SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Melissa Filipašić

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJSKE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

"Ti to hoćeš, ti to možeš, ti to budeš!"

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 D'Alembertova funkcijska jednadžba **2**
1.1 Neprekidna rješenja d'Alembertove jednadžbe 2
1.2 Opće rješenje d'Alembertove jednadžbe 17
1.3 Prva i druga Cauchyjeva funkcijska jednadžba 25

2 Trigonometrijske funkcijske jednadžbe **29**
2.1 Kosinus-sinus funkcijska jednadžba 29
2.2 Sinus-kosinus funkcijska jednadžba 33
2.3 Sinus funkcijska jednadžba 36
2.4 Poopćenje sinus funkcijske jednadžbe 43

Bibliografija **57**

Uvod

Trigonometrijski identiteti motiviraju proučavanje trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi kojima su trigonometrijske funkcije samo jedno od mogućih rješenja. Tako na primjer trigonometrijski identitet

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

vodi do funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

kojoj funkcija kosinus nije jedino moguće rješenje. Ova funkcijska jednadžba poznata je kao *d'Alembertova funkcijska jednadžba*. Kako bi odredio sumu dva ili više vektora u euklidskoj i neeuklidskoj geometriji, Jean d'Alembert (1717.–1783.) sveo je problem na određivanje svih rješenja navedene funkcijske jednadžbe. Cauchy je odredio njena neprekidna rješenja 1821. godine, a Kannappan je 1968. godine odredio njeno opće rješenje. Rješavanje d'Alembertove funkcijske jednadžbe opisat ćemo u prvom poglavlju ovoga rada.

U drugom poglavlju proučavamo trigonometrijske funkcijske jednadžbe s dvjema nepoznanicama. Primjer je *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

dobivena iz trigonometrijskog identiteta

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,$$

no funkcije sinus i kosinus nisu njena jedina rješenja. Uočit ćemo različite metode rješavanja te odrediti opća i neprekidna rješenja nekoliko različitih trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi.

Poglavlje 1

D'Alembertova funkcijska jednadžba

1.1 Neprekidna rješenja d'Alembertove jednadžbe

U sljedećem teoremu riješit ćemo d'Alembertovu jednadžbu uz pretpostavku neprekidnosti rješenja.

Teorem 1.1.1. *Neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, && (1.1)\\ f(x) &= 1 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, && (1.2)\\ f(x) &= \operatorname{ch}(\alpha x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, && (1.3)\\ f(x) &= \cos(\beta x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, && (1.4)\end{aligned}$$

gdje su α, β proizvoljne realne konstante.

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (DE) dobivamo

$$2f(0) = 2[f(0)]^2,$$

pa je

$$f(0) = 0 \quad \text{ili} \quad f(0) = 1.$$

Ako je $f(0) = 0$, tada uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. To nam daje rješenje (1.1) . Zbog toga dalje pretpostavimo da je $f(0) \neq 0$.

Nadalje, dokazat ćemo da je bilo koje rješenje od (DE) parna funkcija. Da bismo to dokazali, uvrstimo $x = 0$ u (DE). Tada dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Kako je $f(0) \neq 0$, to je $f(0) = 1$, pa prethodna jednadžba prelazi u

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

odakle slijedi

$$f(-y) = f(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je parna funkcija. Kako je f neprekidna na $\mathbb{R}$, f je također integrabilna na bilo kojem segmentu. Zbog toga za svaki $t > 0$ imamo

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy + \int_{-t}^{t} f(x-y)dy = 2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.5}$$

Vrijedi

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy = \int_{x-t}^{x+t} f(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Slično,

$$\int_{-t}^{t} f(x-y)dy = \int_{x+t}^{x-t} f(w)(-dw) = \int_{x-t}^{x+t} f(w)dw = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Sada (1.5) postaje

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy + \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = 2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy$$

odnosno

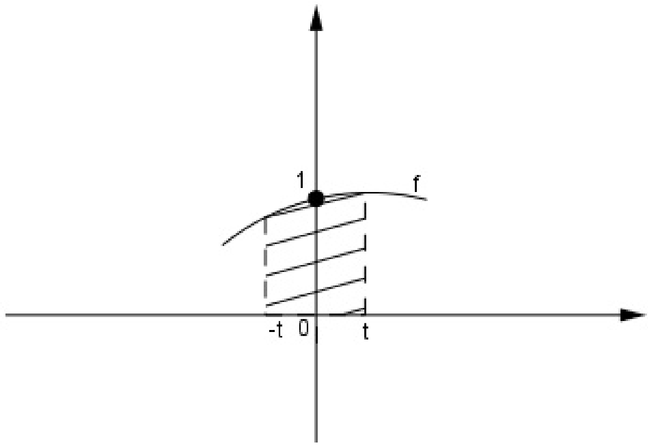
$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.6}$$

Nadalje, kako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna, postoji $t > 0$ takav da vrijedi (vidite sliku 1.1)

$$\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0.$$

Uočimo da je lijeva strana u (1.6) derivabilna po varijabli x prema osnovnom teoremu diferencijalnog računa. Uočimo također da je i desna strana u (1.6) derivabilna po varijabli x. Tada deriviranjem jednakosti (1.6) po x dobivamo

$$\frac{d}{dx}\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = \frac{d}{dx}\left[f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy\right]$$



Slika 1.1: Postoji $t > 0$ sa svojstvom $\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0$

odakle slijedi

$$f(x+t) - f(x-t) = f'(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.7}$$

Ovo pokazuje da je f dvostruko derivabilna te je

$$f'(x+t) - f'(x-t) = f''(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy.$$

Iz toga slijedi da je f trostruko derivabilna. Nastavljajući korak po korak, zaključujemo da su neprekidna rješenja od (DE) beskonačno derivabilna.

Uvrštavanjem $x = 0$ u (1.7) dobivamo

$$f(t) - f(-t) = f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.8}$$

Kako je f parna, vrijedi $f(t) = f(-t)$, pa (1.8) postaje

$$f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy = 0. \tag{1.9}$$

Kako je $\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0$, iz (1.9) slijedi

$$f'(0) = 0.$$

Kako je $f \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, deriviramo (DE) po y dva puta kako bismo dobili

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y),$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo

$$2f''(x) = 2f(x)f''(0).$$

Neka je $k = f''(0)$. Tada je

$$f''(x) = kf(x)$$

što povlači sljedeći problem početne vrijednosti (PPV):

$$\boxed{\tfrac{d^2y}{dx^2} = ky,\ \ y(0) = 1 \ \text{ i } \ y'(0) = 0. \qquad \text{(PPV)}}$$

Kako bismo riješili ovaj problem početne vrijednosti, moramo obuhvatiti 3 slučaja: $k = 0$, $k > 0$ i $k < 0$.

Prvi slučaj. Neka je $k = 0$. Tada (PPV) postaje

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Odatle slijedi

$$y(x) = c_1x + c_2$$

za neke $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Kako je $y(0) = 1$, to je $c_2 = 1$. Također, iz $y'(0) = 0$ dobivamo $c_1 = 0$. Dakle, $y(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa u ovom slučaju dobivamo (1.2).

Drugi slučaj. Neka je $k > 0$. Uvrštavanjem $y = e^{mx}$ u

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky \tag{1.10}$$

dobivamo $m^2 = k$, odnosno $m = \pm\sqrt{k}$. Zbog toga je

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x},$$

gdje je $\alpha = \sqrt{k} \neq 0$. Sada vrijedi

$$1 = y(0) = c_1e^{\alpha\cdot 0} + c_2e^{-\alpha\cdot 0} = c_1 + c_2.$$

Slijedi

$$c_2 = 1 - c_1,$$

pa je

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + (1 - c_1)e^{-\alpha x}.$$

Sada je

$$0 = y'(0) = c_1\alpha e^{\alpha x} + (1 - c_1)(-\alpha)e^{-\alpha x}.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo

$$0 = c_1\alpha + (1 - c_1)(-\alpha) = c_1\alpha - \alpha + c_1\alpha = 2c_1\alpha - \alpha.$$

Iz toga slijedi

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.3).

Treći slučaj. Neka je $k < 0$. Uvrštavanjem $y = e^{mx}$ u (1.10), dobivamo $m^2 = k < 0$. Stoga je $m = \pm i\beta$, gdje je $\beta = \sqrt{-k} \neq 0$. Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}.$$

Kako je

$$1 = y(0) = c_1 + c_2,$$

imamo

$$c_2 = 1 - c_1.$$

Dakle,

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + (1 - c_1)e^{-i\beta x}.$$

Nadalje, kako je

$$0 = y'(0) = i\beta c_1 - i\beta(1 - c_1) = 2i\beta c_1 - i\beta,$$

to je

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga imamo

$$y(x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = \cos(\beta x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.4).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.1) ili (1.2) u (DE), lako se uvjerimo da su ona rješenja od (DE). Uvrštavanjem (1.3) u (DE), koristeći parnost funkcije kosinus hiperbolni i neparnost funkcije sinus hiperbolni, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \operatorname{ch}(\alpha(x+y)) + \operatorname{ch}(\alpha(x-y)) \\ &= \operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x)\operatorname{sh}(\alpha y) + \operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(-\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x)\operatorname{sh}(-\alpha y) \\ &= 2\operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(\alpha y) \\ &= 2f(x)f(y), \end{aligned} \tag{1.11}$$

odnosno (1.3) je rješenje jednadžbe (DE).

Uvrštavanjem (1.4) u (DE), dobivamo

$$
\begin{aligned}
f(x+y)+f(x-y) &= \cos(\beta(x+y))+\cos(\beta(x-y)) \\
&= \cos(\beta x)\cos(\beta y)-\sin(\beta x)\sin(\beta y)+\cos(\beta x)\cos(\beta y)+\sin(\beta x)\sin(\beta y) \\
&= 2\cos(\beta x)\cos(\beta y) \\
&= 2f(x)f(y)
\end{aligned}
$$

pa slijedi da je (1.4) rješenje jednadžbe (DE). Ovime smo završili dokaz teorema. □

Napomena. Uočimo da neprekidnost funkcije f u funkcijskoj jednadžbi povlači beskonačnu derivabilnost od f. Drugim riječima, deriviranjem funkcijske jednadžbe dobivamo diferencijalnu jednadžbu koju zatim rješavamo i na taj način pronalazimo rješenje polazne funkcijske jednadžbe. To je standardna metoda rješavanja funkcijskih jednadžbi kada je pretpostavljena neprekidnost njenih rješenja.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) *Neprekidna je u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) *Postoji najmanji nenegativan korijen λ takav da je $f(\lambda) = 0$.*

(iv) $f(0) > 0$.

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f(x) > 0$ *za svaki* $x \in \langle 0, \lambda\rangle$.

(b) $f(0) = 1$.

(c) $f(-x) = f(x)$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f(x+2\lambda) = -f(x)$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$..

(e) $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

(f) $f\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

(g) $|f(x)| \le 1$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

(h) Funkcija f je periodična s najmanjim pozitivnim periodom 4λ.

Dokaz. (a) Iz svojstva (iii) i (iv) možemo zaključiti da je $\lambda > 0$. Kako je λ najmanji pozitivan korijen od f, za bilo koji $x \in \langle 0, \lambda\rangle$ vrijedi da je $f(x) \neq 0$. Neprekidnost funkcije f i činjenica da je $f(0) > 0$ povlače da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 0, \lambda\rangle$.

(b) Uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $2f(x) = 2f(x)f(0)$, odnosno

$$f(x)(f(0) - 1) = 0.$$

Ova jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa i za $x \in \langle 0, \lambda\rangle$. Kako prethodno svojstvo povlači da je $f(x) \neq 0$, zaključujemo da mora vrijediti $f(0) = 1$.

(c) Uvrštavanjem $x = 0$ u (DE) dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Primjenom prethodnog svojstva, to jest, $f(0) = 1$, dobivamo $f(-y) = f(y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$.

(d) Zamjenom x sa $x + \lambda$ i y sa λ u (DE) dobivamo

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 2f(x + \lambda)f(\lambda).$$

Prema svojstvu (iii) slijedi

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 0.$$

(e) Uvrstimo li $y = x$ u (DE), dobivamo $f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2$ pa prema tvrdnji (b) slijedi $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.

(f) Rješavanjem prethodne kvadratne jednadžbe po $f(x)$ dobit ćemo

$$f(x) = \pm\sqrt{\frac{1 + f(2x)}{2}},$$

što je ekvivalentno traženom svojstvu zamijenimo li x sa $\frac{x}{2}$.

(g) Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(a)| > 1$. Uvrštavanjem $x = \lambda + a$ i $y = \lambda - a$ u (DE) slijedi

$$f(2\lambda) + f(2a) = 2f(\lambda + a)f(\lambda - a). \tag{1.12}$$

Primijenimo li svojstvo (e) na lijevu stranu prethodne jednakosti, ona će postati

$$[2[f(\lambda)]^2 - 1] + [2[f(a)]^2 - 1].$$

Kako je $f(\lambda) = 0$, lijeva strana od (1.12) postaje

$$2[[f(a)]^2 - 1]$$

što je pozitivan broj. Kako je $f(\lambda - a) = f(2\lambda - (\lambda + a)) = f(-(\lambda + a) + 2\lambda)$, što je prema svojstvu (d) i (c) jednako $-f(-(\lambda + a)) = -f(\lambda + a)$, desna strana jednakosti (1.12) je jednaka

$$-2[f(\lambda + a)]^2.$$

Kako taj broj nije pozitivan, zaključujemo da jednakost (1.12) nije moguća pa mora vrijediti $|f(x)| \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(h) Primijenimo li svojstvo (d) dva puta, vidjet ćemo da je f periodična funkcija:

$$f(4\lambda + x) = f\Big(2\lambda + (2\lambda + x)\Big) = -f(2\lambda + x) = f(x).$$

Preostaje dokazati da je 4λ najmanji period funkcije f. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji period T takav da je $0 < T < 4\lambda$. Tada je

$$f(T) = f(0 + T) = f(0) = 1.$$

Uvrstimo sada $x = y = \frac{T}{2}$ u (DE):

$$f(T) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \text{ ili } f\left(\frac{T}{2}\right) = -1.$$

Ako je $f\left(\frac{T}{2}\right) = -1$, uvrštavanjem $x = y = \frac{T}{4}$ u (DE) dobit ćemo

$$f\left(\frac{T}{2}\right) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{4}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Drugim riječima, $\frac{T}{4}$ je pozitivan korijen od $f(x)$ što je kontradikcija sa svojstvom (iii) jer je $0 < \frac{T}{4} < \lambda$.

Ako je $f\left(\frac{T}{2}\right) = 1$, uvrštavanjem $x = \lambda + \frac{T}{4}$ i $y = \lambda - \frac{T}{4}$ u (DE) dobit ćemo

$$f(2\lambda) + f\left(\frac{T}{2}\right) = 2f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right).$$

Prema svojstvima (d) i (b) vrijedi $f(2\lambda) = f(0 + 2\lambda) = -f(0) = -1$, pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right) = 0. \tag{1.13}$$

Primjenom svojstava (d) i (c) dobivamo

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right) = f\left(2\lambda - \left(\lambda - \frac{T}{4}\right)\right) = -f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right)$$

pa je jednakost (1.13) ekvivalentna

$$\left[f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right)\right]^2 = 0.$$

No, kako je $0 < \lambda - \frac{T}{4} < \lambda$ što je kontradikcija s (iii), zaključujemo da je 4λ najmanji period funkcije f. □

Uzevši u obzir teorem 1.1.1, tvrdnjama (a)-(h) su dana svojstva funkcije kosinus. Slijedi još jedna karakterizacija funkcije kosinus pomoću funkcijske jednadžbe.

Teorem 1.1.3. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, različita od nul-funkcije, zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(x)f(y) \tag{1.14}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, ako i samo ako je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right) \tag{1.15}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Dokaz. Zamijenimo li y sa $-y$, iz (1.14) slijedi:

$$f(x + y + \alpha) - f(x - y + \alpha) = 2f(x)f(-y). \tag{1.16}$$

Zbrajanjem (1.14) i (1.16) dobivamo

$$f(x)f(y) = -f(x)f(-y),$$

odnosno

$$f(-y) = -f(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je neparna funkcija. Zamjenom x i y u (1.14) slijedi:

$$f(y - x + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(y)f(x). \tag{1.17}$$

Oduzimanjem (1.14) od (1.17) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) &= f(y - x + \alpha) \\ &= f(-(x - y - \alpha)) \\ &= -f(x - y - \alpha). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Za $y = 0$, iz (1.18) slijedi
$$f(x+\alpha) = -f(x-\alpha) \tag{1.19}$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dodavanjem α u argument funkcije, iz (1.19) slijedi:
$$\begin{aligned} f(x+2\alpha) &= -f(x), \\ f(x+3\alpha) &= -f(x+\alpha), \\ f(x+4\alpha) &= -f(x+2\alpha) = f(x). \end{aligned} \tag{1.20}$$
Zaključujemo,
$$f(x+4\alpha) = f(x) \tag{1.21}$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno f je periodična funkcija s periodom 4α. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > 0$. Zamjenom x sa $x + \alpha$ i y sa $y + \alpha$ u (1.14) slijedi:
$$f(x-y+\alpha) - f(x+y+3\alpha) = 2f(x+\alpha)f(y+\alpha). \tag{1.22}$$
Uvrštavanjem (1.20) u (1.22) dobivamo
$$f(x-y+\alpha) + f(x+y+\alpha) = 2f(x+\alpha)f(y+\alpha). \tag{1.23}$$
Neka je
$$g(x) = f(x+\alpha).$$
Tada (1.23) postaje
$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y).$$
Kako je f neprekidna, to je i g neprekidna funkcija, pa prema teoremu 1.1.1 vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji: $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{ch}(ax)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = \cos(bx)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje su a, b proizvoljne konstante.

Ako je g nul-funkcija, tada je i f nul-funkcija, suprotno pretpostavci.

Ako je $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tada je $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Međutim, uvrštavanjem $f(x) = 1$ u (1.14), dobivamo $0 = 2$ što je kontradikcija pa zaključujemo da ni ono nije rješenje.

Neka je $g(x) = \mathrm{ch}(ax)$. Tada je
$$f(x) = g(x-\alpha) = \mathrm{ch}\,(a(x-\alpha)),$$
odnosno
$$f(x+4\alpha) = \mathrm{ch}\,(a(x+3\alpha)).$$
Prema (1.21) tada slijedi
$$\mathrm{ch}\,(a(x+3\alpha)) = \mathrm{ch}\,(a(x-\alpha)).$$

Posebno, za $x = \alpha$ dobivamo $\operatorname{ch}(4a\alpha) = 1$, pa je $4a\alpha = 0$, odakle slijedi $a = 0$. Dakle, $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što ne može biti.

Neka je $g(x) = \cos(bx)$. Kako je f periodična funkcija s periodom 4α, isto vrijedi i za funkciju g:

$$g(x + 4\alpha) = f(x + 5\alpha) = f(x + \alpha) = g(x),$$

odakle slijedi

$$\cos(bx + 4b\alpha) = \cos(bx)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$4b\alpha = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

pa je

$$b = \frac{k\pi}{2\alpha},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $f(x) = g(x - \alpha) = \cos(b(x - \alpha))$, slijedi da je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right).$$

Primjenom adicijskih formula dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2} \\ &= \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2} \end{aligned} \tag{1.24}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Sada s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x + y)\right) \\ &= \left(\cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi y}{2\alpha} + \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &\quad -\left(\cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi y}{2\alpha} - \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &= 2\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}, \end{aligned}$$

a s druge, primjenom (1.24), imamo

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\left(\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema (1.14), izjednačavanjem desnih strana zaključujemo da je $\left(\sin \frac{k\pi}{2}\right)^2 = 1$, odakle slijedi da je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Dakle, $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.15) u (1.14), slijedi da je lijeva strana jednaka

$$\begin{aligned}
f(x-y+\alpha) - f(x+y+\alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x+y)\right) \\
&= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) \\
&\quad - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right).
\end{aligned}$$

S desne strane imamo

$$\begin{aligned}
2f(x)f(y) &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(y-\alpha)\right) \\
&= 2\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]^2 \\
&= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right).
\end{aligned}$$

Kako su lijeva i desna strana jednake, zaključujemo da je (1.15) rješenje jednadžbe (1.14). Ovime smo završili dokaz teorema. □

Teorem 1.1.4. *Neka je (S,+) komutativna polugrupa, a $\mathbb{F}$ polje sa svojstvima:*

(i) $2x = 0$ ($x \in \mathbb{F}$) *povlači* $x = 0$,

(ii) za svaki $x \in \mathbb{F}$ *postoji* $y \in \mathbb{F}$ *takav da je* $y^2 = x$.

Neka je σ endomorfizam od S takav da vrijedi $\sigma(\sigma x) = x$ za svaki $x \in S$. Tada je $g\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe

$$g(x+y) + g(x+\sigma y) = 2g(x)g(y) \tag{1.25}$$

za sve $x, y \in S$, ako i samo ako je

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2} \tag{1.26}$$

za svaki $x \in S$, gdje je $h\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe $h(x + y) = h(x)h(y)$ za sve $x, y \in S$.

Dokaz. Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) vidimo da funkcija g zadovoljava danu funkcijsku jednadžbu. Preostaje dokazati da je g jedino rješenje od (1.25).

Ako je $g(x) = 0$ za svaki $x \in S$ ili $g(x) = 1$ za svaki $x \in S$, uvrštavanjem u (1.25) se uvjeravamo da su obje funkcije rješenja od (1.25). U nastavku pretpostavljamo da g nije konstantna funkcija. Uvrštavanjem $y = 0$ u (1.25) dobivamo

$$g(x) = g(x)g(0) \tag{1.27}$$

za svaki $x \in S$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (1.25) i primjenom (1.27) dobivamo

$$g(y) + g(\sigma y) = 2g(0)g(y) = 2g(y),$$

pa je

$$g(\sigma x) = g(x) \tag{1.28}$$

za svaki $x \in S$.

Sada slijedi

$$g(x + \sigma y) = g(\sigma(x + \sigma y)) = g(\sigma x + y).$$

Razlikujemo dva slučaja: (1) $g(x+y) = g(x+\sigma y)$ za sve $x, y \in S$ i (2) postoje $x_0, y_0 \in S$ takvi da je $g(x_0 + y_0) \neq g(x_0 + \sigma y_0)$.

Prvi slučaj. Pretpostavimo da je $g(x + y) = g(x + \sigma y)$ za sve $x, y \in S$. Tada iz (1.25) slijedi

$$g(x + y) = g(x)g(y)$$

za sve $x, y \in S$. Dakle, g je eksponencijalna funkcija. Neka je $h = g$. Tada je $2g(x) = h(x) + h(x)$. Iz (1.28) slijedi da je $h(x) = g(x) = g(\sigma x) = h(\sigma x)$, pa je $2g(x) = h(x) + h(\sigma x)$, odnosno

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}$$

za svaki $x \in S$.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da postoje $x_0, y_0 \in S$ takvi da je

$$g(x_0 + y_0) - g(x_0 + \sigma y_0) \neq 0. \tag{1.29}$$

Neka je $f\colon S \to \mathbb{F}$ funkcija zadana pravilom

$$f(x) = g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0). \tag{1.30}$$

Tada iz (1.29) slijedi da je $f(x_0) \neq 0$. Iz (1.30) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(\sigma x) &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma x + \sigma y_0) \\ &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma(x + y_0)) \\ &= g(x + \sigma y_0) - g(x + y_0) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = -f(\sigma x)$ pa je

$$f(x + \sigma y) = -f(\sigma(x + \sigma y)) = -f(\sigma x + y). \tag{1.31}$$

Daljnjim korištenjem (1.30) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g(x + y + y_0) - g(x + y + \sigma y_0), \\ f(x + \sigma y) &= g(x + \sigma y + y_0) - g(x + \sigma y + \sigma y_0). \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih dviju jednakosti te korištenjem (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + f(x + \sigma y) &= g\big((x + y_0) + y\big) + g\big((x + y_0) + \sigma y\big) \\ &\quad - g\big((x + \sigma y_0) - y\big) + g\big((x + \sigma y_0) + \sigma y\big) \\ &= 2g(x + y_0)g(y) - 2g(x + \sigma y_0)g(y). \end{aligned}$$

Faktoriziranjem desne strane prethodne jednakosti dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2g(y)[g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0)].$$

Primjenom (1.30), prethodna jednakost postaje

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)g(y). \tag{1.32}$$

Zamjenom x i y u (1.32) slijedi

$$f(y + x) + f(y + \sigma x) = 2f(y)g(x). \tag{1.33}$$

Zbrajanjem (1.32) i (1.33) dobivamo

$$2f(x + y) + f(x + \sigma y) + f(\sigma x + y) = 2f(x)g(y) + 2f(y)g(x).$$

Primjenom (1.31) zaključujemo

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \tag{1.34}$$

za sve $x, y \in S$. Preostaje riješiti funkcijsku jednadžbu (1.34). Zapišimo $f(x+t+y)$ kao $f((x+t)+y)$ i $f(x+(t+y))$. Korištenjem (1.34) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+t+y) &= f(x+t)g(y) + f(y)g(x+t) \\ &= [f(x)g(t) + f(t)g(x)]g(y) + f(y)g(x+t), \\ f(x+t+y) &= f(x)g(t+y) + f(t+y)g(x) \\ &= f(x)g(t+y) + [f(t)g(y) + f(y)g(t)]g(x). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza, dobivamo

$$[g(x+t) - g(x)g(t)]f(y) = [g(t+y) - g(t)g(y)]f(x). \tag{1.35}$$

Neka je $y = x_0$ i $s(t) := f(x_0)^{-1}[g(t+x_0) - g(t)g(x_0)]$. Tada (1.35) postaje

$$g(x+t) - g(x)g(t) = s(t)f(x). \tag{1.36}$$

Kako je lijeva strana ove jednadžbe simetrična po x i t, slijedi da je i desna pa vrijedi $s(t)f(x) = s(x)f(t)$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo $s(t) = f(x_0)^{-1}s(x_0)f(t)$. Kako je $\mathbb{F}$ polje zatvoreno na kvadrate, postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $\alpha^2 = f(x_0)^{-1}s(x_0)$, pa je $s(t) = \alpha^2 f(t)$. Zamjenom t sa y u jednadžbi (1.36), dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x)g(y) + s(y)f(x) \\ &= g(x)g(y) + s(x)f(y) \\ &= g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Množenjem jednakosti (1.34) sa α te dodavanjem i oduzimanjem od izraza (1.37), dobivamo:

$$\begin{aligned} g(x+y) + \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) + \alpha f(y)] + \alpha f(x)[g(y) + \alpha f(y)] \\ &= [g(x) + \alpha f(x)][g(y) + \alpha f(y)], \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} g(x+y) - \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) - \alpha f(y)] - \alpha f(x)[g(y) - \alpha f(y)] \\ &= [g(x) - \alpha f(x)][g(y) - \alpha f(y)]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Neka je $h_1(x) = g(x) + \alpha f(x)$ i $h_2(x) = g(x) - \alpha f(x)$. Iz (1.38) i (1.39) slijedi da su h_1 i h_2 rješenja funkcijske jednadžbe $h(x+y) = h(x)h(y)$ za sve $x, y \in S$. Njihovim zbrajanjem dobivamo

$$g(x) = \frac{h_1(x) + h_2(x)}{2}.$$

Kako je
$$h_1(\sigma x) = g(\sigma x) + \alpha f(\sigma x) = g(x) - \alpha f(x) = h_2(x),$$
za $h_1 = h$ dobivamo
$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}.$$
Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned}
g(x+y) + g(x+\sigma y) &= \frac{h(x+y) + h(\sigma(x+y))}{2} + \frac{h(x+\sigma y) + h(\sigma(x+\sigma y))}{2} \\
&= \frac{h(x)h(y) + h(\sigma x)h(\sigma y)}{2} + \frac{h(x)h(\sigma y) + h(\sigma x)h(y)}{2} \\
&= \frac{h(x)[h(y) + h(\sigma y)] + h(\sigma x)[h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\
&= \frac{[h(x) + h(\sigma x)][h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\
&= 2\frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}\frac{h(y) + h(\sigma y)}{2} \\
&= 2g(x)g(y).
\end{aligned}$$

Dakle, (1.26) je rješenje jednadžbe (1.25) čime smo završili dokaz teorema. □

O funkcijskoj jednadžbi $f(x+y) = f(x)f(y)$, gdje je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, bit će više riječi u sljedećem poglavlju.

1.2 Opće rješenje d'Alembertove jednadžbe

Prije negoli odredimo opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe, definirajmo eksponencijalnu funkciju i dokažimo neka njena osnovna svojstva.

Kažemo da je funkcija $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eksponencijalna* ako vrijedi:
$$E(x+y) = E(x)E(y) \tag{1.40}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Ako je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija različita od nul-funkcije, tada uvodimo oznaku:
$$E^*(y) = [E(y)]^{-1}$$
za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Propozicija 1.2.1. *Ako je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija i $E(0) = 0$, tada je E nul-funkcija.*

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0$ u (1.40) dobivamo:

$$E(x) = E(x)E(0).$$

Kako je $E(0) = 0$, slijedi

$$E(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, E je nul-funkcija. □

Propozicija 1.2.2. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, tada je $E(0) = 1$.*

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (1.40), dobivamo

$$E(0)[1 - E(0)] = 0,$$

pa je

$$E(0) = 0 \quad \text{ili} \quad E(0) = 1.$$

Tvrdimo da je $E(0) = 1$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $E(0) = 0$. Tada prema propoziciji 1.2.1 slijedi da je E nul-funkcija, što je kontradikcija. Dakle, $E(0) = 1$. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako je $E(x_0) = 0$ za neki $x_0 \neq 0$, tada je E nul-funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \neq x_0 \in \mathbb{R}$. Tada, zbog $E(x_0) = 0$, imamo

$$E(x) = E((x - x_0) + x_0) = E(x - x_0)E(x_0) = 0.$$

Dakle, $E(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Propozicija 1.2.4. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, onda vrijedi*

$$E^*(-x) = E(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uvrštavanjem $y = -x$ u (1.40), dobivamo

$$E(0) = E(x)E(-x).$$

Kako E nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi da je $E(0) = 1$, pa je

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)},$$

odnosno
$$E(-x) = E^*(x)$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamjenom x i $-x$ dobivamo
$$E^*(-x) = E(x)$$
čime smo dokazali propoziciju. □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, onda vrijedi:*
$$E^*(x+y) = E^*(x)E^*(y)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Kako E nije nul-funkcija, prema propoziciji 1.2.3 slijedi da je $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Primjenom (1.40) dobivamo:
$$\begin{aligned} E^*(x+y) &= \frac{1}{E(x+y)} \\ &= \frac{1}{E(x)E(y)} = E^*(x)E^*(y) \end{aligned}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$, čime smo dokazali propoziciju. □

Dokažimo sada jedno svojstvo d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

Propozicija 1.2.6. *Svako rješenje različito od nule $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ d'Alembertove funkcijske jednadžbe*
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$
je parna funkcija.

Dokaz. Zamjenom y sa $-y$ u (DE), dobivamo:
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(-y). \tag{1.41}$$
Iz (DE) i (1.41) slijedi
$$2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y).$$
Kako f nije nul-funkcija, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq 0$, pa zaključujemo
$$f(y) = f(-y)$$
za sve $y \in \mathbb{R}$, odnosno f je parna funkcija. □

Sada ćemo odrediti opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

Teorem 1.2.7. *Nenul-funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

ako i samo ako je oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \tag{1.42}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija.

Dokaz. Neka je f netrivijalno rješenje jednadžbe (DE), odnosno f nije nul-funkcija. Uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $2f(x) = 2f(x)f(0)$. Ako je $f(0) = 0$, tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da f nije nul-funkcija. Dakle, $f(0) \neq 0$. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (DE) dobivamo $f(0)[1 - f(0)] = 0$ iz čega slijedi:

$$f(0) = 1. \tag{1.43}$$

Uvrštavanjem $x = y$ u (DE) dobivamo

$$f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2,$$

odnosno, primjenom (1.43) slijedi

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1. \tag{1.44}$$

Zamjenom x sa $x + y$ i y sa $x - y$ u (DE) dobivamo

$$f(x + y + x - y) + f(x + y - x + y) = 2f(x + y)f(x - y),$$

odnosno

$$f(2x) + f(2y) = 2f(x + y)f(x - y). \tag{1.45}$$

Primjenom (1.45) i (1.44) dobivamo:

$$\begin{aligned}
[f(x + y) - f(x - y)]^2 &= [f(x + y) + f(x - y)]^2 - 4f(x + y)f(x - y)\\
&= [2f(x)f(y)]^2 - 4f(x + y)f(x - y)\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[f(2x) + f(2y)]\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[2[f(x)]^2 - 1 + 2[f(y)]^2 - 1]\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 4[f(x)]^2 - 4[f(y)]^2 + 4\\
&= 4\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\},
\end{aligned}$$

pa je

$$f(x + y) - f(x - y) = \pm 2\sqrt{\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}}.$$

Zbrajanjem prethodne jednakosti s (DE), dobivamo

$$f(x+y) = f(x)f(y) \pm \sqrt{\{[f(x)]^2-1\}\{[f(y)]^2-1\}},$$

pa je

$$[f(x+y)-f(x)f(y)]^2 = \{[f(x)]^2-1\}\{[f(y)]^2-1\}. \tag{1.46}$$

Sada ćemo promotriti dva različita slučaja s obzirom na vrijednost funkcije f:

(1) $f(x) \in \{-1,1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili (2) postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da $f(x) \notin \{-1,1\}$.

Prvi slučaj. Pretpostavimo da je $f(x) \in \{-1,1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada prema (1.46) slijedi

$$[f(x+y)-f(x)f(y)]^2 = 0,$$

odnosno

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je eksponencijalna funkcija. Kako je $f(x) \in \{-1,1\}$, to je

$$f^*(x) = f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dodavanjem $f(x)$ na obje strane prethodne jednakosti, dobivamo

$$f^*(x) + f(x) = 2f(x),$$

pa je

$$f(x) = \frac{f(x)+f^*(x)}{2},$$

odnosno

$$f(x) = \frac{E(x)+E^*(x)}{2},$$

gdje je E eksponencijalna funkcija sa svojstvom $E(x) \in \{-1,1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da $f(x_0) \notin \{-1,1\}$, odnosno $f(x_0)^2 \neq 1$. Ako stavimo $\alpha = f(x_0)$, tada je $\alpha^2 - 1 \neq 0$. Neka je $\beta \neq 0$ takav da vrijedi

$$\beta^2 = \alpha^2 - 1. \tag{1.47}$$

Sada definirajmo

$$\begin{aligned}
E(x) &= f(x) + \frac{1}{\beta}\Big[f(x+x_0) - f(x)f(x_0)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta}f(x+x_0) + \left[1 - \frac{1}{\beta}f(x_0)\right]f(x) \\
&= \frac{1}{\beta}f(x+x_0) + \left[\frac{\beta - f(x_0)}{\beta}\right]f(x) \\
&= \frac{1}{\beta}\Big[f(x+x_0) + (\beta-\alpha)f(x)\Big]
\end{aligned} \tag{1.48}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjenom (1.46) i (1.47) dobivamo

$$\begin{aligned}
[E(x) - f(x)]^2 &= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x+x_0) - f(x)f(x_0)\Big]^2 \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big[[f(x)]^2 - 1\Big]\Big[[f(x_0)]^2 - 1\Big] \\
&= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2}\Big[[f(x)]^2 - 1\Big] \\
&= [f(x)]^2 - 1, \qquad (1.49)
\end{aligned}$$

pa je

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + [f(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1,$$

odnosno

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + 1 = 0.$$

Ako postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $E(x) = 0$, dobit ćemo $1 = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{[E(x)]^2 + 1}{2E(x)} \\
&= \frac{1}{2}\left[E(x) + \frac{1}{E(x)}\right] \\
&= \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.
\end{aligned}$$

Preostaje dokazati da je E eksponencijalna funkcija, odnosno da zadovoljava jednakost

$$E(x+y) = E(x)E(y).$$

Da bismo to dokazali, trebat će nam sljedeće jednakosti dobivene višestrukom primjenom (DE):

$$\begin{aligned}
&2[f(x_0+x)f(y) + f(x_0+y)f(x)] \\
= \; & f(x_0+x+y) + f(x_0+x-y) + f(x_0+y+x) + f(x_0+y-x) \\
= \; & 2f(x_0+x+y) + f[x_0+(x-y)] + f[x_0-(x-y)] \\
= \; & 2f(x_0+x+y) + 2f(x_0)f(x-y) \\
= \; & 2f(x_0+x+y) + f(x_0)[2f(x)f(y) - f(x+y)] \\
= \; & 2\{f(x_0+x+y) + \alpha[2f(x)f(y) - f(x+y)]\}, \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2f(x_0+x)f(x_0+y) \\
= \;& f(x_0+x+x_0+y)+f(x_0+x-x_0-y) \\
= \;& f[x_0+(x_0+x+y)]+f(x-y) \\
= \;& [2f(x_0)f(x_0+x+y)-f(x_0+x+y-x_0)]+[2f(x)f(y)-f(x+y)] \\
= \;& [2f(x_0)f(x_0+x+y)-f(x+y)]+[2f(x)f(y)-f(x+y)] \\
= \;& 2[f(x)f(y)+\alpha f(x_0+x+y)-f(x+y)].
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Sada, polazeći od (1.48), imamo:

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x+x_0)+(\beta-\alpha)f(x)\Big]\Big[f(y+x_0)+(\beta-\alpha)f(y)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x+x_0)f(y+x_0)+(\beta-\alpha)[f(x)f(y+x_0)+f(y)f(x+x_0)] \\
&\quad +(\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\Big\}.
\end{aligned}$$

Odatle primjenom (1.51) i (1.50) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x)f(y)+\alpha f(x_0+x+y)-f(x+y) \\
&\quad +(\beta-\alpha)[f(x_0+x+y)+2\alpha f(x)f(y)-\alpha f(x+y)]+(\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\Big\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x)f(y)[(\beta-\alpha)^2+2\alpha(\beta-\alpha)+1] \\
&\quad +\beta f(x_0+x+y)-f(x+y)[1+(\beta-\alpha)\alpha]\Big\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x)f(y)(\beta^2-\alpha^2+1)+\beta f(x_0+x+y) \\
&\quad +f(x+y)(\alpha^2-1-\alpha\beta)\Big].
\end{aligned}$$

Dalje, primjenom (1.47) i (1.48) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big[\beta f(x_0+x+y)+\beta(\beta-\alpha)f(x+y)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta}\Big[f(x_0+x+y)+(\beta-\alpha)f(x+y)\Big] \\
&= E(x+y).
\end{aligned}$$

Dakle, $E\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ je eksponencijalna funkcija.

Ovime smo dokazali samo jedan smjer teorema. Suprotan smjer ćemo dokazati direktnim uvrštavanjem rješenja oblika $f(x)=\frac{E(x)+E^*(x)}{2}$ u (DE), koristeći propozicije 1.2.5 i

1.2.4:

$$
\begin{aligned}
f(x+y)+f(x-y) &= \frac{E(x+y)+E^*(x+y)}{2}+\frac{E(x-y)+E^*(x-y)}{2} \\
&= \frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E(-y)+E^*(x)E^*(-y)}{2} \\
&= \frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E^*(y)+E^*(x)E(y)}{2} \\
&= \frac{E(x)[E(y)+E^*(y)]+E^*(x)[E^*(y)+E(y)]}{2} \\
&= \frac{[E(x)+E^*(x)][E(y)+E^*(y)]}{2} \\
&= 2f(x)f(y).
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi i obrat teorema. Ovime smo završili dokaz. □

Korolar 1.2.8. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$g(x+y)+g(x-y)=2f(x)f(y) \tag{1.52}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, su oblika

$$f(x)=\frac{\alpha}{2}\Big[E(x)+E^*(x)\Big] \quad i \quad g(x)=\frac{\alpha^2}{2}\Big[E(x)+E^*(x)\Big]$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Ako je f nul-funkcija, tada iz (1.52) slijedi

$$g(x+y)=-g(x-y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $y=0$ dobivamo $g(x)=-g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno i g je nul-funkcija. U nastavku pretpostavimo da f i g nisu nul-funkcije.

Uvrštavanjem $y=0$ u (1.52), dobivamo $2g(x)=2f(x)f(0)$, odnosno

$$g(x)=\alpha f(x) \tag{1.53}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $\alpha = f(0)$. Uvrštavanjem $x=0$ u (1.52), dobivamo $g(y)+g(-y)=2f(0)f(y)$, odnosno

$$g(x)+g(-x)=2\alpha f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u (1.53), slijedi

$$g(-x)=\alpha f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uspoređujući s (1.53), slijedi da je g parna funkcija, pa iz (1.53) zaključujemo da je i f parna funkcija.

Uvrštavanjem (1.53) u (1.52), dobivamo

$$\alpha f(x+y) + \alpha f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Ako je $\alpha = 0$, tada je f nul-funkcija, suprotno pretpostavci. Slijedi $\alpha \neq 0$, pa je

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{2}{\alpha} f(x)f(y).$$

Neka je $h(x) = \frac{1}{\alpha} f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} h(x+y) + h(x-y) &= \frac{1}{\alpha} f(x+y) + \frac{1}{\alpha} f(x-y) = \frac{1}{\alpha}\Big[f(x+y) + f(x-y)\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha} f(x)f(y) = 2h(x)h(y). \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija. Dakle,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}\Big[E(x) + E^*(x)\Big] \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{\alpha^2}{2}\Big[E(x) + E^*(x)\Big]$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

1.3 Prva i druga Cauchyjeva funkcijska jednadžba

U idućem poglavlju koristit ćemo rezultate sljedeća dva teorema koji daju neprekidna rješenja *prve (linearne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

i *druge (eksponencijalne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Teorem 1.3.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.54}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada postoji konstanta $c \in \mathbb{C}$ takva da je

$$f(x) = cx \tag{1.55}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (1.54) dobivamo $f(0) = 2f(0)$ iz čega slijedi da je

$$f(0) = 0. \tag{1.56}$$

Uvrštavanjem $x = -y$ u (1.54) te primjenjujući (1.56) dobivamo

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(-x) = -f(x) \tag{1.57}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Matematičkom indukcijom dokažimo da je

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \tag{1.58}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da (1.58) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Za $n + 1$, primjenom (1.54) i (1.58), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}) &= f\Big((x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1}\Big) \\ &= f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, (1.58) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno, za $x_i = x$ za svaki i, vrijedi

$$f(nx) = nf(x) \tag{1.59}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $x = \frac{m}{n}z$, gdje je $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $z \in \mathbb{C}$. Prema (1.59) tada imamo

$$f(mz) = nf\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Ponovnom primjenom (1.59) dobivamo najprije $mf(z) = nf\left(\frac{m}{n}z\right)$, a zatim

$$\frac{m}{n}f(z) = f\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Iz (1.57) slijedi

$$f\left(-\frac{m}{n}z\right) = -f\left(\frac{m}{n}z\right) = -\frac{m}{n}f(z).$$

Zaključujemo da vrijedi
$$f(qz) = qf(z)$$
za svaki $z \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{Q}$. Posebno, za $c = f(1)$ slijedi
$$f(q) = cq \tag{1.60}$$
za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Postoji niz racionalnih brojeva (q_n) takav da je
$$\lim_{n\to\infty} q_n = r.$$
Kako prema (1.60) vrijedi $f(q_n) = cq_n$, a f je neprekidna funkcija, imamo
$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} cq_n = cr,$$
odnosno
$$f(x) = cx,$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta, što nam daje rješenje (1.55). □

Teorem 1.3.2. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*
$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{1.61}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako f nije nul-funkcija, tada postoji konstanta $c \in \mathbb{C}$ takva da je
$$f(x) = e^{cx} \tag{1.62}$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Ako je $f(x_0) = 0$, tada iz (1.61) slijedi
$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno f je nul-funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Kako prema (1.61) vrijedi $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, slijedi da je
$$f(x) > 0$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$. Znamo da eksponencijalna funkcija $x \to e^x$ zadovoljava navedeno svojstvo i funkcijsku jednadžbu (1.61). Stoga definiramo funkciju $f(x) = e^{g(x)}$, gdje je
$$g(x) = \ln f(x). \tag{1.63}$$

Tada vrijedi

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y),$$

odnosno

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \tag{1.64}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 1.3.1, rješenje jednadžbe (1.64) je funkcija oblika $g(x) = cx$ gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta. Prema (1.63) slijedi da je

$$f(x) = e^{cx},$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta. To nam daje rješenje (1.62). $\square$

Poglavlje 2

Trigonometrijske funkcijske jednadžbe

2.1 Kosinus-sinus funkcijska jednadžba

Propozicija 2.1.1. *Ako funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x-y) = f(x)f(y)+g(x)g(y) \tag{KS}$$

tada je f parna, a g neparna funkcija te vrijedi

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Zamjenom x i y u (KS) dobivamo

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x)$$

odnosno

$$f(x-y) = f(y-x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Odatle slijedi, uvrštavanjem $y = 0$,

$$f(x) = f(-x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, f je parna funkcija. Zamjenom x sa $-x$ te y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$f(-x+y) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y). \tag{2.1}$$

Kako je f parna funkcija, iz (2.1) slijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y).$$

Usporedbom s (KS) dobivamo

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y) \tag{2.2}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je g konstantna funkcija, odnosno da je $g(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (KS) slijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + c^2.$$

Zamjenom y sa $-y$ i primjenom parnosti funkcije f dobivamo

$$f(x+y) = f(x)f(y) + c^2$$

pa slijedi $f(x+y) = f(x-y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neka su $u, v \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$f(u) = f\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = f(v),$$

pa je f konstantna funkcija. Kako je to u kontradikciji s našom pretpostavkom, zaključujemo da g nije konstantna funkcija. Odaberimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(y_0) \neq 0$. Uvrštavanjem $y = y_0$ u (2.2), dobivamo

$$g(x) = cg(-x), \tag{2.3}$$

gdje je $c = \frac{g(-y_0)}{g(y_0)} \neq 0$. Tada je

$$g(x) = cg(-x) = c \cdot cg(-(-x)) = c^2 g(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa slijedi da je $c^2 = 1$, odnosno $c = 1$ ili $c = -1$. Pretpostavimo da je $c = 1$. Tada iz (2.3) slijedi

$$g(x) = g(-x),$$

odnosno g je parna funkcija. Zamjenom y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ &= f(x-y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je f konstantna funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, $c = -1$, odnosno $g(x) = -g(-x)$ pa je g neparna funkcija.

Kako je g neparna funkcija, vrijedi

$$g(0) = 0.$$

Uvrštavanjem $y = 0$ u (KS) dobivamo

$$f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0),$$

odnosno

$$f(x) = f(x)f(0).$$

Kako f nije konstantna funkcija, nije ni nul-funkcija, pa iz prethodnog izraza slijedi da je

$$f(0) = 1. \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem $y = x$ u (KS) te primjenom (2.4) dobivamo

$$f(0) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2,$$

odnosno

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. □

Teorem 2.1.2. *Ako su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcije koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (KS) i ako f nije konstantna funkcija, tada f zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ te su f i g oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \quad g(x) = k\frac{E(x) - E^*(x)}{2} \tag{2.5}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $k^2 = -1$.

Dokaz. Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je g neparna funkcija, a f parna funkcija. Zamjenom y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y). \end{aligned}$$

Zbrajanjem s (KS) slijedi

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, to jest f zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu.

Prema teoremu 1.2.7 slijedi da je f oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \tag{2.6}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija. Iz propozicije 2.1.1, primjenom propozicije 1.2.2, slijedi da je

$$
\begin{aligned}
[g(x)]^2 &= 1 - [f(x)]^2 = 1 - \left[\frac{E(x) + E^*(x)}{2}\right]^2 \\
&= 1 - \frac{[E(x)]^2 + 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
&= \frac{4 - E(2x) - 2E(0) - E^*(2x)}{4} \\
&= \frac{2 - E(2x) - E^*(2x)}{4} \\
&= -\frac{E(2x) - 2E(0) + E^*(2x)}{4} \\
&= -\frac{[E(x)]^2 - 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
&= -\left[\frac{E(x) - E^*(x)}{2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

pa je

$$g(x) = k\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je $k^2 = -1$, što nam s (2.6) daje rješenje (2.5). □

Teorem 2.1.3. *Neprekidne funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su rješenja funkcijske jednadžbe (KS) ako i samo ako su oblika*

$$f(x) = c, \qquad g(x) = \sqrt{c(1-c)} \tag{2.7}$$

$$f(x) = c, \qquad g(x) = -\sqrt{c(1-c)} \tag{2.8}$$

$$f(x) = \cos(\alpha x), \qquad g(x) = \pm\sin(\alpha x), \tag{2.9}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje su c i α proizvoljne konstante.

Dokaz. Neka je $f(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (KS) slijedi

$$c = c^2 + g(x)g(y) \tag{2.10}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je g nul-funkcija, tada je $c = 0$ ili $c = 1$.
Ako g nije nul-funkcija, tada iz (2.10) slijedi $c - c^2 = g(x)g(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je $c - c^2 = [g(x)]^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno $g(x) = \sqrt{c(1-c)}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = -\sqrt{c(1-c)}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenja (2.7) i (2.8).

Kako f zadovoljava (DE), prema teoremu 1.1.1 slijedi da su preostala nekonstantna rješenja od (KS) oblika $f(x) = \cos(\alpha x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f = \cos(\alpha x)$, tada iz propozicije 2.1.1 slijedi

$$[g(x)]^2 = 1 - \cos^2(\alpha x),$$

odnosno

$$g(x) = \pm \sin(\alpha x)$$

što nam daje rješenje (2.9). Ako je $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, tada je $|f(x)| = |\operatorname{ch}(\beta x)| \geqslant 1$. Prema propoziciji 2.1.1 je $|f(x)| \leqslant 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi $|f(x)| = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa neprekidnost funkcije f povlači da je f konstantna funkcija, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Zaključujemo da $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$ nije rješenje od (KS).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (2.7) ili (2.8) u (KS), dobivamo

$$c = c^2 + (\sqrt{c(1-c)})^2 = c^2 + c(1-c) = c^2 + c - c^2 = c,$$

dakle (2.7) i (2.8) su rješenja od (KS). Uvrštavanjem (2.9) u (KS), dobivamo

$$f(x-y) = \cos(\alpha(x-y)) = \cos(\alpha x)\cos(\alpha y) + \sin(\alpha x)\sin(\alpha y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

pa je (2.9) rješenje od (KS). Ovime smo završili dokaz teorema. □

2.2 Sinus-kosinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \tag{SK}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, nazivamo *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*. Odredimo njena rješenja.

Teorem 2.2.1. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su rješenja funkcijske jednadžbe (SK) ako i samo ako su f i g oblika:*

$$f(x) = 0 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R} \quad i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija}, \tag{2.11}$$

$$f(x) = A(x)E(x) \quad i \quad g(x) = E(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \quad i \quad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E_1, E_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su eksponencijalne funkcije i $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Lako se provjeri da je sa (2.11) dano rješenje funkcijske jednadžbe (SK). U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija.

Prema (SK), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x+(y+z)) &= f(x)g(y+z)+f(y+z)g(x) \\ &= f(x)g(y+z)+[f(y)g(z)+f(z)g(y)]g(x) \\ &= f(x)g(y+z)+f(y)g(z)g(x)+f(z)g(y)g(x), \end{aligned} \tag{2.14}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f((x+y)+z) &= f(x+y)g(z)+f(z)g(x+y) \\ &= f(x)g(y)g(z)+f(y)g(x)g(z)+f(z)g(x+y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Izjednačavanjem (2.14) i (2.15) dobivamo

$$f(x)[g(y+z)-g(y)g(z)] = f(z)[g(x+y)-g(x)g(y)]. \tag{2.16}$$

Kako f nije nul-funkcija, postoji $z_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z_0) \neq 0$. Uvrštavanjem $z = z_0$ u (2.16) vidimo da je

$$g(x+y)-g(x)g(y) = f(x)l(y), \tag{2.17}$$

gdje je

$$l(y) = \frac{g(y+z_0)-g(y)g(z_0)}{f(z_0)}.$$

Zamjenom x i y u (2.17), dobivamo

$$g(x+y)-g(x)g(y) = f(y)l(x). \tag{2.18}$$

Sada iz (2.17) i (2.18) slijedi

$$f(x)l(y) = f(y)l(x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako f nije nul-funkcija, postoji $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(y_0) \neq 0$. Tada je $l(x) = \frac{l(y_0)}{f(y_0)} f(x)$, odnosno

$$l(x) = \alpha^2 f(x) \tag{2.19}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\alpha^2 = \frac{l(y_0)}{f(y_0)} \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem (2.19) u (2.17), dobivamo

$$g(x+y) = g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \tag{2.20}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Iz (2.20) i (SK) dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y)+\alpha f(x+y) &= g(x)g(y)+\alpha^2 f(x)f(y) \\ &\quad +\alpha f(x)g(y)+\alpha f(y)g(x) \\ &= g(y)[g(x)+\alpha f(x)]+\alpha f(y)[g(x)+\alpha f(x)] \\ &= [g(x)+\alpha f(x)][g(y)+\alpha f(y)], \end{aligned} \tag{2.21}$$

a također i

$$\begin{aligned} g(x+y)-\alpha f(x+y) &= g(x)g(y)+\alpha^2 f(x)f(y) \\ &\quad -\alpha f(x)g(y)-\alpha f(y)g(x) \\ &= g(y)[g(x)-\alpha f(x)]+\alpha f(y)[g(x)-\alpha f(x)] \\ &= [g(x)-\alpha f(x)][g(y)-\alpha f(y)]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Neka je

$$\begin{aligned} g(x)+\alpha f(x) &= E_1(x), \\ g(x)-\alpha f(x) &= E_2(x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tada iz (2.21) i (2.22) slijedi

$$\begin{aligned} E_1(x+y) &= E_1(x)E_1(y), \\ E_2(x+y) &= E_2(x)E_2(y), \end{aligned}$$

pa su $E_1, E_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalne funkcije. Ako je $\alpha = 0$, tada je $g =: E$ eksponencijalna funkcija. Kako f nije nul-funkcija, to ni E nije nul-funkcija. Propozicije 1.2.1 i 1.2.3 povlače $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz (SK) slijedi

$$\frac{f(x+y)}{E(x+y)} = \frac{f(x)E(y)+f(y)E(x)}{E(x)E(y)} = \frac{f(x)}{E(x)} + \frac{f(y)}{E(y)} \tag{2.24}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Stavimo li

$$A(x) = \frac{f(x)}{E(x)}, \tag{2.25}$$

tada (2.24) postaje

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija. Iz (2.25) slijedi

$$f(x) = A(x)E(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.12).

Ako je $\alpha \neq 0$, tada oduzimanjem i zbrajanjem izraza iz (2.23) dobivamo

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2}$$

što nam daje rješenje (2.13) jednadžbe (SK). □

Napomena. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neparna funkcija i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ parna funkcija, tada rješenje (2.11) otpada.

Ako f i g zadovoljavaju (2.12), tada je $E(-x) = E(x)$ to jest $[E(x)]^2 = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$E(x) = E\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \left[E\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa je

$$f(x) = A(x) \quad \text{i} \quad g(x) = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Ako f i g zadovoljavaju (2.13), tada iz (2.23) slijedi

$$E_1^*(x) = E_1(-x) = g(-x) + \alpha f(-x) = g(x) - \alpha f(x) = E_2(x).$$

Tada rješenje (2.13) jednadžbe (SK) možemo pisati u obliku

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_1^*(x)}{2\alpha} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{E_1(x) + E_1^*(x)}{2}.$$

2.3 Sinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \tag{SE}$$

nazivamo *sinus funkcijska jednadžba*. Zamijenimo li x sa $\frac{x}{2}$ i y sa $\frac{y}{2}$, iz (SE) slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2.$$

Zamjenom x sa $x + y$ i y sa $x - y$ u prethodnoj jednakosti, dobivamo

$$f\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y-(x-y)}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2,$$

odnosno

$$f(x)f(y) = \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 \tag{2.26}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, što je ekvivalentni zapis jednadžbe (SE).

Odredimo rješenja sinus funkcijske jednadžbe (SE) bez uvjeta na funkciju f.

Teorem 2.3.1. *Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljava sinus funkcijsku jednadžbu (SE) ako i samo ako je f oblika*

$$f(x) = A(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

$$f(x) = \beta[E(x) - E^*(x)] \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.28}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\beta \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Lako se vidi da je f nul-funkcija rješenje jednadžbe (SE) koje je sadržano u (2.28) za $\beta = 0$. U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija. Iz toga slijedi da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) \neq 0$.

Neka je

$$h(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Big[f(x+x_0) - f(x-x_0)\Big]\Big[f(y+x_0) - f(y-x_0)\Big] \\ &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Big[f(x+x_0)f(y+x_0) - f(x-x_0)f(y+x_0) \\ &\quad -f(x+x_0)f(y-x_0) + f(x-x_0)f(y-x_0)\Big] \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Raspišimo dobivene izraze na desnoj strani i grupirajmo tako da možemo primijeniti (SE):

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Bigg[f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 + \frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 - \frac{x-y}{2}\right) \\ &\quad -f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} - x_0\right)f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} + x_0\right) \\ &\quad -f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + x_0\right)f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} - x_0\right) \\ &\quad +f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 + \frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 - \frac{x-y}{2}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Primjenom (SE) dalje imamo

$$\begin{aligned}
2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\left\{\left[f\left(\frac{x+y}{2}+x_0\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2\right.\\
&\quad+\left[f\left(\frac{x-y}{2}-x_0\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x-y}{2}+x_0\right)\right]^2\\
&\quad\left.+\left[f\left(\frac{x+y}{2}-x_0\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2\right\}\\
&= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\left\{\left[f\left(\frac{x+y}{2}+x_0\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x-y}{2}+x_0\right)\right]^2\right.\\
&\quad-\left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x+y}{2}-x_0\right)\right]^2\\
&\quad\left.-\left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x-y}{2}-x_0\right)\right]^2\right\}\\
&= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}[f(x+y+x_0)f(x_0)+f(x-y+x_0)f(x_0)\\
&\quad-f(x+y-x_0)f(x_0)-f(x-y-x_0)f(x_0)]\\
&= \frac{1}{2f(x_0)}[f(x+y+x_0)+f(x-y+x_0)\\
&\quad+f(x+y-x_0)-f(x-y-x_0)]\\
&= h(x+y)+h(x-y).
\end{aligned}$$

Dakle, $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu

$$h(x+y)+h(x-y)=2h(x)h(y)$$

za sve $x, y\in\mathbb{R}$. Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x)=\frac{E(x)+E^*(x)}{2}, \tag{2.29}$$

gdje je $E\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$ eksponencijalna funkcija. Ako pretpostavimo da h nije nul-funkcija, tada iz propozicije 1.2.6 slijedi da je h parna funkcija.

Iz (2.26) slijedi da jednadžbu (SE) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$f(u)f(v)=\left[f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{u-v}{2}\right)\right]^2$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$. Ako je $f(y) \neq 0$, tada je

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2f(y)} &= \frac{f(x+y)f(x_0)-f(x-y)f(x_0)}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{\left[f\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+y-x_0}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x-y-x_0}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{\left[f\left(\frac{x+x_0+y}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x+x_0-y}{2}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{x-x_0+y}{2}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{x-x_0-y}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{f(x+x_0)f(y)-f(x-x_0)f(y)}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{f(x+x_0)-f(x-x_0)}{2f(x_0)} = h(x).
\end{aligned}$$

Slijedi

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)h(x). \tag{2.30}$$

Kako E nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi $E(0)=1$, pa (2.29) povlači

$$h(0)=1. \tag{2.31}$$

Uvrštavanjem $x=0$ u (2.30) i primjenom (2.31), dobivamo

$$f(-y)=-f(y). \tag{2.32}$$

Tada iz (2.30) slijedi

$$f(y+x)+f(y-x)=2f(y)h(x). \tag{2.33}$$

Zamjenom x i y u (2.33), dobivamo

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)h(y). \tag{2.34}$$

Zbrajanjem (2.33) i (2.34) te primjenom (2.32) dolazimo do

$$f(x+y)=f(x)h(y)+f(y)h(x) \tag{2.35}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Kako je f neparna, a h parna funkcija, prema napomeni iza teorema 2.2.1, postoje dvije mogućnosti za f: f je aditivna funkcija, što nam daje rješenje (2.27), ili

$$f(x)=\frac{E(x)-E^*(x)}{2\alpha}, \tag{2.36}$$

gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Uvrštavanjem $\beta = \frac{1}{2\alpha}$ u (2.36) dobivamo rješenje (2.28) jednadžbe (SE). $\square$

Teorem 2.3.2. *Neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (SE) su oblika*

$$f(x) = ax, \tag{2.37}$$
$$f(x) = \beta \sin(bx) \tag{2.38}$$
$$f(x) = \beta \operatorname{sh}(cx) \tag{2.39}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje su $a, b, c, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante.

Dokaz. Nul-funkcija je očito rješenje dane jednadžbe. U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija. Prema teoremu 2.3.1 tada slijedi da su rješenja dane jednadžbe jednog od sljedećih oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x), \\ f(x) &= \beta[E(x) - E^*(x)], \end{aligned} \tag{2.40}$$

gdje je $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija, a $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Kako je f neprekidna, prema teoremu 1.3.1 slijedi da su neprekidne aditivne funkcije oblika

$$f(x) = ax,$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.37).

Prema teoremu 1.3.2, neprekidne eksponencijalne funkcije su oblika

$$f(x) = e^{cx} \tag{2.41}$$

gdje je $c \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem (2.41) u (2.40) dobivamo

$$f(x) = \beta(e^{cx} - e^{-cx}). \tag{2.42}$$

Ako su $c, \beta \in \mathbb{R}$, zamjenom β sa $\frac{\beta}{2}$ u (2.42) dobivamo

$$f(x) = \beta \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} = \beta \operatorname{sh}(cx)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ što nam daje rješenje (2.39).

Ako $c, \beta \notin \mathbb{R}$, onda je $c = a + bi$ i $\beta = u + iv$, pri čemu je $b \neq 0$ i $v \neq 0$. Iz (2.42) tada slijedi

$$f(x) = (u + iv)(e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)}x). \tag{2.43}$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)x} &= e^{ax}e^{ibx} - e^{-ax}e^{-ibx} \\ &= e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) - e^{-ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \\ &= \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}), \end{aligned}$$

iz (2.43) dalje imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= u[\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax})] \\ &\quad + iv[\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax})] \\ &= u\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) - v\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) \\ &\quad + i[u\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) + v\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax})]. \end{aligned}$$

Kako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, slijedi da je imaginarni dio dobivenog broja jednak nuli, odnosno

$$u\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) + v\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) = 0. \tag{2.44}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.44), dobivamo

$$v(e^{ax} - e^{-ax}) = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = e^{-ax} \Leftrightarrow ax = -ax \Leftrightarrow a = 0.$$

Uvrštavanjem $x = \frac{\pi}{2}$ u (2.44) te primjenjujući $a = 0$, dobivamo $u = 0$. Dakle, $c = bi$ i $\beta = vi$. Slijedi

$$f(x) = \beta\sin(bx),$$

gdje je $\beta = -2v \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.38). □

Dokažimo da *sinus funkcijska nejednadžba*

$$f(x+y)f(x-y) \leqslant [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

ima ista rješenja kao i sinus funkcijska jednadžba (SE).

Teorem 2.3.3. *Ako $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku nejednadžbu*

$$f(x+y)f(x-y) \leqslant [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \tag{2.45}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, tada je f rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).

Dokaz. Uvrstimo li $x = y = 0$ u (2.45), slijedi da je $[f(0)]^2 \leqslant 0$, odnosno

$$f(0) = 0. \tag{2.46}$$

Uvrstimo li $x = -y$ u (2.45), dobivamo

$$0 \leqslant [f(-y)]^2 - [f(y)]^2,$$

odnosno

$$[f(y)]^2 \leqslant [f(-y)]^2. \tag{2.47}$$

Zamjenom y i $-y$, dobivamo $[f(-y)]^2 \leqslant [f(y)]^2$. Ovo zajedno sa (2.47) daje

$$[f(-y)]^2 \leqslant [f(y)]^2 \leqslant [f(-y)]^2$$

pa je

$$[f(y)]^2 = [f(-y)]^2$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je

$$f(-y) = -f(y) \quad \text{ili} \quad f(-y) = f(y).$$

Neka je $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(y_0) = f(-y_0). \tag{2.48}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ i $y = y_0$ u (2.45) te primjenom (2.46) dobivamo

$$f(y_0)f(-y_0) \leqslant -[f(y_0)]^2. \tag{2.49}$$

Uvrštavanjem (2.48) u (2.49), dobivamo

$$[f(y_0)]^2 \leqslant -[f(y_0)]^2,$$

odnosno

$$2[f(y_0)]^2 \leqslant 0$$

pa slijedi da je

$$f(y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f(-y_0) = 0.$$

Ako je $f(-y) = -f(y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, tada iz (2.45) slijedi

$$[f(y)]^2 \leqslant [f(x)]^2 + f(x+y)f(y-x).$$

Zamjenom x i y dobivamo

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 \leqslant f(x+y)f(x-y).$$

Ovo zajedno sa (2.45) povlači

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2.$$

Dakle, f je rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE). □

2.4 Poopćenje sinus funkcijske jednadžbe

U sljedećem teoremu dajemo opće rješenje funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x)-f(y)g(y) \tag{PS}$$

koja je poopćenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).

Teorem 2.4.1. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS) ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

$$\begin{aligned}
&f \text{ je nul-funkcija} \quad &&i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija}, &(2.50)\\
&f \text{ je proizvoljna funkcija} \quad &&i \quad g \text{ je nul-funkcija}, &(2.51)\\
&f(x) = k \quad &&i \quad g(x) = A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, &(2.52)\\
&f(x) = A(x) + \delta \quad &&i \quad g(x) = \beta A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, &(2.53)\\
&f(x) = \gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \quad &&i \quad g(x) = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, &(2.54)
\end{aligned}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $\beta, \delta, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{C}$ su proizvoljne konstante.

Dokaz. Lako se provjeri da funkcije f i g iz (2.50) do (2.54) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS). U nastavku ćemo dokazati da su one jedina rješenja funkcijske jednadžbe (PS).

Pretpostavimo da je f konstantna funkcija, $f(x) = k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (PS) slijedi

$$k[g(x - y) - g(x) + g(y)] = 0 \tag{2.55}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je $k = 0$, onda je g proizvoljna funkcija, što nam daje rješenje (2.50).

Ako je $k \neq 0$, tada iz (2.55) slijedi

$$g(x - y) = g(x) - g(y) \tag{2.56}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $y = x$ u (2.56), vidimo da vrijedi $g(0) = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.56), dobivamo

$$g(-y) = -g(y) \tag{2.57}$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Zamjenom y i $-y$ u (2.56), imamo

$$g(x + y) = g(x) - g(-y),$$

odnosno, primjenom (2.57),

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Dakle, g(x)=A(x) za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija. To nam daje rješenje (2.52).

Pretpostavimo da je g konstantna funkcija, $g(x) = k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (PS) slijedi

$$k[f(x+y) - f(x) + f(y)] = 0 \tag{2.58}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je $k = 0$, onda je f proizvoljna funkcija pa dobivamo rješenje (2.51).

Ako je $k \neq 0$, tada iz (2.58) slijedi

$$f(x+y) = f(x) - f(y) \tag{2.59}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $x = 0$ i $y = 0$ u (2.59), vidimo da vrijedi $f(0) = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.59), dobivamo $f(y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, što znači da je ovo rješenje sadržano u (2.50).

U nastavku pretpostavimo da f i g nisu konstantne funkcije. Zamjenom x i y u (PS), dobivamo

$$f(x+y)g(y-x) = f(y)g(y) - f(x)g(x) \tag{2.60}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zbrajanjem (PS) i (2.60) slijedi

$$f(x+y)g(x-y) = -f(x+y)g(y-x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako f nije konstantna funkcija pa ni nul-funkcija, to postoji $u_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(u_0) \neq 0$. Neka je $v \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Za $x = \frac{1}{2}(u_0 + v)$ i $y = \frac{1}{2}(u_0 - v)$ imamo

$$f(u_0)g(v) = -f(u_0)g(-v)$$

odakle slijedi

$$g(-v) = -g(v).$$

Dakle, g je neparna funkcija.

Neka su funkcije $s, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirane sa

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ h(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Tada je s parna, a h neparna funkcija te vrijedi

$$f(x) = s(x) + h(x) \tag{2.61}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem (2.61) u (PS), dobivamo

$$\begin{aligned} [s(x+y) + h(x+y)]g(x-y) &= [s(x) + h(x)]g(x) - [s(y) + h(y)]g(y), \\ s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= s(x)g(x) - s(y)g(y) \\ &\quad + h(x)g(x) - h(y)g(y) \end{aligned} \tag{2.62}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamjenom x sa $-x$ i y sa $-y$ te primjenom svojstva parnosti funkcije s i neparnosti funkcija g i h, slijedi

$$\begin{aligned} -s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= -s(x)g(x) + s(y)g(y) \\ &\quad +h(x)g(x) - h(y)g(y). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Zbrajanjem (2.62) i (2.63), dobivamo

$$h(x+y)g(x-y) = h(x)g(x) - h(y)g(y) \tag{2.64}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.62) i (2.64) slijedi

$$s(x+y)g(x-y) = s(x)g(x) - s(y)g(y) \tag{2.65}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamjenom y sa $-y$ u (2.64), dobivamo

$$h(x-y)g(x+y) = h(x)g(x) - h(y)g(y)$$

što usporedbom sa (2.64) daje

$$h(x+y)g(x-y) = h(x-y)g(x+y).$$

Neka su $u, v \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Za $x = \frac{1}{2}(u+v)$ i $y = \frac{1}{2}(u-v)$ gornja jednakost prelazi u

$$h(u)g(v) = h(v)g(u).$$

Kako g nije konstantna funkcija, to postoji $v_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(v_0) \neq 0$. Za $\alpha = \frac{h(v_0)}{g(v_0)} \in \mathbb{R}$ imamo

$$h(x) = \alpha g(x) \tag{2.66}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, razlikujemo dva slučaja s obzirom na vrijednost α.

Prvi slučaj. Neka je $\alpha \neq 0$. Množenjem (2.64) sa α, dobivamo

$$h(x+y)h(x-y) = h(x)^2 - h(y)^2. \tag{2.67}$$

Kako g nije konstantna funkcija, vrijedi da ni h nije konstantna funkcija. Tada je prema teoremu 2.3.1 rješenje jednadžbe (2.67) oblika

$$h(x) = A(x) \tag{2.68}$$

ili

$$h(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b}, \tag{2.69}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sada iz (2.66) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x), \tag{2.70}$$

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}. \tag{2.71}$$

Uvrštavanjem $y = -x$ u (2.65) te primjenom neparnosti funkcije g i parnosti funkcije s, dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(x)g(x) \tag{2.72}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Stavimo $\delta = s(0)$. Ako vrijedi (2.70), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{\alpha}A(2x) = 2s(x) \cdot \frac{1}{\alpha}A(x),$$

odakle zbog aditivnosti funkcije A slijedi $s(x) = \delta$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (2.61), (2.68) i (2.70) slijedi

$$f(x) = A(x) + \delta \text{ i } g(x) = \beta A(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Tako smo dobili rješenje (2.53).

Ako vrijedi (2.71), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{2b\alpha}\Big(E(2x) - E^*(2x)\Big) = 2s(x) \cdot \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}.$$

Kako je $E(2x) - E^*(2x) = [E(x)]^2 - [E^*(x)]^2 = [E(x) - E^*(x)][E(x) + E^*(x)]$, odatle slijedi

$$s(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Iz (2.61) i (2.69) tada slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ &= \gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \end{aligned}$$

gdje je $\gamma = \frac{1}{b}$, a iz (2.71) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\delta b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je $\beta = \frac{1}{b\delta}$, što nam daje rješenja (2.54).

Drugi slučaj. Neka je $\alpha = 0$. Tada iz (2.66) slijedi da je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa iz (2.61) slijedi

$$f(x) = s(x) \tag{2.73}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamjenom y sa $-x$ u (2.65) i primjenom parnosti funkcije s i neparnosti funkcije g, dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(s)g(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Kako mora vrijediti $s(0) \neq 0$, slijedi

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}s(x)g(x), \tag{2.74}$$

gdje je $\delta = s(0)$, odnosno

$$g(x) = \frac{2}{\delta}s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Tada vrijedi, primjenom (2.65) te parnosti funkcije s i neparnosti funkcije g,

$$\begin{aligned}
g(x+y)g(x-y) &= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x+y}{2}\Big)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)s\Big(\frac{x-y}{2}\Big)g\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x+y}{2}\Big)g\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big]\Big[s\Big(\frac{x-y}{2}\Big)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big) - s\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big) + s\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Bigg[\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]^2\Big[g\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]^2 - \Big[s\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]^2\Big[g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]^2\Bigg] \\
&= [g(x)]^2 - [g(y)]^2
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 2.3.1, g je oblika

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x) \tag{2.75}$$

ili

$$g(x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2}, \tag{2.76}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $\alpha, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Iz (2.75) slijedi da je $g(2x) = \frac{1}{\alpha}A(2x) = \frac{2}{\alpha}A(x)$ te izjednačavanjem s (2.74) slijedi

$$\frac{2}{\delta}s(x)\frac{1}{\alpha}A(x) = \frac{2}{\alpha}A(x),$$

odnosno
$$s(x) = \delta.$$
Sada iz (2.73) slijedi $f(x) = \delta$ što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

Iz (2.76) slijedi da je $g(2x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{E(2x)-E^*(2x)}{2}$. Kako je E eksponencijalna funkcija, to vrijedi $E(x+y) = E(x)E(y)$, odakle slijedi $g(2x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{[E(x)]^2-[E^*(x)]^2}{2}$. Izjednačavanjem s (2.74) dobivamo
$$\frac{2}{\delta}s(x)\frac{1}{\alpha b}\frac{E(x)-E^*(x)}{2} = \frac{1}{\alpha b}\frac{[E(x)-E^*(x)][E(x)+E^*(x)]}{2},$$
odnosno
$$\frac{2}{\delta}s(x) = E(x) + E^*(x),$$
pa je
$$s(x) = \delta\frac{E(x)+E^*(x)}{2}.$$
Sada iz (2.73) slijedi da je
$$f(x) = \delta\frac{E(x)+E^*(x)}{2},$$
što nam s (2.76) za $\beta = \frac{1}{\alpha b}$ daje rješenje sadržano u (2.54) za $\gamma = 0$. □

Teorem 2.4.2. *Neka je $d \in \langle 1, \infty\rangle \subset \mathbb{R}$. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu*
$$f(x+y) = f(x)f(y) - d\sin x \sin y \tag{2.77}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je f oblika
$$f(x) = a\sin x + \cos x \tag{2.78}$$
ili
$$f(x) = -a\sin x + \cos x, \tag{2.79}$$
gdje je $a = \sqrt{d-1}$.

Dokaz. Lako se provjeri da (2.78) i (2.79) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (2.77). Preostaje dokazati da su to jedina rješenja funkcijske jednadžbe (2.77).

Prema (2.77), s jedne strane imamo
$$\begin{aligned} f((x+y)+z) &= f(x+y)f(z) - d\sin(x+y)\sin z \\ &= [f(x)f(y)f(z) - d\sin x\sin y f(z)] \\ &\quad -d\sin x\cos y\sin z - d\cos x\sin y\sin z, \end{aligned} \tag{2.80}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x+(y+z)) &= f(x)f(y+z) - d\sin x\sin(y+z) \\ &= [f(x)f(y)f(z) - df(x)\sin y\sin z] \\ &\quad -d\sin x\sin y\cos z - d\sin x\cos y\sin z. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Izjednačavanjem (2.80) i (2.81) te dijeljenjem sa $d \neq 0$, dobivamo

$$\sin x\sin y f(z) + \cos x\sin y\sin z = f(x)\sin y\sin z + \sin x\sin y\cos z.$$

Uvrštavanjem $y = z = \frac{\pi}{2}$, slijedi

$$f(x) = \alpha\sin x + \cos x \tag{2.82}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $\alpha = f(\frac{\pi}{2})$. Iz (2.82) slijedi

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \alpha\sin(x+y) + \cos(x+y) \\ &= \alpha\sin x\cos y + \alpha\cos x\sin y + \cos x\cos y - \sin x\sin y, \end{aligned} \tag{2.83}$$

a također i

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - d\sin x\sin y &= (\alpha\sin x + \cos x)(\alpha\sin y + \cos y) - d\sin x\sin y \\ &= \alpha^2\sin x\sin y + \alpha\cos x\sin y + \alpha\sin x\cos y \\ &\quad + \cos x\cos y - d\sin x\sin y. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Prema (2.77), izjednačavanjem (2.83) i (2.84) vrijedi

$$(-1+d)\sin x\sin y = \alpha^2\sin x\sin y,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, odakle slijedi

$$\alpha^2 = d - 1.$$

Uvrštavanjem $\alpha = a$ i $\alpha = -a$ u (2.82), dobivamo (2.78) i (2.79). □

Teorem 2.4.3. *Neka je (S,+) komutativna polugrupa, a $\mathbb{F}$ polje sa svojstvima:*

(i) $2x = 0$ $(x \in \mathbb{F})$ *povlači* $x = 0$,

(ii) za svaki $x \in \mathbb{F}$ postoji $y \in \mathbb{F}$ takav da je $y^2 = x$.

Neka je σ endomorfizam od S takav da vrijedi $\sigma(\sigma x) = x$ za svaki $x \in S$. Funkcije $f, g\colon S \to \mathbb{F}$, koje nisu konstantne, zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x+\sigma y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2.85}$$

za sve $x, y \in S$, ako i samo ako su jednog od oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \\ g(x) &= k\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= aE(x) \\ g(x) &= bE(x), \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= s(x) - s(x)A(x) \\ g(x) &= ks(x)A(x), \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - a)s(x) + as(x)h(x) \\ g(x) &= bs(x) - bs(x)h(x), \end{aligned} \tag{2.89}$$

za svaki $x \in S$, gdje su $k, a, b \in \mathbb{F}$ takvi da je $k^2 = -1$, $a^2 + b^2 = a$, $A\colon S \to \mathbb{F}$ aditivna funkcija, $t, s, h, E\colon S \to \mathbb{F}$ rješenja funkcijske jednadžbe $F(x + y) = F(x)F(y)$ za sve $x, y \in S$, te vrijedi $A(\sigma x) = A(x)$, $s(\sigma x) = s(x)$, $s \neq 0$, $h(\sigma x) = h(x)$ i $E(\sigma x) = E(x)$ za svaki $x \in S$.

Dokaz. Zamjenom x i y u (2.85), dobivamo

$$f(y + \sigma x) = f(y)f(x) + g(y)g(x).$$

Izjednačavanjem sa (2.85) slijedi

$$f(x + \sigma y) = f(y + \sigma x)$$

za sve $x, y \in S$. Dakle, $f(x + \sigma y) = f(\sigma(x + \sigma y))$ za sve $x, y \in S$, pa je

$$f(\sigma x) = f(x) \tag{2.90}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom x sa σx te y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(\sigma x + y) = f(\sigma x)f(\sigma y) + g(\sigma x)g(\sigma y).$$

Primjenom (2.90) dobivamo

$$f(x + \sigma y) = f(x)f(y) + g(\sigma x)g(\sigma y)$$

te usporedbom s (2.85) slijedi

$$g(x)g(y) = g(\sigma x)g(\sigma y) \tag{2.91}$$

za sve $x, y \in S$. Kako g nije konstantna funkcija, postoji $y_0 \in S$ takav da $g(y_0) \neq 0$ pa uvrštavanjem $y = y_0$ u (2.91), dobivamo

$$g(x) = \alpha g(\sigma x), \tag{2.92}$$

gdje je $\alpha = \frac{g(\sigma y_0)}{g(y_0)}$. Iz (2.92) tada slijedi

$$g(\sigma x) = \alpha g(\sigma(\sigma x)) = \alpha g(x) = \alpha \cdot \alpha g(\sigma x),$$

odnosno

$$g(\sigma x) = \alpha^2 g(\sigma x)$$

za svaki $x \in S$, pa slijedi da je $\alpha^2 = 1$. Razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Neka je $\alpha = -1$. Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = -g(x) \tag{2.93}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

odakle primjenom (2.90) i (2.93) slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

Zbrajanjem sa (2.85) dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)f(y) \tag{2.94}$$

za sve $x, y \in S$. Prema teoremu 1.1.4 slijedi da je rješenje funkcijske jednadžbe (2.94) dano sa

$$f(x) = \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2}, \tag{2.95}$$

gdje je $t\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe $t(x + y) = t(x)t(y)$ za sve $x, y \in S$.

Uvrštavanjem (2.95) u (2.85) dobivamo

$$\begin{aligned}
g(x)g(y) &= f(x + \sigma y) - f(x)f(y) \\
&= \frac{t(x + \sigma y) + t\big(\sigma(x + \sigma y)\big)}{2} - \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \cdot \frac{t(y) + t(\sigma y)}{2} \\
&= \frac{2t(x)t(\sigma y) + 2t(\sigma x)t(y)}{4} - \frac{t(x)t(y) + t(\sigma x)t(y) + t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\
&= \frac{t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(y) - t(x)t(y) - t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\
&= -\left[\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}\right]\left[\frac{t(y) - t(\sigma y)}{2}\right]
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in S$. Uvrštavanjem $y = x$ slijedi

$$[g(x)]^2 = -\left[\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}\right]^2$$

pa je

$$g(x) = k\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2},$$

gdje je $k^2 = -1$ što nam daje rješenje (2.86).

Drugi slučaj. Neka je $\alpha = 1$. Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = g(x) \tag{2.96}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

te primjenom (2.90) i (2.96), slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2.97}$$

za sve $x, y \in S$.

Prema (2.97), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f((x + y) + z) &= f(x + y)f(z) + g(x + y)g(z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + g(x)g(y)f(z) + g(x + y)g(z), \end{aligned}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x + (y + z)) &= f(x)f(y + z) + g(x)g(y + z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + f(x)g(y)g(z) + g(x)g(y + z). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem desnih strana, dobivamo

$$g(x + y)g(z) - f(x)g(y)g(z) = g(x)g(y + z) - g(x)g(y)f(z). \tag{2.98}$$

Oduzimanjem $g(x)f(y)g(z)$ s obje strane jednakosti, dobivamo

$$[g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)]g(z) = [g(y + z) - f(y)g(z) - f(z)g(y)]g(x)$$

za sve $x, y \in S$. Za $z = z_0$, obzirom da je $g(z_0) \neq 0$, imamo

$$g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x) = g(x)k(y), \tag{2.99}$$

gdje je $k(y) = [g(z_0)]^{-1}[g(y + z_0) - f(y)g(z_0) - f(z_0)g(y)]$.

Primjenom (2.99) u (2.98), dobivamo

$$g(z)[f(y)g(x) + g(x)k(y)] = g(x)[f(y)g(z) + g(y)k(z)],$$

odnosno

$$g(x)k(y)g(z) = g(y)k(z)g(x).$$

Kako g nije nul-funkcija, slijedi da je

$$k(y) = 2\alpha g(y), \tag{2.100}$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{F}$.

Uvrštavanjem (2.100) u (2.99), dobivamo

$$g(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) + 2\alpha g(x)g(y)$$

za sve $x, y \in S$. Množenjem prethodnog izraza sa λ i zbrajanjem sa (2.97), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) + \lambda f(x)g(y) \\ &\quad + \lambda g(x)f(y) + 2\alpha\lambda g(x)g(y). \end{aligned}$$

Proširimo li dobiveni izraz tako da možemo faktorizirati, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + \lambda g(x)f(y) + \lambda f(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) \\ &\quad - \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y) + 2\alpha\lambda g(x)g(y) \\ &= [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] + g(x)g(y)[\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1]. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je

$$f(x + y) + \lambda g(x + y) = [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] \tag{2.101}$$

ako i samo ako λ zadovoljava jednakost

$$\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1 = 0,$$

Neka je

$$s(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

odnosno

$$f(x) = s(x) - \lambda g(x). \tag{2.102}$$

Tada iz (2.101) slijedi da je $s(x + y) = s(x)s(y)$ za sve $x, y \in S$. Uvrštavanjem (2.102) u (2.97), dobivamo

$$s(x + y) - \lambda g(x + y) = [s(x) - \lambda g(x)][s(y) - \lambda g(y)] + g(x)g(y),$$

odnosno

$$s(x)s(y) - \lambda g(x+y) = s(x)s(y) - \lambda g(x)s(y) - \lambda s(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y)$$

pa je

$$\lambda g(x+y) = \lambda g(x)s(y) + \lambda s(x)g(y) - (\lambda^2+1)g(x)g(y). \tag{2.103}$$

Ako je s nul-funkcija, tada iz (2.103) slijedi

$$g(x+y) = -\frac{(\lambda^2+1)g(x)g(y)}{\lambda} \tag{2.104}$$

za sve $x, y \in S$. Neka je

$$E(x) = -\frac{(\lambda^2+1)g(x)}{\lambda}. \tag{2.105}$$

Tada iz (2.104) slijedi

$$\begin{aligned} E(x+y) &= -\frac{(\lambda^2+1)g(x+y)}{\lambda} \\ &= -\frac{(\lambda^2+1)}{\lambda}\cdot(-1)\frac{(\lambda^2+1)g(x)g(y)}{\lambda} \\ &= E(x)E(y). \end{aligned}$$

Iz (2.105) slijedi

$$g(x) = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}E(x)$$

za svaki $x \in S$, odnosno $g(x) = bE(x)$, gdje je $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$. Kako je s nul-funkcija, iz (2.102) slijedi da je $f(x) = -\lambda g(x)$ za svaki $x \in S$, pa je

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}E(x),$$

odnosno $f(x) = aE(x)$, gdje je $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$. Tada vrijedi

$$a^2 + b^2 = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+1)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+1)^2} = \frac{\lambda^2(\lambda^2+1)}{(\lambda^2+1)^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} = a.$$

To nam daje rješenje (2.87).

Ako s nije nul-funkcija, tada postoji $x_0 \in S$ takav da je $s(x_0) \neq 0$. Kako je $s(x+y) = s(x)s(y)$ za sve $x, y \in S$, to za svaki $x \in S$ vrijedi

$$s(x_0) = s((x_0 - x) + x) = s(x_0 - x)s(x).$$

Ako postoji $x \in S$ takav da je $s(x) = 0$, tada je $s(x_0) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $s(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$. Dijeljenjem jednadžbe (2.103) sa $s(x+y)$, dobivamo

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} - \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right)\left(\frac{\lambda g(y)}{s(y)}\right). \tag{2.106}$$

Ako je $\lambda^2 + 1 = 0$, tada je

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} \tag{2.107}$$

za sve $x, y \in S$. Neka je

$$A(x) = \frac{\lambda g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$g(x) = \frac{s(x)A(x)}{\lambda}. \tag{2.108}$$

Iz (2.107) slijedi da je $A\colon S \to \mathbb{F}$ aditivna funkcija. Uvrštavanjem (2.108) u (2.102), dobivamo

$$f(x) = s(x) - s(x)A(x),$$

što nam sa (2.108) daje rješenje (2.88) za $k = \frac{1}{\lambda}$. Kako je $\lambda^2 + 1 = 0$, slijedi da je $k^2 = -1$.

Neka je $\lambda^2 + 1 \neq 0$. Definirajmo

$$h(x) = 1 - \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right). \tag{2.109}$$

Iz (2.106) tada slijedi

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

za sve $x, y \in S$. Iz (2.109) slijedi

$$h(x) - 1 = -\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \cdot \frac{g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$h(x) - 1 = \frac{g(x)}{bs(x)},$$

gdje je $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, pa je

$$g(x) = bs(x)h(x) - bs(x).$$

Ako je $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$, tada je $-\lambda b = a$ te iz (2.102) slijedi da je

$$f(x) = s(x) - \lambda bs(x)h(x) + \lambda bs(x),$$

odnosno

$$f(x) = (1 + a)s(x) + as(x)h(x).$$

Kako također vrijedi $a^2 + b^2 = a$, imamo rješenje (2.89).

Preostaje dokazati da vrijedi $s(\sigma x) = s(x)$, $h(\sigma x) = h(x)$ i $E(\sigma x) = E(x)$ za svaki $x \in S$.

Primjenom (2.102), (2.90) i (2.96), imamo

$$s(\sigma x) = f(\sigma x) + \lambda g(\sigma x) = f(x) + \lambda g(x) = s(x)$$

za svaki $x \in S$.

Kako vrijedi $s(\sigma x) = s(x)$ za svaki $x \in S$, primjenom (2.109) i (2.96), imamo

$$h(\sigma x) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(\sigma x)}{s(\sigma x)}\right) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right) = h(x)$$

za svaki $x \in S$.

Primjenom (2.105) i (2.96), imamo

$$E(\sigma x) = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(\sigma x)}{\lambda} = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x)}{\lambda} = E(x)$$

za svaki $x \in S$. Ovime smo završili dokaz teorema. □

Bibliografija

[1] C. Efthimiou, Introduction to functional equations, MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[2] P. Kannappan, Functional equations and inequalities with applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[3] P.K. Sahoo, P. Kannappan, Introduction to functional equations, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[4] C.G. Small, Functional equations and how to solve them, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.

Sažetak

Trigonometrijski identiteti vode do takozvanih trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi čija rješenja uključuju i neke druge funkcije osim trigonometrijskih. U ovom radu su dana opća i neprekidna rješenja d'Alembertove funkcijske jednadžbe

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

kosinus-sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y),$$

sinus-kosinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

i poopćene sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y).$$

Summary

Trigonometric identities lead to the so-called trigonometric functional equations whose solutions include some other functions besides trigonometric. In this thesis are given general and continuous solutions of the d'Alembert functional equation

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

the cosine-sine functional equation

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y),$$

the sine-cosine functional equation

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

the sine functional equation

$$f(x+y)f(x-y)=[f(x)]^2-[f(y)]^2$$

and a generalization of the sine functional equation

$$f(x+y)g(x-y)=f(x)g(x)-f(y)g(y).$$

Životopis

Rođena sam 17.2.1993. u Varaždinu gdje sam pohađala Prvu osnovnu školu. Nastavila sam školovanje 2007. godine na Drugoj gimnaziji Varaždin, opći smjer. U srednjoj školi sam stekla veći interes za matematiku, te sam odlučila upisati nastavnički smjer Matematičkog odsjeka na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2011. godine. Oduvijek sam imala interes za poučavanjem i prenošenjem vlastitog znanja na druge, zbog čega sam 2014. godine upisala i diplomski studij istoga smjera.