slijedi da je  $n_\theta = n$  (jednakost vektorskih dijelova) za sve  $\theta \in \mathbb{R}$ . Posebno, ravnine  $T_{p_\theta} S_\theta$  i  $T_p S$  su paralelne. Pokazali smo i više: plohe  $S_\theta$  i  $S$  imaju usklađene orijentacije, tj. normale  $n_\theta(p_\theta)$  i  $n(p)$  su obje vanjske ili unutarnje.

Imamo:  $n_\theta \cdot n_\theta = n \cdot n < 0$ . Zadnja nejednakost vrijedi jer je ploha  $S$  prostorna. Iz toga slijedi da je ploha  $S_\theta$  također prostorna. Tu smo koristili propoziciju 1.2.21. Nadalje, deriviranjem gornjeg izraza za  $\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u}$  po  $u$  i izraza za  $\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v}$  po  $v$  dobivamo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_\theta}{\partial v^2} = \mathbf{x}_{uu} \cos \theta - \mathbf{x}_{vu} \sin \theta + \mathbf{x}_{vv} \cos \theta + \mathbf{x}_{uv} \sin \theta = (\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}) \cos \theta = 0 \cdot \cos \theta = 0$$

Predzadnja jednakost slijedi iz korolaru 2.1.19 jer je ploha  $S$  maksimalna. Zatim iz  $\frac{\partial^2 \mathbf{x}_\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_\theta}{\partial v^2} = 0$ , opet po korolaru 2.1.19, slijedi da je ploha  $S_\theta$  maksimalna.

Preslikavanje  $F_\theta : S \rightarrow S_\theta$  dano formulom  $F_\theta(p) := p_\theta$  je lokalna izometrija ploha  $S$  i  $S_\theta$ . Zaista, iz relacije za  $\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u}$  imamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u} &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) \cos^2 \theta - 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \cos \theta \sin \theta + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) \sin^2 \theta \\ &= E \cos^2 \theta - 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta = (E = G, F = 0) = E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili da je karta  $\mathbf{x}$  konformna. Analogno se dobije da je  $\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$  i  $\frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_\theta}{\partial v} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ . Kako je skup  $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$  baza za  $T_p S$ , prema napomeni 2.4.18, 2., preslikavanje  $F$  je lokalna izometrija (naime, presl.  $F$  je glatko jer iz definicije od  $p_\theta$  zapravo slijedi da je  $F = \mathbf{x}_\theta \circ \mathbf{x}^{-1}$ ). Posebno, karta  $\mathbf{x}_\theta$  je također konformna.  $\square$

**Korolar 2.4.20.** *Neka je  $(S, n)$  maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je ploha  $\tilde{S}$  također maksimalna. Nadalje, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  su lokalno izometrične.*

*Dokaz.* Budući da je  $\tilde{S} = S_{\frac{\pi}{2}}$ , tvrdnja izravno slijedi iz teorema 2.4.19.  $\square$

**Definicija 2.4.21.** Neka je  $(S, n)$  maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za  $\theta \in \mathbb{R}$ , plohu  $S_\theta$  zovemo asocirana ploha plohe  $S$ . Familiju  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$  zovemo asocirana familija plohe  $S$ .

**Napomena 2.4.22.** 1. Asociranu familiju je zanimljivo promatrati samo za  $\theta \in [0, 2\pi]$  jer se plohe iz tog intervala periodički ponavljaju. Preciznije,  $S_{\theta+2k\pi} = S_\theta$  za svaki  $k \in \mathbb{Z}$ . Štoviše, asociranu familiju je zanimljivo promatrati samo za  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  jer za  $\theta$  iz ostalih kvadranta, zbog formula redukcije za sinus i kosinus, dobivamo iste plohe, koje su eventualno centralnosimetrične s obzirom na ishodište onima za  $\theta$  iz prvog kvadranta.

2. Plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  pripadaju familiji  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ . Naime,  $S = S_0$  i  $\tilde{S} = S_{\frac{\pi}{2}}$ . Nadalje, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  imaju istu asociranu familiju, samo drukčije parametriziranu. Preciznije, vrijedi:  $\tilde{S}_\theta = S_{\frac{\pi}{2}-\theta}$  za svaki  $\theta \in \mathbb{R}$ . To slijedi iz činjenice da je ploha  $S$  adjungirana ploha plohe  $\tilde{S}$ , tj.  $\tilde{\tilde{S}} = S$ .

**Primjer 2.4.23.** Prostorni katenoidi i helikoidi čine parove adjungiranih ploha. Preciznije, prostorni katenoid i helikoid s prostornom (vremenskom, svjetlosnom) osi su adjungirane plohe. Pokazat ćemo to na primjeru prostornog katenoida i helikoida oko  $x$ -osi. Za prostorni katenoid  $S$  oko  $x$ -osi je  $x(u, v) = u$ ,  $y(u, v) = \operatorname{sh} u \cos v$ ,  $z(u, v) = \operatorname{sh} u \sin v$  (primjer 2.2.11). Onda imamo (kao u dokazu leme 2.4.5):

$$\begin{aligned}\tilde{x}(u, v) &= \int \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) dv = \int dv = v + C_1(u) \\ \tilde{y}(u, v) &= \int \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) dv = \int \operatorname{ch} u \cos v dv = \operatorname{ch} u \sin v + C_2(u) \\ \tilde{z}(u, v) &= \int \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) dv = \int \operatorname{ch} u \sin v dv = -\operatorname{ch} u \cos v + C_3(u)\end{aligned}$$

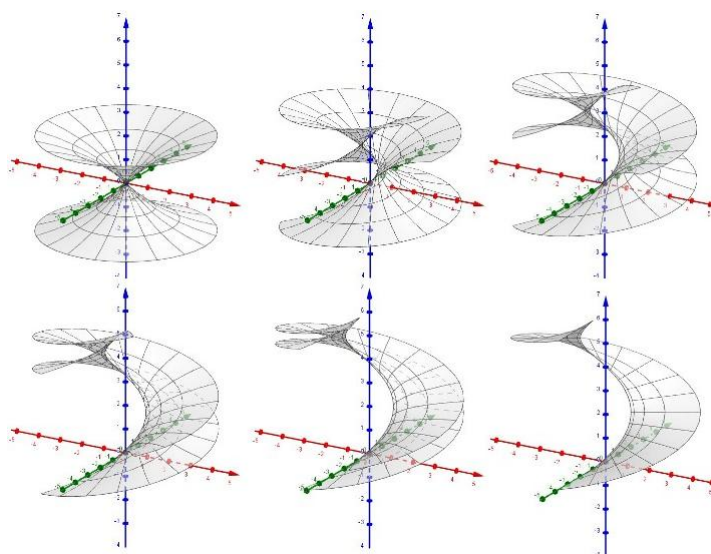
Da bismo odredili funkcije  $C_1, C_2, C_3$ , deriviramo funkcije  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  po  $u$  i iskoristimo drugi C-R uvjet. Imamo:  $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial u}(u, v) = C_1'(u) = (\text{C-R}) = -\frac{\partial \tilde{x}}{\partial v}(u, v) = 0 \Rightarrow C_1 = \text{const.}$ . Mi ćemo odabrati  $C_1 = 0$ . Analogno dobijemo da je  $C_2 = C_3 = 0$ . Po definiciji, ploha  $\tilde{S}$  je dana kartom  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = (v, \operatorname{ch} u \sin v, -\operatorname{ch} u \cos v)$ . Ako to reparametriziramo ovako:  $u' := -\operatorname{ch} u$ ,  $v' := -v$ , onda dobivamo  $\tilde{\mathbf{x}}(u', v') = (-v', u' \sin v', u' \cos v')$ , što je upravo parametrizacija prostornog helikoida oko  $x$ -osi iz primjera 2.3.11 uz  $h = -1$  i međusobno zamijenjene parametre  $u$  i  $v$ . Ovdje smo iskoristili da je  $-\sin v = \sin(-v)$  i  $\cos v = \cos(-v)$ . Uočimo da smo mogli napraviti reparametrizaciju jer je  $u' = -\operatorname{ch} u \leq -1$ , što i treba biti kod prostornog helikoida oko  $x$ -osi. Uočimo da prostorni katenoid oko  $x$ -osi korespondira samo s jednom od dvije "pruge" prostornog helikoida oko  $x$ -osi, onom za  $v < -1$ . Može se postići i korespondencija s drugom prugom prostornog helikoida (za  $v > 1$ ) ako promijenimo

predznake funkcija  $y$  i  $z$  (tada dobivamo isti katenoid, samo reparametriziran jer je sinus hiperbolni neparna funkcija).

Za  $\theta \in \mathbb{R}$ , karta koja lokalno parametrizira plohu  $S_\alpha$  je dana formulom

$$\mathbf{x}_\theta(u, v) = (u, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v) \cos \theta + (v, \operatorname{ch} u \sin v, -\operatorname{ch} u \cos v) \sin \theta$$

Sličan račun je i za ostale parove prostornih katenoida i helikoida (vidi [13]).



Slika 2.7: Plohe iz asociirane familije katenoida  $y^2 + z^2 = \operatorname{sh}^2 x$  za  $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Sada želimo pronaći sve maksimalne plohe, tj. opisati ih jednom formulom. Takvu formulu, koja opisuje sve plohe iz neke klase ploha, zovemo reprezentacijska formula.

**Teorem 2.4.24. (Weierstrassova reprezentacijska formula za maksimalne plohe)** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna parametrizacija,  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Pretpostavimo da je skup  $U$  jednostavno povezan. Tada je ploha  $S$  maksimalna ako i samo ako je*

$$x(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(w)g(w) dw + C_1 \quad (2.7)$$

$$y(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2}(1 + g(w)^2) dw + C_2 \quad (2.8)$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2}(1 - g(w)^2) dw + C_3 \quad (2.9)$$

gdje su  $z = u + vi$ ,  $z_0 \in U$ ,  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$  i  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksne funkcije takve da je  $f$  holomorfna,  $g$  meromorfna i  $f$  ima nultočke u polovima od  $g$  te je red svake nultočke točno dvostruko veći od reda pripadnog pola. (Gornji integrali su duž proizvoljnog puta od  $z_0$  do  $z$  u  $U$ .)

*Dokaz.* Pretpostavimo da je ploha  $S$  maksimalna. Tada su, prema korolaru 2.1.19, 1., funkcije  $x, y, z$  harmoničke. Onda iz leme 2.4.5 slijedi da postoje funkcije  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} : U \rightarrow \mathbb{R}$  takve da su kompleksne funkcije  $f_1 := x + \tilde{x}i$ ,  $f_2 := y + \tilde{y}i$ ,  $f_3 := z + \tilde{z}i$  holomorfne. Želimo pokazati da je  $-(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 = 0$  (\*). Računamo koristeći napomenu 2.4.2, 2.:

$$\begin{aligned} -(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 &= -\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}i\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}i\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}i\right)^2 \\ &= -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}i + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}i - \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}i - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ &\quad - \left[-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] + 2i\left[-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] \\ &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + 2i \cdot (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) = E - G + 2i \cdot F = (E = G, F = 0) = 0 \end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili da je karta  $\mathbf{x}$  konformna. Sada iz (\*) slijedi:  $(f_2')^2 + (f_3')^2 = (f_1')^2 \Rightarrow (f_2' - f_3'i)(f_2' + f_3'i) = (f_1')^2$ . Razlikujemo dva slučaja.

*Slučaj 1.* Ako je  $f_1' = 0$ , onda stavimo  $f := 2f_2'$  i  $g := 0$ . Tada su  $f$  i  $g$  očito holomorfne (posebno,  $g$  je meromorfna). Imamo:  $f_1' = 0 = f \cdot 0 = fg$ ,  $f_2' = \frac{f}{2} = \frac{f}{2}(1 + 0^2) = \frac{f}{2}(1 + g^2)$ . Nadalje, iz (\*) imamo:  $(f_2')^2 + (f_3')^2 = 0 \Rightarrow (f_3')^2 = -(f_2')^2 = -\frac{f^2}{4} \Rightarrow f_3' = \frac{if}{2} = \frac{if}{2}(1 - g^2)$ . Drugim riječima,  $f_1'$  je primitivna funkcija od  $fg$ , pa iz korolara 2.4.9 slijedi da je  $f_1(z) - f_1(z_0) = \int_{z_0}^z fg dw$ , a kako je  $x = \operatorname{Re} f_1$ , slijedi formula (2.7) uz  $C_1 = \operatorname{Re} f_1(z_0)$ . Analogno slijede formule (2.8) i (2.9).

*Slučaj 2.* Ako je  $f_1' \neq 0$ , stavimo  $f := f_2' - f_3'i$  i  $g := \frac{f_1'}{f_2' - f_3'i}$ . Tada je  $f$  očito analitička, a  $g$  je meromorfna (zato što je  $g$  kvocijent dviju holomorfnih funkcija). Nadalje,  $f$  ima nultočke upravo u polovima od  $g$  (napomena 2.4.14). U točkama u kojima  $f$  nema nultočku imamo:

$$fg^2 = (f_2' - f_3'i) \cdot \frac{(g_1')^2}{(f_2' - f_3'i)^2} = \frac{(f_2' - f_3'i)(f_2' + f_3'i)}{f_2' - f_3'i} = f_2' + f_3'i$$

Ako je  $f \neq 0$ , onda su nultočke od  $f$  izolirane (jer je  $f$  holomorfna), pa iz propozicije 2.4.15 slijedi da ta jednakost vrijedi i u nultočkama od  $f$ , tj.  $fg^2$  je holomorfna. Ako je  $f = 0$ , onda imamo da je  $f_2' - f_3'i = 0$ . No, to povlači  $f_2' + f_3'i = 0$ , pa tada gornja jednakost



očito svuda vrijedi. Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} f_1' &= (f_2' - f_3'i) \frac{f_1'}{f_2' - f_3'i} = fg \\ f_2' &= \frac{1}{2}(f_2' - f_3'i + f_2' + f_3'i) = \frac{1}{2}(f + fg^2) = \frac{f}{2}(1 + g^2) \\ f_3' &= \frac{i}{2}(f_2' - f_3'i - (f_2' + f_3'i)) = \frac{i}{2}(f - fg^2) = \frac{if}{2}(1 - g^2) \end{aligned}$$

I onda, kao u slučaju 1., iz korolara 2.4.9 slijede formule (2.7), (2.8), (2.9).

Pokažimo još zadnju tvrdnju. Neka je  $z \in U$  pol od  $g$  reda  $m$ . Tada je  $z$  pol od  $g^2$  reda  $2m$ . Budući da je  $fg^2$  holomorfna u oba slučaja, posebno imamo da  $z$  nije pol od  $fg^2$ , pa red od  $z$  kao nultočke od  $f$  mora biti barem  $2m$  (u suprotnom bi  $z$  bio pol od  $fg^2$ ). Red ne može biti veći od  $2m$  jer bi u suprotnom bilo  $f_1'(m) = f_2'(m) = f_3'(m) = 0 \Rightarrow x_u(m) = y_u(m) = z_u(m) = 0$ , što je kontradikcija s regularnošću plohe  $S$ : Time je jedan smjer dokazan.

Obratno, pretpostavimo da vrijede formule (2.7), (2.8), (2.9). Tada su funkcije  $F_1(z) := \int_{z_0}^z f(w)g(w)dw$ ,  $F_2(z) := \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2}(1 + g(w)^2)dw$ ,  $F_3(z) := \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2}(1 - g(w)^2)dw$  holomorfne. Pokažimo to. Iz korolara 2.4.9 slijedi da je  $F_1' = fg$ ,  $F_2' = \frac{f}{2}(1 + g^2)$ ,  $F_3' = \frac{if}{2}(1 - g^2)$ . Neka je  $z \in U$  pol od  $g$  reda  $m$ . Tada je po pretpostavci  $z$  nultočka od  $f$  reda  $2m$ , odakle slijedi da  $z$  nije pol funkcija  $fg$ ,  $\frac{f}{2}(1 + g^2)$ ,  $\frac{if}{2}(1 - g^2)$ . Dakle, te funkcije nemaju polova, pa su holomorfne. Posebno, neprekidne su. Time smo dobili da su funkcije  $F_1, F_2, F_3$  derivabilne i derivacije su im neprekidne, pa su one po definiciji holomorfne. Sada iz napomene 2.4.4 slijedi da su funkcije  $\operatorname{Re} F_1, \operatorname{Re} F_2, \operatorname{Re} F_3$  harmoničke. No, onda slijedi da su i  $x = \operatorname{Re} F_1 + C_1, y = \operatorname{Re} F_2 + C_2, z = \operatorname{Re} F_3 + C_3$  harmoničke, odakle po korolaru 2.1.19 slijedi da je ploha  $S$  maksimalna.  $\square$

**Teorem 2.4.25.** *Neka je  $(S, n)$  maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna karta,  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , gdje su funkcije  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  dane formulama (2.7), (2.8), (2.9).*

1. *Konformni faktor  $\lambda$  karte  $\mathbf{x}$  je dan formulom  $\lambda(u, v) = \frac{|f(z)|^2}{4}(1 - |g(z)|^2)^2$ ,  $z = u + vi$ .*
2. *Pretpostavimo da je  $|g| \neq 1$ . Tada je jedinično normalno polje  $n$  plohe  $S$  dano formulom  $n(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{1}{1 - |g(z)|^2}(\mathbf{x}(u, v), 1 + |g(z)|^2, 2 \operatorname{Re} g(z), 2 \operatorname{Im} g(z))$ ,  $z = u + vi$ .*

*Dokaz.* Neka su funkcije  $f_1, f_2, f_3$  dane kao u dokazu teorema 2.4.24.

1. Računamo po definiciji konformnog faktora.

$$\begin{aligned} \lambda &= E = (E = G) = \frac{1}{2}[E + G] = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-|f_1'|^2 + |f_2'|^2 + |f_3'|^2\right] = \frac{1}{2}\left[-|fg|^2 + \left|\frac{f}{2}(1 + g^2)\right|^2 + \left|\frac{if}{2}(1 - g^2)\right|^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|f|^2}{4}[-2|g|^2 + \frac{1}{2}|1 + g^2|^2 + \frac{1}{2}|1 - g^2|^2] = \frac{|f|^2}{4}[-2|g|^2 + \frac{1}{2}(1 + g^2)\overline{(1 + g^2)} \\
&+ \frac{1}{2}(1 - g^2)\overline{(1 - g^2)}] = \frac{|f|^2}{4}[-2|g|^2 + \frac{1}{2}(1 - g^2)(1 - \bar{g}^2) + \frac{1}{2}(1 + g^2)(1 + \bar{g}^2)] \\
&= \frac{|f|^2}{4}[-2|g|^2 + \frac{1}{2} - \frac{\bar{g}^2}{2} - \frac{g^2}{2} + \frac{(g\bar{g})^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{g}^2}{2} + \frac{g^2}{2} + \frac{(g\bar{g})^2}{2}] = \frac{|f|^2}{4}[1 - 2|g|^2 + |g|^4] \\
&= \frac{|f|^2}{4}(1 - |g|^2)^2
\end{aligned}$$

2. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (\operatorname{Re} f'_1, \operatorname{Re} f'_2, \operatorname{Re} f'_3) \times (-\operatorname{Im} f'_1, -\operatorname{Im} f'_2, -\operatorname{Im} f'_3) \\
&= (\operatorname{Re} f'_2 \operatorname{Im} f'_3 - \operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Im} f'_2, \operatorname{Re} f'_1 \operatorname{Im} f'_3 - \operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Im} f'_1, \operatorname{Re} f'_2 \operatorname{Im} f'_1 - \operatorname{Re} f'_1 \operatorname{Im} f'_2) \\
&= (\operatorname{Im}(f'_3 \overline{f'_2}), \operatorname{Im}(f'_3 \overline{f'_1}), \operatorname{Im}(f'_1 \overline{f'_2}))
\end{aligned}$$

Prva jednakost slijedi iz napomene 2.4.2, 2. Druga jednakost slijedi iz relacije (1.2). Treću jednakost ćemo opravdati po komponentama. Imamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f'_3 \overline{f'_2}) &= \operatorname{Im}[(\operatorname{Re} f'_3 + i \operatorname{Im} f'_3)(\operatorname{Re} f'_2 - i \operatorname{Im} f'_2)] = \operatorname{Im}[\operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Re} f'_2 - i \operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Im} f'_2 \\
&+ i \operatorname{Im} f'_3 \operatorname{Re} f'_2 + \operatorname{Im} f'_3 \operatorname{Im} f'_2] = \operatorname{Im}[\operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Re} f'_2 + \operatorname{Im} f'_3 \operatorname{Im} f'_2 \\
&+ (-\operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Im} f'_2 + \operatorname{Im} f'_3 \operatorname{Re} f'_2)i] = -\operatorname{Re} f'_3 \operatorname{Im} f'_2 + \operatorname{Im} f'_3 \operatorname{Re} f'_2
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi jer su realni i imaginarni dijelovi realne funkcije. Analogno se pokaže da se podudaraju i ostale komponente. Sada računamo:

$$\begin{aligned}
f'_3 \overline{f'_2} &= \frac{if}{2}(1 - g^2) \overline{\frac{f}{2}(1 + g^2)} = \left(\frac{if}{2} - \frac{ifg^2}{2}\right) \overline{\frac{f}{2} + \frac{fg^2}{2}} = \left(\frac{if}{2} - \frac{ifg^2}{2}\right) \left(\frac{\bar{f}}{2} + \frac{\bar{f} \cdot \bar{g}^2}{2}\right) \\
&= \frac{i|f|^2}{4} + \frac{i|f|^2 \bar{g}^2}{4} - \frac{i|f|^2 g^2}{4} - \frac{i|f|^2 |g^2|^2}{4} = \frac{i|f|^2}{4}(1 + \bar{g}^2 - g^2 - |g|^4) \\
&= \frac{i|f|^2}{4}(1 - 2i \operatorname{Im}(g^2) - |g|^4) = \frac{|f|^2}{2} \operatorname{Im}(g^2) + \frac{i|f|^2}{4}(1 - |g|^4)
\end{aligned}$$

Budući da su funkcije  $\frac{|f|^2}{2} \operatorname{Im}(g^2)$  i  $\frac{|f|^2}{4}(1 - |g|^4)$  realne, slijedi da je  $\operatorname{Im}(f'_3 \overline{f'_2}) = \frac{|f|^2}{4}(1 - |g|^4)$ . Analogno, rastavljanjem na realni i imaginarni dio, dobivamo da je  $\operatorname{Im}(f'_3 \overline{f'_1}) = \frac{|f|^2}{2}(1 - |g|^2) \operatorname{Re} g$ ,  $\operatorname{Im}(f'_1 \overline{f'_2}) = \frac{|f|^2}{2}(1 - |g|^2) \operatorname{Im} g$ .

Kad to uvrstimo gore, dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \frac{|f|^2}{4}(1 - |g|^2)(\mathbf{x}, 1 + |g|^2, 2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g) \\ n \circ \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{\frac{|f|^2}{4}(1 - |g|^2)(\mathbf{x}, 1 + |g|^2, 2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g)}{\frac{|f|^2}{4}|1 - |g|^2| \sqrt{|-(1 + |g|^2)^2 + 4(\operatorname{Re} g)^2 + 4(\operatorname{Im} g)^2|}} \\ &= \frac{(1 - |g|^2)(\mathbf{x}, 1 + |g|^2, 2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g)}{|1 - |g|^2| \sqrt{|-1 - 2|g|^2 - |g|^4 + 4|g|^2|}} = \frac{(1 - |g|^2)(\mathbf{x}, 1 + |g|^2, 2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g)}{(1 - |g|^2)^2} \\ &= \frac{1}{1 - |g|^2}(\mathbf{x}, 1 + |g|^2, 2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g) \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke da je  $|g| \neq 1$ , nazivnik je različit od 0.

□

Za kraj ove točke uvest ćemo pojam asociirane familije za minimalne plohe i izvesti Weierstrassovu reprezentacijsku formulu za minimalne plohe. Već smo definirali pojam adjungirane plohe za minimalne plohe i pokazali da je adjungirana ploha minimalne plohe također minimalna.

**Napomena 2.4.26.** Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada se ploha  $S$  po teoremu 1.3.26 može lokalno parametrizirati konformnom kartom  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  takvom da za njenu reparametrizaciju  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(s, t)$  danom formulom  $(s, t) = (\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{-u+v}{\sqrt{2}})$  vrijedi da su polja  $\hat{\mathbf{x}}_s$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosna. Za tu kartu smo u teoremu 2.1.22 pokazali da je oblika  $\hat{\mathbf{x}}(s, t) = c_1(s) + c_2(t)$ , gdje su  $c_1$  i  $c_2$  svjetlosne krivulje. Za takvu kartu smo u napomeni 2.1.24 definirali adjungiranu kartu  $\tilde{\hat{\mathbf{x}}}(s, t) = c_1(s) - c_2(t)$ . Sada ćemo definirati adjungiranu kartu  $\tilde{\mathbf{x}}$  karte  $\mathbf{x}$  kao reparametrizaciju  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) := \tilde{\hat{\mathbf{x}}}(s, t)$ .

**Propozicija 2.4.27. (C-R uvjeti za minimalne plohe)** Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  konformna karta takva da su polja  $\hat{\mathbf{x}}_s$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosna. Tada vrijedi:  $\mathbf{x}_u = \tilde{\mathbf{x}}_v$ ,  $\mathbf{x}_v = \tilde{\mathbf{x}}_u$ . Posebno, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  su antiizometrične, tj. za  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ , na bazi za  $T_p S$  vrijedi:  $\tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_v \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ .

*Dokaz.* Deriviranjem jednakosti  $\mathbf{x}(u, v) = \hat{\mathbf{x}}(s, t)$  po  $u$  i po  $v$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) \frac{\partial s}{\partial u} + \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) \frac{\partial s}{\partial v} + \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{x}}_t(s, t) \end{aligned}$$

Deriviranjem jednakosti  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = \tilde{\mathbf{x}}(s, t)$  po  $u$  i  $v$  dobivamo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_u(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_s(s, t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_t(s, t) \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_s(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_t(s, t)\end{aligned}$$

I sada iskoristimo da je  $\hat{\mathbf{x}}_s(s, t) = c'_1(s) = \tilde{\mathbf{x}}_s(s, t)$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t(s, t) = c'_2(t) = -\tilde{\mathbf{x}}_t(s, t)$ , pa dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}_s - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_t = \tilde{\mathbf{x}}_v \\ \mathbf{x}_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_s - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathbf{x}}_t = \tilde{\mathbf{x}}_u\end{aligned}$$

Iz toga posebno slijedi:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G = -E = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ \tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = F = 0 \\ \tilde{\mathbf{x}}_v \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = E = -G = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\end{aligned}$$

□

**Teorem 2.4.28.** *Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  lokalno parametrizirana konformnom kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  takvom da su polja  $\hat{\mathbf{x}}_s$  i  $\hat{\mathbf{x}}_t$  svjetlosna. Tada je formulom  $\mathbf{x}_\theta(u, v) := \mathbf{x}(u, v) \operatorname{ch} \theta + \tilde{\mathbf{x}}(u, v) \operatorname{sh} \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (lokalno) definirana jednoparametarska familija  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$  lokalno izometričnih minimalnih ploha. Nadalje, za fiksni  $(u, v) \in U$ , tangencijalne ravnine ploha  $S_\theta$  u točkama  $\mathbf{x}_\theta(u, v)$  su međusobno paralelne za sve  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Dokaz je potpuno analogan kao za maksimalne plohe (teorem 2.4.19), osim dijela da za plohe  $S_\theta$  vrijedi  $H = 0$ . To dokazujemo tako da reparametriziramo  $\hat{\mathbf{x}}_\theta(s, t) = \mathbf{x}_\theta(u, v)$ , gdje su  $s$  i  $t$  dani kao u napomeni 2.4.26. Imamo:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_\theta(s, t) &= \mathbf{x}_\theta(u, v) = \mathbf{x}(u, v) \operatorname{ch} \theta + \tilde{\mathbf{x}}(u, v) \operatorname{sh} \theta = \hat{\mathbf{x}}(s, t) \operatorname{ch} \theta + \tilde{\hat{\mathbf{x}}}(s, t) \operatorname{sh} \theta \\ &= (c_1(s) + c_2(t)) \operatorname{ch} \theta + (c_1(s) - c_2(t)) \operatorname{sh} \theta = c_1(s)(\operatorname{ch} \theta + \operatorname{sh} \theta) + c_2(\operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta)\end{aligned}$$

I onda, kao u dokazu propozicije 2.1.25, imamo:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\theta &= (c'_1(s) \cdot c'_1(s))(\cosh \theta + \sinh \theta)^2 = 0 \\ \tilde{G}_\theta &= (c'_2(t) \cdot c'_2(t))(\cosh \theta - \sinh \theta)^2 = 0 \\ \tilde{M}_\theta &= 0 \cdot (\tilde{\mathbf{n}}_\theta \circ \tilde{\mathbf{x}}_\theta) = 0\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je  $EN - 2FM + GL = 0 \Rightarrow H = 0$ .

□

**Definicija 2.4.29.** Neka je  $(S, n)$  minimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za  $\theta \in \mathbb{R}$ , plohu  $S_\theta$  zovemo asocirana ploha plohe  $S$ . Familiju  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$  zovemo asocirana familija plohe  $S$ .

**Napomena 2.4.30.** Ploha  $S$  pripada familiji  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ . Naime,  $S = S_0$ . Ploha  $\tilde{S}$  ne pripada familiji  $(S_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ . Naime, u suprotnom bi, prema propoziciji 2.4.27, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  bile izometrične. Posebno, bilo bi  $\tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_v \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ . No, plohe  $S$  i  $\tilde{S}$  su, prema propoziciji 2.4.28, antiizometrične, pa slijedi da je  $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 0$ ,  $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 0$ . Dakle, za  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ , vektori  $\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \in T_p S$  su okomiti svjetlosni vektori, pa su oni prema napomeni 1.1.21 kolinearni, što je kontradikcija jer oni čine bazu za  $T_p S$  (tj. to je kontradikcija s regularnošću plohe  $S$ ).

**Teorem 2.4.31. (Weierstrassova reprezentacijska formula za minimalne plohe)** Neka je  $(S, n)$  orijentirana vremenska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je ploha  $S$  minimalna ako i samo ako se može lokalno parametrizirati kartom  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  takvom da je

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), \frac{1}{2}(1 + q(u)^2), -\frac{1}{2}(1 - q(u)^2), -q(u))f(u) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), -\frac{1}{2}(1 + r(v)^2), -\frac{1}{2}(1 - r(v)^2), -r(v))g(v) \quad (2.11)$$

gdje su  $q, r, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije takve da su  $f$  i  $g$  glatke, a  $q(r)$  ima singularitet u točki  $u$  kojoj  $f$  ( $g$ ) ima nultočku te je red nultočke dva puta veći od reda singulariteta, a u ostalim točkama je glatka. Nadalje,  $q$  i  $f$  ovise samo o varijabli  $u$  (tj.  $q_v = f_v = 0$ ), a  $r$  i  $g$  samo o  $v$  (tj.  $r_u = q_u = 0$ ).

*Dokaz.* Pretpostavimo da je ploha  $S$  minimalna. Tada se ploha  $S$  po teoremu 2.1.22 može lokalno parametrizirati kartom oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje su  $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  i  $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  svjetlosne krivulje (tada je  $U = I_1 \times I_2$ ). Stavimo  $c'_1(u) = (\xi_1(u), \xi_2(u), \xi_3(u))$ ,  $c'_2(v) = (\eta_1(v), \eta_2(v), \eta_3(v))$ . Definirajmo funkcije  $q, f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tako da zadovoljavaju:  $\xi_1 = \frac{f}{2}(1 + q(u)^2)$ ,  $\xi_2 = -\frac{f}{2}(1 - q(u)^2)$ ,  $\xi_3 = -qf$ . Treba pokazati da takve funkcije postoje i da imaju svojstva iz teorema. Zbrajanjem prve dvije jednakosti dobivamo  $\xi_1 + \xi_2 = q^2 f$ , odakle slijedi da je  $q^2 f$  glatka jer su  $\xi_1$  i  $\xi_2$  glatke. Iz  $q = -\frac{\xi_3}{f}$  slijedi da  $q$  ima singularitet u točki  $u$  kojoj  $f$  ima nultočku. Kako je  $q^2 f$  glatka, slijedi da red svake nultočke  $u_0 \in I_1$  od  $f$  mora biti barem dvostruko veći od pripadnog singulariteta od  $q$  (kao u dokazu teorema 2.4.24). Red nultočke  $u_0$  ne može biti strogo veći od toga jer bi u suprotnom funkcija  $q^2 f$  također imala nultočku u točki  $u_0$ , pa bi iz gornjih relacija slijedilo da je  $\mathbf{x}_u(u_0, v) = c'_1(u_0) = 0$ , što je kontradikcija s regularnošću plohe  $S$ . Dakle, uvjeti teorema su zadovoljeni. Što se tiče postojanja takvih funkcija, uočimo da je  $q = \frac{q^2 f}{qf} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{-\xi_3}$ . I onda imamo da je  $f = -\frac{\xi_3}{q} = -\frac{\xi_3}{\frac{\xi_1 + \xi_2}{-\xi_3}} = \frac{\xi_3^2}{\xi_1 + \xi_2}$ . Time smo našli tražene funkcije. Analogno se konstruiraju funkcije  $r$  i  $g$ . Funkcije  $q, f, r, g$  zatim dodefiniramo do funkcija definiranih na  $U$  tako da

naprosto stavimo  $q(u, v) := q(u)$  za svaki  $v \in I_2$  i analogno za ostale funkcije.

Obratno, pretpostavimo da se ploha  $S$  može lokalno parametrizirati kartom  $\mathbf{x}$  takvom da vrijede relacije (2.10) i (2.11). Računamo:

$$\begin{aligned} E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -\frac{f^2}{4}(1+q^2)^2 + \frac{f^2}{4}(1-q^2)^2 + q^2 f^2 = \frac{f^2}{4}[(1-q^2)^2 - (1+q^2)^2] + q^2 f^2 \\ &= \frac{f^2}{4}(1-q^2-1-q^2)(1-q^2+1+q^2) + q^2 f^2 = -\frac{f^2}{4} \cdot (-2q^2) \cdot 2 + q^2 f^2 = 0 \end{aligned}$$

$$G = -\frac{g^2}{4}(1+r^2)^2 + \frac{g^2}{4}(1-r^2)^2 + r^2 g^2 = \dots = 0$$

$$M = \mathbf{x}_{uv} \cdot (n \circ \mathbf{x}) = 0 \cdot (n \circ \mathbf{x}) = 0$$

Iz toga slijedi da je  $EN - 2FM + GL = 0 \Rightarrow H = 0$ . Dakle, ploha  $S$  je po definiciji minimalna.  $\square$

**Napomena 2.4.32.** Pomoću Weierstrassove reprezentacijske formule možemo generirati minimalne i maksimalne plohe tako da u nju uvrštavamo razne funkcije. Za minimalnu ili maksimalnu plohu  $S$  u  $\mathbb{R}_1^3$ , pripadne funkcije koje daju tu plohu zovemo Weierstrassovi podaci plohe  $S$ . Weierstrassovi podaci plohe očito nisu jedinstveni. Iz Weierstrassove formule se vidi da minimalnih i maksimalnih ploha ima mnogo.

**Primjer 2.4.33.** Ako u Weierstrassovu formulu za minimalne plohe uvrstimo funkcije  $q(u) = -e^u$ ,  $f(u) = -e^{-u}$ ,  $r(v) = e^{-v}$ ,  $g(v) = -e^v$ , dobivamo parametrizaciju vremenskog katenoida oko  $x$ -osi. Vremenski helikoid oko  $x$ -osi dobivamo ako uvrstimo  $q(u) = -e^u$ ,  $f(u) = -e^{-u}$ ,  $r(v) = -e^{-v}$ ,  $g(v) = e^v$ .

Ako u Weierstrassovu formulu za minimalne plohe uvrstimo  $q(u) = \frac{\sin u}{-1+\cos u}$ ,  $f(u) = -1 + \cos u$ ,  $r(v) = \frac{\sin v}{1+\cos v}$ ,  $g(v) = -(1 + \cos v)$ , dobivamo vremenski katenoid oko  $x$ -osi. Vremenski helikoid oko  $x$ -osi dobivamo za iste  $q$  i  $f$  te  $r$  i  $g$  s sa suprotnim predznakom (zato što je helikoid oko  $x$ -osi adjungirana ploha katenoida oko  $x$ -osi).

## 2.5 Ostale minimalne i maksimalne plohe

Poznate minimalne plohe (iz euklidskog prostora) mogu se podijeliti u tri skupine: klasične, plohe 19. stoljeća i moderne. Klasične plohe su helikoid, katenoid i ravnina. U ovoj točki ćemo napraviti pregled ploha iz 19. stoljeća, tj. njihovih analogona u prostoru Minkowskog. Plohe ćemo navesti samo kroz primjere, bez istraživanja njihovih svojstava.

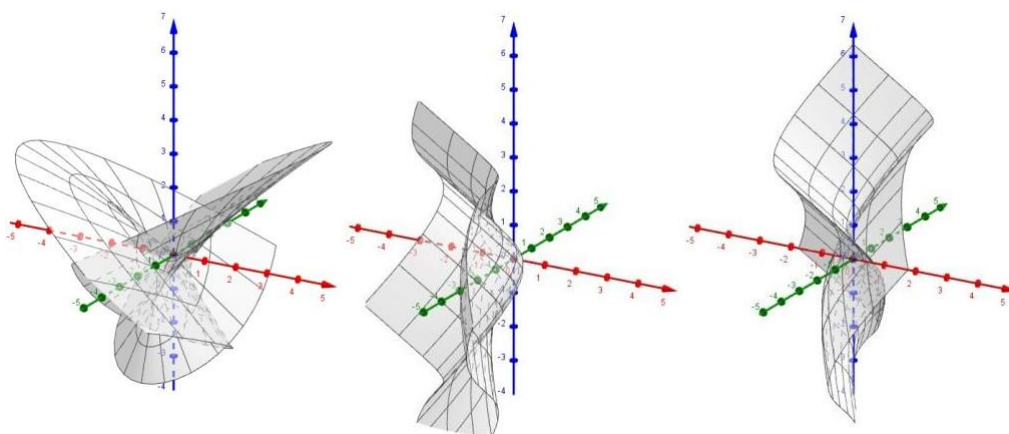
**Primjer 2.5.1. (Enneperova ploha)** Enneperova maksimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2 - v^2, \frac{1}{3}u^2 - uv^2 + u, \frac{1}{3}u^3 - u^2v + v)$$

Enneperova minimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}_\epsilon(u, v) = \frac{1}{2} \left( u + \frac{u^3}{3} - v - \frac{v^3}{3}, -u + \frac{u^3}{3} - v + \frac{v^3}{3}, -\epsilon u^2 - v^2 \right)$$

gdje je  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ . Ova ploha se dobije ako u Weierstrassovu formulu za minimalne plohe uvrstimo  $q(u) = \epsilon u$ ,  $f(u) = 1$ ,  $r(v) = v$ ,  $g(v) = 1$ . Ako je  $\epsilon = 1$ , onda ploha ima u svakoj točki realne različite glavne zakrivljenosti, a ako je  $\epsilon = -1$ , onda ima imaginarne glavne zakrivljenosti. Enneperova ploha je algebarska ploha 3. reda. Nadalje, Enneperova ploha je samopresjecajuća.



Slika 2.8: Enneperova maksimalna ploha te minimalna za  $\epsilon = 1$  i  $\epsilon = -1$

**Primjer 2.5.2. (Scherkove plohe)** Neka je  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Scherkova maksimalna ploha prve vrste je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(av)}{\operatorname{ch}(au)} \right| \right)$$

gdje je  $\operatorname{th}^2(au) + \operatorname{th}^2(av) < 1$ . Scherkova minimalna ploha prve vrste je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(av)}{\operatorname{ch}(au)} \right| \right)$$

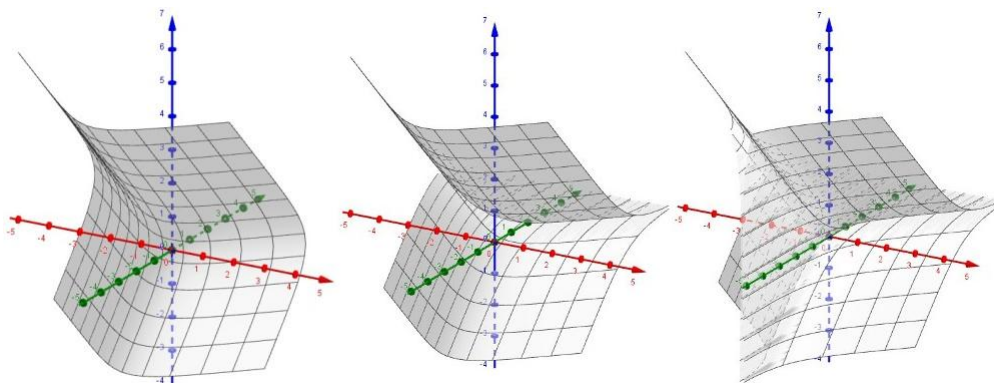
gdje je  $\operatorname{th}^2(au) + \operatorname{th}^2(av) > 1$ . Scherkova minimalna ploha druge vrste je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\operatorname{ch}(au)}{\operatorname{sh}(au)} \right| \right)$$

gdje je  $u \neq 0$ . Scherkova minimalna ploha treće vrste je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\operatorname{sh}(av)}{\operatorname{sh}(au)} \right| \right)$$

gdje je  $u, v \neq 0$ . Uočimo da su Scherkove plohe globalno grafovi funkcija.



Slika 2.9: Prostorni i vremenski dio Scherkove plohe prve vrste te Scherkova minimalna ploha druge i treće vrste za  $a = 1$

**Primjer 2.5.3. (Hennebergova ploha)** Hennebergova maksimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( 2 \operatorname{ch}(2u) \cos(2v), 2 \operatorname{ch} u \cos v + \frac{2}{3} \operatorname{ch}(3u) \cos(3v), \frac{2}{3} \operatorname{ch}(3u) \sin(3v) - 2 \operatorname{ch} u \sin v \right)$$

Hennebergova ploha je primjer (globalno) neorijentabilne maksimalne plohe.

**Primjer 2.5.4. (Catalanova ploha)** Catalanova maksimalna ploha je dana kartom

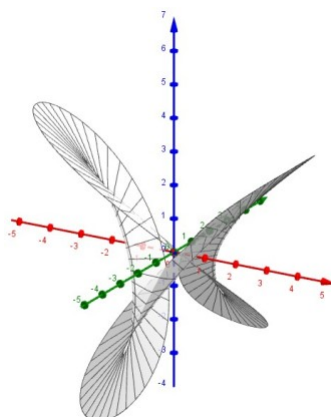
$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u - \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{ch} u \cos v - 1, 4 \operatorname{sh} \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right)$$

gdje je  $u > 0$ .

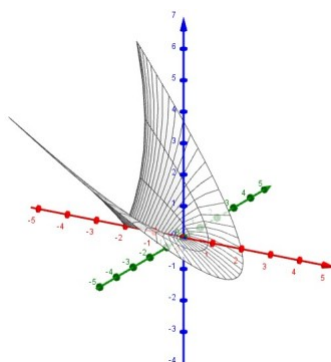
**Primjer 2.5.5. (Bourova ploha)** Neka je  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .  $m$ -ta Bourova maksimalna ploha je dana kartom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m(u, v) = & \left( \frac{2u^m}{m} \cos(mv), \frac{u^{m-1}}{m-1} \cos((m-1)v) + \frac{u^{m+1}}{m+1} \cos((m+1)v), \right. \\ & \left. - \frac{u^{m-1}}{m-1} \sin((m-1)v) + \frac{u^{m+1}}{m+1} \sin((m+1)v) \right) \end{aligned}$$





Slika 2.10: Hennebergova maksimalna ploha

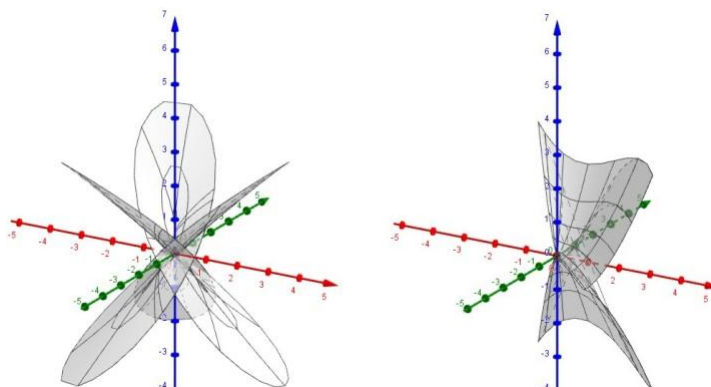


Slika 2.11: Catalanova maksimalna ploha

Još jedna parametrizacija Bourove maksimalne plohe dobiva se ako u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe uvrstimo  $f(z) = 2z^{m-2}$ ,  $g(z) = z$ . Za  $m = 2$  dobivamo Enneperovu maksimalnu plohu.  $m$ -ta Bourova minimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}_m(u, v) = \left( \frac{2u^m}{m}(\cos^m v + \sin^m v), -\frac{u^{m-1}}{m-1}(\cos^{m-1} v - \sin^{m-1} v) - \frac{u^{m+1}}{m+1}(\cos^{m+1} v - \sin^{m+1} v), \frac{u^{m-1}}{m-1}(\cos^{m-1} v + \sin^{m-1} v) - \frac{u^{m+1}}{m+1}(\cos^{m+1} v + \sin^{m+1} v) \right)$$

Još jedna parametrizacija može se dobiti ako u Weierstrassovu formulu za minimalne plohe uvrstimo  $q(u) = u$ ,  $f(u) = -2u^{m-2}$ ,  $r(v) = v$ ,  $g(v) = -2v^{m-2}$ .



Slika 2.12: Treća Bourova maksimalna i minimalna ploha

**Primjer 2.5.6. (Schwarzove plohe)** Za  $a \in (0, 1)$  i  $\theta \in \mathbb{R}$  stavimo  $f(z) = 2e^{i\theta}(z^8 + (a^4 + a^{-4})z^4 + 1)^{-2}$ ,  $g(z) = -z$ . Ako to uvrstimo u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe, dobivamo plohe  $S_{(a,\theta)}$  dane kartama:

$$\mathbf{x}_{(a,\theta)}(u, v) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{e^{i\theta}(-2w, 1 + w^2, 1 - w^2)}{(w^8 + (a^4 + a^{-4})w^4 + 1)^2} dw$$

Za fiksni  $a$ , familija  $(S_{a,\theta})_{\theta \in \mathbb{R}}$  je jedna asociirana familija maksimalnih ploha. Za  $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$  (tj.  $a^4 + a^{-4} = 14$ ), plohu  $S_{(a,0)}$  zovemo Schwarzova maksimalna primitivna ploha (kraće P-ploha), a plohu  $S_{(a,\frac{\pi}{2})}$  zovemo Schwarzova maksimalna dijamantna ploha (kraće D-ploha). Familiju ploha  $(S_{(a,0)})_{a \in (0,1)}$  zovemo Schwarzova P-familija, a familiju  $(S_{(a,\frac{\pi}{2})})_{a \in (0,1)}$  zovemo Schwarzova D-familija.

Za  $a \in (0, +\infty)$  stavimo  $f(z) := 2i[z(z^3 + a^3)(z^3 + a^{-3})]^{-2}$ ,  $g(z) := -z$ . Ako to uvrstimo u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe, dobivamo familiju  $(S_a)_{a \in (0,+\infty)}$ , koju zovemo Schwarzova heksagonalna familija (kraće H-familija).

Parametrizacije Schwarzovih ploha je teško egzaktno izračunati. U euklidskom slučaju, Schwarzove P i D plohe mogu se implicitno aproksimirati trigonometrijskim jednadžbama. Parametrizacija Schwarzove D-plohe se može izraziti i pomoću eliptičkih integrala. Schwarzova ploha se sastoji od malog dijela s rupama koji se periodički ponavlja.

Dodajmo još da se maksimalne plohe s rubom (općenito o plohama s rubom se može naći u [17]) pod određenim uvjetima mogu proširiti preko tog ruba i na minimalni (tj. vremenski) dio. Iskaz teorema o proširenju može se pročitati u [2]. Tako se mogu pronaći neke Schwarzove minimalne plohe.

## Poglavlje 3

# Prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom 3-prostoru

### 3.1 Rotacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

**Definicija 3.1.1.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je prava ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako je za nju  $H = \text{const.} \neq 0$ .*

Za pravu plohu konstantne srednje zakrivljenosti koristit ćemo kraći naziv prava cmc-ploha (od engleskog *constant mean curvature*).

U ovoj točki ćemo pronaći sve rotacijske prave cmc-plohe u prostoru Minkowskog. Izvod formule za rotacijsku pravu cmc-plohu  $S$  se radi na isti način kao za minimalne i maksimalne plohe. U propozicijama 2.2.4, 2.2.5 i 2.2.6 je dan opći oblik parametrizacije rotacijske plohe  $S$  čija je os rotacije pravac  $q \subseteq \mathbb{R}_1^3$  i generatrisa krivulja  $c$ . Kad napišemo opći oblik parametrizacije plohe  $S$  i označimo  $H \in \mathbb{R}$ ,  $H \neq 0$  srednju zakrivljenost plohe  $S$ , možemo na temelju relacije (1.5) postaviti diferencijalnu jednadžbu za krivulju  $c$ . Rješavanjem te jednadžbe dobivamo traženu plohu  $S$ . Kao kod minimalnih i maksimalnih ploha, ograničit ćemo se na slučajeve kad je os rotacije  $x$ -os,  $z$ -os ili pravac  $l := \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  (taj pravac je drukčiji nego kod rotacijskih minimalnih i maksimalnih ploha).

**Teorem 3.1.2.** *Neka je  $(S, n)$  rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  srednje zakrivljenosti  $H \in \mathbb{R}$ ,  $H \neq 0$ , čija je os rotacije  $z$ -os.*

1. Ako je ploha  $S$  prostorna, onda je parametrizirana kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u) \operatorname{ch} v, x(u) \operatorname{sh} v, u) \quad (3.1)$$

gdje je  $c(t) = (x(t), 0, t)$  generatrisa plohe  $S$ . Pri tome je krivulja  $c$  prostorna i  $x(t) > 0$  za svaki  $t \in I$ . Nadalje, funkcija  $x$  zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = -\frac{x''x - (x')^2 + 1}{2x(1 - (x')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. Ako je ploha  $S$  vremenska, onda je parametrizirana kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (y(u) \operatorname{sh} v, y(u) \operatorname{ch} v, u) \quad (3.2)$$

gdje je  $c(t) = (0, y(t), t)$  generatrisa plohe  $S$ ,  $y(t) > 0$  za sve  $t \in I$  i funkcija  $y$  zadovoljava ODJ:

$$H = \frac{yy'' - (y')^2 - 1}{2y((y')^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

ili kartom oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u) \operatorname{ch} v, x(u) \operatorname{sh} v, u) \quad (3.3)$$

gdje je  $c(t) = (x(t), 0, t)$  generatrisa plohe  $S$ , krivulja  $c$  je vremenska,  $x(t) > 0$  za sve  $t \in I$  i funkcija  $x$  zadovoljava ODJ:

$$H = \frac{x''x - (x')^2 + 1}{2x((x')^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Obratno, svaka orijentirana ploha  $(S, n)$  u  $\mathbb{R}_1^2$  dana jednom od karata (3.1), (3.2), (3.3) je rotacijska prava cmc-ploha oko  $z$ -osi.

*Dokaz.* Opći oblik rotacijske plohe oko  $z$ -osi je dan u propoziciji 2.2.4. Pri tome treba uzeti  $a_1 = e_1$ ,  $a_2 = e_2$  i  $a_3 = e_3$ . Nadalje, parametrizacije generatrisa se mogu dodatno pojednostavniti. Primjerice, krivulju  $c(t) = (x(t), 0, z(t))$  možemo, zbog  $x(t) \neq 0$  i  $z'(t) \neq 0$ , reparametrizirati tako da bude oblika  $c(t) = (x(t), 0, t)$ , gdje je  $x(t) > 0$ . Naime, kako je  $x$  neprekidna, zbog  $x(t) \neq 0$  ona mora biti stalnog predznaka. Nadalje, ne može biti  $z = \operatorname{const.}$  jer bi tada ploha  $S$  bila ravnina, a ravnina nije rotacijska ploha. Još treba samo izvesti pripadne ODJ tako da ploha  $S$  bude prava cmc-ploha. To ćemo napraviti samo za kartu (3.1) jer je za ostale karte račun potpuno analogan. Kao u primjeru 2.2.10, imamo:

### 3.1. ROTACIJSKE PRAVE PLOHE KONSTANTNE SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI 73

$E = -(x')^2 + 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = x^2$ ,  $L = \frac{-x''}{\sqrt{1-(x')^2}}$ ,  $M = 0$ ,  $N = \frac{-x}{\sqrt{1-(x')^2}}$ . I onda iz relacije (1.5) imamo da će ploha  $S$  imati srednju zakrivljenost jednaku  $H$  ako i samo ako vrijedi:

$$H = \frac{(-(x')^2 + 1)\frac{-x}{\sqrt{1-(x')^2}} - 2 \cdot 0 \cdot 0 + x^2 \frac{-x''}{\sqrt{1-(x')^2}}}{2((-(x')^2 + 1)x^2 - 0^2)} = \frac{(x')^2 - 1 - xx''}{2(1 - (x')^2)^{\frac{3}{2}}x}$$

□

**Napomena 3.1.3.** U formuli (3.2), krivulja  $c$  je uvijek prostorna (za bilo koju funkciju  $y$ ). Zaista, tada je  $c'(t) \cdot c'(t) = y'(t)^2 + 1 \geq 0$  za svaki  $t \in I$ .

Sljedeća dva teorema ćemo navesti bez dokaza jer je dokaz potpuno analogan kao za teorem 3.1.2.

**Teorem 3.1.4.** Neka je  $(S, n)$  prostorna (vremenska) rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  srednje zakrivljenosti  $H \in \mathbb{R}$ ,  $H \neq 0$ , čija je os rotacije  $x$ -os. Tada je ploha  $S$  parametrizirana kartom  $\mathbf{x} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow S$  oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, y(u) \cos v, y(u) \sin v) \quad (3.4)$$

gdje je  $c(t) = (t, y(t), 0)$  generatrisa plohe  $S$ . Krivulja  $c$  je prostorna (vremenska) krivulja i  $y(t) > 0$ . Nadalje, funkcija  $y$  zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = \frac{y''y + 1 - (y')^2}{2y(\pm((y')^2 - 1))^{\frac{3}{2}}}$$

Pozitivan predznak ide ako je ploha  $S$  prostorna, a negativan ako je ploha  $S$  vremenska.

**Teorem 3.1.5.** Neka je  $(S, n)$  prostorna (vremenska) rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  srednje zakrivljenosti  $H \in \mathbb{R}$ ,  $H \neq 0$ , čija je os rotacije pravac  $l$ . Tada je ploha  $S$  parametrizirana kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u(1 + \frac{v^2}{2}) - \frac{1}{2}y(u)v^2, \frac{uv^2}{2} + y(u)(1 - \frac{v^2}{2}), uv - y(u)v\right) \quad (3.5)$$

gdje je  $c(t) = (t, y(t), 0)$  generatrisa plohe  $S$ . Krivulja  $c$  je prostorna (vremenska) krivulja. Nadalje, funkcija  $y$  zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = \pm \frac{(u - y)y'' - (y' - 1)((y')^2 - 1)}{2(u - y)(\pm(1 - (y')^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Pozitivan predznak ide ako je ploha  $S$  vremenska, a negativan ako je ploha  $S$  prostorna.

U [8] i [9] je napravljen i slučaj kad je os rotacije  $y$ -os, ali mi ćemo to izostaviti jer se dobiju iste plohe kao kad rotiramo oko  $z$ -osi, samo sa zamijenjenim koordinatama. Predznaci u gornjim ODJ nisu važni jer predznak srednje zakrivljenosti ovisi o izboru orijentacije plohe. S druge strane, kod Gaussove zakrivljenosti predznak ne ovisi o orijentaciji. Navedene jednadžbe su nelinearne i općenito se ne mogu egzaktno riješiti. Sada ćemo pronaći parametrizacije pravih cmc-ploha koje se mogu dobiti egzaktno, a to su sfere i cilindri.

**Primjer 3.1.6. (prostorna i vremenska sfera)** Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna ili vremenska sfera u  $\mathbb{R}_1^3$  polumjera  $r > 0$ . Već smo ranije naveli da je tada  $S_p = \pm \frac{1}{r} I$  za svaku točku  $p \in S$ . Onda po samoj definiciji srednje zakrivljenosti imamo:  $H(p) = \text{Tr}(\pm \frac{1}{r} I) = \pm \frac{1}{r} \text{Tr} I = \pm \frac{1}{r} \cdot 1 = \pm \frac{1}{r} \neq 0$ . Dakle, sfera  $S$  je prava cmc-ploha.

U primjeru 1.2.29 smo definirali prostornu i vremensku sferu polumjera  $r$  u  $\mathbb{R}_1^3$ . Svaka sfera u  $\mathbb{R}_1^3$  ima svojstvo da joj je os rotacije svaki pravac koji prolazi kroz središte sfere. Generatrisa je uvijek kružnica u  $\mathbb{R}_1^3$  polumjera  $r$ . Svaku takvu kružnicu na sferi zovemo glavna kružnica. Općenito, presjek sfere i ravnine je kružnica polumjera  $r_1 \in [0, r]$ . U slučaju svjetlosne sfere, kao presjek možemo dobiti i kružnicu polumjera  $r_1 = 0$  koja nije jedna točka.

Iako smo sfere već vidjeli u primjeru 1.2.29, ono što ovdje još možemo napraviti jest pronaći njihove parametrizacije. Pronađimo prvo parametrizaciju prostorne sfere polumjera  $r$  sa središtem u ishodištu. Promotrimo tu sferu kao rotacijsku plohu oko  $z$ -osi. Tada je generatrisa prostorna kružnica u  $xz$ -ravnini polumjera  $r$  sa središtem u ishodištu. Njena implicitna jednadžba je  $-x^2 + z^2 = -r^2$ . Ta krivulja se može parametrizirati preslikavanjem  $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ,  $c(t) = (r \text{ch } t, 0, r \text{sh } t)$ . Ovo ne možemo uvrstiti u relaciju 3.1 bez da reparametriziramo, ali možemo u općenitiju relaciju (2.2). Dobivamo:

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \text{ch } v \text{ch } u, r \text{ch } v \text{sh } u, r \text{sh } u)$$

Ova parametrizacija drukčija je od parametrizacije dvoplošnog hiperboloida kao rotacijske plohe u euklidskom prostoru. Naime, u euklidskom prostoru je os rotacije dvoplošnog hiperboloida samo  $x$ -os. Uočimo da smo ovdje koristeći pseudometriku prostora Minkowskog zapravo izveli još jednu parametrizaciju dvoplošnog hiperboloida u euklidskom prostoru. Naravno, prostornu sferu možemo promatrati i kao rotacijsku plohu oko  $x$ -osi. Tada dobivamo parametrizaciju dvoplošnog hiperboloida iz euklidskog prostora:

$$\hat{\mathbf{x}}(u, v) = (r \text{ch } u, r \text{sh } u \cos v, r \text{sh } u \sin v)$$

Analogno se dobivaju parametrizacije vremenske sfere radijusa  $r$  sa središtem u ishodištu (u euklidskom prostoru to je jednoplošni hiperboloid oko  $x$ -osi). Ovdje imamo čak tri parametrizacije (vidi propoziciju 2.2.4, 2. i 2.2.5):

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u \text{sh } v, r \cos u \text{ch } v, r \sin u)$$

### 3.1. ROTACIJSKE PRAVE PLOHE KONSTANTNE SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI 75

$$\hat{\mathbf{x}}(u, v) = (r \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v, r \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v, r \operatorname{ch} u)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = (r \operatorname{sh} u, r \operatorname{ch} u \cos v, r \operatorname{ch} u \sin v)$$

**Primjer 3.1.7. (prostorni i vremenski cilindar s prostornom osi)** Neka je  $r \neq 0$ . Ako u formulu (3.1) uvrstimo  $x(u) = r$ , dobivamo parametrizaciju prostornog cilindra oko  $z$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \operatorname{ch} v, r \operatorname{sh} v, u)$$

Generatrisa mora biti prostorni pravac. Ovdje je  $c(t) = (r, 0, t)$ , pa je  $c' \cdot c' = 1 > 0$ , što i treba biti. Iz  $x(t) = r$  imamo  $x'(t) = x''(t) = 0$ , pa kad to uvrstimo u pripadnu ODJ, dobivamo:

$$H = -\frac{x''x - (x')^2 + 1}{2x(1 - (x')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{0 \cdot r - 0^2 + 1}{2 \cdot r(1 - 0^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2r}$$

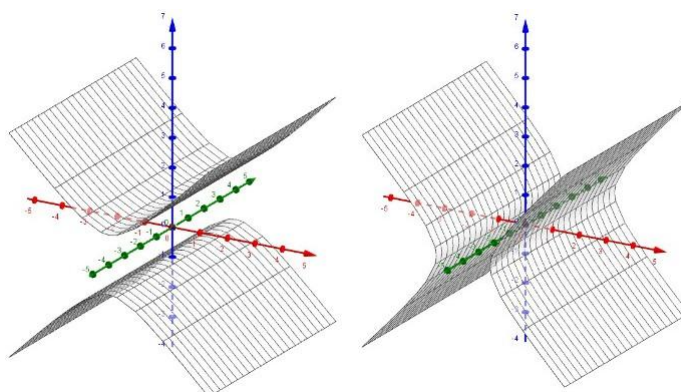
Dakle, prostorni cilindar oko  $z$ -osi je prava cmc-ploha. Implicitna jednadžba tog cilindra je  $x^2 - y^2 = r^2$ .

Ako u formulu (3.2) uvrstimo  $y(u) = r$ , dobivamo parametrizaciju vremenskog cilindra oko  $z$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \operatorname{sh} v, r \operatorname{ch} v, u)$$

Za ovaj cilindar ponovo dobivamo  $H = -\frac{1}{2r}$  iz pripadne ODJ. Implicitna jednadžba ovog cilindra je  $-x^2 + y^2 = r^2$ .

Iz formule (3.3) ne dobivamo još jedan vremenski cilindar oko  $z$ -osi jer krivulja  $c(t) = (r, 0, t)$  nije vremenska.



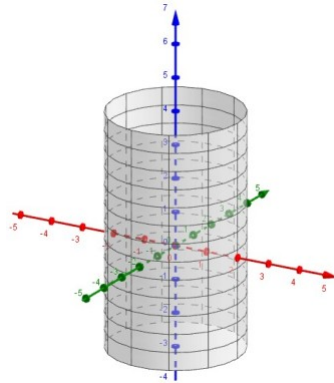
Slika 3.1: Cilindri  $x^2 - y^2 = 1$  i  $-x^2 + y^2 = 1$

**Primjer 3.1.8. (vremenski cilindar s vremenskom osi)** Neka je  $r \neq 0$ . Iz formule (3.4) ne možemo dobiti prostorni cilindar oko  $x$ -osi jer krivulja  $c(t) = (t, r, 0)$  nije prostorna (naime,  $c' \cdot c' = -1 < 0$ ). Dakle, prostorni cilindar s vremenskom osi ne postoji.

Ako u formulu (3.3) uvrstimo  $y(u) = r$ , dobivamo parametrizaciju vremenskog cilindra oko  $x$ -osi:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, r \cos v, r \sin v)$$

Za ovaj cilindar dobivamo  $H = \frac{1}{2r}$ . Implicitna jednadžba ovog cilindra je  $y^2 + z^2 = r^2$ . Ovaj cilindar je identičan cilindru u euklidskom prostoru oko  $x$ -osi.



Slika 3.2: Cilindar  $y^2 + z^2 = 4$

**Napomena 3.1.9.** Neka je  $r \neq 0$ . Ako u ODJ za rotacijske plohe sa svjetlosnom osi uvrstimo  $y(u) = r$ , dobivamo:

$$H = \pm \frac{(u-r) \cdot 0 - (0-1)(0^2-1)}{2(u-r)(\pm(1-0^2))^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{2(u-r)}$$

Iz toga slijedi da cilindar sa svjetlosnom osi nije cmc-ploha ni za za koji  $r \neq 0$ .

Sada prelazimo na prave cmc-plohe čije se parametrizacije ne mogu egzaktno odrediti, to su unduloid i nodoid. U [8] i [9] su pronađene aproksimacije nekih unduloida i nodoida tako da se približno (numerički) riješi pripadna ODJ za generatrisu. Korištena je Eulerova metoda, a može se koristiti i bolja, Runge-Kutta metoda. Ovdje to nećemo raditi. Eulerova metoda može se primijeniti samo na ODJ 1. reda, pa jednadžbe iz teorema 3.1.2, 3.1.4 i 3.1.5 ne možemo riješiti tom metodom. Postoje jednostavnije ODJ koje opisuju prave cmc-plohe. Te jednadžbe su i dalje nelinearne, pa se ne mogu egzaktno riješiti, ali su 1.



### 3.1. ROTACIJSKE PRAVE PLOHE KONSTANTNE SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI 77

reda. Izvoditi ih nećemo, izvod je napravljen u [8] i [9]. Reći ćemo samo da se te jednačbe izvode pomoću varijacijskog računa. Koristi se činjenica da prava cmc-ploha minimizira tzv. funkcional površine s volumnim ograničenjem (engl. *area functional with volume constraint*).

**Teorem 3.1.10. (ODJ 1. reda za prave cmc-plohe)** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana rotacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ .*

1. *Pretpostavimo da je ploha  $S$  dana kartom (3.1). Tada je  $S$  prava cmc-ploha ako i samo ako funkcija  $x$  zadovoljava sljedeću ODJ:*

$$x^2 \pm \frac{2ax}{\sqrt{1 - (x')^2}} = \pm b^2$$

2. *Pretpostavimo da je ploha  $S$  dana kartom (3.3). Tada je  $S$  prava cmc-ploha ako i samo ako funkcija  $x$  zadovoljava sljedeću ODJ:*

$$x^2 \pm \frac{2ax}{\sqrt{(x')^2 - 1}} = \pm b^2$$

3. *Pretpostavimo da je ploha  $S$  prostorna i dana kartom (3.4). Tada je  $S$  prava cmc-ploha ako i samo ako funkcija  $y$  zadovoljava sljedeću ODJ:*

$$y^2 \pm \frac{2ay}{\sqrt{(y')^2 - 1}} = \pm b^2$$

4. *Pretpostavimo da je ploha  $S$  vremenska i dana kartom (3.4). Tada je  $S$  prava cmc-ploha ako i samo ako funkcija  $y$  zadovoljava sljedeću ODJ:*

$$y^2 \pm \frac{2ay}{\sqrt{1 - (y')^2}} = \pm b^2$$

*U svim jednažbama su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  konstante.*

**Napomena 3.1.11.** 1. Slučaj kad je ploha  $S$  dana kartom (3.2) nije uopće razmatran u [9], pa nismo naveli pripadnu jednažbu. U [8] i [9] su navedene i jednažbe u slučaju kad je ploha  $S$  dana kartom (3.5), ali taj slučaj je kompliciraniji jer tada moramo reparametrizirati kartu (3.5). Taj slučaj izostavljamo.

2. Jednažbe iz teorema 3.1.10 imaju nedostatak jer se u njima ne pojavljuje  $H$ . Drugim riječima, iz same jednažbe se ne vidi kolika je srednja zakrivljenost plohe  $S$ .

**Propozicija 3.1.12.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  te  $a$  i  $b$  pripadne konstante iz ODJ 1. reda za plohu  $S$ . Tada je  $H = \pm \frac{1}{2a}$ .

*Dokaz.* Uzmimo npr. ODJ  $x^2 \pm \frac{2ax}{\sqrt{1-(x')^2}} = \pm b^2$ . Ako tu jednadžbu deriviramo, dobivamo:

$$2xx' \pm \frac{2ax' \sqrt{1-(x')^2} - 2ax \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-(x')^2}} \cdot (-2x'x'')}{1-(x')^2} = 0$$

$$\pm \frac{ax' \sqrt{1-(x')^2} + ax \cdot \frac{x'x''}{\sqrt{1-(x')^2}}}{1-(x')^2} = -xx'$$

Brojnik i nazivnik u razlomku s lijeve strane pomnožimo s  $\sqrt{1-(x')^2}$  i zatim jednadžbu podijelimo s  $\pm 2axx'$ . Dobivamo:

$$\frac{1-(x')^2 + xx''}{2x(1-(x')^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{2a}$$

Dobili smo upravo pripadnu ODJ za kartu (3.1), pa onda očitamo da je  $H = \pm \frac{1}{2a}$ .  $\square$

**Napomena 3.1.13.** 1. Za prave cmc-plohe dane kartom (3.5) nije moguće srednju zakrivljenost odrediti kao u dokazu propozicije 3.1.12.

2. Iz dokaza propozicije 3.1.12 posebno dobivamo da je ODJ za kartu (3.1) ekvivalentna s jednadžbom:

$$\frac{d}{dt} \left( Hx^2 + \frac{x}{\sqrt{1-(x')^2}} \right) = 0$$

Analogno za ostale jednadžbe iz teorema 3.1.2, 3.1.4 i 3.1.5 (vidi [8] i [9]). Integriranjem te jednadžbe dobivamo:  $Hx^2 + \frac{x}{\sqrt{1-(x')^2}} = c$  (\*) za neki  $c \in \mathbb{R}$ .

**Napomena 3.1.14. (unduloidi i nodoidi)** Plohe koje dobijemo iz ove jednadžbe (i njoj analognih u ostalim slučajevima) za  $c \neq 0$  i  $x' \neq 0$  su unduloidi i nodoidi (tako ih možemo definirati). Preciznije, ako je  $cH > 0$ , onda plohu  $S$  zovemo unduloid, a ako je  $cH < 0$ , onda plohu  $S$  zovemo nodoid (ili obratno jer predznak od  $H$  ovisi o izabranoj orijentaciji). Ako je  $c \neq 0$  i  $x' = 0$ , onda očitao dobivamo cilindar (tada je  $x = \text{const.}$ ). Uočimo da ne može biti  $c = 0$  i  $x' = 0$ . Naime, možemo odabrati orijentaciju tako da je  $H > 0$ , pa onda iz (\*) zbog  $x > 0$  i  $x' = 0$  slijedi da je  $c = Hx^2 + x > 0$ .

U euklidskom prostoru za svaki pravac  $q$  postoji unduloid i nodoid čija je os rotacije pravac  $q$ . U prostoru Minkowskog to ne vrijedi.

### 3.1. ROTACIJSKE PRAVE PLOHE KONSTANTNE SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI 79

**Teorem 3.1.15.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana prostorna rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  i  $q$  os rotacije plohe  $S$ .*

1. *Ako je pravac  $q$  prostorni, onda ploha  $S$  ne može globalno biti unduloid, ali može lokalno.*
2. *Ako je pravac  $q$  vremenski, onda ploha  $S$  ne može globalno biti nodoid, ali može lokalno.*

*Dokaz.* Pokazat ćemo samo tvrdnju 1. i to samo za jednadžbu (\*). Svi ostali slučajevi se analiziraju analogno. Iz jednadžbe (\*) imamo:

$$(x')^2 = \frac{(c - Hx^2)^2 - x^2}{c - Hx^2}$$

Zbog  $x > 0$  iz (\*) slijedi da je  $Hx^2 < c \Leftrightarrow c - Hx^2 > 0$ . Onda zbog  $(x')^2 \geq 0$  još mora biti  $(c - Hx^2)^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (c - Hx^2)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow c - Hx^2 \geq x \Leftrightarrow -Hx^2 - x + c \geq 0$ . Da bi ovo vrijedilo, nužno mora biti  $H < 0$ . Budući da je  $x > 0$ , dovoljno je još da polinom s lijeve strane nema nultočku na  $(0, +\infty)$ , što će vrijediti ako i samo ako je  $c = -H \cdot 0^2 - 0 + c > 0$  (zato što kvadratna funkcija raste na  $[x_m, +\infty)$ , gdje je  $x_m$  točka minimuma). Dakle,  $H$  i  $c$  su suprotnih predznaka, pa je  $cH < 0$ .

Taj uvjet je dovoljan, ali nije nužan. Drugim riječima, ako je  $cH > 0$ , onda za neke  $t \in I$  svejedno može vrijediti gornja nejednakost, pa na tom dijelu onda imamo unduloid, a za ostale  $t$  parametrizacija uopće nije definirana.  $\square$

**Napomena 3.1.16.** Vremenski unduloid i nodoid postoji globalno oko svakog prostornog ili vremenskog pravca (svjetlosne pravce smo isključili iz razmatranja). Jednadžbe oblika (\*) za vremenske plohe su dane u [9]. Ako u njima izrazimo  $(x')^2$  kao u dokazu teorema 3.1.15, u brojniku dobivamo zbroj dva kvadrata, što je uvijek nenegativno.

Vidjeli smo da za  $c \neq 0$  iz ODJ 1. reda za prave cmc-plohe dobivamo unduloide, nodoide i cilindre. Još treba vidjeti kakve plohe dobivamo za  $c = 0$ .

**Teorem 3.1.17.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana rotacijska prava cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  srednje zakrivljenosti  $H \neq 0$  i  $c$  pripadna konstanta iz ODJ 1. reda za plohu  $S$ . Ako je  $c = 0$ , onda je  $S$  sfera.*

*Dokaz.* Opet ćemo tvrdnju pokazati samo za jednadžbu (\*), ostali slučajevi su potpuno analogni. Pretpostavimo da je orijentacija odabrana tako da je  $H > 0$ . Ako uvrstimo  $c = 0$ , izrazimo  $(x')^2$  i korjenujemo, dobijemo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{H^2x^2 - 1}}{Hx}$$

Ovu jednadžbu možemo egzaktno riješiti zato što je to separabilna ODJ. Zapišemo jednadžbu u obliku (tj. separiramo  $x$  i  $t$ ):

$$\frac{Hx}{\sqrt{H^2x^2 - 1}} dx = dt$$

Zatim integriramo lijevu i desnu stranu, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{Hx}{\sqrt{H^2x^2 - 1}} dx = \left| \begin{array}{l} Hx = \cosh u \\ Hdx = \sinh u du \end{array} \right| = \pm \frac{1}{H} \int \cosh u du \\ &= \pm \frac{1}{H} \sinh(u) + C = \frac{1}{H} \sqrt{\cosh^2(u) - 1} + C = \frac{1}{H} \sqrt{H^2x^2 - 1} + C \end{aligned}$$

Iz toga slijedi:  $x(t) = \frac{1}{H} \sqrt{(t - C)^2 + 1}$ . To možemo reparametrizirati tako da bude  $C = 0$ . Ploha  $S$  je dana kartom (3.1). Ponovo reparametriziramo ovako:  $u' := Hu$ . I onda imamo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(u', v)\| &= \sqrt{|-x(u')^2 \cosh^2 v + x(u')^2 \sinh^2 v + (\frac{u'}{H})^2|} = \sqrt{|-x(u')^2 + (\frac{u'}{H})^2|} \\ &= \sqrt{|-(\frac{1}{H} \sqrt{(u')^2 + 1})^2 + (\frac{u'}{H})^2|} = \sqrt{|-\frac{1}{H^2}|} = \frac{1}{H} \end{aligned}$$

Dakle,  $S$  je sfera sa središtem u ishodištu polumjera  $\frac{1}{H}$ . □

Time smo pokazali da su sfera, cilindar, unduloid i nodoid jedine rotacijske prave cmc-plohe. Te plohe zovemo Delaunayeve plohe. Dodajmo još da je generatrisa unduloida krivulja koju zovemo eliptička lančanica, a generatrisa nodoida krivulja koju zovemo čvorasta krivulja (engl. *nodary*).

## 3.2 Pravčaste i helikoidalne prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Kao i kod minimalnih i maksimalnih pravčastih ploha, pravčaste prave cmc-plohe možemo podijeliti u dvije potklase: razvojne ( $H = \text{const.} \neq 0$  i  $K = 0$ ) i vitopere ( $H = \text{const.} \neq 0$  i  $K \neq 0$ ). Iz potklase razvojnih ploha proučit ćemo samo cilindrične i konusne plohe.

**Definicija 3.2.1.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je cilindrična ako se može parametrizirati kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve$ , gdje je  $c$  regularna krivulja i  $e \in \mathbb{R}_1^3$  vektor.

**Napomena 3.2.2.** 1. Svaka cilindrična ploha je razvojna. Naime, za cilindričnu plohu imamo da je  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = 0$ , odakle slijedi da je  $M = N = 0 \Rightarrow LN - M^2 = 0$ , pa iz relacije (1.4) slijedi  $K = 0$ .

2. Primjeri cilindričnih ploha su cilindri. Zaista, npr. vremenski cilindar oko  $x$ -osi (primjer 3.1.8) može se prikazati ovako:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, r \cos v, r \sin v) = (0, r \cos v, r \sin v) + u(1, 0, 0)$$

Cilindre iz primjera 3.1.7 i 3.1.8 zovemo kružni cilindri.

3. Svaka cilindrična ploha je translacijska (stavimo  $c_1 := c$  i  $c_2(v) := ve$ ).
4. Pretpostavimo da vektor  $e$  nije svjetlosni. Tada se ploha  $S$  može reparametrizirati tako da krivulja  $c$  bude ravninska i da vektor  $e$  bude okomit na ravninu u kojoj leži krivulja  $c$ . Naime, naprosto presječemo plohu  $S$  ravninom okomitom na vektor  $e$  i za krivulju  $c$  uzmemo presjek plohe  $S$  i te ravnine. Nazovimo tu parametrizaciju standardnom.

**Teorem 3.2.3.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana cilindrična ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizirana standardnom parametrizacijom  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve$ . Pretpostavimo da krivulja  $c$  nije svjetlosna i da je  $c''(u) \neq 0$  za svaki  $u$ . Tada je  $S$  prava cmc-ploha ako i samo ako je  $(c'' \times c' + Ce) \times e = 0$  za neki  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C \neq 0$ .*

*Dokaz.* Prvo uočimo da je  $c' \cdot e = 0$ . Naime, ako je  $u_0$  fiksiran, onda je jednačba ravnine u kojoj leži krivulja  $c$ :  $(x - c(u_0)) \cdot e = 0$ . Uvrštavanjem  $x = c(u)$  dobivamo  $c(u) \cdot e = c(u_0) \cdot e$ . Deriviranjem toga dobivamo:  $c'(u) \cdot e + c(u) \cdot 0 = 0 \Rightarrow c'(u) \cdot e = 0$ . Iz toga onda slijedi da je  $F = c' \cdot e = 0$ . Kako je još  $M = N = 0$ , iz relacije (1.5) imamo da je  $H = \frac{L}{2E}$ . Ovdje je  $L = c'' \cdot \frac{c' \times e}{\|c' \times e\|}$  i  $E = c' \cdot c'$ . Budući da krivulja  $c$  nije svjetlosna, možemo pretpostaviti da je parametrizirana duljinom luka, tj.  $E = \pm 1$ .

Uočimo prvo da ne može biti  $H(p) = 0$  za neku točku  $p = \mathbf{x}(u, v) \in S$ . Naime, tada bi slijedilo da je  $L(u, v) = 0 \Rightarrow c''(u) \cdot (c'(u) \times e) = 0 \Rightarrow (c''(u) \times c'(u)) \cdot e = 0$ . Deriviranjem  $c' \cdot e = 0$  dobivamo da je i  $c'' \cdot e = 0$ . No, onda slijedi da je vektor  $c''(u) \times c'(u)$  kolinearan s vektorom  $e$ . Kako su ti vektori istovremeno i okomiti, slijedi da su oba vektora svjetlosna (što ne može biti jer vektor  $e$  nije svjetlosni) ili da je  $c''(u) \times c'(u) = 0$ . Dakle, vektori  $c''(u)$  i  $c'(u)$  su kolinearni. Imamo da je  $c''(u) \neq 0$ , ali i  $c'(u) \neq 0$  jer je krivulja  $c$  regularna. Nadalje, deriviranjem  $c' \cdot c' = \pm 1$  dobivamo da je i  $c''(u) \perp c'(u)$ . Iz toga slijedi da su vektori  $c'(u)$  i  $c''(u)$  svjetlosni, što je kontradikcija s činjenicom da krivulja  $c$  nije svjetlosna.

I sad imamo (deriviramo po  $u$ ):  $H = \text{const.} \neq 0 \Leftrightarrow H' = 0 \Leftrightarrow \frac{L'E - LE'}{2E^2} = 0 \Leftrightarrow L'E = LE' \Leftrightarrow (E, L \neq 0) \Leftrightarrow \frac{L'}{L} = \frac{E'}{E} \Leftrightarrow (\ln |L|)' = (\ln |E|)' \Leftrightarrow \ln |L| = \ln |E| + C, C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (C := \ln C', C' > 0) \Leftrightarrow \ln |L| = \ln(C'|E|) \Leftrightarrow L = \pm C'E \Leftrightarrow L = C''E, C'' \neq 0 \Leftrightarrow \frac{(c'' \times c') \cdot e}{\|c' \times e\|} = C''(c' \times c') \Leftrightarrow (\text{Lagr.}) \Leftrightarrow (c'' \times c') \cdot e = C''(c' \cdot c')((c' \cdot e) - (c' \cdot c')(e \cdot e)) = (c' \cdot e = 0) = -C''(c' \cdot c')^2(e \cdot e) = -C'' \cdot 1 \cdot (e \cdot e) \Leftrightarrow (c'' \times c' + C''e) \cdot e = 0. \quad \square$

**Primjer 3.2.4. (eliptički cilindri)** Cilindričnu plohu čija je bazna krivulja elipsa zovemo eliptički cilindar. Elipsa u  $yz$ -ravnini je dana preslikavanjem  $c(t) = (0, a \cos t, b \sin t)$ ,  $a, b \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Vektor  $e := (1, 0, 0)$  je okomit na  $yz$ -ravninu. Vremenski eliptički cilindar oko  $x$ -osi je dan kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve = (v, a \cos t, b \sin t)$$

Implicitna jednadžba tog cilindra je  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ . Za taj cilindar imamo da je

$$c''(t) \times c'(t) = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -a \sin t & b \cos t \\ 0 & -a \cos t & -b \sin t \end{vmatrix} = \dots = -abe_1 = -abe$$

I onda imamo:  $(c''(t) \cdot c'(t) + abe) \cdot e = 0 \cdot e = 0$ . Još je  $C = ab \neq 0$ , pa iz teorema 3.2.3 slijedi da je eliptički cilindar prava cmc-ploha.

Elipsa u  $xy$ -ravnini je dana preslikavanjem  $c(t) = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t, 0)$  ili preslikavanjem  $c(t) = (a \operatorname{sh} t, b \operatorname{ch} t, 0)$ , gdje su  $a, b \neq 0$ . Vektor  $e := (0, 0, 1)$  je okomit na  $xy$ -ravninu. Prostorni i vremenski eliptički cilindar oko  $z$ -osi su dani kartama

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (a \operatorname{ch} u, b \operatorname{sh} u, v)$$

$$\mathbf{x}_2(u, v) = (a \operatorname{sh} u, b \operatorname{ch} u, v)$$

Implicitne jednadžbe tih cilindara su  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  i  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Primjer 3.2.5. (parabolički nul-cilindar)** Neka je  $b \in \mathbb{R}$ . Plohu  $S$  u  $\mathbb{R}_1^3$  danu kartom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (bv + h(\frac{v^3}{3} + v) + u, bv + h(\frac{v^3}{3} - v) + u, b + hv^2) \\ &= (bv + h(\frac{v^3}{3} + v), bv + h(\frac{v^3}{3} - v), b + hv^2) + u(1, 1, 0) \end{aligned}$$

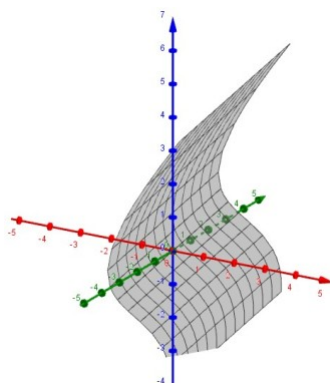
zovemo parabolički nul-cilindar. Ploha  $S$  je očito cilindrična i njena os je pravac  $l$ . Pokažimo da za plohu  $S$  vrijedi  $H = 0$ . Uočimo da je  $\mathbf{x}_u(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), 1, 1, 0)$ . Iz toga slijedi  $E = 0$ . Nadalje, odmah imamo i da je  $\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = 0$ , pa je  $L = M = 0$ . I onda imamo:  $EN - 2FM + GL = 0 \Rightarrow H = 0$ . Još imamo i  $LN - M^2 = 0 \Rightarrow K = 0$ . Dakle, ploha  $S$  je razvojna pravčasta ploha.

Ispitajmo još je li ploha  $S$  minimalna ili maksimalna. Računamo:

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), b + h(v^2 + 1), b + h(v^2 - 1), 2hv)$$

$$F(u, v) = -b - h(v^2 + 1) + b + h(v^2 - 1) + 0 = -2h$$

I onda imamo:  $EG - F^2 = 0 \cdot G - (-2h)^2 = -4h^2 < 0$ . Iz toga slijedi da je ploha  $S$  vremenska, tj. minimalna. Ta ploha je primjer plohe kakva se dobije u slučaju 1. iz teorema 2.3.6.

Slika 3.3: Parabolički nul-cilindrar za  $b = 0$ ,  $h = 1$ 

**Definicija 3.2.6.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je konusna ako se može parametrizirati kartom  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow S$  oblika  $\mathbf{x}(u, v) = c + ve(u)$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}_1^3$  točka i  $e$  glatko polje duž  $c$ . Točku  $c$  zovemo vrh plohe  $S$ .

**Napomena 3.2.7.** 1. Konusna ploha ima singularnu točku u vrhu  $c$ .

2. Svaka konusna ploha je razvojna. Naime,  $\mathbf{x}_{vv} = 0 \Rightarrow N = 0$ . Nadalje,  $n = \frac{ve' \times e}{\|ve' \times e\|}$  i  $\mathbf{x}_{uv} = e' \Rightarrow M = \mathbf{x}_{uv} \times n = 0$ . I onda je  $LN - M^2 = 0 \Rightarrow K = 0$ .

**Napomena 3.2.8.** Konusne prave cmc-plohe ne postoje. Pokažimo to. Prvo, imamo da je  $F = (ve') \cdot e = 0$ , pa imamo:  $H = \frac{E \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + GL}{2(EG - 0^2)} = \frac{L}{E}$ . Računamo:  $L = \mathbf{x}_{uu} \cdot n = ve'' \cdot \frac{ve' \times e}{\|ve' \times e\|} = \frac{v^2}{|v|} \cdot \frac{e'' \cdot (e' \times e)}{\|e' \times e\|} = \pm v(e'' \cdot (e' \times e))$  (iz Lagr. id. imamo da je  $\|e' \times e\| = 1$ ). I onda imamo:  $H = \frac{\pm v(e'' \cdot (e' \times e))}{v^2(e' \cdot e')} = \pm \frac{1}{v}(e'' \cdot (e' \times e))$ . Kad bi bilo  $H = const. \neq 0$ , onda bi slijedilo da je  $e'' \cdot (e' \times e) = Cv$  za sve  $u$  i  $v$ , što je nemoguće jer lijeva strana ovisi samo o  $u$ , a desna strana nije konstantna.

Prije nego krenemo na vitopere pravčaste prave cmc-plohe, trebamo definirati pojam helikoidalne plohe.

**Definicija 3.2.9.** Neka je  $S$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za plohu  $S$  kažemo da je helikoidalna ako je ona invarijantna za neku jednoparametarsku grupu preslikavanja  $G_{L,h}$  koja opisuje tzv. helikoidalno gibanje.

**Napomena 3.2.10.** Nećemo definirati pojam helikoidalnog gibanja jer to ovdje nije toliko bitno. O tome se može pročitati u [12]. Intuitivno, helikoidalno gibanje točke se sastoji od rotacije oko nekog pravca i istovremeno translacije u smjeru tog pravca (gibanje po

zavojnici). Svako helikoidalno gibanje opisano je jednoparametarskom grupom preslikavanja  $G_{L,h}$  koju određuje os  $L$  i nagib  $h \neq 0$ . Navest ćemo samo opću parametrizaciju helikoidalne plohe u slučaju kad je njena os redom  $x$ -os,  $y$ -os, pravac  $l = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ :

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (f(u) + hv, u \cos v, u \sin v) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}_2(u, v) = (u \operatorname{sh} v + f(u) \operatorname{ch} v, hv, u \operatorname{ch} v + f(u) \operatorname{sh} v) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}_3(u, v) = (uv + h(\frac{v^3}{3} + v) + f(u), uv + h(\frac{v^3}{3} - v) + f(u), u + hv^2) \quad (3.8)$$

Ovdje je  $h \neq 0$  konstanta i  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija. Krivulje  $\gamma_1(t) = (f(t), t, 0)$ ,  $\gamma_2(t) = (f(t), 0, t)$ ,  $\gamma_3(t) = (f(t), f(t), t)$  zovemo generatriše helikoidalnih ploha parametriziranih redom kartama  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$ . Krivulju koju dobijemo za fiksirani  $v$  zovemo izvodnica helikoidalne plohe. Općenito, helikoidalna ploha  $S$  je parametrizirana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = \phi_v(\gamma(u))$ , gdje je  $\gamma$  (regularna) krivulja koju onda zovemo generatriša plohe  $S$  i  $\phi_v \in G_{L,h}$ . Helikoidalne plohe su poopćenje helikoida na plohe koje nisu nužno pravčaste, tj. plohe kojima izvodnice nisu nužno pravci. Posebna potklasa helikoidalnih ploha su pravčaste helikoidalne plohe. To su plohe koje su istovremeno helikoidalne i pravčaste. Primjeri ploha iz te klase su helikoidi. Uz pravčaste helikoidalne plohe, drugi najpoznatiji tip su helikoidalne plohe kojima su izvodnice kružnice (primjer: kružni cilindar).

**Teorem 3.2.11.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana pravčasta ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  dana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ . Pretpostavimo da vektori  $e(u)$  i  $e'(u)$  nisu svjetlosni i  $e'(u) \neq 0$  za svaki  $u$ . Ako je  $H = \text{const.}$  i  $K \neq 0$ , onda je ploha  $S$  helikoidalna.*

*Dokaz.* Dokaz je identičan kao u teoremu 2.3.15 do dijela kad dobijemo relacije

$$K = \frac{-Q(u)^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$H = \frac{-Q(u)(F(u) + Q(u)J(u)) + \epsilon Q'(u)v + \epsilon J(u)v^2}{2|EG - F^2|^{\frac{3}{2}}}$$

Još imamo:

$$E = (c'(u) + ve'(u)) \cdot (c'(u) + ve'(u)) = c'(u) \cdot c'(u) + v^2\eta$$

$$EG - F^2 = (c'(u) \cdot c'(u) + v^2\eta)\epsilon - (c'(u) \cdot e(u))^2 = (c'(u) \cdot c'(u))(e(u) \cdot e(u))$$

$$- (c'(u) \cdot e(u))^2 + v^2\epsilon\eta = (\text{Lagr.}) = -(c'(u) \times e(u)) \cdot (c'(u) \times e(u)) + v^2\epsilon\eta$$

Uočimo da je  $c'(u) \times e(u) = \eta Q(u)e'(u)$ . Pokažimo to. Imamo da je  $e'(u) \perp c'(u), e(u)$ , pa slijedi da je vektor  $e'(u)$  kolinearan s vektorom  $c'(u) \times e(u)$ . Kako je  $e'(u) \neq 0$ , slijedi da je  $c'(u) \times e(u) = \alpha e'(u)$  za neki  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ako to skalarno pomnožimo vektorom  $e'(u)$ ,



dobivamo:  $\alpha = \frac{1}{\eta}[(c'(u) \times e(u)) \cdot e'(u)] = \left(\frac{1}{\eta} = \eta\right) = \eta[c'(u) \cdot (e(u) \times e'(u))] = \eta Q(u)$ . Time smo dobili:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= -(c'(u) \times e(u)) \cdot (\eta Q(u) e'(u)) + v^2 \epsilon \eta = -\eta Q(u) [(c'(u) \times e(u)) \cdot e'(u)] + v^2 \epsilon \eta \\ &= \eta(v^2 \epsilon - Q(u)^2) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga gore dobivamo:  $K = \frac{-Q(u)^2}{(Q(u)^2 - \epsilon v^2)^2}$  (1)  $\Rightarrow v^2 = \epsilon(Q(u)^2 \pm \frac{|Q(u)|}{\sqrt{-K}})$ . Još imamo:  $|EG - F^2| = \frac{|Q|}{\sqrt{-K}}$ . Uvrštavanjem toga u izraz za  $F$  i sređivanjem dobivamo:

$$2H = \pm \frac{F}{|Q|^{\frac{1}{2}}} (-K)^{\frac{3}{4}} \pm \frac{\epsilon Q'}{|Q|^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\pm Q(-K)^{\frac{3}{2}} \pm K} \pm \frac{J}{|Q|^{\frac{1}{2}}} (-K)^{\frac{1}{2}}$$

U gornjem izrazu možemo imati bilo koju kombinaciju predznaka. Jednakost vrijedi za sve  $u$  i  $v$ . Potencije  $(-K)^{\frac{3}{4}}$ ,  $(-K)^{\frac{3}{2}}$ ,  $-K$ ,  $(-K)^{\frac{1}{2}}$  su linearno nezavisne. Zaista, ako u  $\alpha_1(-K)^{\frac{3}{4}} + \alpha_2(-K)^{\frac{3}{2}} + \alpha_3(-K) + \alpha_4(-K)^{\frac{1}{2}} = 0$  fiksiramo  $u$  i napravimo supstituciju  $x := (-K)^4$ , dobivamo  $\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^6 + \alpha_3 x^4 + \alpha_4 x^2 = 0$ . Iz toga slijedi da polinom s lijeve strane ima beskonačno mnogo nultočaka. Naime,  $K$  ovisi o  $v$ , a  $v \in \mathbb{R}$  je proizvoljan i funkcija oblika (1) očito preslikava  $\mathbb{R}$  u uniju otvorenih intervala. Svaki otvoreni interval se sastoji od beskonačno mnogo točaka, pa se polinom poništava za beskonačno mnogo točaka  $x$ . Iz toga slijedi da je taj polinom nulpolinom, tj.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ . Kako gore koeficijenti uz potencije od  $-K$  ovise samo o  $u$ , slijedi da su oni nužno konstante. Iz toga slijedi da su  $J$ ,  $F$  i  $Q$  konstante.

U dokazu teorema 2.3.15 smo dobili da je  $e'' = \epsilon \eta [-e + J(e \times e')]$ . Kako je sad  $J$  konstanta, deriviranjem dobivamo:  $e''' = \epsilon \eta [-e' + J(e' \times e' + e \times e'')] = (*)$ . Kako je  $e' \perp e$ ,  $e''$ , slijedi da je  $e \times e'' = \alpha e'$ . Ako to skalarno pomnožimo s  $e'$ , dobivamo:  $\alpha = \frac{1}{\eta} ((e \times e'') \cdot e') = \eta J$ . I onda imamo:  $(*) = \epsilon \eta [-e' + J(0 + \eta J e')] = -\epsilon \eta e' + \epsilon J^2 e' = -\epsilon(\eta - J^2) e'$  (2). Još nam treba:

$$\begin{aligned} e'' \cdot e'' &= (\epsilon \eta)^2 [e \cdot e - 2J(e \cdot (e \times e')) + J^2((e \times e') \cdot (e \times e'))] = (\text{Lagr.}) = \epsilon - 2J \cdot 0 \\ &\quad + J^2((e \cdot e')^2 - (e \cdot e)(e' \cdot e')) = \epsilon + J^2(0^2 - \epsilon \eta) = \epsilon(1 - J^2 \eta) = \epsilon \eta (\eta - J^2) \end{aligned}$$

Sada razlikujemo dva slučaja.

*Slučaj 1.* Pretpostavimo da je  $\eta - J^2 = 0$ . Tada je nužno  $\eta = 1$ . Nadalje, tada je  $e''' = 0$ , pa je  $e'' = \text{const.}$  Nadalje,  $e'' \cdot e'' = 0$ . Tu sad imamo dva podslučaja.

*Podslučaj 1.1.* Ako je  $e'' = 0$ , onda je  $e' = \text{const.}$  i  $e' \cdot e' = \eta = 1$ . Integriranjem slijedi da je  $e(u) = e' u + a$  za neki  $a \in \mathbb{R}_1^3$ . No, onda slijedi da je  $e(u) \cdot e(u) = (e' \cdot e') u^2 + 2(e' \cdot a) u + a \cdot a = 1 \cdot u^2 + 2(e' \cdot a) u + a \cdot a \neq \epsilon \in \{-1, 1\}$ , što je kontradikcija. Dakle, ovaj slučaj nije moguć.

*Podslučaj 1.2.* Ako je vektor  $e''$  svjetlosni, onda integriranjem dobivamo da je  $e$  algebarska krivulja 2. reda. Možemo pretpostaviti da je  $J = 1$  (to vrijedi do na izometriju prostora  $\mathbb{R}_1^3$ ) i da je polje  $e$  dano formulom  $e(u) = \frac{1}{2}(-\epsilon u^2 + 1 - \epsilon, -\epsilon u^2 + 1 + \epsilon, 2u)$  (3). Imamo

$e \times e'' = \eta J e' = e'$  i još iz dokaza teorema 2.3.15 imamo  $c' = \epsilon F e - \epsilon \eta [c' \cdot (e \times e')](e \times e') = \epsilon F e - \epsilon Q(e \times e')$ . Deriviranjem te jednakosti ( $Q$  i  $F$  su konstante) dobivamo:  $c'' = \epsilon F e' - \epsilon Q(e' \times e' + e \times e'') = \epsilon(F - Q)e'$ ,  $c''' = \epsilon(F - Q)e''$ ,  $c^{(4)} = 0$  (zadnje vrijedi jer je  $e'' = \text{const.}$ ). Budući da je  $e'' \neq 0$ , imamo dva pod-podslučaja.

Ako je  $F - Q = 0$ , onda je  $c'' = 0$ , pa je  $c$  pravac. Nadalje, zbog  $Q = F$  imamo:  $c' = \epsilon F(e - e \times e')$ . Iz toga slijedi da je  $e - e \times e' = \text{const.}$  Ako tu funkciju evaluiramo u  $u = 0$  (koristimo (3)), dobivamo da je  $e - e \times e' = e'' = (1, 1, 0)$ , pa dobivamo:  $c' = \epsilon F(1, 1, 0)$ . Posebno, pravac  $c$  je svjetlosni. I sada se za plohu  $S$  s takvima  $c$  i  $e$  pokaže po definiciji da je helikoidalna.

Ako je  $F - Q \neq 0$ , onda imamo da je  $c'''$  konstantan svjetlosni vektor, pa je  $c$  algebarska krivulja 3. reda. Tada je  $S$  ploha nastala tzv. kubičnim navijanjem pravca, takva ploha je također helikoidalna. Uočimo da ovdje ne može biti  $H = 0$  jer bi to povlačilo  $J = 0$  (vidi gore izraz za  $H$ ), što ne može biti jer je  $J^2 = 1$ . Dakle, dobili smo pravu cmc-plohu.

*Slučaj 2.* Pretpostavimo da je  $\eta - J^2 \neq 0$ . Pokažimo prvo da vektori  $e'(u)$  i  $e''(u)$  razapinju konstantnu ravninu u  $\mathbb{R}_1^3$ , tj. ravninu koja ne ovisi o  $u$ . Prvo, ti vektori su linearno nezavisni jer je  $e'(u) \perp e''(u)$ . Kad bi bili kolinearni, onda su ili oba vektora svjetlosna (što ne može biti jer vektor  $e'(u)$  nije svjetlosni po uvjetu teorema) ili je  $e''(u) = 0$  (zato što je, opet po uvjetu teorema,  $e'(u) \neq 0$ ). No,  $e''(u) = 0$  povlači da je  $e'''(u) = 0$ , a onda iz (2), zbog  $\eta - J^2 \neq 0$ , slijedi da je  $e'(u) = 0$ , što je kontradikcija. I sad računamo:  $(e' \times e'')' = e'' \times e'' + e' \times e''' = (2) = 0 + e' \times (-\epsilon(\eta - J^2)e') = 0$ . Dakle, ravnina je konstantna.

Tvrdimo da je  $e$  kružnica. Nađimo njeno središte. Promotrimo funkciju  $f(u) = e(u) + \frac{1}{\epsilon(\eta - J^2)}e''(u)$ . Za nju vrijedi:

$$f'(u) = e'(u) + \frac{1}{\epsilon(\eta - J^2)}e'''(u) = (3) = e'(u) - \frac{1}{\epsilon(\eta - J^2)} \cdot \epsilon(\eta - J^2)e'(u) = 0$$

Dakle,  $f$  je konstanta, tj.  $f$  je točka u  $\mathbb{R}_1^3$ . I sad imamo:  $(e(u) - f) \cdot (e'(u) \times e''(u)) = (-\frac{1}{\epsilon(\eta - J^2)}e''(u)) \cdot (e'(u) \times e''(u)) = 0$ . Dakle, točke  $e(u)$  zadovoljavaju jednadžbu ravnine koja prolazi točkom  $f$  i normala joj je (konstantan) vektor  $e' \times e''$ . Uočimo još da deriviranjem  $e' \cdot e'' = 0$  dobivamo  $e'' \cdot e'' = -e' \cdot e''' = (2) = \epsilon(\eta - J^2)(e' \cdot e') = \epsilon\eta(\eta - J^2)$ . Za svaki  $u$  imamo:

$$\|e(u) - f\| = \|e(u) - f(u)\| = \left\| \frac{-1}{\epsilon(\eta - J^2)}e''(u) \right\| = \frac{\|e''(u)\|}{|\eta - J^2|} = \frac{\sqrt{|\epsilon(\eta - J^2)\eta|}}{|\eta - J^2|} = \frac{1}{\sqrt{|\eta - J^2|}}$$

Iz toga slijedi da je  $e$  dio kružnice sa središtem u točki  $f$  polumjera  $\frac{1}{\sqrt{|\eta - J^2|}}$ .

Još treba opisati krivulju  $c$ . Kao u podslučaju 1.2., dobivamo da je  $c'' = \epsilon(F - QJ)e'$  (s time da ovdje nije nužno  $J = 1$ ). Ako je  $F - QJ = 0$ , onda je  $c$  pravac. U suprotnom integriranjem slijedi  $c'(u) = \epsilon(F - QJ)e(u) + a$ ,  $a \in \mathbb{R}_1^3$ , što povlači da je  $c$  krivulja nastala

tzv. Lorentzovim navijanjem točke oko osi čiji je vektor smjera  $e' \times e''$ . Za plohu  $S$  s takvima  $c$  i  $e$  se pokaže da je helikoidalna.  $\square$

**Napomena 3.2.12.** Teorem 3.2.11 vrijedi i bez dodatnih pretpostavki na polja  $e$  i  $e'$ , ali te slučajeve smo izostavili jer su kompliciraniji. Dokaz teorema u punoj općenitosti se može naći u [1]. Obrat tog teorema ne vrijedi, jedan protuprimjer je cilindar sa svjetlosnom osi (vidi napomenu 3.1.9).

Sada ćemo proučiti helikoidalne plohe (ne nužno pravčaste). Ograničit ćemo se samo na tri vrste helikoidalnih ploha: one kojima su izvodnice grafovi polinoma, one kojima su izvodnice kružnice i helikoidalne  $B$ -namotajne plohe.

**Napomena 3.2.13.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Ako označimo  $H_1 := EN - 2FM + GL$ , onda iz relacije (1.5) slijedi da je  $H_1 = 2H(EG - F^2)$ .

**Teorem 3.2.14.** Neka je  $(S, n)$  orijentirana helikoidalna cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čija je generatrisa graf polinoma  $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ . Tada je  $n \leq 1$ , tj. generatrisa je pravac.

1. Ako je os plohe  $S$   $x$ -os, onda je  $S$  helikoid, kružni cilindar ili ploha dana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = (\pm u + a_0 + hv, u \cos v, u \sin v)$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$  (za tu plohu je  $H = \pm \frac{1}{h}$ ).
2. Ako je os plohe  $S$   $y$ -os, onda je  $S$  helikoid ili ploha dana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = ((\pm u + a_0) \operatorname{ch} v + u \operatorname{sh} v, hv, (\pm u + a_0) \operatorname{sh} v + u \operatorname{ch} v)$ ,  $h, a_0 \neq 0$  (za tu plohu je  $H = 0$ ).
3. Ako je os plohe  $S$  pravac  $l$ , onda je  $S$  helikoid ili parabolički nul-cilindar.

*Dokaz.* Radi jednostavnosti, tvrdnju ćemo dokazati samo za slučajeve kad je os plohe  $S$   $x$ -os,  $y$ -os i pravac  $l$ . Neka je  $\gamma$  generatrisa plohe  $S$ .

1. U ovom slučaju, krivulja  $\gamma$  leži u  $xy$ -ravnini (vidi [12]). Ako je  $\gamma(t) = (t, r, 0)$  za neki  $r \neq 0$ , onda je  $S$  cilindar iz primjera 3.1.8. U suprotnom je  $\gamma$  lokalno graf neke funkcije  $f$ , tj.  $\gamma(t) = (f(t), t, 0)$ . To slijedi iz teorema o inverznom preslikavanju jer krivulja  $\gamma$  mora biti regularna (zato što je ploha  $S$  orijentirana). Tada je ploha  $S$  dana kartom (3.6). Računamo fundamentalne veličine prvog reda:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), f'(u), \cos v, \sin v)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), h, -u \sin v, u \cos v)$$

$$E(u, v) = -f'(u)^2 + \cos^2 v + \sin^2 v = 1 - f'(u)^2$$

$$F(u, v) = -f'(u)h - u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = -f'(u)h$$

$$G(u, v) = -h^2 + u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 - h^2$$

Računamo jedinično normalno polje:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}(u, v) &= (\mathbf{x}(u, v), -u, h \sin v - f'(u)u \cos v, -h \cos v - f'(u)u \sin v) \\ \|\mathbf{x}(u, v) \times \mathbf{x}(u, v)\| &= \sqrt{|E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2|} \\ &= \sqrt{|(1 - f'(u)^2)(u^2 - h^2) - f'(u)^2 h^2|} = \sqrt{|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|} \\ n(\mathbf{x}(u, v)) &= \frac{(\mathbf{x}(u, v), -u, h \sin v - f'(u)u \cos v, -h \cos v - f'(u)u \sin v)}{\sqrt{|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|}}\end{aligned}$$

Računamo fundamentalne veličine drugog reda:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (\mathbf{x}(u, v), f''(u), 0, 0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= (\mathbf{x}(u, v), 0, -\sin v, \cos v) \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (\mathbf{x}(u, v), 0, -u \cos v, -u \sin v) \\ L(u, v) &= \frac{f''(u)u}{\sqrt{|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|}} \\ M(u, v) &= \frac{-h}{\sqrt{|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|}} \\ N(u, v) &= \frac{f'(u)u^2}{\sqrt{|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|}}\end{aligned}$$

I onda iz relacije (1.5) imamo:

$$H(\mathbf{x}(u, v)) = \pm \frac{(1 - f'(u)^2)f'(u)u^2 - 2f'(u)h^2 + (u^2 - h^2)f''(u)u}{2|(1 - f'(u)^2)u^2 - h^2|^{\frac{3}{2}}}$$

I sada imamo dva slučaja.

Pretpostavimo da je  $H = 0$ . Tada je  $H_1 = 0$ . Uvrstimo sada  $f(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$  u  $H_1$  (to je brojnik s desne strane) i sredimo. Očito ćemo dobiti da je  $H_1$  polinom varijable  $u$ . Ne trebamo računati cijeli polinom, trebamo samo odrediti vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz najveću potenciju). Prvo, imamo:

$$H_1(u) = f'(u)u^2 - f'(u)^3 u^2 - 2f'(u)h^2 + u^3 f''(u) - h^2 u f''(u)$$

Tražimo najveću potenciju u svakom članu. Imamo:  $f'(u)u^2 = u^2 \sum_{k=1}^n a_k k u^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k k u^{k+1}$ . Dakle, vodeći član je  $a_n n u^{n+1}$ . Nadalje,  $f'(u)^3 u^2 = u^2 (\sum_{k=1}^n a_k k u^{k-1})^3$ . Ovdje je vodeći član  $a_n^3 n^3 u^{3(n-1)+2} = a_n^3 n^3 u^{3n-1}$ . I tako nastavimo dalje, ostali vodeći članovi su redom:  $2h^2 a_n n u^{n-1}$ ,  $a_n n(n-1)u^{n+1}$ ,  $h^2 a_n n(n-1)u^{n-1}$ . Od svih ovih članova, najveći stupanj ima član  $a_n^3 n^3 u^{3n-1}$ , pa slijedi da je to vodeći koeficijent polinoma  $H_1$ . Budući da je  $H_1$  nulpolinom, po teoremu o nulpolinomu svi koeficijenti mu moraju

biti jednaki 0. Ako je  $n \geq 1$ , onda je  $3n - 1 \geq 2$ . No, zbog  $a_n \neq 0$  je  $a_n^3 n^3 \neq 0$ , pa dobivamo kontradikciju. Ako je  $n = 0$ , onda je  $f(u) = a_0$ ,  $a_0 \neq 0$ . Kad to uvrstimo u (3.6), dobivamo parametrizaciju helikoida iz primjera 2.3.12.

Pretpostavimo sada da je  $H = \text{const.} \neq 0$ . Pomnožimo gornju jednakost s nazivnikom i sve prebacimo na lijevu stranu. Tada s lijeve strane imamo polinom koji je nulpolinom. Analognim postupkom kao gore nađe se vodeći član. Ako je  $n \geq 2$ , vodeći član je  $4H^2 a_n^6 n^6 u^{6n}$ . Opet zbog  $a_n, H \neq 0$  imamo  $4H^2 a_n^6 n^6 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , vodeći član je  $4H^2(1 - a_1^2)^3 u^6$ . Zbog  $H \neq 0$  slijedi  $a_1 = \pm 1$ . Dakle,  $f(u) = \pm u + a_0$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Uvrštavanjem toga u (3.6) dobivamo plohu  $\mathbf{x}(u, v) = (\pm u + a_0 + hv, u \cos v, u \sin v)$ . Za tu plohu se dobije  $H = \frac{H_1}{2(EG-F^2)} = \dots = \pm \frac{1}{h} \neq 0$  (predznak ovisi o izabranoj orijentaciji). Dakle, to je prava cmc-ploha.

2. U ovom slučaju krivulja  $\gamma$  leži u  $xz$ -ravnini (vidi [12]). Ako je  $\gamma(t) = (t, 0, b)$  za neki  $b \in \mathbb{R}$ , ploha  $S$  je helikoid iz primjera 2.3.11 (sa zamijenjenom drugom i trećom koordinatom jer je tamo helikoid oko  $z$ -osi). U suprotnom je  $\gamma$  lokalno graf neke funkcije  $f$ , tj.  $\gamma(t) = (f(t), 0, t)$ . Tada je ploha  $S$  dana kartom (3.7). Kao u slučaju 1., izračuna se:

$$H(\mathbf{x}(u, v)) = \pm \frac{h(-f(u) + uf'(u))(-1 + f'(u)^2) - h(h^2 - u^2 + f(u)^2)f''(u)}{2|h^2 - u^2 + 2uf(u)f'(u) - (h^2 + f(u)^2)f'(u)^2|^{\frac{3}{2}}}$$

Pretpostavimo da je  $H = 0$ . Tada je  $H_1 = 0$ . Kad uvrstimo  $f(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ , slijedi da je  $H_1$  polinom. Vodeći član se odredi kao u 1. Ako je  $n \geq 2$ , dobijemo  $ha_n^3 n(n-1)^2 u^{3n-2}$ , pa zbog  $a_n \neq 0$  i  $n-1 \neq 0$  slijedi  $ha_n^3 n(n-1)^2 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 0$ , tj.  $f(u) = a_0$ , dobivamo  $H_1 = ha_0$ . Kako je  $H_1 = 0$  i  $h \neq 0$ , slijedi  $a_0 = 0$  (tj. tada je  $f = 0$ ). Uvrštavanjem u (3.7) dobivamo helikoid iz primjera 2.3.11. Ako je  $n = 1$ , vodeći koeficijent od  $H_1$  je  $ha_0(1 - a_1)^2$ , odakle slijedi  $a_0 = 0$  ili  $a_1 = \pm 1$ . Ako je  $a_1 = \pm 1$ , onda dobijemo da je  $W := EG - F^2 = -a_0^2$  (uvrsti se  $f$  u nazivnik gore). Kako je ploha  $S$  orijentirana, mora biti  $W \neq 0$ , pa je  $a_0 \neq 0$ . Ova dva slučaja koja smo dobili ćemo riješiti malo kasnije.

Pretpostavimo da je  $H = \text{const.} \neq 0$ . Kao u 1., pomnožimo s nazivnikom i sve prebacimo na lijevu stranu, pa dobijemo polinom varijable  $u$  koji je nulpolinom. Ako je  $n \geq 2$ , vodeći član je  $4H^2 n^6 a_n^{12} u^{12n-6}$ . Zbog  $H \neq 0$  i  $a_n \neq 0$  je  $4H^2 n^6 a_n^{12} \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , vodeći član je  $4H^2(a_1^2 - 1)^6 u^6$ . Iz  $4H^2(a_1^2 - 1)^6 = 0$ , zbog  $H \neq 0$ , slijedi  $a_1 = \pm 1$ . No, to je jedan od podslučajeva gore, a znamo od prije da je tada  $H = 0$ , što je kontradikcija. Analogno za  $n = 0$ .

Dakle, jedina dva slučaja koja ostaju su ona dva od prije:  $f(u) = a_1 u$ ,  $a_1 \neq 0$  ili  $f(u) = \pm u + a_0$ ,  $a_0 \neq 0$ .

U prvom slučaju, uvrštavanjem  $f$  u (3.7) dobivamo helikoid iz primjera 2.3.11. Preciznije, ako je  $|a_1| < 1$ , onda stavimo  $a_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  i definirajmo pravac  $\alpha(u) :=$

$(0, 0, u \operatorname{ch} \theta)$ . Znamo da je tada  $\phi_v(\alpha(u))$  helikoid iz primjera 2.3.12 (sa zamijenjenom drugom i trećom koordinatom) za svaki  $\phi_v \in G_{L,h}$ , gdje je  $L$   $y$ -os. No, s druge strane imamo:  $\mathbf{x}(u, v) = \phi_v(\gamma(u)) = \phi_{v+\theta}(\alpha(u)) - (0, h\theta, 0)$ , odakle slijedi da je  $S$  helikoid iz primjera 2.3.12 translatican za vektor  $(0, h\theta, 0)$ . Slično za  $|a_1| > 1$ .

U drugom slučaju uvrštavanjem u (3.7) dobivamo kartu  $\mathbf{x}(u, v) = ((\pm u + a_0) \operatorname{ch} v + u \operatorname{sh} v, hv, (\pm u + a_0) \operatorname{sh} v + u \operatorname{ch} v)$ .

3. U ovom slučaju krivulja  $\gamma$  leži u ravnini razapetoj vektorima  $(1, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$  (vidi [12]). Ako je  $\gamma(t) = (t, t, b)$  za neki  $b \in \mathbb{R}$ , onda je  $S$  parabolički nul-cilindar iz primjera 3.2.5. U suprotnom je  $\gamma$  lokalno graf neke funkcije  $f$ , tj.  $\gamma(t) = (f(t), f(t), t)$ . Tada je ploha  $S$  dana kartom (3.8). Kao u 1., izračunamo:

$$H(\mathbf{x}(u, v)) = \pm \frac{4h^2(f'(u) - 2uf''(u))}{2|4h(u + hf'(u)^2)|^{\frac{3}{2}}}$$

Ako je  $H = 0$ , onda mora biti  $H_1 = 0$ . Uvrštavanjem  $f(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$  dobivamo da je  $H_1$  polinom. Ako je  $n \geq 1$ , vodeći član je  $-4h^2 n a_n (2n - 3) u^{n-1}$ . Za  $n \in \mathbb{N}$  je  $2n - 3 \neq 0$ , pa zbog  $h, a_n \neq 0$  slijedi  $-4h^2 n a_n (2n - 3) \neq 0$ , što je kontradikcija. Za  $n = 0$  dobivamo  $H_1 = 0$ . Tada je  $f(u) = a_0, a_0 \neq 0$ . Kad to uvrstimo u (3.8), dobivamo helikoid iz primjera 2.3.13 (skaliran, sa zamijenjenim koordinatama jer je tamo druga os  $l$  i translatican za vektor  $(a_0, a_0, 0)$ ).

Ako je  $H = \text{const.} \neq 0$ , onda pomnožimo jednakost s nazivnikom i sve prebacimo na lijevu stranu. Dobijemo polinom koji je jednak 0. Za  $n \geq 2$ , vodeći član je  $-256H^2 h^6 n^6 a_n^6 u^{6n-6}$ . Zbog  $H, h, a_n \neq 0$  je  $-256H^2 h^6 n^6 a_n^6 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , dobije se polinom 3. stupnja s vodećim koeficijentom različitim od 0. Ako je  $n = 0$ , dobije se  $H = 0$ , što je kontradikcija jer je  $H \neq 0$ .

□

Želimo detaljnije proučiti dvije nove cmc-plohe koje su se pojavile u teoremu 3.2.14.

**Primjer 3.2.15.** 1. Ploha  $S$  dana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = (\pm u + a_0 + hv, u \cos v, u \sin v)$  (1), gdje je  $a_0 \in \mathbb{R}$  i  $h \neq 0$ , je prava cmc-ploha i za nju je  $H = \pm \frac{1}{h}$ . Ispitajmo je li ta ploha prostorna ili vremenska. Računamo:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), \pm 1, \cos v, \sin v)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\mathbf{x}(u, v), h, -u \sin v, u \cos v)$$

$$E(u, v) = -(\pm 1)^2 + \cos^2 v + \sin^2 v = 0$$

$$F(u, v) = \mp h - u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = \mp h$$

$$EG - F^2 = 0 \cdot G - (\mp h)^2 = -h^2 < 0$$

Iz toga slijedi da je ploha  $S$  vremenska. Može se izvesti i implicitna jednadžba za ovu plohu. Stavimo  $x = \pm u + a_0 + hv$ ,  $y = u \cos v$ ,  $z = u \sin v$ . Tada za  $y \neq 0$  imamo:  $\frac{z}{y} = \operatorname{tg} v \Rightarrow v = \operatorname{arctg} \frac{z}{y}$ . I onda imamo:  $y^2 + z^2 = u^2 = (\pm u)^2 = (x - a_0 - hv)^2 = (x - a_0 - h \operatorname{arctg} \frac{z}{y})^2$ .

2. Ploha  $S$  dana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = ((\pm u + a_0) \operatorname{ch} v + u \operatorname{sh} v, hv, (\pm u + a_0) \operatorname{sh} v + u \operatorname{ch} v)$  (2), gdje su  $a_0, h \neq 0$ . je ploha za koju je  $H = 0$ . Odredimo njenu implicitnu jednadžbu. Ovdje imamo:

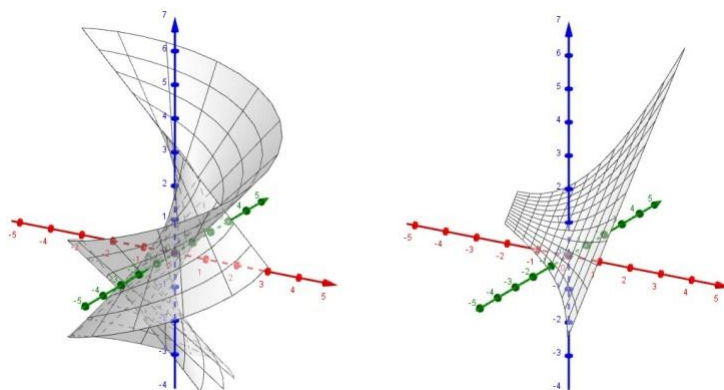
$$\begin{aligned} -x^2 + z^2 &= -(\pm u + a_0)^2 \operatorname{ch}^2 v - 2(\pm u + a_0)u \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v - u^2 \operatorname{sh}^2 v \\ &\quad + (\pm u + a_0)^2 \operatorname{sh}^2 v + 2(\pm u + a_0)u \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + u^2 \operatorname{ch}^2 v \\ &= -(\pm u + a_0)^2 - u^2 = -2u^2 \mp 2a_0u - a_0^2 \end{aligned}$$

Iz  $y = hv$  slijedi  $v = \frac{y}{h}$ , pa onda iz  $x = (\pm u + a_0) \operatorname{ch} v + u \operatorname{sh} v$  imamo:

$$u = \frac{x - a_0 \operatorname{ch} v}{\pm \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v} = \frac{x - a_0 \operatorname{ch} \frac{y}{h}}{\pm \operatorname{ch} \frac{y}{h} + \operatorname{sh} \frac{y}{h}}$$

Kad to uvrstimo gore, dobijemo

$$-x^2 + z^2 = -2\left(\frac{x - a_0 \operatorname{ch} \frac{y}{h}}{\pm \operatorname{ch} \frac{y}{h} + \operatorname{sh} \frac{y}{h}}\right)^2 \mp 2a_0 \frac{x - a_0 \operatorname{ch} \frac{y}{h}}{\pm \operatorname{ch} \frac{y}{h} + \operatorname{sh} \frac{y}{h}} - a_0^2$$



Slika 3.4: Ploha (1) za  $a_0 = 0$ ,  $h = 1$  i ploha (2) za  $a_0 = h = 1$

Sljedeći rezultat ćemo navesti bez dokaza. Dokaz se može naći u [12].

**Teorem 3.2.16.** *Neka je  $(S, n)$  orijentirana helikoidalna cmc-ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čija je generatrisa vremenska kružnica. Tada je os plohe  $S$  prostorni pravac i središte generatrise leži na osi, tj.  $S$  je cilindar s prostornom osi.*

Za kraj ćemo još proučiti helikoidalne  $B$ -namotajne plohe.

**Teorem 3.2.17.** *Neka je  $(S, n)$  helikoidalna  $B$ -namotajna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čija generatrisa  $\gamma$  je graf polinoma  $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ . Tada je  $n \leq 1$ .*

1. *Ako je os plohe  $S$   $x$ -os, onda je  $S$  ploha dana kartom (1).*
2. *Ako je os plohe  $S$   $y$ -os, onda je  $S$  ploha dana kartom (2).*
3. *Ako je os plohe  $S$  pravac  $l$ , onda je  $S$  parabolički nul-cilindar.*

*Dokaz.* Stavimo  $W := EG - F^2$ ,  $K_1 := LN - M^2$ ,  $H_1 := EN - 2FM + GL$ . Tada je  $H^2 - K = 0$  ekvivalentno s  $H_1^2 - 4WK_1 = 0$  (\*). Budući da je  $\gamma$  graf polinoma  $f$ , izraz  $H_1^2 - 4WK_1$  je polinom varijable  $u$  (kao u dokazu teorema 3.2.14). Budući da je taj polinom nulpolinom, svi koeficijenti mu moraju biti jednaki 0.

1. Za cilindar oko  $x$ -osi je  $K = 0$  (pokazali smo da to vrijedi za svaku cilindričnu plohu), pa zbog  $H \neq 0$  imamo  $H^2 - K = H^2 > 0$ . Dakle, cilindar nije  $B$ -namotajna ploha, pa kao u dokazu teorema 3.2.14 imamo da je  $\gamma(t) = (f(t), t, 0)$ . Ploha  $S$  je dana kartom (3.6). Ako to uvrstimo u (\*) i sredimo, dobivamo:

$$\begin{aligned} &((-2h^2 + u^2)f(u) - u^2 f'(u)^3 + u(u^2 - h^2)f''(u))^2 \\ &- 4(h^2 - u^2 + u^2 f'(u)^2)(h^2 - u^3 f'(u)f''(u)) = 0 \end{aligned}$$

Ako je  $n \geq 2$ , vodeći koeficijent dolazi od člana  $u^4 f''(u)^6$  i jednak je  $n^6 a_n^6$ . Zbog  $a_n \neq 0$  je  $n^6 a_n^6 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , vodeći član je  $a_1^2(1 - a_1^2)^2 u^4$ , što je moguće jedino ako je  $a_1 = \pm 1$  (mora biti  $a_1 \neq 0$ ). Dakle,  $f(u) = \pm u + a_0$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Tada se izračuna da je  $H = \pm \frac{1}{h}$ ,  $K = \frac{1}{h^2}$ ,  $W = -h^2$  (s time da unaprijed znamo da ploha  $S$  mora biti vremenska jer prostorne  $B$ -namotajne plohe ne postoje, vidi teorem 1.4.11, 1.). Nadalje, dobije se sljedeći matrični prikaz operatora  $S_p$  u svakoj točki  $p \in S$ :  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -h & -1 \end{bmatrix}$ . Matrični prikaz se računa tako da izaberemo bilo koju bazu za  $T_p S$  i vidimo kako operator  $S_p$  djeluje na vektore te baze (po definiciji). Iz toga slijedi da točka  $p$  nije pupčasta, pa slijedi da je  $S$   $B$ -namotajna ploha. Ako je  $n = 0$ , onda je  $S$  helikoid, ali ta ploha ne zadovoljava  $H^2 - K = 0$ .

2. Kao u 1., ako  $\gamma$  nije graf funkcije varijable  $z$  u  $xz$ -ravnini, onda se dobije da je  $H^2 - K \neq 0$ . Dakle,  $\gamma(t) = (f(t), 0, t)$ . Ploha  $S$  je dana kartom (3.7). Ako to uvrstimo u (\*), dobivamo:

$$\begin{aligned} &h(uf' - u(f')^3 + f((f')^2 - 1) + (h^2 - u^2)f'' + (f)^2 f'')^2 \\ &+ 4((f - uf')^2 + (h^2 - u^2 + f^2)(-1 + (f')^2))(hf''(f - uf') - h((f')^2 - 1)^2) = 0 \end{aligned}$$



Ako je  $n \geq 2$ , vodeći član je  $-4hn^6 a_n^6 u^{8n-6}$ . Budući da je  $h, a_n \neq 0$ , slijedi da je  $-4hn^6 a_n^6 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , vodeći član je  $4h^2(1 - a_1^2)^4 u^2$ . Zbog  $h \neq 0$ , ovo je moguće samo ako je  $a_1 = \pm 1$ . Tada je  $H = K = 0$ , a jedan matrični prikaz operatora  $S_p$  u točki  $p \in S$  je  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -h & 0 \end{bmatrix}$ , odakle slijedi da točka  $p$  nije pupčasta. Dakle, ploha  $S$  je  $B$ -namotajna ploha. Ako je  $n = 0$ , vodeći član je  $-4u^2$ . Budući da je  $-4 \neq 0$ , dobivamo kontradikciju.

3. Ako  $\gamma$  nije graf funkcije u ravnini razapetoj vektorima  $(1, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ , onda je  $S$  parabolčki nul-cilindar (kao u dokazu teorema 3.2.14, 3.). Za parabolčki nul-cilindar se pokaže da je  $B$ -namotajna ploha tako da se nađe bilo koji matrični prikaz operatora  $S_p$ .

Ako je  $\gamma(t) = (f(t), f(t), t)$ , ploha  $S$  je dana kartom (3.8). Uvrštavanjem u (\*) dobivamo:

$$(h(f' - 2uf'')^2 - 4(u + h(f')^2)(1 + 2hf'f'')) = 0$$

Ako je  $n \geq 2$ , vodeći član dolazi od izraza  $-8h^2(f')^3 f''$  i jednak je  $-8h^2 n^4 (n - 1) a_n^4 u^{4n-5}$ . Budući da je  $h, a_n \neq 0$ , slijedi da je  $-8h^2 n^4 (n - 1) a_n^4 \neq 0$ , što je kontradikcija. Ako je  $n = 1$ , vodeći član je  $4u$ , opet kontradikcija. Ako je  $n = 0$ , jednakost postaje  $hu = 0$ , što je opet kontradikcija jer je  $h \neq 0$ .

□

Iz teorema 3.2.17 smo dobili tri specijalne plohe: to su jedine helikoidalne  $B$ -namotajne plohe čija je generatrisa graf polinoma. Dvije plohe su minimalne, a jedna je prava cmc-ploha.

### 3.3 Translacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Već smo vidjeli primjere translacijskih pravih cmc-ploha. To su kružni i eliptički cilindri. Ovdje želimo proučiti translacijske plohe općenito. Ograničit ćemo se na translacijske plohe kojima su obje generatrise ravninske krivulje koje leže u međusobno okomitim ravninama.

**Napomena 3.3.1.** 1. Neka je  $S$  regularna translacijska ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = c_1(u) + c_2(v)$$

Pretpostavimo da krivulja  $c_1$  leži u  $xy$ -ravnini, a krivulja  $c_2$  u  $yz$ -ravnini. Pretpostavimo još da krivulja  $c_1$  nije dio pravca  $t \mapsto (a, t, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  i da krivulja  $c_2$  nije dio pravca  $t \mapsto (0, t, b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Tada su one lokalno oblika  $c_1(t) = (t, f(t), 0)$  i  $c_2(t) = (0, g(t), t)$ , gdje su  $f$  i  $g$  glatke realne funkcije. Naime, kako je ploha  $S$  regularna, mora biti  $c'_1(u) = \mathbf{x}_u(u, v) \neq 0$  i  $c'_2(v) = \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0$ , pa možemo primijeniti teorem o inverznom preslikavanju. Tada je

$$y = f(u) + g(v) = f(x) + f(z)$$

Vrijedi i obrat: svaka ploha  $S$  dana implicitno jednađbom  $y = f(u) + g(v)$ , gdje su  $f$  i  $g$  glatke funkcije, je translacijska. To je trivijalno, samo stavimo  $x = u$ ,  $y = v$  i tada je  $z = f(u) + g(v)$ , pa možemo plohu  $S$  parametrizirati kartom  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ , gdje je  $c_1(u) := (u, f(u), 0)$  i  $c_2(v) := (0, g(v), v)$ . Analognu karakterizaciju dobijemo za ostale koordinatne ravnine.

2. Ako krivulja  $c_1$  leži u  $yz$ -ravnini, a krivulja  $c_2$  u  $xz$ -ravnini, onda se ploha  $S$  može implicitno prikazati jednađbom  $z = f(x) + g(y)$  (uz dodatne uvjete kao gore). Obratno, ploha  $S$  dana implicitno jednađbom  $z = f(x) + g(y)$  je translacijska.
3. Ako krivulja  $c_1$  leži u  $xz$ -ravnini, a krivulja  $c_2$  u  $xy$ -ravnini, onda se ploha  $S$  može prikazati implicitno jednađbom  $x = f(y) + g(z)$  (uz dodatne uvjete kao gore). Obratno, ploha  $S$  dana implicitno jednađbom  $x = f(y) + g(z)$  je translacijska.
4. Ako krivulja  $c_1$  leži u ravnini  $\pi_1$ , a krivulja  $c_2$  u ravnini  $\pi_2$  te ako su  $\pi_1$  i  $\pi_2$  okomite ravnine koje nisu neke od koordinatnih ravnina i nisu svjetlosne, onda možemo promijeniti koordinatni sustav tako da ravnine  $\pi_1$  i  $\pi_2$  budu koordinatne ravnine.

Sada ćemo dokazati da su jedine translacijske prave cmc-plohe eliptički cilindri.

**Teorem 3.3.2.** *Neka je  $(S, n)$  translacijska prava cmc-ploha ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  takva da njene generatriše leže u koordinatnim ravninama. Tada je ploha  $S$  dana implicitno jednom od sljedećih jednađbi.*

1. Ako je ploha  $S$  prostorna, jednađbe su

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2H} \sqrt{1+4H^2y^2} + az \\ y &= -az - \frac{\sqrt{a^2+1}}{2H} \sqrt{4H^2x^2-1} \\ y &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{2H} \sqrt{1+4H^2z^2} + ax \end{aligned}$$

U prvoj jednađbi je  $|a| < 1$ , u drugoj  $a \in \mathbb{R}$ , a u trećoj  $|a| > 1$ .

2. Ako je ploha  $S$  vremenska, jednadžbe su

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\sqrt{1-a^2}}{2H} \sqrt{4H^2y^2-1} + az \\x &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{2H} \sqrt{1-4H^2y^2} + az \\y &= -az + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2H} \sqrt{1+4H^2x^2} \\y &= -\frac{\sqrt{a^2-1}}{2H} \sqrt{4H^2z^2-1} + ax \\y &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2H} \sqrt{1-4H^2z^2} + ax\end{aligned}$$

U prvoj i petoj jednadžbi je  $|a| < 1$ , u drugoj i četvrtoj  $|a| > 1$ , a u trećoj  $a \in \mathbb{R}$ .

U svim jednadžbama je  $H \in \mathbb{R}$ ,  $H \neq 0$  srednja zakrivljenost plohe  $S$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da generatriše plohe  $S$  leže u  $xy$  i  $xz$ -ravnini. Ostali slučajevi se dokazuju analogno. Tada se ploha  $S$  može implicitno prikazati jednadžbom  $x = f(y) + g(z)$ , gdje su  $f$  i  $g$  glatke funkcije. Generatriše  $c_1$  i  $c_2$  su dane formulama  $c_1(t) = (f(t), t, 0)$ ,  $c_2(t) = (g(t), 0, t)$ , a ploha  $S$  je parametrizirana kartom  $\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$ . Izračunamo srednju zakrivljenost pomoću relacije (1.5).

$$\begin{aligned}H &= \pm \frac{(f'(u)^2 - 1)g''(v) + (g'(v)^2 - 1)f''(u)}{2(\pm(f'(u)^2 + g'(v)^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} \\2H &= \pm((f'(u)^2 - 1)g''(v) + (g'(v)^2 - 1)f''(u))(\pm(f'(u)^2 + g'(v)^2 - 1))^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Pozitivan predznak ide ako je ploha  $S$  vremenska, a negativan ako je ploha  $S$  prostorna. Pretpostavimo da je  $S$  prava cmc-ploha, tj. da je  $H = \text{const.} \neq 0$ . Derivirajmo gornju jednakost po  $u$ .

$$\begin{aligned}0 &= \pm(2f'f''g'' + ((g')^2 - 1)f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{3}{2}} \\&\pm (((f')^2 - 1)g'' + ((g')^2 - 1)f''') \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{5}{2}}(\pm 2f'f'') \\&= \pm(2f'f''g'' + ((g')^2 - 1)f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{3}{2}} \\&\pm \frac{((f')^2 - 1)g'' + ((g')^2 - 1)f'''}{2(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} \cdot (-3)(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-1}(\pm 2f'f'') \\&= \pm(2f'f''g'' + ((g')^2 - 1)f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{3}{2}} \\&- 6H((f')^2 + (g')^2 - 1)^{-1}f'f''\end{aligned}$$

Iz toga slijedi:

$$\pm(2f'f''g'' + ((g')^2 - 1)f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} = 6Hf'f'' \quad (3.9)$$

Sada zamijenimo lijevu i desnu stranu i deriviramo tu jednakost po  $v$  (uočimo da desna strana ne ovisi o  $v$ ).

$$\begin{aligned} 0 &= \pm(2f'f''g''' + 2g'g''f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \\ &\pm(2f'f''g'' + ((g')^2 - 1)f''') \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{3}{2}}(\pm 2g'g'') = (3.9) \\ &= \pm(2f'f''g''' + 2g'g''f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} - 6Hf'f''g'g''((f')^2 + (g')^2 - 1)^{-1} \end{aligned}$$

Iz toga slijedi:

$$3Hf'f''g'g'' = \pm(f'f''g''' + g'g''f''')(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{1}{2}}$$

Pretpostavimo da je  $f'' \neq 0$  i  $g'' \neq 0$ . Tada je posebno i  $f', g' \neq 0$ . Tada dijeljenjem s  $f'f''g'g''$  dobivamo:

$$3H = \pm\left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{f'''}{f'f''}\right)(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Ovu jednakost još jednom deriviramo po  $u$ . Dobivamo:

$$0 = \pm\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{f'''}{f'f''}\right) \cdot \frac{1}{2}(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{-\frac{1}{2}}(\pm 2f'f'')$$

Ovu jednakost pomnožimo s  $\pm((f')^2 + (g')^2 - 1)$  i dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \pm\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{f'''}{f'f''}\right)(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{1}{2}}f'f'' \\ &= (3.10) = \pm\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{3}{2}} \pm 3Hf'f'' \end{aligned}$$

Time smo dobili:

$$3Hf'f'' = -\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{3}{2}}$$

Uočimo da lijeva strana u ovoj jednakosti ne ovisi o  $v$ , a desna ovisi (jer je  $g' \neq 0$ ). Ako tu jednakost onda deriviramo po  $v$ , dobivamo:

$$0 = -\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)' \cdot \frac{3}{2}(\pm((f')^2 + (g')^2 - 1))^{\frac{1}{2}}(\pm 2g'g'')$$

Budući da je  $\pm((f')^2 + (g')^2 - 1) > 0$  i  $g'g'' \neq 0$ , slijedi da je  $(\frac{f'''}{f'f''})' = 0$ , pa uvrštavanjem toga gore dobivamo  $3Hf'f'' = 0$ , odakle zbog  $f'f'' \neq 0$  slijedi  $H = 0$ . Time smo dobili kontradikciju jer je  $H \neq 0$ . Dakle, pretpostavka je pogrešna, mora biti  $f'' = 0$  ili  $g'' = 0$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $g'' = 0$ . Tada je  $g(v) = av + b$  za neke  $a, b \in \mathbb{R}$ . Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je  $b = 0$  (ako nije, translaticamo plohu  $S$ ). Sada to uvrstimo u početni izraz za  $H$  i dobivamo:

$$H = \pm \frac{(a^2 - 1)f''(u)}{2(\pm(f'(u)^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\pm(a^2 - 1)f'' = 2H(\pm((f')^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}$$

Dobili smo ODJ za funkciju  $f$  koju sada samo treba riješiti. Supstitucijom  $h := f'$  jednadžba postaje:

$$\pm(a^2 - 1)h' = 2H(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}$$

Ovo je separabilna jednadžba. Da bismo mogli separirati varijable, mora biti  $a^2 - 1 \neq 0$ , što vrijedi jer na desnoj strani imamo  $H \neq 0$  i  $\pm(h^2 + a^2 - 1) > 0$ . Uvrstimo  $h' = \frac{dh}{du}$  i dobivamo:

$$\pm \frac{du}{a^2 - 1} = \frac{1}{2H} \cdot \frac{dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}}$$

Integriranjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\begin{aligned} \pm \frac{u}{a^2 - 1} + C_1 &= \frac{1}{2H} \int \frac{dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm 1}{2H(a^2 - 1)} \int \frac{\pm(a^2 - 1)}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} dh \\ &= \frac{\pm 1}{2H(a^2 - 1)} \int \frac{\pm(h^2 + a^2 + 1) - (\pm h^2)}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} dh \\ &= \frac{\pm 1}{2H(a^2 - 1)} \left( \int \frac{dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{\pm h^2 dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} \right) = (*) \\ \int \frac{\pm h dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} &= \left| \begin{array}{l} s = \pm(h^2 + a^2 - 1) \\ ds = \pm 2h dh \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot (-2)u^{-\frac{1}{2}} \\ &= -(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \\ \int \frac{\pm h^2 dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} &= \left| \begin{array}{l} u = h \\ dv = \pm h(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{-\frac{3}{2}} dh \quad v = -(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right| \\ &= -\frac{h}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{dh}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{1}{2}}} \\ (*) &= \frac{\pm 1}{2H(a^2 - 1)} \cdot \frac{h}{(\pm(h^2 + a^2 - 1))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Time smo dobili:

$$\begin{aligned}\pm \frac{u}{a^2 - 1} + C_1 &= \frac{1}{2H(a^2 - 1)} \cdot \frac{\pm h(u)}{(\pm(h(u)^2 + a^2 - 1))^{\frac{1}{2}}} \\ \pm(u \mp (a^2 - 1)C_1) &= \frac{1}{2H} \cdot \frac{\pm h}{\sqrt{\pm(h^2 + a^2 - 1)}} \\ 4H^2(u + C_2)^2 &= \frac{h^2}{\pm(h^2 + a^2 - 1)} \\ h &= \pm \frac{2|H| \sqrt{\pm(a^2 - 1)(u + C_2)}}{\sqrt{1 \mp 4H^2(u + C_2)^2}}\end{aligned}$$

Predznak ispred razlomka je proizvoljan, a predznak pod korijenom ovisi o tome je li ploha  $S$  prostorna ili vremenska. Kako je  $h = f'$ , integriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}f(u) &= \pm \sqrt{\pm(a^2 - 1)} \int \frac{2|H|(u + C_2)}{\sqrt{1 \mp 4H^2(u + C_2)^2}} du = \left| \begin{array}{l} s = 1 \mp 4H^2(u + C_2)^2 \\ ds = 8H^2(u + C_2) du \end{array} \right| \\ &= \pm \frac{\sqrt{\pm(a^2 - 1)}}{4|H|} \int s^{-\frac{1}{2}} ds = \pm \frac{\sqrt{\pm(a^2 - 1)}}{4|H|} \cdot 2s^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{\pm(a^2 - 1)}}{2|H|} \sqrt{1 \mp 4H^2(u + C_2)^2} + C_3\end{aligned}$$

Plohu  $S$  možemo translirati tako da bude  $C_2 = C_3 = 0$ . Dakle, ploha  $S$  je dana implicitno jednačinom  $x = \pm \frac{\sqrt{\pm(a^2 - 1)}}{2|H|} \sqrt{1 \mp 4H^2y^2} + az$  (uz odgovarajući izbor predznaka). Tako se dobiju sve plohe, osim druge u 1. i treće u 2. Te dvije plohe dobijemo ako gore pretpostavimo da je  $f'' = 0$ .  $\square$

**Napomena 3.3.3.** U teoremu 3.3.2 smo pokazali: ako je  $S$  prava cmc-ploha, onda je jedna generatrisa plohe  $S$  nužno pravac, a druga dio elipse. U teoremu 3.3.2 smo zapravo dobili samo pet ploha (tj. njihove dijelove): to su tri eliptička cilindra iz primjera 3.2.4 i još dva oko  $y$ -osi (prostorni i vremenski).

Do sada nismo tražili translacijske minimalne i maksimalne plohe, samo smo pokazali da za svaku plohu vrijedi da je minimalna ako i samo ako je lokalno translacijska. Ako se ograničimo na translacijske plohe čije generatrise leže u koordinatnim ravninama, onda takvih ploha ima svega nekoliko. Za kraj ćemo pronaći te plohe.

**Teorem 3.3.4.** *Neka je  $(S, n)$  translacijska minimalna ili maksimalna ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  takva da njene generatrise leže u koordinatnim ravninama. Tada je  $S$  ravnina ili jedna od sljedećih ploha.*

1. Ako je ploha  $S$  prostorna, onda je  $S$  prostorni dio neke od ploha danih implicitno jednađbama

$$x = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(ay)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(az)) \quad (3.11)$$

$$y = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(az)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sh}(ay)) \quad (3.12)$$

2. Ako je ploha  $S$  vremenska, onda je  $S$  vremenski dio neke od ploha iz 1. dijela ili neka od ploha danih implicitno jednađbama

$$x = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sh}(ay)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(az)) \quad (3.13)$$

$$x = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(ay)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sh}(az)) \quad (3.14)$$

$$x = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sh}(ay)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sh}(az)) \quad (3.15)$$

$$y = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(az)) + \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(ax)) \quad (3.16)$$

U svim jednađbama je  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

*Dokaz.* Pokazat ćemo tvrdnju samo u slučaju kad generatrise leže u  $xy$  i  $xz$ -ravnini. Ostali slučajevi se dokazuju analogno. Kao u dokazu teorema 3.3.2, dobivamo:

$$H = \pm \frac{(f'(u)^2 - 1)g''(v) + (g'(v)^2 - 1)f''(u)}{2(\pm(f'(u)^2 + g'(v)^2 - 1))^{\frac{3}{2}}}$$

Kad uvrstimo  $H = 0$ , dobivamo:

$$0 = (f'(u)^2 - 1)g''(v) + (g'(v)^2 - 1)f''(u)$$

Pretpostavimo da je jedna od generatrisa, npr.  $c_1$ , pravac, tj. da je  $f'' = 0$ . Uvrštavanjem u jednađbu dobivamo:  $0 = (f'(u)^2 - 1)g''(v)$ . Iz toga slijedi da je  $f' = \pm 1$  ili  $g'' = 0$ . Ako je  $f' = \pm 1$ , slijedi da je  $f(u) = \pm u + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , pa je  $c_1(u) = (\pm u + C, u, 0)$ . No, taj pravac ne leži u koordinatnim ravninama, pa smo dobili kontradikciju. Dakle, nužno je  $g'' = 0$ , pa je generatrisa  $c_2$  također pravac, odakle slijedi da je  $S$  ravnina.

Pretpostavimo sada da nijedna od generatrisa nije pravac, tj.  $f'', g'' \neq 0$ . Tada smijemo dijeliti s  $f''$  i  $g''$ , pa jednađbu možemo zapisati ovako:

$$\frac{f'(u) - 1}{f''(u)} = -\frac{g'(v)^2 - 1}{g''(v)}$$

Uočimo da lijeva strana ovisi samo o  $u$ , a desna strana samo o  $v$ . Kako to vrijedi za sve  $u$  i  $v$ , nužno je  $\frac{f'(u)-1}{f''(u)} = -\frac{g'(v)^2-1}{g''(v)} = \text{const.} =: a$ . Time smo dobili dvije ODJ.

Imamo:  $\frac{f'(u)-1}{f''(u)} = a \Leftrightarrow af''(u) - f'(u)^2 + 1 = 0$ . Ovo je nelinearna ODJ, ali se može supstitucijom svesti na separabilnu jednadžbu. Stavimo  $h := (f')^2$ . Deriviranjem toga dobivamo  $h' = 2f'f'' \Rightarrow f'' = \frac{h'}{2f'}$  (mora biti  $f' \neq 0$  jer bi u suprotnom bilo  $f'' = 0$ , što smo pretpostavili da ne vrijedi). Uvrštavanjem toga u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} \pm \frac{ah'}{2\sqrt{h}} - h + 1 &= 0 \\ \pm \frac{a}{2\sqrt{h}} \frac{dh}{du} &= h - 1 \\ \pm \frac{a}{2(h-1)\sqrt{h}} dh &= du \end{aligned}$$

Mogli smo podijeliti s  $h-1$  jer  $h=1$  povlači  $f' = \pm 1$ , što smo vidjeli da ne može biti. Integriranjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\begin{aligned} u + C &= \pm \frac{a}{2} \int \frac{dh}{(h-1)\sqrt{h}} = \left| \begin{array}{l} s = \sqrt{h} \\ ds = \frac{1}{2\sqrt{h}} dh \end{array} \right| = \pm a \int \frac{ds}{s^2-1} \\ &= \pm a \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| = \pm \frac{a}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{h}+1}{\sqrt{h}-1} \right| \end{aligned}$$

Iz toga slijedi:  $\ln \left| \frac{\sqrt{h}+1}{\sqrt{h}-1} \right| = \pm \frac{2}{a}(u+C) \Rightarrow \frac{\sqrt{h}+1}{\sqrt{h}-1} = \pm \exp(\pm \frac{2}{a}(u+C))$ . Iz toga dobivamo:

$$f'(u) = \pm \sqrt{h(u)} = \frac{\mp \exp(\pm \frac{2}{a}(u+C)) - 1}{1 \mp \exp(\pm \frac{2}{a}(u+C))} = \frac{\mp (\exp(\pm \frac{1}{a}(u+C)))^2 - 1}{1 \mp (\exp(\pm \frac{1}{a}(u+C)))^2}$$

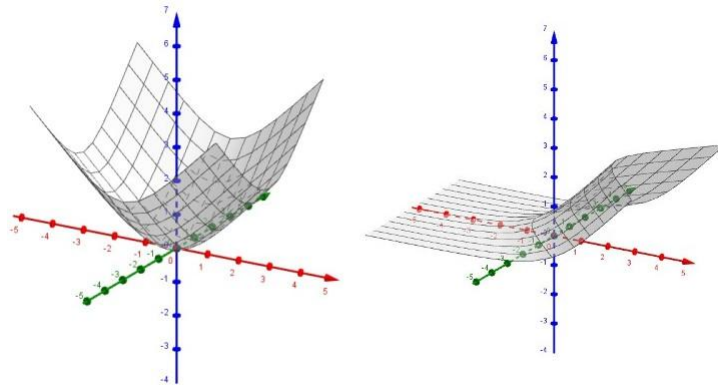
Zadnji izraz je jednak  $\text{th}(\pm \frac{1}{a}(u+C))$  ili  $\text{cth}(\pm \frac{1}{a}(u+C))$ , ovisno o predznacima. I onda imamo:

$$\begin{aligned} \int \text{th}(\pm \frac{1}{a}(u+C)) du &= \int \frac{\text{sh}(\pm \frac{1}{a}(u+C))}{\text{ch}(\pm \frac{1}{a}(u+C))} du = \left| \begin{array}{l} s = \text{ch}(\pm \frac{1}{a}(u+C)) \\ ds = \pm \frac{1}{a} \text{sh}(\pm \frac{1}{a}(u+C)) du \end{array} \right| \\ &= \pm a \int \frac{ds}{s} = \pm a \ln |s| + D = \pm a \ln \text{ch}(\pm \frac{1}{a}(u+C)) + D \\ \int \text{cth}(\pm \frac{1}{a}(u+C)) du &= \dots = \pm a \ln |\text{sh}(\pm \frac{1}{a}(u+C))| + D \end{aligned}$$

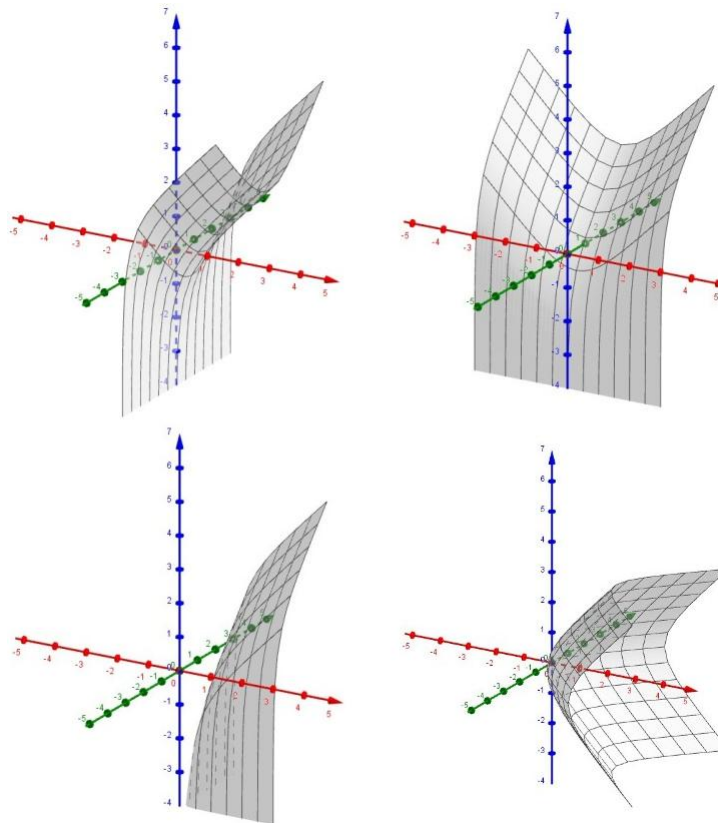
Plohu  $S$  možemo translahirati tako da je  $C = D = 0$ . Time dobivamo  $f$  kao u jednadžbama iz iskaza teorema (samo umjesto  $a$  stavimo  $\frac{1}{a}$ ). Za  $g$  imamo jednadžbu  $-\frac{g'(v)^2-1}{g''(v)} = a$ , koja se rješava analogno.  $\square$



3.3. TRANSLACIJSKE PRAVE PLOHE KONST. SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI 101



Slika 3.5: Plohe (3.11) i (3.12) za  $a = 1$



Slika 3.6: Plohe (3.13) i (3.14) (gore) te (3.15) i (3.16) (dolje) za  $a = 1$



# Bibliografija

- [1] F. Dillen i W. Kühnel, *Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space*, *manuscripta mathematica* **98** (1999), 307–320.
- [2] S. Fujimori, *Triply periodic zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* (to appear) (2017).
- [3] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara i S. D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, *Michigan Math J.* **63** (2014), 189–207.
- [4] E. Güler, *Bour's spacelike maximal and timelike minimal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space*, conference paper (2014).
- [5] W. Goemans, *Surfaces in three-dimensional Euclidean and Minkowski space, in particular a study of Weingarten surfaces*, Katholieke Universiteit Leuven - Faculty of Science, 2010.
- [6] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds, Second Edition*, American Mathematical Society, 2006.
- [7] S. Lee, *Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space*, *Communications in Mathematical Analysis*, Conf. 01 (2008), 11–19.
- [8] S. Lee i J. H. Varnado, *Spacelike constant mean curvature surfaces of revolution in Minkowski 3-space*, *Differential Geometry - Dynamical Systems* **8** (2006), 144–165.
- [9] ———, *Timelike constant mean curvature surfaces of revolution in Minkowski 3-space*, *Differential Geometry - Dynamical Systems* **9** (2007), 82–102.
- [10] C. J. Lejdfors, *Surfaces of Constant Mean Curvature*, Centre for Mathematical Sciences, Lund University, 2003.
- [11] H. Liu, *Translation Surfaces with Constant Mean Curvature in 3-dimensional Spaces*, *Journal of Geometry* **64** (1999), 141–149.

- [12] R. López i E. Demir, *Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature*, Central European Journal of Mathematics **12** (2014), 1349–1361.
- [13] L. V. McNertney, *One-parameter Families of Surfaces With Constant Curvature in Lorentz 3-Space*, Department of Mathematics at Brown University, 1980.
- [14] Ž. Milin Šipuš i S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2015.
- [15] P. Mira, *Construction of Maximal Surfaces in the Lorentz-Minkowski Space*, Coral Press (2001), 337–350.
- [16] P. J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. An Analytic Approach*, Cambridge University Press, 1986.
- [17] J. A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag New York Inc, 1979.
- [18] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

# Sažetak

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti ( $H = \text{const.}$ ) sadrže dvije velike klase ploha - tzv. minimalne plohe ( $H = 0$ ) i tzv. cmc-plohe, odnosno prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti ( $H = \text{const.} \neq 0$ ). U euklidskoj geometriji, među njih spadaju, primjerice, helikoid i katenoid kao minimalne plohe te sfera i Delaunayeve plohe kao cmc-plohe. Cilj ovog diplomskog rada je analizirati analogne plohe u Minkowskijevom prostoru, tj. prostoru čija metrika nije pozitivno definitna, nego općenito nedegenerirana (pseudo-Riemannov prostor).



# Summary

Surfaces of constant mean curvature ( $H = \text{const.}$ ) contain two large classes of surfaces - minimal surfaces ( $H = 0$ ) and cmc-surfaces or surfaces of constant mean curvature ( $H = \text{const.} \neq 0$ ). In euclidean geometry, they include, for example, helicoid and catenoid as minimal surfaces and the sphere and Delaunay surfaces as cmc-surfaces. The aim of this master's thesis is to analyse analogue surfaces in the Minkowski space, a space whose metric isn't positively definite, but is generally non-degenerate (a pseudo-Riemannian space).





# Životopis

Rođen sam u Našicama 25. 11. 1992. Osnovnu školu sam pohađao u Osnovnoj školi Dore Pejačević u Našicama, a zatim prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga u Našicama. Tijekom osnovne i srednje škole redovito sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike, informatike (programiranje LOGO i C/C++/Pascal) i hrvatskog jezika. Moja najveća ostvarenja na natjecanjima su sljedeća: 4. mjesto na regionalnom natjecanju iz matematike u 4. razredu osnovne škole (to je tada bila najviša razina natjecanja), sudjelovanje na državnom natjecanju iz matematike u 3. razredu srednje škole te u 4. razredu srednje škole sudjelovanje na čak tri državna natjecanja: matematika (10. mjesto i pohvala), informatika i hrvatski jezik (7. mjesto). Sudjelovao sam i na Hrvatskom otvorenom natjecanju u informatici (HONI), osvojivši 8. mjesto u 3. razredu i 9. mjesto u 4. razredu srednje škole. To je natjecanje u programiranju na razini države koje traje tijekom cijele školske godine.

2011. godine upisao sam preddiplomski studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija i računarstvo na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Prekinuo sam studij nakon godine dana studiranja. 2012. godine upisao sam preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu i završio taj studij 2015. godine. Time sam stekao titulu sveučilišni prvostupnik matematike (univ. bacc. math.). Iste godine upisao sam diplomski studij Teorijska matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Tijekom jednog semestra održavao sam demonstrature iz kolegija Metrički prostori. Diplomski studij završavam 2017. godine obranom ovog diplomskog rada i tada stječem titulu magistar matematike (mag. math.).