Konkurentni pravci

Gračan, Maria

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maria Gračan

KONKURENTNI PRAVCI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Jedan od čestih geometrijskih problema je kako dokazati da se tri ili više pravaca sijeku u istoj točki. Takve pravce zovemo konkurentnim pravcima. Možemo primijetiti da postoje razne tehnike dokaza koje ćemo u prvom poglavlju ovog rada pobliže opisati. Točnije, u prvom poglavlju opisat ćemo sedam metoda dokazivanja konkurentnosti pravaca te ih primijeniti na najpoznatije primjere konkurentnosti pravaca, odnosno na dokazivanje postojanja karakterističnih točaka trokuta (ortocentar, težište, središte opisane te središte upisane kružnice trokuta). U drugom poglavlju, navedene metode primijenit ćemo u rješavanju zadataka sa županijskih i državnih natjecanja iz matematike za srednju školu u Republici Hrvatskoj. U posljednjem, trećem poglavlju ovog rada, definirat ćemo još neke poznate točke koje su nastale presijecanjem tri ili više pravaca. Opravdat ćemo njihovu definiciju primjenom opisanih metoda. Naime, definirat ćemo Apolonijevu i Schifflerovu točku kao karakteristične točke trokuta, anticentar četverokuta kao karakterističnu točku četverokuta, sjecište simetrala tetiva kružnice kao karakterističnu točku kružnice. Također, osvrnut ćemo se na dva teorema, Brianchonov i Daov teorem, u kojima se dokazuje konkurentnost pravaca u šesterokutu.

Poglavlje 1

Metode dokazivanja konkurentnosti pravaca

Postoje različite metode dokazivanja konkurentnosti pravaca, a u ovom poglavlju proučit ćemo i sistematizirati neke od metoda te ih primijeniti na dokazivanje sljedećih teorema u kojima se spominju najpoznatiji primjeri konkurentnosti pravaca.

Teorem 1.0.1. *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Teorem 1.0.2. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

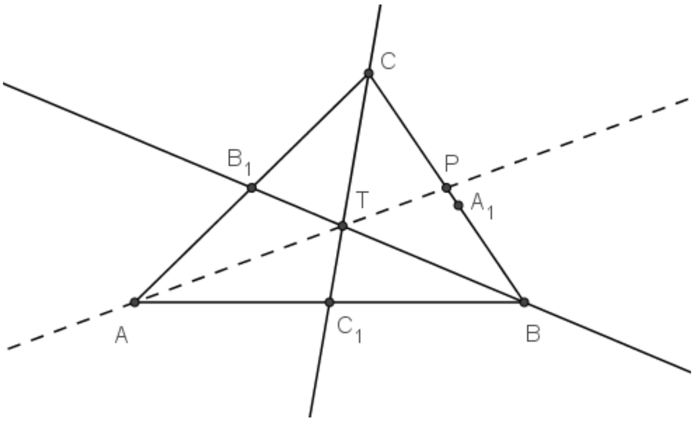
Teorem 1.0.3. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Teorem 1.0.4. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

1.1 Metoda 1

Najprije ćemo dokazati da se tri pravca sijeku u istoj točki tako da iskoristimo sjecište samo dva od ta tri pravca. Nakon toga, umjesto trećeg pravca, promatramo pravac koji prolazi jednom od točaka koje određuju treći pravac i prethodno spomenutim sjecištem. Cilj je dokazati da je tako definirani pravac jednak trećem pravcu te će zbog toga sva tri pravca prolaziti istom točkom.
Provedimo dokaz za Teorem 1.0.1.

Dokaz Teorema 1.0.1. (prvi način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Neka se pravci BB_1 i CC_1 sijeku u točki T. Neka pravac AT siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P. Trebamo dokazati da je točka P polovište stranice $\overline{BC}$ (Slika 1.1).



Slika 1.1: Metoda 1 - sjecište težišnica

Promotrimo trokute ATC_1 i BTC_1. Budući da je točka C_1 polovište stranice $\overline{AB}$, ti trokuti imaju osnovice jednake duljine, tj.

$$|AC_1| = |BC_1|.$$

S druge strane, visine tih trokuta iz vrha T su jednake pa iz toga slijedi da trokuti ATC_1 i BTC_1 imaju jednake površine, odnosno

$$P(\triangle ATC_1) = P(\triangle BTC_1) = P_1.$$

Iz sličnih razloga je i

$$P(\triangle ATB_1) = P(\triangle CTB_1) = P_2.$$

Kako je $P(\triangle ACC_1) = P(\triangle BCC_1)$, slijedi da je

$$\begin{aligned} P(\triangle BTC) &= P(\triangle BCC_1) - P(\triangle BTC_1) \\ &= P(\triangle ACC_1) - P(\triangle ATC_1) \\ &= P(\triangle ACT) \\ &= 2P(\triangle ATB_1) \\ &= 2P_2, \end{aligned}$$

a kako je $P(\triangle ABB_1) = P(\triangle CBB_1)$, slijedi da je

$$\begin{aligned} P(\triangle BTC) &= P(\triangle CBB_1) - P(\triangle CTB_1) \\ &= P(\triangle ABB_1) - P(\triangle ATB_1) \\ &= P(\triangle ABT) \\ &= 2P(\triangle ATC_1) \\ &= 2P_1. \end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$P(\triangle BTC) = 2P_2 \quad \text{i} \quad P(\triangle BTC) = 2P_1$$

pa slijedi da je

$$P_1 = P_2,$$

odnosno

$$P(\triangle AC_1T) = P(\triangle AB_1T).$$

Iz toga zaključujemo da su visine iz C_1 i B_1 na stranicu $\overline{AT}$ jednake. Budući da su visine iz B i C na stranicu $\overline{AT}$ dvostruko dulje od visina iz C_1 i B_1 na stranicu $\overline{AT}$, zaključujemo da su i one jednake.
Dakle, trokuti ABP i ACP imaju zajedničku osnovicu ($\overline{AP}$) i jednake duljine visina na tu osnovicu pa su im površine jednake, odnosno

$$P(\triangle ABP) = P(\triangle ACP).$$

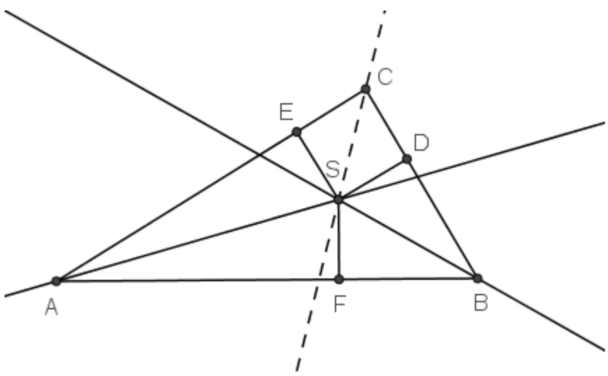
Kako trokuti ABP i ACP imaju jednake površine i jednaku visinu iz vrha A, zaključujemo da je

$$|CP| = |BP|,$$

odnosno da je točka P polovište stranice $\overline{BC}$, tj. $P = A_1$. Time smo dokazali da težišnica iz A pripada pravcu AT. □

Sada metodom 1 dokažimo teorem 1.0.4.

Dokaz Teorema 1.0.4. (prvi način). Neka se u trokutu ABC simetrale kutova CAB i ABC sijeku u točki S. Pokažimo sada da je pravac CS simetrala kuta BCA (Slika 1.2).



Slika 1.2: Metoda 1 - sjecište simetrala kutova

Spustimo okomice iz točke S na stranice trokuta. Neka je točka D nožište okomice iz točke

S na stranicu $\overline{BC}$, točka E nožište okomice iz točke S na stranicu $\overline{AC}$, a točka F nožište okomice iz točke S na stranicu $\overline{AB}$. Kako točka S leži na simetrali kuta iz vrha A i simetrali kuta iz vrha B, zaključujemo da je

$$|SE| = |SF| \quad \text{i} \quad |SF| = |SD|,$$

jer je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova kuta. Iz toga slijedi da je

$$|SE| = |SD|,$$

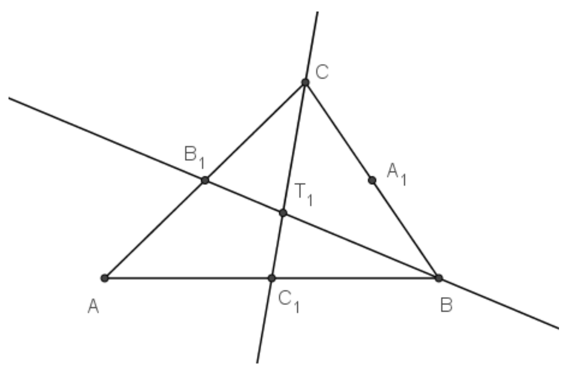
što znači da je pravac CS simetrala kuta BCA.

□

1.2 Metoda 2

Konkurentnost pravaca možemo dokazati i tako da promatramo dva para pravaca od zadana tri pravca. Ako se svaki od parova pravaca siječe, dokazujemo da se ta dva sjecišta podudaraju. Pritom možemo izraziti radij-vektore tih sjecišta da bismo dokazali jednakost točaka ili koristiti analitički račun, odnosno naći koordinate sjecišta preko jednadžbi odgovarajućih pravaca. Također, možemo koristiti i neki geometrijski argument da bismo pokazali jednakost točaka pa dokažimo na taj način Teorem 1.0.1.

Dokaz Teorema 1.0.1. (drugi način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Neka se pravci BB_1 i CC_1 sijeku u točki T_1 (Slika 1.3).



Slika 1.3: Metoda 2 - sjecište težišnica

Kao i u dokazu Teorema 1.0.1. (prvi način), koristimo jednakost površina pa imamo da je

$$P(\triangle AC_1T_1) = \frac{1}{3}P(\triangle AC_1C) \quad \text{i} \quad P(\triangle AB_1T_1) = \frac{1}{3}P(\triangle AB_1B).$$

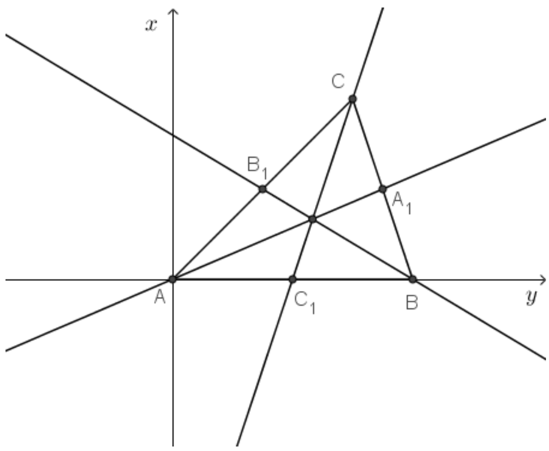
Dakle, točka T_1 dijeli dužine $\overline{CC_1}$ i $\overline{BB_1}$ u omjeru 2 : 1.
Označimo sada s T_2 sjecište pravaca AA_1 i BB_1. Analogno se dokažu dvije jednakosti površina

$$P(\triangle CA_1T_2) = \frac{1}{3}P(\triangle CA_1A) \quad \text{i} \quad P(\triangle CB_1T_2) = \frac{1}{3}P(\triangle CB_1B).$$

Dakle, točka T_2 dijeli dužine $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ u omjeru 2 : 1.
Kako T_1 i T_2 dijele dužinu $\overline{BB_1}$ u istom omjeru, točke T_1 i T_2 se podudaraju. □

Dokažimo sada isti teorem koristeći sličnu tehniku kao i u prethodnom dokazu, ali analitički, tj. određivanjem koordinata sjecišta para pravaca.

Dokaz Teorema 1.0.1. (treći način). Postavimo trokut ABC u koordinatni sustav tako da se vrh A podudara s ishodištem, dok se vrh B nalazi na x-osi (Slika 1.4).



Slika 1.4: Metoda 2 - sjecište težišnica

Koordinate vrhova trokuta su tada

$$A = (0, 0), \quad B = (b_1, 0), \quad C = (c_1, c_2).$$

Polovišta stranica tada imaju koordinate

$$A_1 = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad B_1 = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad C_1 = \left(\frac{b_1}{2}, 0\right).$$

Odredimo sada pravce AA_1, BB_1 i CC_1. Imamo

$$\begin{aligned} AA_1 \ldots y &= \frac{\frac{c_2}{2}}{\frac{b_1+c_1}{2}}x \\ \Leftrightarrow y &= \frac{c_2}{b_1 + c_1}x, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
BB_1 \ldots y &= \frac{\frac{c_2}{2}}{\frac{c_1}{2} - b_1}(x - b_1) \\
\Leftrightarrow y &= \frac{c_2}{c_1 - 2b_1}(x - b_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CC_1 \ldots y - c_2 &= \frac{-c_2}{\frac{b_1}{2} - c_1}(x - c_1) \\
\Leftrightarrow y &= \frac{2c_2}{2c_1 - b_1}(x - c_1) + c_2 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{2c_2(x - c_1) + 2c_1c_2 - c_2b_1}{2c_1 - b_1} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{c_2(2x - 2c_1 + 2c_1 - b_1)}{2c_1 - b_1} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{c_2}{2c_1 - b_1}(2x - b_1).
\end{aligned}
$$

Uočimo da se u eksplicitnom obliku jednadžbi pravaca AA_1, BB_1 i CC_1 pojavljuju razlomci pri čemu nazivnici mogu biti i 0. Kada bi nazivnik bio nula, to bi značilo da je pravac okomit na x-os pa ga ne možemo zapisati u eksplicitnom obliku već u implicitnom. Primjerice, kada je $b_1 + c_1 = 0$, onda jednadžbu pravca AA_1 možemo pisati kao $x = 0$. S druge strane, kada je $c_1 - 2b_1 = 0$, onda je pravac BB_1 zadan jednadžbom $x = b_1$, a kada je $2c_1 - b_1 = 0$, onda pravac CC_1 pišemo kao $x = c_1$. Daljnji račun provodio bi se analogno.
Odredimo sada koordinate sjecišta pravaca AA_1 i BB_1 te AA_1 i CC_1 rješavanjem sustava jednadžbi

$$
AA_1 \cap BB_1 \ldots \begin{cases} y = \frac{c_2}{b_1 + c_1}x \\ y = \frac{c_2}{c_1 - 2b_1}(x - b_1), \end{cases}
$$

$$
AA_1 \cap CC_1 \ldots \begin{cases} y = \frac{c_2}{b_1 + c_1}x \\ y = \frac{c_2}{2c_1 - b_1}(2x - b_1). \end{cases}
$$

Odredimo najprije presjek pravca AA_1 i BB_1. Uvrštavanjem y iz prve jednadžbe u sustavu jednadžbi u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{c_2}{b_1+c_1}x = \frac{c_2}{c_1-2b_1}(x-b_1)\\
&\Leftrightarrow \frac{c_2x}{b_1+c_1} = \frac{c_2x-c_2b_1}{c_1-2b_1}\\
&\Leftrightarrow c_2x(c_1-2b_1) = (c_2x-c_2b_1)(b_1+c_1)\\
&\Leftrightarrow c_1c_2x-2c_2xb_1 = c_2xb_1+c_1c_2x-c_2b_1^2-c_1c_2b_1 / -c_1c_2x-c_2b_1x\\
&\Leftrightarrow -3c_2b_1x = -c_2b_1^2-c_1c_2b_1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{-c_2b_1^2-c_1c_2b_1}{-3c_2b_1}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{b_1+c_1}{3}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = \frac{b_1+c_1}{3}$ u $y = \frac{c_2}{b_1+c_1}x$ dobivamo

$$y = \frac{c_2}{b_1+c_1}\cdot\frac{b_1+c_1}{3} = \frac{c_2}{3}.$$

Dakle, koordinate točke sjecišta pravaca AA_1 i BB_1 su $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$.

Sada odredimo presjek pravca AA_1 i CC_1.
Uvrštavanjem y iz prve jednadžbe u sustavu jednadžbi u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{c_2}{b_1+c_1}x = \frac{c_2}{2c_1-b_1}(2x-b_1)\\
&\Leftrightarrow \frac{c_2x}{b_1+c_1} = \frac{2c_2x-c_2b_1}{2c_1-b_1}\\
&\Leftrightarrow c_2x(2c_1-b_1) = (b_1+c_1)(2c_2x-c_2b_1)\\
&\Leftrightarrow 2c_1c_2x-c_2b_1x = 2c_2b_1x-c_2b_1^2+2c_1c_2x-c_1c_2b_1 / -2c_1c_2x-2c_2b_1x\\
&\Leftrightarrow -3c_2b_1x = -c_2b_1^2-c_1c_2b_1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{c_2b_1^2+c_1c_2b_1}{3c_2b_1}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{b_1+c_1}{3}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = \frac{b_1+c_1}{3}$ u $y = \frac{c_2}{b_1+c_1}x$ dobivamo

$$y = \frac{c_2}{b_1+c_1}\cdot\frac{b_1+c_1}{3} = \frac{c_2}{3}.$$

Dakle, koordinate točke sjecišta pravaca AA_1 i CC_1 su $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$.
Uočavamo da smo u oba slučaja dobili točku $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$ pa zaključujemo da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni. □

Na sličan način, postavljanjem trokuta ABC u koordinatni sustav tako da se vrh A podudara s ishodištem, a vrh B nalazi na x-osi možemo dokazati i Teorem 1.0.2.

Dokaz Teorema 1.0.2. (prvi način). Koordinate vrhova trokuta i polovišta stranica su kao i u dokazu Teorema 1.0.1 (treći način), odnosno

$$A = (0, 0), \quad B = (b_1, 0), \quad C = (c_1, c_2)$$

te

$$A_1 = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad B_1 = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad C_1 = \left(\frac{b_1}{2}, 0\right).$$

Odredimo sada pravce na kojima leže stranice trokuta. Imamo

$$\begin{aligned} AB \ldots y &= 0, \\ BC \ldots y &= \frac{c_2}{c_1 - b_1}(x - b_1), \\ AC \ldots y &= \frac{c_2}{c_1}x. \end{aligned}$$

Uočimo da se u jednadžbama pravaca AB, BC i AC pojavljuju razlomci čiji nazivnici mogu biti i 0. To, kao i u dokazu Teorema 1.0.1. (treći način), znači da su pravci okomiti na x-os te se trebaju zapisati u implicitnom obliku.
Odredimo sada simetrale stranica trokuta ABC u oznaci s_a, s_b i s_c. Neka je jednadžba simetrale oblika $y = kx + l$.
Kako je pravac s_a okomit na BC, imamo

$$k = -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \Rightarrow s_a \ldots y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + l,$$

a budući da s_a prolazi točkom A_1, dobivamo

$$\frac{c_2}{2} = -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 + c_1}{2} + l \Leftrightarrow l = \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Dakle, jednadžba simetrale s_a glasi

$$s_a \ldots y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Kako je pravac s_b okomit na AC, imamo

$$k = -\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow s_b \ldots y = -\frac{c_1}{c_2}x + l,$$

a budući da s_b prolazi točkom B_1, dobivamo

$$\frac{c_2}{2} = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_1}{2} + l \Leftrightarrow l = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Dakle, jednadžba simetrale s_b je

$$s_b \ldots y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Kako je pravac s_c okomit na AB i prolazi točkom C_1, dobivamo da je jednadžba simetrale s_c

$$s_c \ldots x = \frac{b_1}{2}.$$

Uočimo da se u jednadžbama stranica trokuta pojavljuju razlomci čiji nazivnici mogu biti nula. Takve slučajeve treba posebno promatrati, odnosno tada je potrebno jednadžbe stranica prikazati u implicitnom obliku. Kod jednadžbi simetrala, također se pojavljuju razlomci čiji nazivnik može biti nula, ako i samo ako je $c_2 = 0$. No, kada bi c_2 bio jednak nula, to bi značilo da je točka C na x-osi pa bi točke A, B i C bile kolinearne i ne bi činile trokut kao što je zadano.
Odredimo sada koordinate sjecišta pravaca s_a i s_c te s_b i s_c rješavanjem sustava jednadžbi

$$s_a \cap s_c \ldots \begin{cases} y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ x = \frac{b_1}{2}, \end{cases}$$

$$s_b \cap s_c \ldots \begin{cases} y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ x = \frac{b_1}{2}. \end{cases}$$

Odredimo najprije presjek pravaca s_a i s_c. Uvrštavanjem x iz druge jednadžbe u prvu dobivamo

$$\begin{aligned} y &= -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-c_1 b_1 + b_1^2 - b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-c_1 b_1 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}. \end{aligned}$$

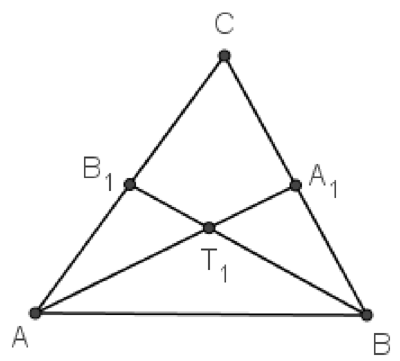
Dakle koordinate sjecišta pravaca s_a i s_c su $\left(\frac{b_1}{2}, \frac{-c_1b_1+c_1^2+c_2^2}{2c_2}\right)$.
Odredimo sada presjek pravaca s_b i s_c. Uvrštavanjem x iz druge jednadžbe u sustavu jednadžbi u prvu dobivamo

$$\begin{aligned} y &= -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-c_1b_1 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}. \end{aligned}$$

Dakle, koordinate sjecišta pravaca s_b i s_c su također $\left(\frac{b_1}{2}, \frac{-c_1b_1+c_1^2+c_2^2}{2c_2}\right)$ pa zaključujemo da se pravci s_a, s_b i s_c sijeku u istoj točki, odnosno pravci s_a, s_b i s_c su konkurentni. □

Određivanje sjecišta para težišnica možemo provesti i vektorski pa dokažimo Teorem 1.0.1. na taj način.

Dokaz Teorema 1.0.1. (četvrti način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Neka se dužine $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ sijeku u točki T_1 (Slika 1.5).



Slika 1.5: Metoda 2 - sjecište težišnica

Stavimo da je

$$\overrightarrow{AT_1} = x\overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BT_1} = y\overrightarrow{BB_1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AT_1} &= x\overrightarrow{AA_1} \\
&= x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}\right) \\
&= x\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).
\end{aligned}$$

Isti vektor možemo raspisati na još jedan način:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AT_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT_1} \\
&= \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BB_1} \\
&= \overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{-AB} + \overrightarrow{AB_1}) \\
&= \overrightarrow{AB} + y\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).
\end{aligned}$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ nekolinearni, odnosno linearno nezavisni, izjednačavanjem koeficijenata uz vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x &= 1 - y \\
\frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}y.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\frac{1}{2}x$ iz prve jednadžbe u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}
1 - y &= \frac{1}{2}y \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}y &= 1 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem $y = \frac{2}{3}$ u $x = y$ dobivamo

$$x = \frac{2}{3}.$$

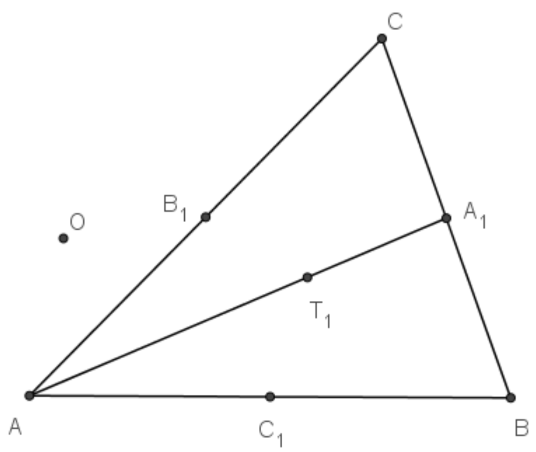
Dakle, dobivamo $\overrightarrow{AT_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Sada sa T_2 označimo presjek težišnica $\overline{AA_1}$ i $\overline{CC_1}$. Posve analognim računom dobivamo $\overrightarrow{AT_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Dakle, točke T_1 i T_2 se podudaraju. □

1.3 Metoda 3

Još jedan od načina na koji možemo dokazati konkurentnost pravaca je da na svakom od pravaca odaberemo točku s nekim svojstvom koje smo naslutili i zatim dokažemo da se sve te točke podudaraju. Primijenimo tu metodu za dokaz Teorema 1.0.1.

Dokaz Teorema 1.0.1. (peti način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Ovdje možemo naslutiti da tražena točka presjeka dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$, od vrha trokuta. Sada na svakoj težišnici uzmimo točku s tim svojstvom i dokažimo da se zapravo radi o istoj točki. Neka je točka T_1 na težišnici $\overline{AA_1}$, točka T_2 na težišnici $\overline{BB_1}$ i točka T_3 na težišnici $\overline{CC_1}$ s navedenim svojstvom. Uzmimo neku proizvoljnu točku O (Slika 1.6).



Slika 1.6: Metoda 3 - sjecište težišnica

Tada je

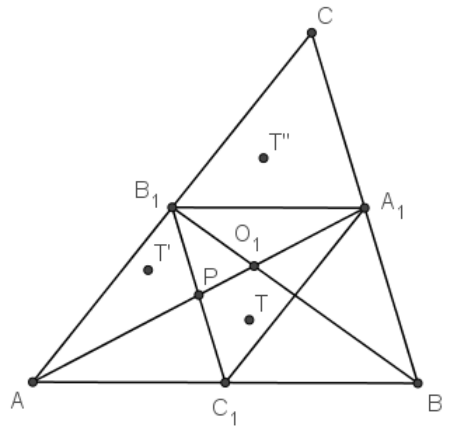
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OT_1} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT_1} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right)\right] \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).
\end{aligned}
$$

Posve analogno dobivamo iste izraze i za $\overrightarrow{OT_2}$ i $\overrightarrow{OT_3}$ pa se točke T_1, T_2 i T_3 podudaraju. □

1.4 Metoda 4

Da bismo dokazali da se pravci sijeku u istoj točki, možemo iskoristiti i neku tvrdnju koja ovisi o prirodi zadatka. Ovu metodu primijenit ćemo na dokazivanje Teorema 1.0.1. tako da ćemo uočiti određenu homotetiju.

Dokaz Teorema 1.0.1. (šesti način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Uočimo da je trokut $A_1B_1C_1$ homotetičan trokutu ABC (Slika 1.7).



Slika 1.7: Metoda 4 - sjecište težišnica

Prvo vidimo da je trokut $A_1B_1C_1$ centralno simetričan trokutu AC_1B_1 u odnosu na polovište dužine $\overline{B_1C_1}$, odnosno za svaku točku T trokuta $A_1B_1C_1$ postoji točka T' trokuta AC_1B_1 takva da vrijedi

$$\overrightarrow{PT} = -\overrightarrow{PT'},$$

gdje je P polovište dužine $\overline{B_1C_1}$.
Trokut AC_1B_1 je očito homotetičan trokutu ABC s koeficijentom homotetije $\frac{1}{2}$ i centrom homotetije A pa za točku T' trokuta AB_1C_1 postoji točka T'' trokuta ABC takva da je

$$\overrightarrow{AT'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AT''}.$$

Sada za proizvoljnu točku O imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT''} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT''} \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AT'} \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PT'}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PT}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\left[\overrightarrow{AP} - \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT}\right)\right] \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{OT}.
\end{aligned}$$

Odaberimo sada točku O tako da poništava izraz

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PO} \\
&= \overrightarrow{OA} + 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) - 2\overrightarrow{PO} \\
&= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OP} \\
&= -\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OP}.
\end{aligned}$$

Dakle, točka O se nalazi na težišnici $\overline{AA_1}$ i dijeli ju u omjeru $2 : 1$. Nazovimo ju s O_1. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{O_1T''} = -2\overrightarrow{O_1T}$$

pa je trokut $A_1B_1C_1$ homotetičan trokutu ABC s obzirom na točku O_1 s koeficijentom $-\frac{1}{2}$.
Pritom je točka A_1 homotetična točki A, točka B_1 točki B i točka C_1 točki C.
Sada ponovimo isti postupak tako da koristimo trokute BA_1C_1 i CA_1B_1 umjesto AB_1C_1. Dobivena središta homotetije označimo s O_2 i O_3. Imamo dakle

$$\overrightarrow{O_1A} = -2\overrightarrow{O_1A_1},$$

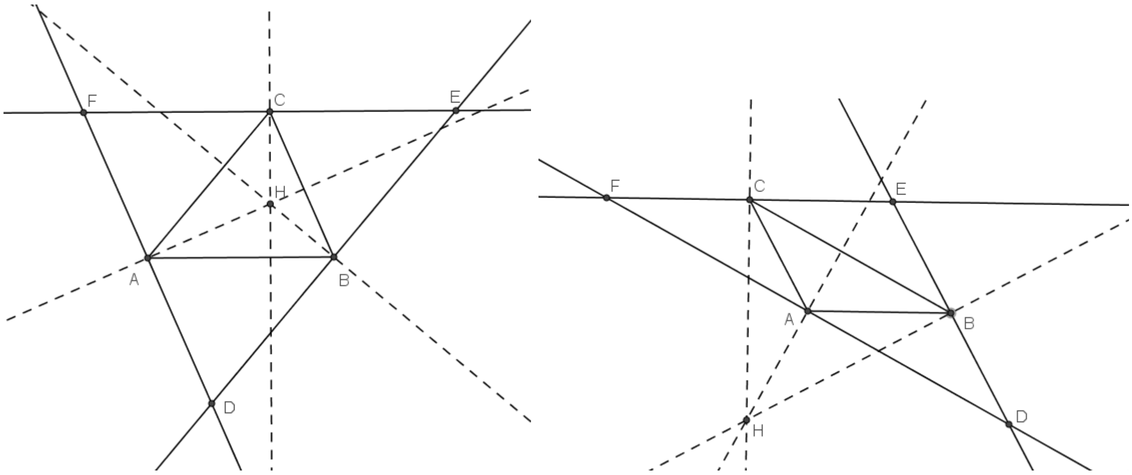
$$\overrightarrow{O_2A} = -2\overrightarrow{O_2A_1}.$$

Oduzimanjem dobivamo $\overrightarrow{O_1O_2} = -2\overrightarrow{O_1O_2}$ pa je $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{0}$, odnosno $O_1 = O_2$.
Analogno se pokaže i da je $O_2 = O_3$.
Kako točka $T = O_1 = O_2 = O_3$ pripada pravcima AA_1, BB_1 i CC_1, oni se sijeku u istoj točki. □

1.5 Metoda 5

Konkurentnost pravaca može se dokazati i tako da u zadanim pravcima prepoznamo pravce koji imaju neko drugo svojstvo te zatim iskoristimo rezultat o konkurentnosti pravaca koji nam je poznat iz tog drugog konteksta. Tako, primjerice, da bismo dokazali Teorem 1.0.3., možemo iskoristiti Teorem 1.0.2. koji kaže da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki.

Dokaz Teorema 1.0.3. (prvi način). Neka je zadan trokut ABC. Konstruirajmo trokut DEF kojemu su stranice usporedne sa stranicama trokuta ABC, pri čemu je $AB \parallel FE$, $BC \parallel DF$ i $AC \parallel DE$, i prolaze vrhovima tog trokuta. Na slici 1.8 prikazane su konstrukcije trokuta DEF u slučaju kada je trokut ABC šiljastokutan, odnosno, tupokutan. Kod pravokutnog trokuta s pravim kutom u vrhu C, vrh C očito pripada svim visinama pa odmah



Slika 1.8: Metoda 5 - sjecište visina

zaključujemo da su pravci na kojima leže visine trokuta konkurentni.
Četverokuti $ABEC$, $ABCF$ i $ADBC$ su tada paralelogrami. Promotrimo paralelograme $ABEC$ i $ABCF$. Tada imamo

$$|AB| = |CE| \quad \text{i} \quad |AB| = |FC|$$

pa je

$$|CE| = |CF|.$$

Isto tako dobivamo i da je

$$|BD| = |BE| \quad \text{i} \quad |AD| = |AF|$$

pa zaključujemo da su točke A, B i C polovišta stranica trokuta DEF.
Konstruirajmo sada pravce na kojima leže visine trokuta ABC. Neka su N_A, N_B i N_C nožišta visina trokuta iz A, B i C redom. Budući da je

$$CN_C \perp AB \quad \text{i} \quad EF \parallel AB,$$

zaključujemo da je

$$CN_C \perp EF.$$

Isto tako, kako je

$$BN_B \perp AC \quad \text{i} \quad DE \parallel AC,$$

zaključujemo da je

$$BN_B \perp DE.$$

Također, kako je

$$AN_A \perp BC \quad \text{i} \quad DF \parallel BC,$$

dobivamo da je

$$AN_A \perp DF.$$

Dakle, pravci na kojima leže visine trokuta ABC okomiti su na stranice trokuta DEF i prolaze polovištima njegovih stranica pa su to ujedno i simetrale stranica trokuta DEF. Prema Teoremu 1.0.2. znamo da se simetrale stranica sijeku u jednoj točki, a kako tim simetralama, odnosno pravcima, pripadaju visine trokuta ABC, i pravci na kojima leže visine su konkurentni. □

1.6 Metoda 6

Još jedan način da dokažemo da se pravci sijeku u istoj točki je da iskoristimo neki općenitiji rezultat. Ovdje je, primjerice, to Cevin teorem. Prije samog iskaza teorema definirajmo sljedeću funkciju. Neka su točke X, Y i Z kolinearne i međusobno različite. Tada je

$$\left[\frac{|XY|}{|YZ|}\right] = \operatorname{sgn}(X, Y, Z) \cdot \frac{|XY|}{|YZ|},$$

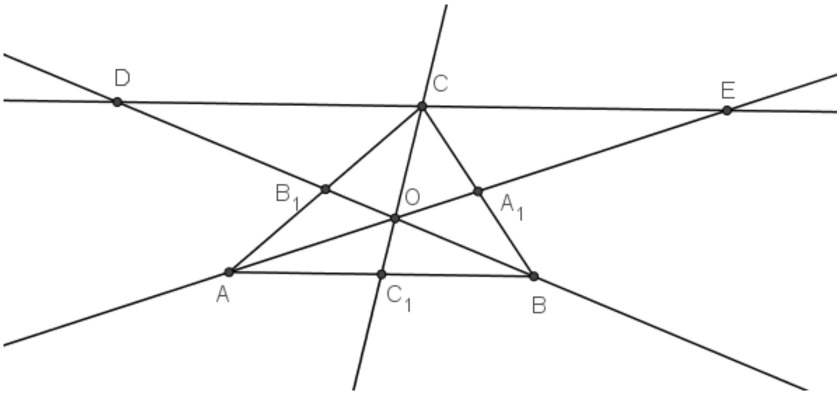
pri čemu je $\operatorname{sgn}(X, Y, Z) = 1$ ako je Y između X i Z, a -1 inače.

Iskažimo sada Cevin teorem:

Teorem 1.6.1. *Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 na pravcima BC, AC i AB redom, pri čemu se točke A_1, B_1 i C_1 ne podudaraju ni sa jednom od točaka A, B i C. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

$$\left[\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\right] \cdot \left[\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\right] \cdot \left[\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\right] = 1.$$

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u točki O. Uočimo da se točka O može nalaziti unutar i izvan trokuta ABC.
Provedimo najprije dokaz za slučaj kada se točka O nalazi unutar trokuta ABC. Tada se točke A_1, B_1 i C_1 nalaze na stranicama trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom pa su predznaci svih orijentiranih kvocijenata iz Cevinog identiteta pozitivni i u produktu iznose 1. Sada dokažimo da je produkt kvocijenata duljina također 1.
Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AB}$ kroz točku C. Neka je točka D sjecište te paralele s pravcem BB_1, a točka E sjecište paralele s pravcem AA_1 (Slika 1.9).



Slika 1.9: Cevin teorem

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1, \text{ pa je } \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CD|}{|AB|},$$

$$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1, \text{ pa je } \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CE|},$$

$$\triangle OAC_1 \sim \triangle OEC, \text{ pa je } \frac{|AC_1|}{|CE|} = \frac{|C_1O|}{|CO|},$$

$$\triangle CDO \sim \triangle C_1BO, \text{ pa je } \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CO|}{|C_1O|}.$$

Slijedi

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1O|}{|CO|} \cdot \frac{|CO|}{|C_1O|}$$

i nakon sređivanja

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

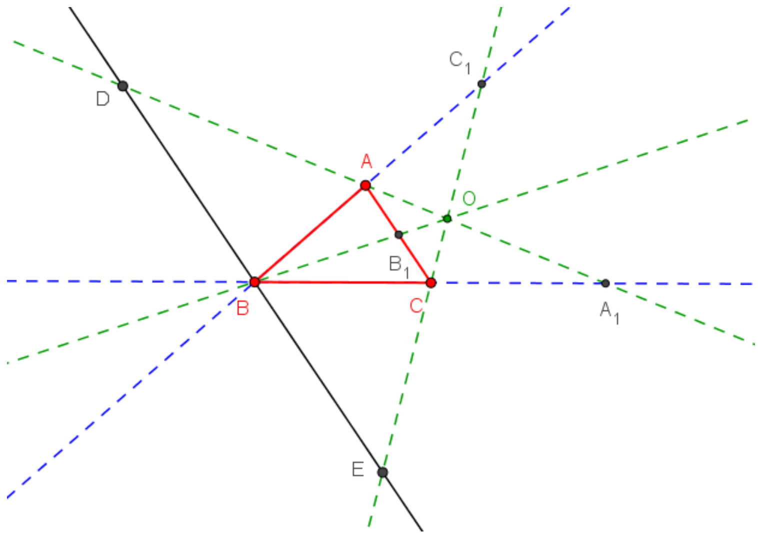
Provedimo sada dokaz za slučaj kada se točka O nalazi izvan trokuta ABC. Tada se, primjerice, točke A_1 i C_1 nalaze na produžecima stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$, a točka B_1 na stranici $\overline{AC}$ (preostale situacije se pokažu analogno). Tada je

$$\operatorname{sgn}(A, C_1, B) = -1, \quad \operatorname{sgn}(B, A_1, C) = -1, \quad \operatorname{sgn}(C, B_1, A) = 1$$

pa je

$$\operatorname{sgn}(A, C_1, B) \cdot \operatorname{sgn}(B, A_1, C) \cdot \operatorname{sgn}(C, B_1, A) = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

Sada dokažimo da je produkt kvocijenata duljina također 1.
Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AC}$ kroz točku B. Neka je točka D sjecište te paralele s pravcem AA_1, a točka E sjecište paralele s pravcem CC_1 (Slika 1.10).



Slika 1.10: Cevin teorem

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle C_1BE \sim \triangle C_1AC, \quad \text{pa je} \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC|}{|BE|},$$

$$\triangle A_1DB \sim \triangle A_1AC, \quad \text{pa je} \quad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|DB|}{|AC|},$$

$$\triangle OBE \sim \triangle OB_1C, \quad \text{pa je} \quad \frac{|CB_1|}{|BE|} = \frac{|OB_1|}{|OB|},$$

$$\triangle ODB \sim \triangle OAB_1, \quad \text{pa je} \quad \frac{|DB|}{|B_1A|} = \frac{|OB|}{|OB_1|}.$$

Slijedi

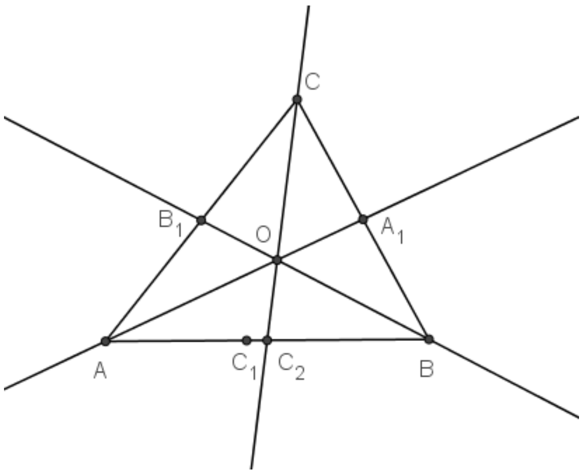
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|BE|} \cdot \frac{|DB|}{|B_1A|} = \frac{|AC|}{|BE|} \cdot \frac{|DB|}{|AC|} \cdot \frac{|OB_1|}{|OB|} \cdot \frac{|OB|}{|OB_1|}$$

i nakon sređivanja

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

$\Leftarrow$: Neka je sada $\left[\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\right] \cdot \left[\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\right] \cdot \left[\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\right] = 1$. Dokaz ćemo provesti za slučaj kada se točke A_1,

B_1 i C_1 nalaze na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. U ovom slučaju produkt odgovarajućih predznaka kvocijenata jednak je jedan pa je ta situacija moguća. Ostali slučajevi dokazuju se analogno. Za nastavak dokaza koristimo metodu 1. Označimo sa O presjek pravaca AA_1 i BB_1, a s C_2 presjek pravaca CO i AB (Slika 1.11).



Slika 1.11: Cevin teorem

Sada zaključujemo da su pravci AA_1, BB_1 i CC_2 konkurentni pa prema prvom dijelu dokaza imamo jednakost

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Sada, prema pretpostavci, vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}.$$

S obzirom na to da točke C_1 i C_2 leže na dužini $\overline{AB}$, slijedi

$$\frac{|AB| - |BC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB| - |BC_2|}{|BC_2|}$$

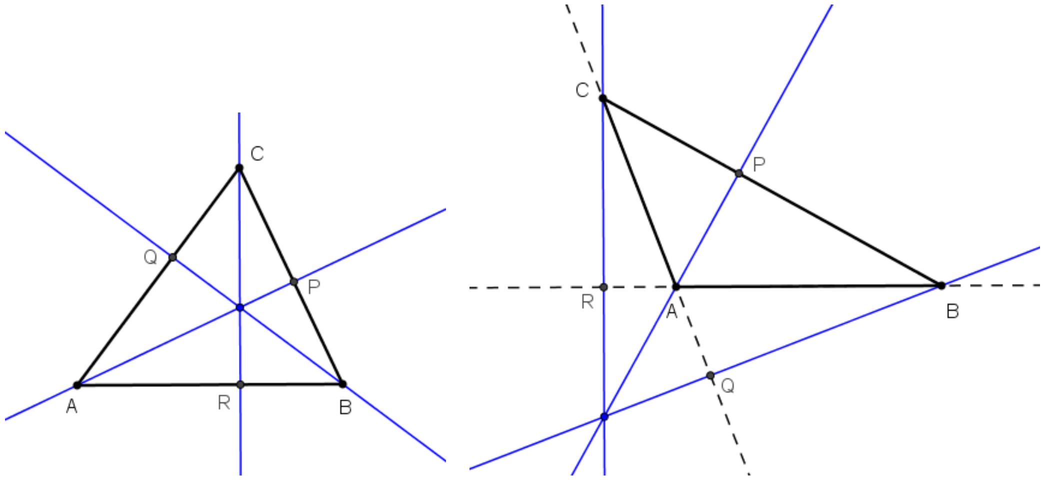
pa je

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} = \frac{|AB|}{|BC_2|}.$$

Dakle, $|BC_1| = |BC_2|$ pa zaključujemo da se točke C_1 i C_2 podudaraju, odnosno, pravac CC_1 prolazi točkom O. Zaključujemo da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki. □

Sada primijenjujući Cevin teorem dokažimo Teorem 1.0.3.

Dokaz Teorema 1.0.3. (drugi način). Neka je zadan trokut ABC i točke P, Q i R koje su nožišta okomica iz A, B i C na pravce BC, AC i AB redom (Slika 1.12).



Slika 1.12: Metoda 6 - sjecište visina

Uočimo da postoje dva slučaja, kad je trokut ABC šiljastokutan, odnosno tupokutan. Također, primijetimo da je kod šiljastokutnog trokuta produkt predznaka kvocijenata iz Cevinog identiteta jednak 1, jer je svaki kvocijent pozitivan, dok kod tupokutnog trokuta imamo dva negativna kvocijenata i jedan pozitivan pa je produkt orijentiranih kvocijenata opet pozitivan.
Provedimo najprije dokaz za slučaj kada je trokut ABC šiljastokutan. Tada su P, Q i R na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom.
Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle BCQ \sim \triangle ACP, \quad \text{pa je} \quad \frac{|CQ|}{|PC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

$$\triangle CAR \sim \triangle BAQ, \quad \text{pa je} \quad \frac{|AR|}{|QA|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\triangle ABP \sim \triangle CBR, \quad \text{pa je} \quad \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|CQ|}{|PC|} \cdot \frac{|AR|}{|QA|} \cdot \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, prema Cevinom teoremu, visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

Sada promotrimo slučaj kada je trokut ABC tupokutan te kada su, bez smanjenja općenitosti, točke R i Q na produžetcima stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom.
Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle BCQ \sim \triangle ACP, \quad \text{pa je} \quad \frac{|CQ|}{|PC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

$$\triangle CAR \sim \triangle BAQ, \quad \text{pa je} \quad \frac{|AR|}{|QA|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\triangle ABP \sim \triangle CBR, \quad \text{pa je} \quad \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|CQ|}{|PC|} \cdot \frac{|AR|}{|QA|} \cdot \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

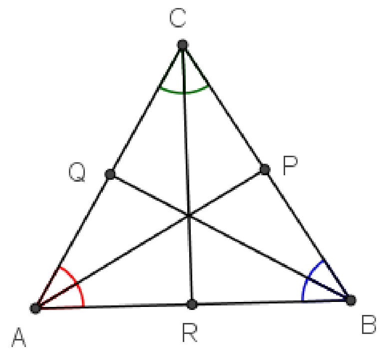
odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, i u slučaju tupokutnog trokuta dobili smo da se, prema Cevinom teoremu, pravci na kojima leže visine sijeku u istoj točki. □

Slično možemo dokazati i Teorem 1.0.4.

Dokaz Teorema 1.0.4. (drugi način). Neka su u trokutu ABC točke P, Q i R presjeci simetrala kutova sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom (Slika 1.13). Očito je da P, Q i R mogu biti samo na stranicama trokuta ABC pa je produkt orijentiranih kvocijenata iz pripadnog Cevinog identiteta pozitivan. Primjenjujemo poučak o simetrali kuta koji glasi: omjer duljina dužina na koje simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu trokuta jednak je omjeru duljina odgovarajućih stranica trokuta nad tim segmentima.



Slika 1.13: Metoda 6 - sjecište simetrala kutova

Dakle, imamo

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BR|}{|AR|},$$
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|BP|},$$
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|CQ|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|BR|}{|AR|} \cdot \frac{|CP|}{|BP|} \cdot \frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, prema Cevinom teoremu, simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. □

1.7 Metoda 7

Još jedan od načina dokazivanja konkurentnosti pravaca je korištenje trilinearnih koordinata. Naime, trilinearne koordinate točaka ne pokazuju položaj točke u odnosu na ishodište i osi koordinatnog sustava već se njima točke opisuju pomoću udaljenosti od tri zadana pravca. Te udaljenosti nisu nužno točne, već je dovoljno da su omjeri udaljenosti točni pa se zbog toga trilinearne koordinate ne zapisuju kao (x, y, z), već kao omjer $x : y : z$.

Primjerice, najlakše je odrediti trilinearne koordinate točke koja je središte upisane kružnice trokuta ABC u odnosu na pravce na kojima leže stranice tog trokuta. S obzirom na to da se ona nalazi u sjecištu simetrala kutova, zaključujemo da su joj udaljenosti do svake stranice jednake (to je zapravo radijus r upisane kružnice). Dakle, tada su njene trilinearne koordinate oblika $r : r : r$. Međutim, kod trilinearnih koordinata se uglavnom uzima skraćeni oblik pa bi to u ovom slučaju glasilo $1 : 1 : 1$.

Slično možemo zapisati i trilinearne koordinate točaka koje leže na simetralama kutova (unutar trokuta). Neka pojedine koordinate predstavljaju redom udaljenosti promatrane točke do pravaca BC, AC i AB redom. Tada simetrala kuta $\angle BAC$ ima trilinearne koordinate $x : 1 : 1$. Tu vidimo da je bitno da su udaljenosti točaka do stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ jednake, dok treća udaljenost varira.

Vrlo je bitno naglasiti da su kod trilinearnih koordinata sve koordinate pozitivne ako je točka unutar trokuta. Ako točka prijeđe na drugu stranu nekog od pravaca koji određuju trokut, onda joj udaljenost mijenja predznak, tj. kažemo da koordinate zapravo predstavljaju orijentirane udaljenosti. Zbog toga su koordinate $x : 1 : 1$ zapravo koordinate točaka koje leže na simetrali kuta $\angle BAC$ i pripadaju tom kutu.

Uzmimo točke A_1, B_1 i C_1 na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom i neka su trilinearne koordinate dužina $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ redom $x : q : r$, $p : y : r$ i $p : q : z$ pri čemu su p, q i r pozitivne konstante. Neka je točka T presjek dužina $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ i neka su joj d_1, d_2 i d_3 udaljenosti do stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Tada postoje x_T i y_T takvi da je

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{x_T}{q} = \frac{p}{y_T}$$

i također je

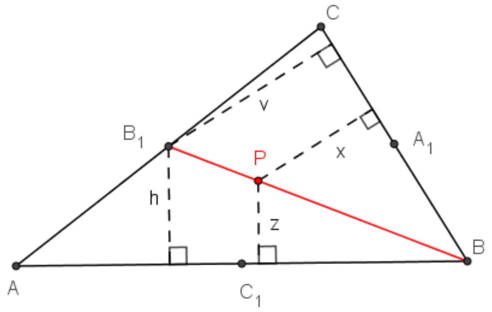
$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{x_T}{r} = \frac{p}{r}.$$

Dakle iz druge jednakosti dobivamo da je $x_T = p$, a onda iz prve da je $y_T = q$. Drugim riječima, dobili smo trilinearne koordinate točke T, a to su $p : q : r$. Međutim, to znači da se točka T nalazi i na dužini $\overline{CC_1}$ pa se zadane dužine sijeku u jednoj točki.

Iskoristimo sada dobiveni zaključak u dokazu Teorema 1.0.1.

Dokaz Teorema 1.0.1. (sedmi način). Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Odredimo trilinearne koordinate težišnica.

Promatrajmo težišnicu $\overline{BB_1}$. Neka je točka P proizvoljna točka koja leži na težišnici $\overline{BB_1}$ i neka su joj udaljenosti do stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom x, y i z. Neka su v i h visine iz B_1 u trokutima BCB_1 i BB_1A (Slika 1.14).



Slika 1.14: Metoda 7 - sjecište težišnica

Iz sličnosti trokuta dobivamo
$$\frac{x}{v} = \frac{z}{h}.$$
Također, vidimo da je površina trokuta ABC jednaka
$$P(\triangle ABC) = av = ch$$
pa dobivamo da je
$$x : z = v : h = c : a,$$
pri čemu su a i c duljine stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom.
Tada su trilinearne koordinate težišnice $\overline{BB_1}$ jednake $c : y' : a$. Te koordinate možemo pisati i kao $bc : y'' : ab$ gdje su y, y' i y'' neke varijabilne vrijednosti.
Analogno bismo za preostale dvije težišnice odredili trilinearne koordinate te dobili $b : a : z'$ i $x' : c : b$, odnosno $bc : ca : z''$ i $x'' : ca : ab$.
Iz napomene prije ovog teorema zaključujemo da se težišnice sijeku unutar trokuta u točki s trilinearnim koordinatama $bc : ca : ab$, odnosno, to su trilinearne koordinate težišta. □

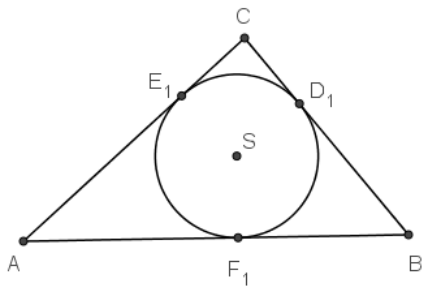
Poglavlje 2

Zadaci s natjecanja

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se navedene metode dokazivanja konkurentnosti pravaca primjenjuju u rješavanju raznih zadataka. Zadaci su sa županijskih i državnih natjecanja iz matematike provedenih u Republici Hrvatskoj.

Zadatak 1. (državno natjecanje iz matematike za 3. razred, 2013. godina) Točke A, B i C središta su triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana. U točkama u kojima se kružnice dodiruju povučene su zajedničke tangente. Pokažite da je središte upisane kružnice trokuta ABC sjecište tih triju tangenti.

Rješenje.
Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 4, odnosno, iskoristit ćemo razne tvrdnje koje ovise o prirodi zadatka.
Neka su D_1, E_1 i F_1 dirališta upisane kružnice sa središtem u točki S polumjera r trokuta ABC na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom (Slika 2.1).



Slika 2.1: Zadatak 1.

Prema S-S-K teoremu o sukladnosti trokuta imamo

$$\triangle AF_1S \cong \triangle AE_1S \quad \left(|SF_1| = |SE_1| = r,\ \overline{AS} \text{ zajednička},\ \angle AF_1S = \angle AE_1S = 90^\circ\right)$$

pa je

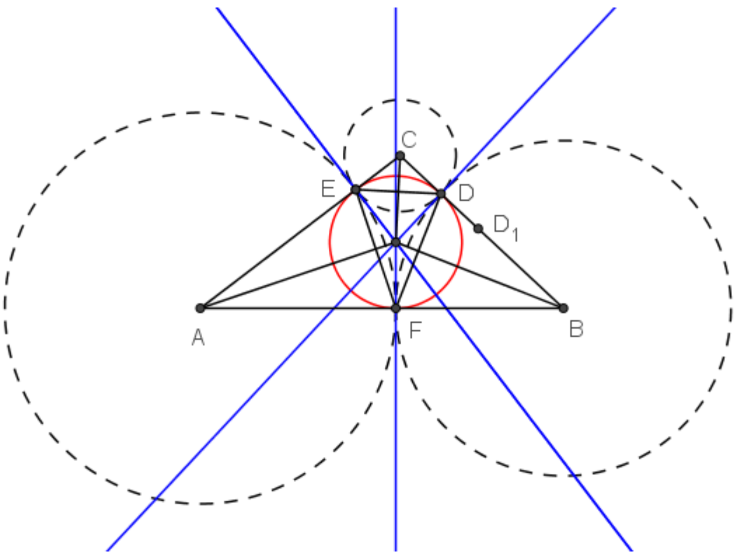
$$|AF_1| = |AE_1|.$$

Analogno zaključujemo da je

$$|BF_1| = |BD_1| \quad \text{i} \quad |CD_1| = |CE_1|.$$

Označimo li sa D, E i F dirališta triju zadanih kružnica sa središtima u A, B i C (Slika 2.2), imamo da je

$$|AF| = |AE|, \quad |BF| = |BD| \quad \text{i} \quad |CD| = |CE|.$$



Slika 2.2: Zadatak 1.

Trebamo pokazati da se točke D, E i F podudaraju s točkama D_1, E_1 i F_1 redom.
Pretpostavimo suprotno i bez smanjenja općenitosti da se D ne podudara s D_1. Tada je $|BD| > |BD_1|$ ili $|BD| < |BD_1|$.
Uzmimo da je $|BD| < |BD_1|$ (drugi slučaj pokaže se analogno), a onda je $|CD| > |CD_1|$.
Tada je

$$|AF| = |AB| - |BF| = |AB| - |BD| > |AB| - |BD_1| = |AB| - |BF_1| = |AF_1|,$$

odnosno,

$$|AF| > |AF_1|.$$

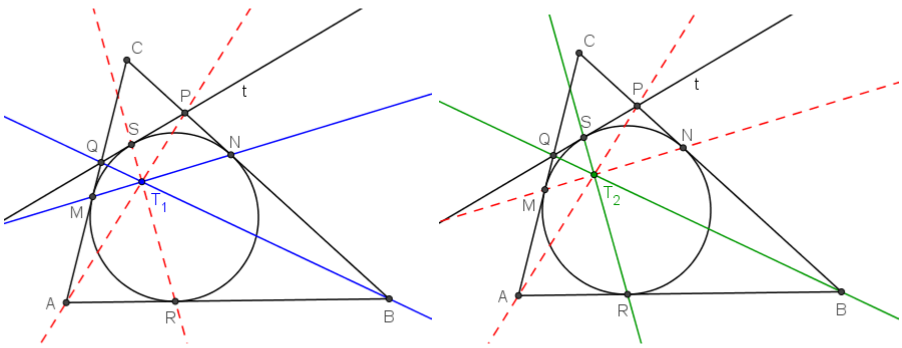
Sada je

$$|AC| = |AE| + |CE| = |AF| + |CD| > |AF_1| + |CD_1| = |AE_1| + |CE_1| = |AC|.$$

Dakle, $|AC| > |AC|$ pa smo dobili kontradikciju. Drugim riječima, dokazali smo da su D, E i F upravo dirališta upisane kružnice trokuta ABC.
Kako su pravci DS, ES i FS okomiti na pripadne stranice trokuta ABC, oni se upravo podudaraju sa zadanim tangentama. Prema tome, zadane tangente se sijeku u točki S.

Zadatak 2. (državno natjecanje iz matematike za 3. razred, 2005. godina) Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama M, N i R. Neka je S točka na manjem od dva luka $\widehat{MN}$ i t tangenta na taj luk s diralištem S. Tangenta t siječe $\overline{NC}$ i $\overline{MC}$ redom u točkama P i Q. Dokažite da se pravci AP, BQ, SR i MN sijeku u jednoj točki.

Rješenje.
Pri rješavanju ovog zadatka najprije od četiri zadana pravca odaberemo dva "fiksna" pravca. Zatim promatramo dva slučaja. U prvom slučaju promatramo odabrane "fiksne" pravce i jedan od preostala dva, a zatim koristimo metodu 2 i promatramo dva para pravaca od zadana tri. Nakon toga, u drugom slučaju, promatramo odabrane "fiksne pravce" i jedan od preostala dva pravca, različit od onog iz prvog slučaja, a zatim koristimo metodu 2. U konačnici, u svakom slučaju dobivamo da pravci prolaze istom točkom te zaključujemo da su sva četiri zadana pravca konkurentni.
Neka je točka T_1 sjecište pravaca MN i QB, a točka T_2 sjecište pravaca SR i QB (Slika 2.3).



Slika 2.3: Zadatak 2.

S obzirom na to da je trokut MNC jednakokračan s osnovicom $\overline{MN}$, vrijedi

$$\angle T_1MQ = \angle T_1NC = 180^\circ - \angle T_1NB,$$

a također su vršni kutovi $\angle MT_1Q$ i $\angle BT_1N$ jednaki.
Primjenom poučka o sinusima za trokute MT_1Q i BT_1N imamo

$$\frac{|QT_1|}{|MQ|} = \frac{\sin\angle T_1MQ}{\sin\angle MT_1Q} = \frac{\sin(180^\circ - \angle T_1NB)}{\sin\angle BT_1N} = \frac{\sin\angle T_1NB}{\sin\angle BT_1N} = \frac{|T_1B|}{|BN|}. \tag{2.1}$$

Analogno vrijedi

$$\angle T_2SQ = \angle T_2RA = 180^\circ - \angle T_2RB \quad \text{i} \quad \angle ST_2Q = \angle RT_2B$$

pa primjenom počuka o sinusima na trokute ST_2Q i RT_2B dobivamo

$$\frac{|QT_2|}{|SQ|} = \frac{\sin\angle T_2SQ}{\sin\angle ST_2Q} = \frac{\sin(180^\circ - \angle T_2RB)}{\sin\angle RT_2B} = \frac{\sin\angle T_2RB}{\sin\angle RT_2B} = \frac{|T_2B|}{|BR|}. \tag{2.2}$$

Kako su trokuti MSQ i NRB jednakokračni s osnovicama $\overline{MS}$, odnosno $\overline{NR}$, imamo da je

$$|MQ| = |SQ| \quad \text{i} \quad |BN| = |BR|.$$

Sada iz (2.1) i (2.2), odnosno

$$\frac{|QT_1|}{|BT_1|} = \frac{|MQ|}{|BN|}, \quad \frac{|QT_2|}{|BT_2|} = \frac{|SQ|}{|BR|}, \quad |MQ| = |SQ| \quad \text{i} \quad |BN| = |BR|,$$

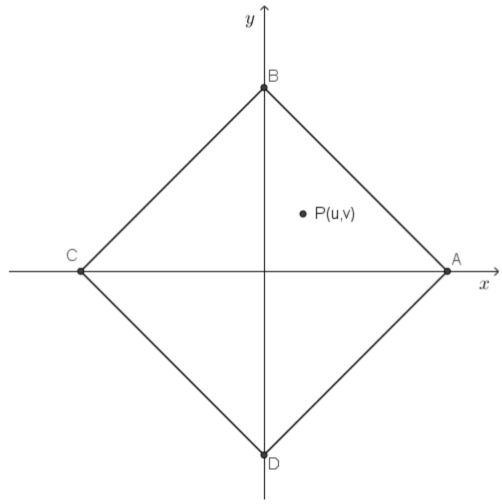
slijedi da je

$$\frac{|QT_1|}{|BT_1|} = \frac{|QT_2|}{|BT_2|}.$$

Konačno, kako T_1 i T_2 leže na $\overline{BQ}$, slijedi da se točke T_1 i T_2 podudaraju.
Analogno bi vrijedilo i kada bi bismo s T_1 i T_2 označili presjek pravaca MN i AP , odnosno SR i AP pa zaključujemo da se pravci AP, BQ, SR i MN sijeku u jednoj točki.

Zadatak 3. (županijsko natjecanje iz matematike za 3. razred, 2002. godina) Ako je $ABCD$ kvadrat i P bilo koja točka u njegovoj ravnini koja se ne podudara ni sa jednim vrhom kvadrata, dokažite da se okomice iz točaka B, C, D i A redom na pravce AP, BP, CP i DP sijeku u istoj točki.

Rješenje. Ovaj zadatak možemo riješiti koristeći metodu 2, postavljajući kvadrat u koordinatni sustav u ravnini kao na slici 2.4 jer točka P može biti bilo gdje u ravnini pa bi inače trebalo promatrati dosta slučajeva.



Slika 2.4: Zadatak 3.

Koordinate vrhova kvadrata i točake P su tada

$$A = (d, 0)\,, \quad B = (0, d)\,, \quad C = (-d, 0)\,, \quad D = (0, -d) \quad \text{i} \quad P = (u, v)\,.$$

Koeficijenti smjerova pravaca AP, BP, CP i DP su tada

$$k_{AP} = \frac{v}{u-d}, \quad k_{BP} = \frac{v-d}{u}, \quad k_{CP} = \frac{v}{u+d} \quad \text{i} \quad k_{DP} = \frac{v+d}{u}$$

pa okomice iz točaka B, C, D i A redom na te pravce imaju jednadžbe

$$\begin{aligned}
y - d &= \frac{d-u}{v}x, \\
y &= \frac{u}{d-v}(x+d)\,, \\
y + d &= -\frac{u+d}{v}x, \\
y &= -\frac{u}{v+d}(x-d)\,.
\end{aligned}$$

Uočimo da se pri određivanju koeficijenata smjerova pravaca pojavljuje razlomak čiji nazivnik može biti i nula što bi značilo da je taj pravac okomit na x-os pa se jednadžba takvih pravaca ne može napisati u eksplicitnom već u implicitnom obliku.
Pretpostavimo da je $u - d \neq 0$, $u \neq 0$, $u + d \neq 0$, $v \neq 0$, $d - v \neq 0$ i $v + d \neq 0$. Oduzimanjem prve i treće jednadžbe tada dobivamo

$$-2d = \frac{2d}{v}x \Leftrightarrow x = -v.$$

Sada, zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned}
2y = \frac{d-u}{v}x - \frac{u+d}{v}x &\Leftrightarrow 2y = \frac{dx-ux-ux-dx}{v} \\
&\Leftrightarrow 2y = \frac{-2ux}{v} \\
&\Leftrightarrow 2yv = -2ux \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{ux}{v} \\
&\Leftrightarrow y = -\frac{u\cdot(-v)}{v} \\
&\Leftrightarrow y = u.
\end{aligned}$$

Dakle, sjecište prve i treće okomice je točka $(-v, u)$.
Analogno bismo dobili za bilo koje dvije jednadžbe pa zaključujemo da se sva četiri pravca sijeku u točki $(-v, u)$.
Riješimo sada slučaj kada je $v = 0$. Tada je točka P oblika $P(u, 0)$, a koeficijenti smjerova pravaca AP, BP, CP i DP su tada

$$k_{AP} = 0, \quad k_{BP} = -\frac{d}{u}, \quad k_{CP} = 0 \quad \text{i} \quad k_{DP} = \frac{d}{u},$$

odnosno jednadžbe pravaca AP i CP su $y = 0$.
Sada okomice iz točaka B, C, D i A redom na te pravce imaju jednadžbe

$$\begin{aligned}
x &= 0, \\
y &= \frac{u}{d}(x+d), \\
x &= 0, \\
y &= -\frac{u}{d}(x-d).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ iz prve jednadžbe u drugu dobivamo

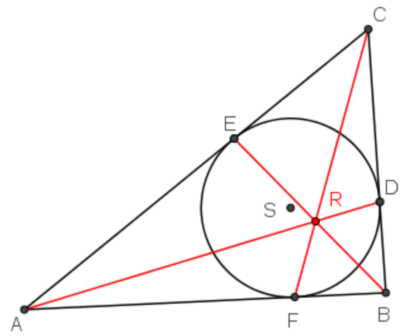
$$y = \frac{u}{d}(0+d) \Leftrightarrow y = u.$$

Prema tome, prve dvije okomice se sijeku u točki $(0, u)$. Analogno bismo dobili za bilo koje dvije jednadžbe pa zaključujemo da se sva četiri pravca sijeku u točki (0,u). Analogni postupak primijenili bismo i kada bi uzeli da je $u-d = 0$, $u = 0$, $u+d = 0$, $d-v = 0$ ili $v+d = 0$.

Zadatak 4. (županijsko natjecanje iz matematike za 2. razred, 2001. godina) Trokutu ABC upisana je kružnica koja redom dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama D, E i F.

Dokažite da se pravci AD, BE i CF sijeku u istoj točki R.

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti pomoću metode 6, primijenjujući Cevin teorem.
Označimo sa S središte upisane kružnice trokuta ABC (Slika 2.5).



Slika 2.5: Zadatak 4.

Prema S-S-K teoremu o sukladnosti trokuta imamo

$$\triangle AFS \cong \triangle AES \quad \left(|SF| = |SE| = r,\ \overline{AS} \text{ zajednička},\ \angle AFS = \angle AES = 90^\circ\right)$$

pa je

$$|AF| = |AE|.$$

Analogno zaključujemo da je

$$|BF| = |BD| \quad \text{i} \quad |CD| = |CE|.$$

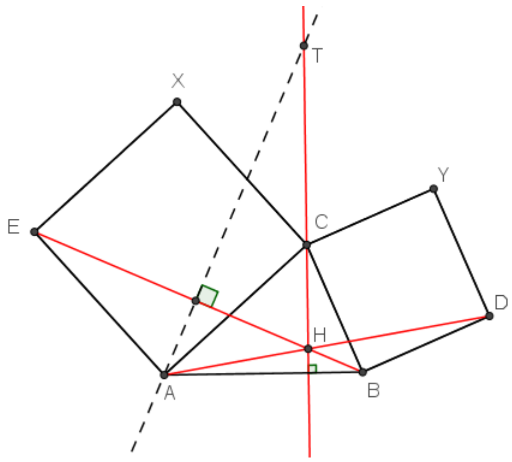
Sada imamo

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AE|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|CE|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

pa po Cevinom teoremu slijedi da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki.
Točka R zapravo predstavlja poznatu Gergonneovu točku pa je rješenje ovog zadatka upravo dokaz teorema koji kaže da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1, pri čemu su točke A_1, B_1 i C_1 dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom, sijeku u istoj, takozvanoj, Gergonneovoj točki.

Zadatak 5. (državno natjecanje iz matematike za 2. razred, 2000. godina) Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ACXE$ i $CBDY$. Dokažite da se pravci AD i BE sijeku na visini iz vrha C trokuta ABC.

Rješenje.
Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 5, primjenjujući Teorem 1.0.3.
Neka se pravci AD i BE sijeku u točki H. Konstruirajmo točku T takvu da je $AT \perp EB$ i $CT \perp AB$ (Slika 2.6).



Slika 2.6: Zadatak 5.

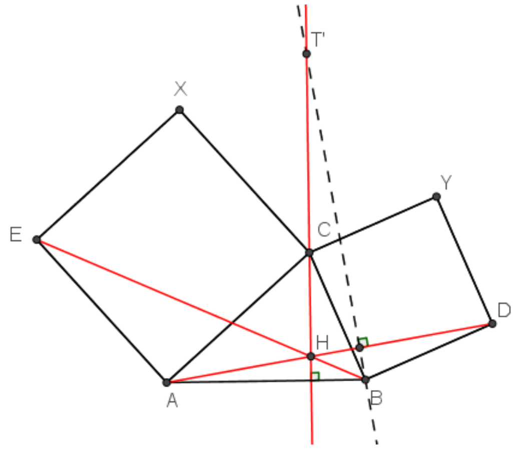
S obzirom na to da je

$$|EA| = |AC|, \quad \angle BEA = \angle TAC \quad \text{i} \quad \angle EAB = \angle ACT$$

(jer su to kutevi s okomitim kracima), zaključujemo da su trokuti EAB i ACT sukladni. Iz toga slijedi da je

$$|CT| = |AB|.$$

Konstruirajmo sada točku T' takvu da je $BT' \perp AD$ i $CT' \perp AB$ (Slika 2.7).



Slika 2.7: Zadatak 5.

Na analogan način dokazujemo da su trokuti ABD i $T'CB$ sukladni pa slijedi da je

$$|CT'| = |AB|.$$

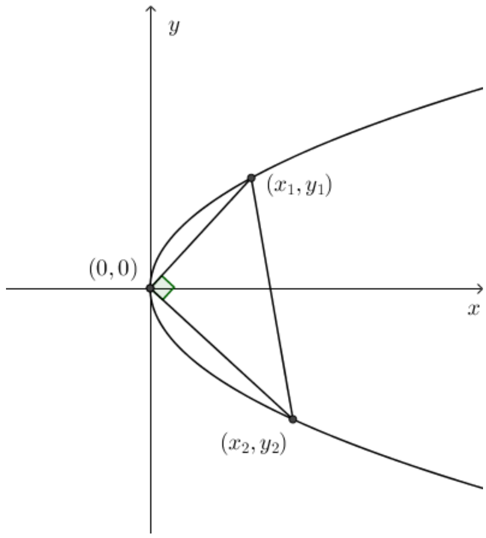
Dakle, imamo da je

$$|CT| = |AB| \quad \text{i} \quad |CT'| = |AB|$$

pa zaključujemo da se točke T i T' podudaraju.
Primijetimo da visine trokuta ABT leže na pravcima BE, AD i TC. Stoga se ti pravci sijeku u jednoj točki, odnosno u točki H. Kako visina trokuta ABC iz vrha C leži na pravcu CT, pravci AD i BE sijeku se na toj visini što je i trebalo dokazati.

Zadatak 6. (državno natjecanje iz matematike za 4. razred, 1998. godina) Dokažite da sve tetive parabole $y^2 = 4ax$, koje su hipotenuze pravokutnog trokuta s pravim kutem u ishodištu, prolaze istom točkom.

Rješenje.
Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 2, odnosno, polazimo od pretpostavke da će svi pravci na kojima leže tetive biti konkurentni s x-osi pa određujemo sjecište svakog od njih s x-osi i dobivamo da je to uvijek ista točka.
Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ krajnje točke tetive koja je hipotenuza pravokutnog trokuta ABO (Slika 2.8), gdje je O ishodište koordinatnog sustava.



Slika 2.8: Zadatak 6.

Tetive $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ leže na okomitim pravcima s jednadžbama

$$OA \ldots y = \frac{y_1}{x_1}x, \quad OB \ldots y = \frac{y_2}{x_2}x.$$

Dakle, prema uvjetu okomitosti, vrijedi

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = -y_1 y_2.$$

Pretopostavimo da je $x_1 \neq x_2$. Neka je jednadžba pravca na kojem leži tetiva $\overline{AB}$

$$y = mx + b.$$

Kako točke A i B pripadaju tom pravcu i paraboli, x_1 i x_2 su rješenja kvadratne jednadžbe

$$(mx + b)^2 = 4ax,$$

odnosno

$$m^2x^2 + x\,(2bm - 4a) + b^2 = 0.$$

Tada, primijenjujući Vieteove formule, dobivamo

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{m^2}, \quad x_1 + x_2 = \frac{4a - 2mb}{m^2}.$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned}
y_1y_2 &= (mx_1 + b)(mx_2 + b) \\
&= m^2x_1x_2 + mbx_1 + mbx_2 + b^2 \\
&= m^2x_1x_2 + mb(x_1 + x_2) + b^2 \\
&= m^2 \cdot \frac{b^2}{m^2} + mb \cdot \frac{4a - 2mb}{m^2} + b^2 \\
&= 2b^2 + \frac{4ab - 2mb^2}{m} \\
&= \frac{4ab}{m}.
\end{aligned}$$

Sada iz $x_1x_2 = -y_1y_2$ dobivamo

$$\frac{b^2}{m^2} = -\frac{4ab}{m} \Leftrightarrow b = -4am.$$

Dakle, svaka tetiva koja je hipotenuza pravokutnog trokuta s vrhom u ishodištu, leži na pravcu čija je jednadžba oblika

$$y = mx - 4am = m(x - 4a),$$

a to je pravac koji prolazi kroz točku $(4a, 0)$.
Promotrimo sada poseban slučaj kada je $x_1 = x_2$. Tada je

$$y_1 = \sqrt{4ax_1} \quad \text{i} \quad y_2 = -\sqrt{4ax_1}.$$

Iz uvjeta okomitosti dobivamo

$$x_1^2 = 4ax_1 \Leftrightarrow x_1 = 4a.$$

Pravac koji prolazi točkama A i B je tada $x = x_1$, odnosno $x = 4a$ pa tetiva $\overline{AB}$ opet prolazi točkom $(4a, 0)$.

Poglavlje 3

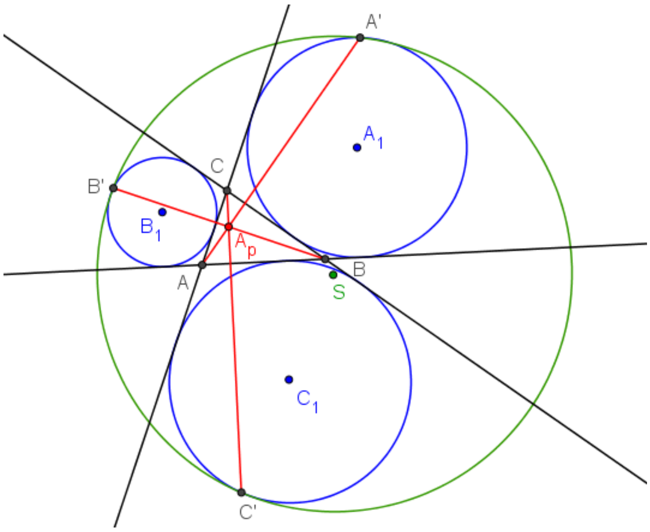
Neke karakteristične točke

Konkurentnost pravaca usko je povezana i s mnogim poznatim točkama koje se definiraju kao sjecišta određenih pravaca. Tih pravaca je često više od dva pa je potrebno i opravdati takvu definiciju točke, odnosno dokazati da se pravci uistinu sijeku u samo jednoj točki. Najpoznatije takve točke su ortocentar (sjecište visina u trokutu), težište (sjecište težišnica u trokutu), središte opisane kružnice trokuta (sjecište simetrala stranica trokuta) te središte upisane kružnice trokuta (sjecište simetrala kutova trokuta), čije smo postojanje opravdali u prvom poglavlju. No, postoje i razni primjeri drugih točaka definiranih kao sjecišta nekih pravaca, ne samo u trokutu već u četverokutima, šesterokutima, kružnicama, elipsama, hiperbolama i slično. U ovom poglavlju navest ćemo neke primjere takvih točaka te za njih provesti dokaz, odnosno opravdati njihovu definiciju.

3.1 Karakteristične točke trokuta

3.1.1 Apolonijeva točka

Problem konstrukcije kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice poznat nam je kao Apolonijev problem. Iako je on poznat već stoljećima, Apolonijeva točka prvi put je uočena tek 1987. godine. Naime, neka je zadan trokut ABC i tri kružnice izvan trokuta ABC: k_A (koja dira stranicu $\overline{BC}$ i pravce na kojima leže preostale dvije stranice), k_B (koja dira stranicu $\overline{AC}$ i pravce na kojima leže preostale dvije stranice) te k_C (koja dira stranicu $\overline{AB}$ i pravce na kojima leže preostale dvije stranice). Također, neka je zadana Apolonijeva kružnica, tj. kružnica k koja dira tri zadane kružnice (kružnicu k_A u točki A', kružnicu k_B u točki B' i kružnicu k_C u točki C'), pri čemu se kružnice k_A, k_B i k_C nalaze unutar kružnice k . Tada su pravci AA', BB' i CC' konkurentni i sijeku se u Apolonijevoj točki (Slika 3.1).



Slika 3.1: Apolonijeva točka

Dokaz. Da bismo dokazali da su pravci AA', BB' i CC' konkurentni, koristit ćemo trilinearne koordinate. Neka omjer $(x_1 : x_2 : x_3)$ predstavlja omjer orijentiranih udaljenosti do pravaca AB, BC i AC redom. Tada su trilinearne koordinate vrhova trokuta ABC

$$C(1:0:0), \quad A(0:1:0) \quad \text{i} \quad B(0:0:1).$$

S druge strane, trlinearne koordinate točke C_1, odnosno središta kružnice k_C su

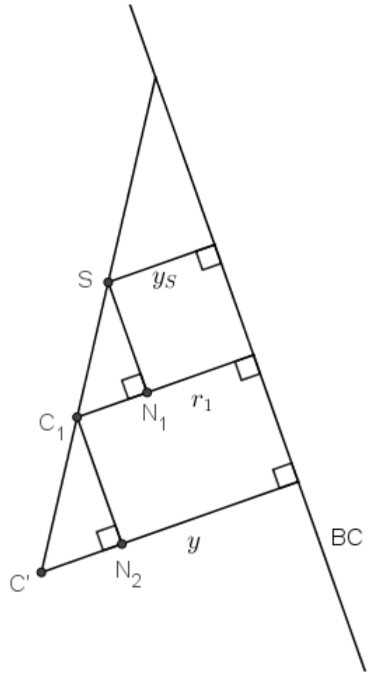
$$C_1(-r_1 : r_1 : r_1),$$

gdje je r_1 polumjer kružnice k_C.
Ako sa R označimo polumjer Apolonijeve kružnice, a njezino središte sa S, tada je

$$|SC'| = R \quad \text{i} \quad |C_1C'| = r_1.$$

Spustimo sada okomice iz točaka C', C_1 i S na pravac BC. Neka su x_S, y_S i z_S udaljenosti točke S, tj. središta Apolonijeve kružnice do pravaca AB, BC i AC redom.

Odredimo sada udaljenost točke C' do pravca BC, u oznaci y, iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.2.



Slika 3.2: Apolonijeva točka - dokaz

Dakle, imamo da je

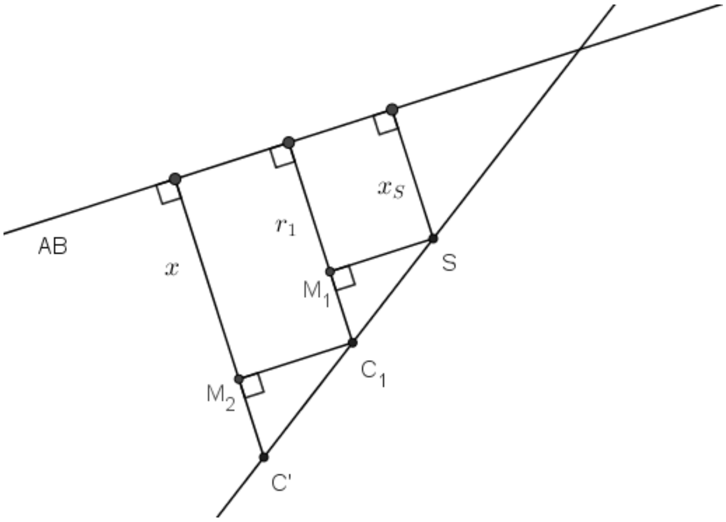
$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1N_1| = r_1 - y_S \quad \text{i} \quad |C'N_2| = y - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned}
\frac{|C'N_2|}{|C_1C'|} = \frac{|C_1N_1|}{|SC_1|} = \frac{y - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - y_S}{R - r_1} &\Leftrightarrow (y - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - y_S) \\
&\Leftrightarrow yR - yr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1 y_S \\
&\Leftrightarrow y(R - r_1) = Rr_1 - r_1 y_S \\
&\Leftrightarrow y = \frac{r_1(R - y_S)}{R - r_1}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da smo promatrali slučaj kada se točka S nalazi sa iste strane pravca BC kao i točke C i C'. No, kada bi se točka S nalazila sa suprotne strane pravca BC od točaka C i C' (što ovisi o trokutu ABC) razlika bi bila u $|C_1N_1| = r_1 + y_S$, a dokaz bi se provodio analogno.

Analognim postupkom odredimo udaljenost točke C', u oznaci x, do pravca AB iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.3.



Slika 3.3: Apolonijeva točka - dokaz

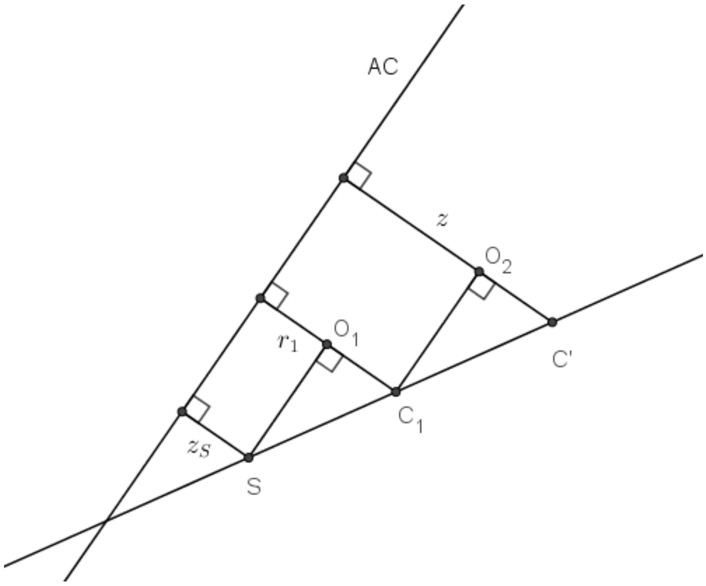
Dakle, imamo da je

$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1M_1| = r_1 - x_S \quad \text{i} \quad |C'M_2| = x - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned}
\frac{|C'M_2|}{|C_1C'|} = \frac{|C_1M_1|}{|SC_1|} = \frac{x - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - x_S}{R - r_1} &\Leftrightarrow (x - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - x_S) \\
&\Leftrightarrow xR - xr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1x_S \\
&\Leftrightarrow x(R - r_1) = Rr_1 - r_1x_S \\
&\Leftrightarrow x = \frac{r_1(R - x_S)}{R - r_1}.
\end{aligned}$$

Također, iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.4 dobivamo udaljenost točke C', u oznaci z, do pravca AC.



Slika 3.4: Apolonijeva točka - dokaz

Dakle, imamo da je

$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1O_1| = r_1 - z_S \quad \text{i} \quad |C'O_2| = z - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned}
\frac{|C'O_2|}{|C_1C'|} = \frac{|C_1O_1|}{|SC_1|} = \frac{z - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - z_S}{R - r_1} &\Leftrightarrow (z - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - z_S) \\
&\Leftrightarrow zR - zr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1 z_S \\
&\Leftrightarrow z(R - r_1) = Rr_1 - r_1 z_S \\
&\Leftrightarrow z = \frac{r_1(R - z_S)}{R - r_1}.
\end{aligned}$$

Dakle, trilinearne koordinate točke C' su

$$-\frac{r_1(R - x_S)}{R - r_1} : \frac{r_1(R - y_S)}{R - r_1} : \frac{r_1(R - z_S)}{R - r_1}.$$

S obzirom da je $\frac{r_1}{R-r_1}$ konstanta, a trilinearne koordinate su određene do na multiplikativnu konstantu, uzmimo da je

$$C' : \quad -R + x_S : R - y_S : R - z_S.$$

Budući da su trilinearne koordinate točke C jednake $1 : 0 : 0$, trilinearne koordinate bilo koje točke koja leži na pravcu CC' su oblika

$$x : R - y_S : R - z_S .$$

Analognim postupkom dobivamo da su trilinearne koordinate točaka koje leže na pravcu AA' oblika

$$R - x_S : y : R - z_S ,$$

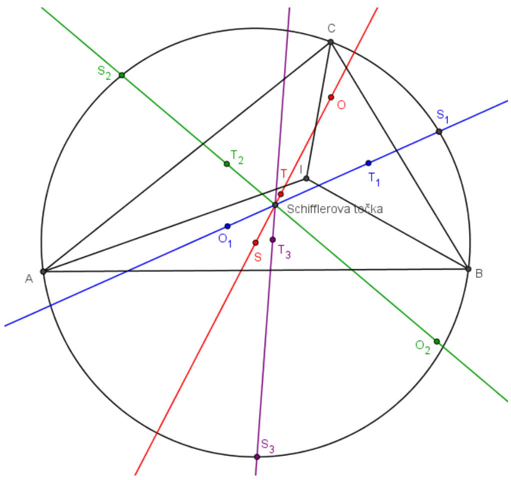
a onih koje leže na pravcu BB' oblika

$$R - x_S : R - y_S : z.$$

Dakle, zaključujemo da se pravci CC', AA' i BB' sijeku u točki s trilinearnim koordinatama $R - x_S : R - y_S : R - z_S$, odnosno ti pravci su konkurentni što je i trebalo dokazati. □

3.1.2 Schifflerova točka

Sljedeći primjer je Schifflerova točka, no kako bismo ju mogli definirati, moramo definirati najprije Eulerov pravac. Naime, ako je zadan trokut ABC, tada su ortocentar, težište i središte opisane kružnice tog trokuta kolinearne točke koje leže na takozvanom Eulerovom pravcu. Neka su sada u istom trokutu konstruirane simetrale kutova te sjecište tih simetrala, odnosno, središte upisane kružnice trokuta u oznaci I. Tada Eulerovi pravci trokuta ABC, ABI, BCI i ACI prolaze istom točkom koju nazivamo Schifflerova točka (Slika 3.5).

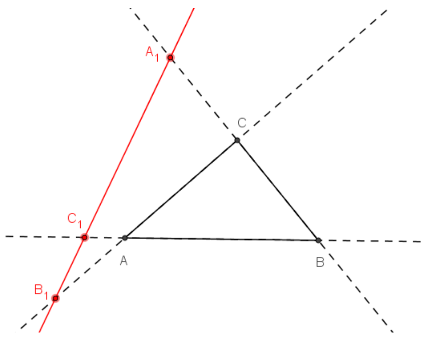


Slika 3.5: Schifflerova točka

Dokaz. Za dokaz postojanja Schifflerove točke koristit ćemo Menelajev teorem koji glasi:

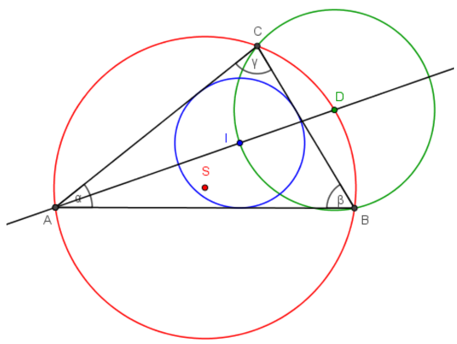
Teorem 3.1.1. *Neka je dan trokut ABC i neka su točke A_1, B_1 i C_1 na pravcima BC, AC i AB redom, pri čemu se A_1, B_1 i C_1 ne podudraju ni sa jednim vrhom trokuta ABC. Točke A_1, B_1 i C_1 leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi*

$$\left[\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\right] \cdot \left[\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\right] \cdot \left[\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\right] = -1.$$



Slika 3.6: Menelajev teorem

Neka je $k(S,R)$ opisana kružnica trokuta ABC polumjera R. Neka je $k(I,r)$ upisana kružnica trokuta ABC polumjera r. Neka je točka T težište trokuta ABC. Tada je pravac ST Eulerov pravac trokuta ABC.
Konstruirajmo sada točku D takvu da je $D = AI \cap k(S,R)$ (Slika 3.7).



Slika 3.7: Schifflerova točka - dokaz

Kako lukovima $\overset{\frown}{BD}$ i $\overset{\frown}{DC}$ pripadaju obodni kutevi jednake veličine ($\angle BAD = \angle CAD$ zbog simetrale kuta), točka D je polovište luka $\overset{\frown}{BC}$.
Neka su α, β i γ kutovi trokuta ABC kao na slici 3.7. Tada je

$$\angle CDA = \beta \quad \text{(obodni kutevi nad lukom } \overset{\frown}{CA}\text{)},$$

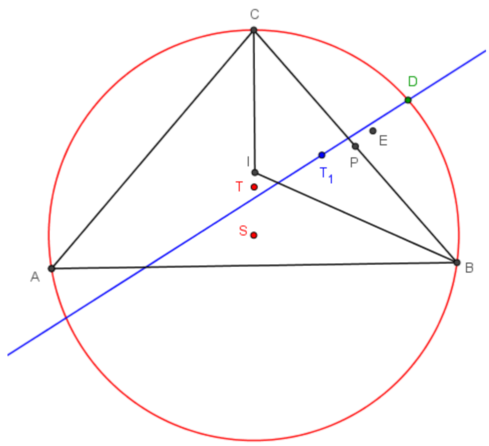
$$\angle ADB = \gamma \quad \text{(obodni kutevi nad lukom } \overset{\frown}{AB}\text{)},$$

$$\angle ICB = \frac{\gamma}{2} \quad \text{i} \quad \angle CBI = \frac{\beta}{2} \quad \text{(zbog simetrale kuta).}$$

Sada neka je dana kružnica c kojoj je središte točka D i prolazi kroz B i C (očito je da takva postoji jer su $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$ jednake duljine).
Tada je obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{CB}$ jednak $\frac{\beta+\gamma}{2}$ (jer je središnji $\beta + \gamma$) pa je onda je obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{BC}$ jednak $180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$.
Kut BIC jednak je $180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (iz trokuta BCI). Međutim, iz toga zaključujemo da je I na kružnici c pa je točka D i središte opisane kružnice trokuta BCI te stoga vrijedi

$$|CD| = |ID|. \tag{3.1}$$

Neka je točka T_1 težište trokuta BCI. Tada je pravac DT_1 Eulerov pravac trokuta BCI. Neka je točka P polovište stranice $\overline{BC}$ (Slika 3.8).



Slika 3.8: Schifflerova točka - dokaz

Budući da su T i T_1 točke težišta trokuta ABC i BCI, imamo

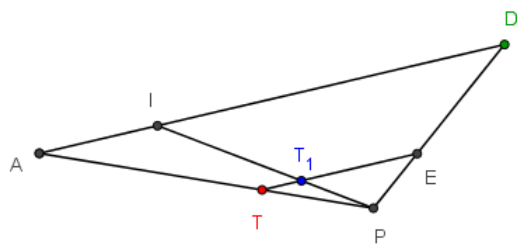
$$\frac{|AT|}{|TP|} = \frac{|IT_1|}{|T_1P|} = 2.$$

Dakle, iz Talesovog teorema o proporcionalnosti, zaključujemo da je $TT_1 \parallel AI$. Označimo sada $E = TT_1 \cap SD$. Uočimo da se pravci AT, IT_1 i DE sijeku u točki P. Naime, $\overline{AP}$ i $\overline{IP}$ su težišnice trokuta ABC i BCI pa T i T_1 pripadaju tim dužinama. Točka E očito pripada prvacu SD, a kako je SD simetrala stranice $\overline{BC}$, i točka P pripada tom pravcu. Dakle, pravci DE i SD se podudaraju pa točka P pripada pravcu DE.
Iz sličnosti trokuta TT_1P i AIP te T_1EP i IDP sa slike 3.9 dobivamo

$$\frac{|TT_1|}{|T_1E|} = \frac{|AI|}{|ID|}, \tag{3.2}$$

a kako su trokuti APD i TPE slični i znamo da je $|AT| = \frac{2}{3}|AP|$, imamo

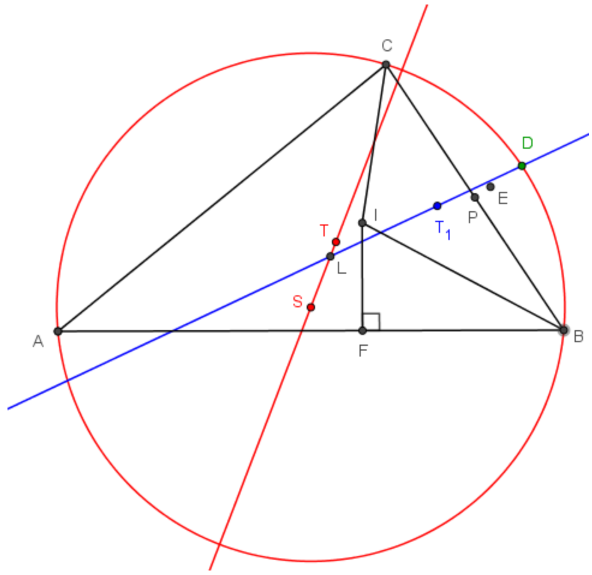
$$|DE| = \frac{2}{3}|DP|. \tag{3.3}$$



Slika 3.9: Schifflerova točka - dokaz

Kako pravac DT_1 prolazi kroz trokut DPT, a pravac DP je jednak pravcu DS, zaključujemo da će Eulerov pravac DT_1 trokuta BCI sjeći Eulerov pravac ST trokuta ABC između točaka T i S.
Neka se pravci DT_1 i ST sijeku u točki L. Označimo sa F nožište okomice iz točke I na stranicu $\overline{AB}$ (Slika 3.10).
S obzirom na to da je $\angle BAD = \angle BCD$, trokuti AFI i CPD su slični pa slijedi

$$\frac{|IA|}{|CD|} = \frac{|FI|}{|PD|} = \frac{r}{|PD|}. \tag{3.4}$$



Slika 3.10: Schifflerova točka - dokaz

Kako je L na dužini $\overline{TS}$, T_1 na dužini $\overline{ET}$, a D na pravcu ES, ali izvan dužine $\overline{ES}$, možemo primijeniti Menelajev teorem na trokut TSE i pravac DL (na kojem leži i točka T_1) pa zbog (3.1)-(3.4) dobivamo

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|ET_1|}{|TT_1|} \\ &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|ID|}{|AI|} \\ &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|CD|}{|AI|} \\ &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{R}{\frac{2}{3}|DP|} \cdot \frac{|CD|}{|AI|} \\ &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{3R}{2|DP|} \cdot \frac{|DP|}{r} \\ &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{3R}{2r}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{|TL|}{|SL|} = \frac{2r}{3R}.$$

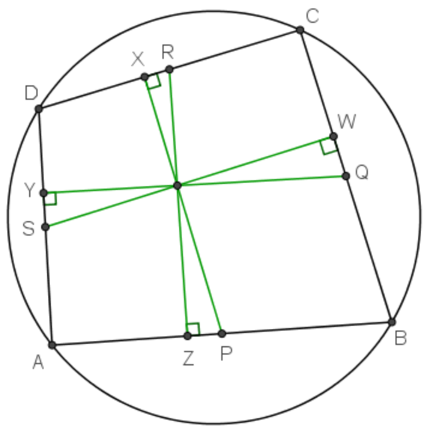
Analognim postupkom za trokute AIB i CIA dobili bismo točke koje pripadaju njihovim

Eulerovim pravcima i dužini $\overline{ST}$ te ju dijele u istom omjeru kao i točka L. Dakle, sva četiri promatrana Eulerova pravca sijeku se u istoj točki što je i trebalo dokazati. □

3.2 Karakteristične točke četverokuta

3.2.1 Anticentar četverokuta

Neka je dan tetivni četverokut $ABCD$. Neka su točke P, Q, R i S polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$. Iz točaka P, Q, R i S konstruirajmo okomice na nasuprotnu stranicu. Sjecište okomice iz točke P na stranicu $\overline{CD}$ označimo sa X, sjecište okomice iz točke Q na stranicu $\overline{AD}$ označimo sa Y, sjecište okomice iz točke R na stranicu $\overline{AB}$ označimo sa Z i sjecište okomice iz točke S na stranicu $\overline{BC}$ označimo sa W. Dužine $\overline{PX}$, $\overline{QY}$, $\overline{RZ}$ i $\overline{SW}$ zovu se maltitude i sijeku se u istoj točki koju nazivamo anticentar četverokuta $ABCD$ (Slika 3.11).

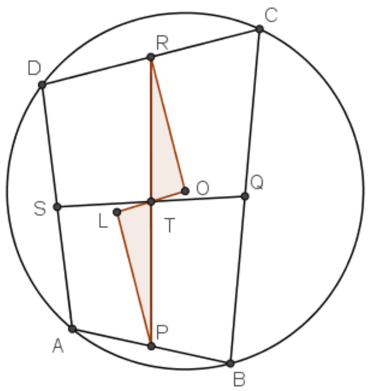


Slika 3.11: Anticentar četverokuta

Dokaz. Neka se pravci PR i QS sijeku u točki T. Konstruirajmo pravac OT pri čemu je točka O središte opisane kružnice k četverokuta $ABCD$. Zatim na pravcu OT konstruirajmo točku L takvu da je

$$|OT| = |TL|, \quad O \neq L.$$

Dokazat ćemo da su pravci koji prolaze točkom L i točkama P, Q, R i S okomiti na nasuprotne stranice (Slika 3.12).



Slika 3.12: Anticentar četverokuta - dokaz

Kako je $\overline{PQ}$ srednjica trokuta ABC, onda je

$$|AC| = 2|PQ|,$$

a kako je $\overline{RS}$ srednjica trokuta ACD, onda je

$$|AC| = 2|RS|.$$

Dakle,

$$|PQ| = |RS|.$$

Analogno bismo pokazali da je

$$|QR| = |SP|$$

pa zaključujemo da je $PQRS$ paralelogram. Kako je točka T sjecište dijagonala četverokuta $PQRS$, zaključujemo da je

$$|PT| = |TR| \quad \text{i} \quad |QT| = |TS|.$$

Budući da je

$$|PT| = |TR|, \quad \angle RTO = \angle PTL \quad \text{(vršni kutevi)} \quad \text{i} \quad |TO| = |TL|,$$

zaključujemo da su trokuti OTR i LTP sukladni. Iz toga slijedi da je

$$\angle TPL = \angle TRO,$$

odnosno da su pravci PL i RO paralelni.
Kako je točka R polovište stranice $\overline{CD}$ (koja je ujedno i tetiva opisane kružnice k četverokuta $ABCD$ sa središtem u točki O), zaključujemo da je

$$OR \perp CD,$$

odnosno

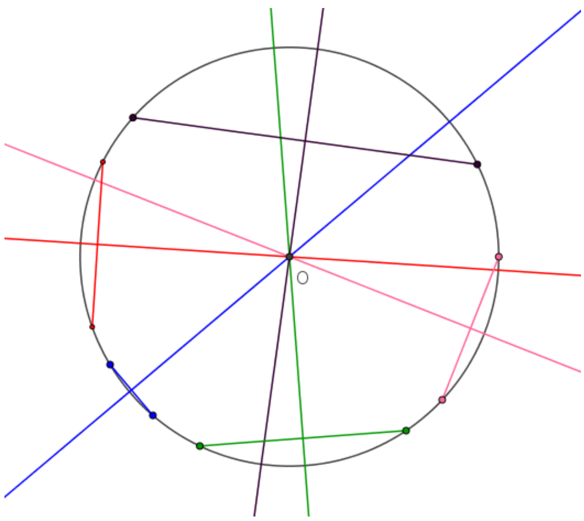
$$PL \perp CD.$$

Analognim postupkom promatrajući trokute SLT i TOQ dobivamo da je $SL \perp BC$, promatrajući trokute RLT i TOP dobivamo da je $RL \perp AB$ te promatranjem trokuta TLQ i OTS dobivamo da je $QL \perp AD$.
Dakle, dobili smo da su pravci PL, QL, RL i SL okomiti na nasuprotne stranice što je i trebalo dokazati. □

3.3 Karakteristične točke kružnice

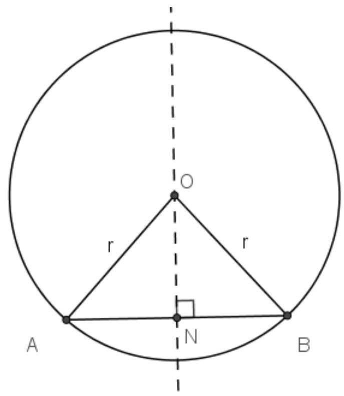
3.3.1 Simetrale tetiva kružnice

Neka je dana kružnica sa središtem u O polumjera r. Simetrale tetiva te kružnice tada se sijeku u središtu kružnice (Slika 3.13).



Slika 3.13: Simetrale tetiva kružnice

Dokaz. Dokazat ćemo da simetrala bilo koje tetive kružnice prolazi središtem te kružnice iz čega slijedi da se sve simetrale tetiva sijeku u središtu kružnice.
Neka je zadana kružnica $k(O, r)$. Promatrajmo tetivu $\overline{AB}$ kružnice k. Označimo sa N nožište okomice iz točke O na tetivu $\overline{AB}$ (Slika 3.14).



Slika 3.14: Simetrale tetiva kružnice - dokaz

Budući da je

$$|OA| = |OB| = r, \quad \angle ANO = \angle BNO = 90^\circ \quad \text{i} \quad \overline{ON} \text{ zajednička},$$

trokuti ANO i BNO su sukladni.
Iz toga slijedi da je

$$|AN| = |BN|$$

pa je N polovište $\overline{AB}$ i pravac ON je simetrala tetive $\overline{AB}$. Dakle, simetrala tetive $\overline{AB}$ prolazi točkom O što je i trebalo dokazati. □

3.4 Karakteristične točke šesterokuta

3.4.1 Brianchonov teorem

Još jedan od primjera konkurentnih pravaca pronalazimo u sljedećem, takozvanom Brianchonovom teoremu:

Teorem 3.4.1. *U svakom tangencijalnom šesterokutu dijagonale koje nastaju spajanjem nasuprotnih vrhova prolaze istom točkom.*

Za dokazivanje Teorema 3.4.1. koristit ćemo nešto manje poznate pojmove potencije točke u odnosu na kružnicu i radikalne osi kružnica pa ćemo prije samog dokaza razjasniti sve te pojmove. Definirajmo najprije potenciju točke u odnosu na kružnicu k.

Definicija 3.4.2. *Neka je p pravac koji prolazi točkom T i siječe kružnicu k u točkama P_1 i P_2. Tada je potencija točke T u odnosu na kružnicu k jednaka produktu*

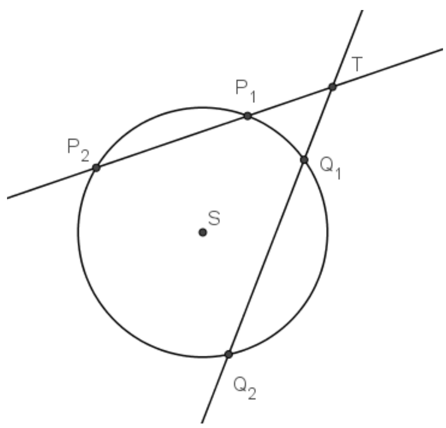
$$|TP_1| \cdot |TP_2|.$$

Teorem 3.4.3. *Neka se točka T nalazi izvan kružnice $k\,(S, r)$. Tada je produkt $|TP_1| \cdot |TP_2|$ konstanta bez obzira na pravac p te vrijedi*

$$|TP_1| \cdot |TP_2| = |TS|^2 - r^2 = d^2,$$

gdje je d udaljenost točke T do dirališta tangente iz nje na kružnicu.

Dokaz. Uzmimo pravac q koji prolazi točkom T i siječe kružnicu u točkama Q_1 i Q_2 (Slika 3.15).



Slika 3.15: Potencija točke obzirom na kružnicu - dokaz

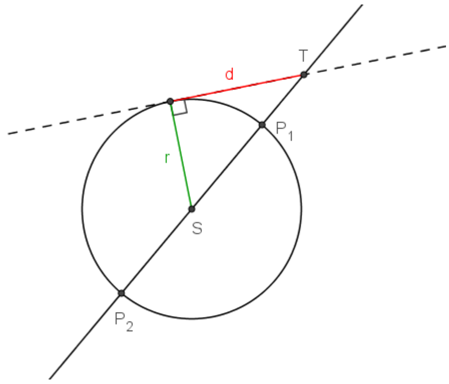
Kako je

$$\angle Q_1P_2P_1 = \angle Q_1Q_2P_1 \quad \text{(obodni kutevi nad lukom } \overset{\frown}{Q_1P_1}\text{)},$$

trokuti TQ_1P_2 i TP_1Q_2 su slični pa imamo

$$\frac{|TP_1|}{|TQ_2|} = \frac{|TQ_1|}{|TP_2|} \Leftrightarrow |TP_1| \cdot |TP_2| = |TQ_1| \cdot |TQ_2|.$$

Dakle, bez obzira na pravac p potencija točke je konstantan produkt.
Zanimljiv je slučaj kada pravac p prolazi kroz središte S kružnice k. Neka je polumjer kružnice k jednak r (Slika 3.16).



Slika 3.16: Potencija točke obzirom na kružnicu - dokaz

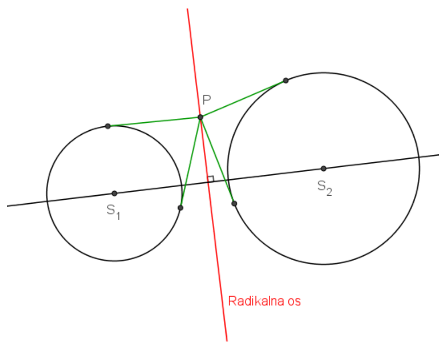
Tada je potencija točke T obzirom na kružnicu k

$$\begin{aligned} |TP_1| \cdot |TP_2| &= (|TS| - r)\,(|TS| + r) \\ &= |TS|^2 - r^2 = d^2, \end{aligned}$$

gdje je d udaljenost točke T do dirališta tangente iz T na k. □

Za dokaz Brianchonovog teorema koristimo teorem o radikalnim kružnicama koji glasi:

Teorem 3.4.4. *Neka su dane dvije kružnice k_1 i k_2 polumjera r_1 i r_2 redom koje se ne dodiruju. Iz točke P na te dvije kružnice povučene su tangente. Geometrijsko mjesto točaka P za koje vrijedi da su im udaljenosti do dirališta svih tangenti jednake pravac je koji je okomit na spojnicu središta kružnica i naziva se radikalna os (Slika 3.17).*



Slika 3.17: Radikalna os

Dokaz. Neka je $d = d(S_1, S_2)$, gdje su S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom. Tada postoje a i b takvi da je

$$a + b = d \quad \text{i} \quad a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Naime, uvrštavanjem $b = d - a$ u $a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} a^2 - (d-a)^2 = r_1^2 - r_2^2 &\Leftrightarrow a^2 - d^2 + 2ad - a^2 = r_1^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow 2ad = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}. \end{aligned}$$

Kako se kružnice k_1 i k_2 ne dodiruju, vrijedi

$$r_1 + r_2 < d \Leftrightarrow r_2 < d - r_1.$$

Kako su obje strane nejednakosti veće od nule, kvadriranjem dobivamo

$$r_2^2 < d^2 - 2dr_1 + r_1^2 < d^2 + r_1^2$$

pa je

$$r_1^2 - r_2^2 + d^2 > 0.$$

Kako je $r_1 < d$, imamo

$$r_1^2 - r_2^2 < r_1^2 < d^2$$

pa je

$$r_1^2 - r_2^2 + d^2 < 2d^2$$

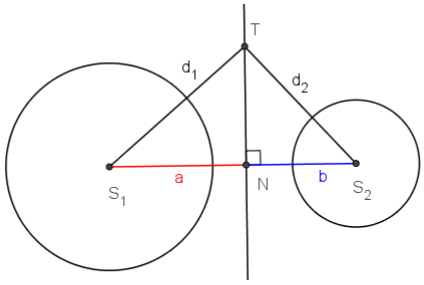
i

$$a < \frac{2d^2}{2d} = d.$$

Dakle, vrijedi

$$0 < a, b < d.$$

Sada s N označimo točku na dužini $\overline{S_1S_2}$ koja ima svojstvo $|S_1N| = a$. Dakle, $|S_2N| = b$. Kako je $a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2$, iz Teorema 3.4.3. prepoznajemo da su to potencije točke N u odnosu na zadane kružnice te znamo da su one jednake kvadratima udaljenosti točke N do dirališta tangenti iz nje na te kružnice. Dakle, te udaljenosti su jednake pa N zadovoljava tražena svojstva. Povucimo sada okomicu r iz točke N na pravac S_1S_2. Neka je T neka točka na toj okomici i neka je ona od S_1 i S_2 redom udaljena za d_1 i d_2 (Slika 3.18).



Slika 3.18: Radikalna os - dokaz

Tada iz Pitagorina teorema dobivamo

$$d_1^2 - a^2 = d_2^2 - b^2.$$

Zbrajanjem jednakosti $a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2$ s prethodnom dobivamo

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

pa sada imamo jednakost potencija točke T s obzirom na zadane kružnice i zaključujemo, kao i kod točke N, da i T zadovoljava zadani uvjet. Dakle, sve točke na osi r zadovoljavaju taj uvjet.

Sad znamo da sve točke na pravcu r imaju zadano svojstvo, ali možda ima negdje još takvih točaka. Dakle, treba dokazati obrat. Pretpostavimo da postoji takva točka M i neka se nalazi između pravaca p i q, koji su okomice iz S_1 i S_2 na pravac S_1S_2. Označimo opet njezine udaljenosti od S_1 i S_2 redom s d_1 i d_2 (Slika 3.19). Tada je zbog jednakosti potencija

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

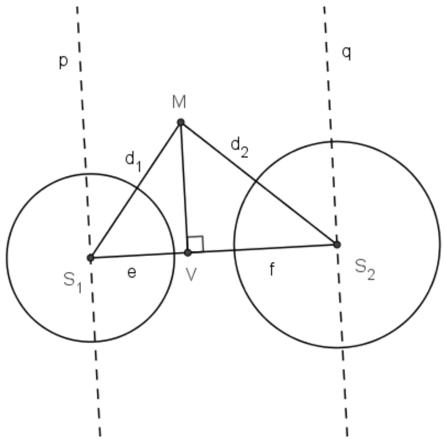
Neka je V nožište okomice iz M na S_1S_2 i neka je $|S_1V| = e$ i $|S_2V| = f$. Tada je iz Pitagorina teorema

$$d_1^2 - e^2 = d_2^2 - f^2.$$

Oduzimanjem prethodne dvije jednakosti dobivamo

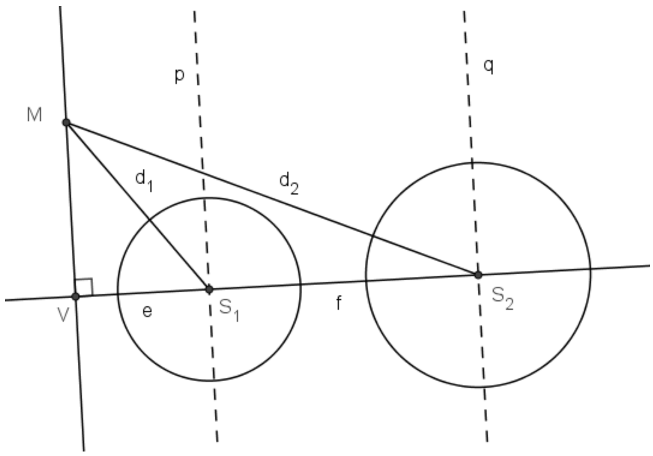
$$e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

a vrijedi i $e + f = d$ pa smo dobili sustav za e i f, koji smo već rješavali, i on ima jedinstveno rješenje. Znači, $e = a$ i $f = b$, gdje su a i b vrijednosti koje smo dobili prije te je $V = N$, odnosno $M \in r$.



Slika 3.19: Radikalna os - dokaz

Promotrimo sada slučaj kada se točka M nalazi "lijevo" od pravca p kao na slici 3.20 (analogno se pokaže kada je M "desno" od q).



Slika 3.20: Radikalna os - dokaz

Neka su opet d_1 i d_2 njezine udaljenosti do S_1 i S_2, te neka je V nožište okomice iz M na S_1S_2. Opet označimo $|S_1V| = e$ i $|S_2V| = f$ te imamo da je $f - e = d$.
Tada, zbog zadanog svojstva točke M, vrijedi

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2,$$

dok iz Pitagorina teorema imamo

$$d_1^2 - e^2 = d_2^2 - f^2.$$

Oduzimanjem prethodne dvije jednakosti dobivamo

$$e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Uvrštavanjem $f = d + e$ u $e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} e^2 - (d+e)^2 = r_1^2 - r_2^2 &\Leftrightarrow e^2 - d^2 - 2ed - e^2 = r_1^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow -2ed = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \\ &\Leftrightarrow e = -\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}. \end{aligned}$$

Prije smo pokazali da je $r_1^2 - r_2^2 + d^2 > 0$ pa zaključujemo da smo dobili da je $e < 0$ što je nemoguće. Dakle, ne postoji takva točka M koja se nalazi "lijevo" od pravca p i zadovoljava zadano svojstvo.
Analogno se pokaže i da točka M ne može biti na pravcima p i q te da je jedina točka sa zadanim svojstvom na S_1S_2 točka N. □

Sada još iskažimo i dokažimo teorem o radikalnim osima za tri kružnice.

Teorem 3.4.5. *Neka su zadane tri kružnice k_1, k_2 i k_3 od kojih se nikoje dvije ne sijeku. Neka su pravci r_1, r_2 i r_3 radikalne osi kružnica k_2 i k_3, k_1 i k_3, k_1 i k_2 redom. Tada su pravci r_1, r_2 i r_3 konkurentni (Slika 3.21).*

Dokaz. Označimo s R presjek pravaca r_1 i r_2. Označimo udaljenosti točke R do dirališta tangenti, koje su iz nje povučene na kružnice k_1, k_2 i k_3, s d_1, d_2 i d_3 redom.
Kako je $R \in r_1$, vrijedi

$$d_2 = d_3,$$

a kako je $R \in r_2$, imamo i

$$d_1 = d_3.$$

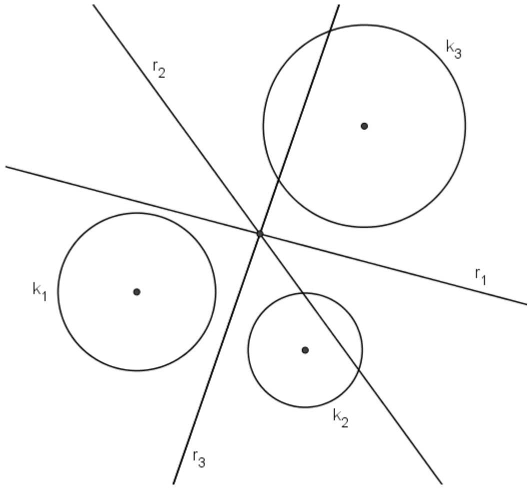
To znači i da je

$$d_1 = d_2$$

pa je $R \in r_3$.

Znači, točka R pripada svim trima pravcima te su oni konkurentni.

□

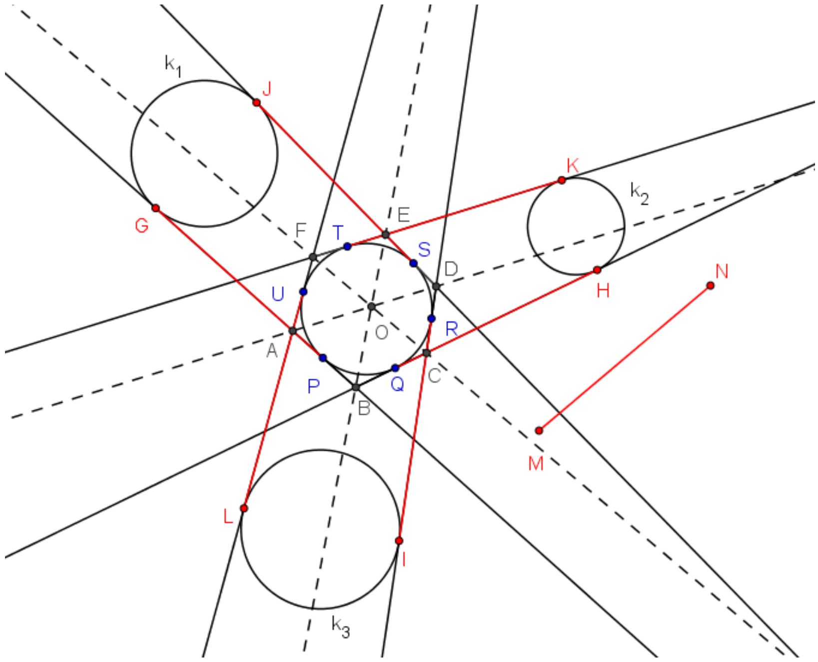


Slika 3.21: Teorem o radikalnim osima za tri kružnice

Sada dokažimo Brianchonov teorem.

Dokaz (Brianchonov teorem). Neka je zadan tangencijalni šesterokut $ABCDEF$. Neka su P, Q, R, S, T i U dirališta stranica šesterokuta i kružnice upisane tom šesterokutu kao na slici 3.22.
Uzmimo sada proizvoljnu duljinu $|MN|$ te ju nanesimo na tangente kružnice tako da je $|PG| = |QH| = |RI| = |SJ| = |TK| = |UL| = |MN|$. Konstruirajmo sada kružnicu k_1 koja ima središte u sjecištu okomica iz G i J na pravce PG i SJ redom i koja dira pravce na kojima leže nasuprotne stranice šesterokuta, odnosno pravce PG i SJ u točkama G i J. Zatim konstruirajmo kružnicu k_2 koja ima središte u sjecištu okomica iz K i H na pravce TK i QH redom i koja dira pravce QH i TK u točkama H i K. Također, konstruirajmo kružnicu k_3 čije je središte sjecište okomica iz L i I na pravce UL i RI redom i koja dira pravce RI i UL u točkama I i L (Slika 3.22).

Znamo da je
$$|TK| = |SJ|,$$
ali kako su TK i SJ tangente iz točke E na kružnicu upisanu šesterokutu, vrijedi i
$$|ET| = |ES|$$
pa dobivamo
$$|EJ| = |EK|.$$



Slika 3.22: Brianchonov teorem - dokaz

Dakle, točka E je na radikalnoj osi kružnica k_1 i k_2.
S druge strane, iz istih razloga je i

$$|PB| = |BQ| \quad \text{(zbog tangenti)},$$

a znamo i da je

$$|PG| = |QH|$$

pa je

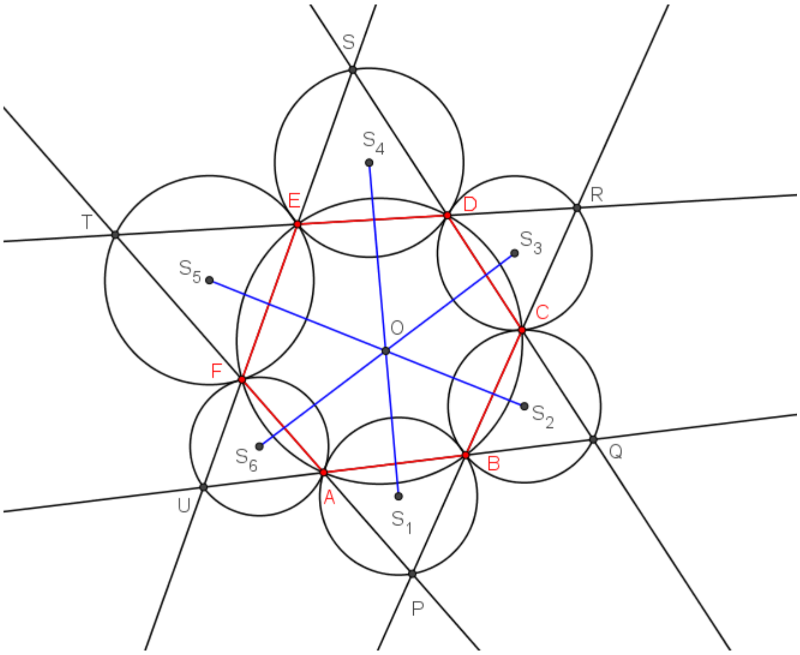
$$|BG| = |BH|.$$

Dakle, i točka B je na istoj radikalnoj osi pa je ta os zapravo pravac BE. Analognim postupkom bismo dobili da je pravac CF radikalna os kružnica k_2 i k_3, a pravac AD radikalna os kružnica k_1 i k_3.
Dakle, prema Teoremu 3.4.5., zaključujemo da su pravci BE, CF i AD konkurentni što je i trebalo dokazati. □

3.4.2 Daov teorem

Konkurentnost pravaca javlja se i u sljedećem teoremu:

Teorem 3.4.6. *Neka je zadan tetivni šesterokut $ABCDEF$ te neka su točke P, Q, R, S, T i U sjecišta pravaca AF i BC, AB i CD, BC i DE , CD i EF, DE i AF, AB i EF redom. Neka su S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6 središta opisanih kružnica trokuta ABP, BCQ, CDR, DES, EFT i AFU redom. Tada se pravci S_1S_4, S_2S_5 i S_3S_6 sijeku u jednoj točki (Slika 3.23).*

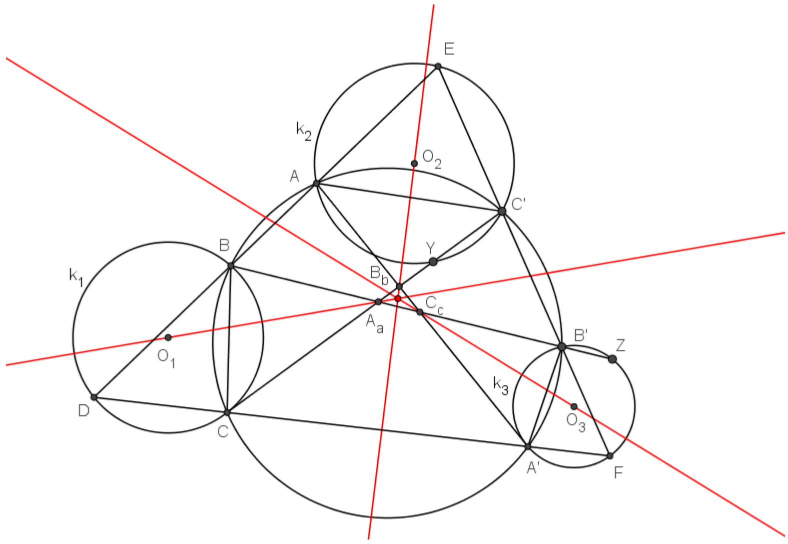


Slika 3.23: Daov teorem

Da bi smo dokazali Teorem 3.4.6., potrebne su nam dvije leme.

Lema 3.4.7. *Neka točke A, B, C, A', B' i C' leže na kružnici te neka je $D = CA' \cap AB$, $E = AB \cap B'C'$, $F = B'C' \cap CA'$, $A_a = BB' \cap CC'$, $B_b = CC' \cap AA'$, $C_c = AA' \cap BB'$. Neka su točke O_1, O_2 i O_3 središta opisanih kružnica trokuta DBC, $EC'A$, $FA'B'$ redom. Tada su pravci A_aO_1, B_bO_2 i C_cO_3 konkurentni.*

Dokaz. Označimo sa $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ opisane kružnice trokuta DBC, $EC'A$, $FA'B'$ redom. Neka su d_{ia}, d_{ib}, d_{ic} udaljenosti točke O_i do pravaca AA', BB', CC', $i = 1, 2, 3$ redom. Neka kružnica k_2 siječe pravac CC' u Y, a kružnica k_3 pravac BB' u Z (Slika 3.24).



Slika 3.24: Lema 3.4.7. - dokaz

Kako je

$$\angle EYC' = \angle EAC' \quad (\text{obodni kutevi nad lukom } \overset{\frown}{C'E}),$$

te kako je

$$\begin{aligned} \angle BCC' &= 180^\circ - \angle BAC' \quad (\text{iz tetivnog četverokuta } BCC'A) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle EAC') = \angle EAC', \end{aligned}$$

onda je

$$\angle EYC' = \angle BCC',$$

odnosno

$$EY \parallel BC.$$

Analogno je $EY \parallel FZ \parallel BC$.
Kako je

$$\angle YO_2C' = 2\angle YEC' = 2\angle ZFB' = \angle ZO_3B',$$

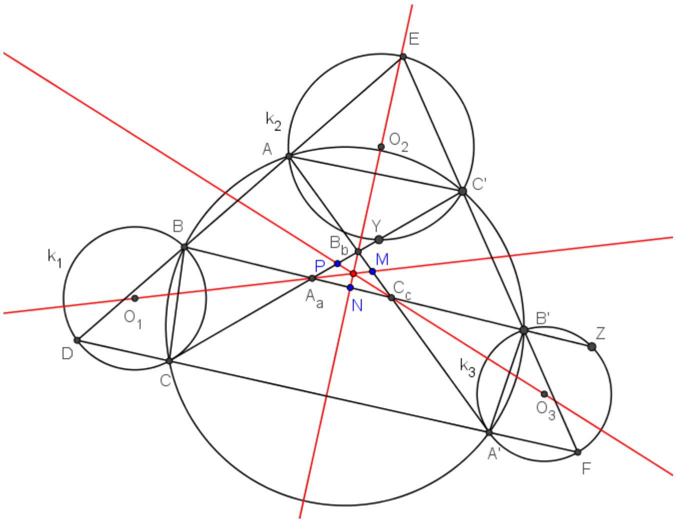
jednakokračni trokuti YO_2C' i ZO_3B' su slični.
Iz toga slijedi

$$\frac{d_{2c}}{d_{3b}} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Slično, dobivamo da je

$$\frac{d_{3a}}{d_{1c}} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{i} \quad \frac{d_{1b}}{d_{2a}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Neka je sada $M = A_aO_1 \cap B_bC_c$, $N = B_bO_2 \cap C_cA_a$ i $P = C_cO_3 \cap A_aB_b$ (Slika 3.25).



Slika 3.25: Lema 3.4.7. - dokaz

Neka su v_1 i v_2 duljine visina iz B_b i C_c u trokutima A_aMB_b i A_aC_cM redom. Tada zbog zajedničke stranice $\overline{A_aM}$ imamo

$$\frac{|MB_b|}{|MC_c|} = \frac{v_1}{v_2}.$$

No, kako su v_1 i v_2 duljine visina iz B_b i C_c u trokutima $O_1A_aB_b$ i $O_1A_aC_c$ redom, koji imaju zajedničku stranicu $\overline{O_1A_a}$, omjer njihovih površina je upravo $\frac{v_1}{v_2}$. Stoga dobivamo da je

$$\frac{|MB_b|}{|MC_c|} = \frac{P(\triangle O_1A_aB_b)}{P(\triangle O_1A_aC_c)}.$$

Analognim zaključivanjem dolazimo do

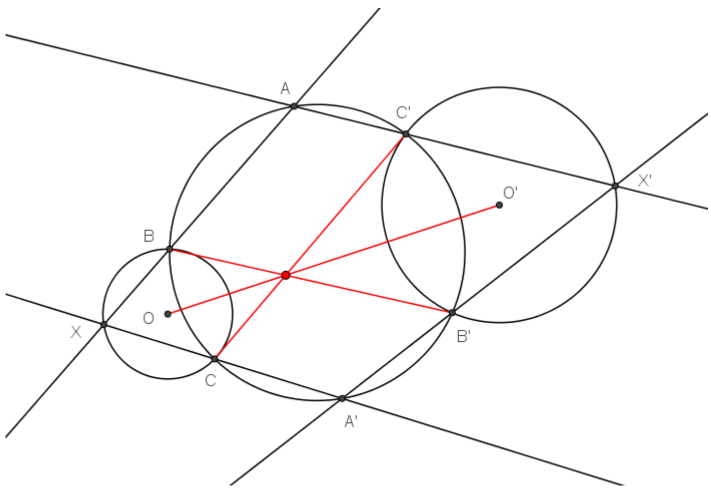
$$\begin{aligned}\frac{|MB_b|}{|MC_c|}\cdot\frac{|NC_c|}{|NA_a|}\cdot\frac{|PA_a|}{|PB_b|} &= \frac{P(\triangle O_1A_aB_b)}{P(\triangle O_1A_aC_c)}\cdot\frac{P(\triangle O_2B_bC_c)}{P(\triangle O_2B_bA_a)}\cdot\frac{P(\triangle O_3C_cA_a)}{P(\triangle O_3C_cB_b)}\\ &= \frac{P(\triangle O_2B_bC_c)}{P(\triangle O_3B_bC_c)}\cdot\frac{P(\triangle O_3C_cA_a)}{P(\triangle O_1C_cA_a)}\cdot\frac{P(\triangle O_1A_aB_b)}{P(\triangle O_2A_aB_b)}\\ &= \frac{d_{2a}}{d_{3a}}\cdot\frac{d_{3b}}{d_{1b}}\cdot\frac{d_{1c}}{d_{2c}}\\ &= \frac{d_{2a}}{d_{1b}}\cdot\frac{d_{3b}}{d_{2c}}\cdot\frac{d_{1c}}{d_{3a}}\\ &= \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2}\cdot\frac{r_1}{r_3}\\ &= 1,\end{aligned}$$

te sređivanjem dobivamo

$$\frac{|A_aN|}{|NC_c|}\cdot\frac{|C_cM|}{|MB_b|}\cdot\frac{|B_bP|}{|PA_a|} = 1$$

pa prema Cevinom teoremu za trokut $A_aB_bC_c$ zaključujemo da su pravci A_aO_1, B_bO_2 i C_cO_3 konkurentni. □

Lema 3.4.8. *Neka točke A, B, C, A', B' i C' leže na kružnici te neka je $X = AB \cap A'C$, $X' = A'B' \cap AC'$. Neka su O i O' središta opisanih kružnica k_1 i k_2 trokuta XBC i $X'B'C'$ redom. Tada su pravci OO', BB' i CC' konkurentni (Slika 3.26).*



Slika 3.26: Lema 3.4.8. - dokaz

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}\angle BXO &= \frac{180^\circ - \angle BOX}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{\angle BOX}{2} \\ &= 90^\circ - \angle XCB \quad \text{(jer je } \angle BOX \text{ središnji kut kuta } \angle XCB\text{)},\end{aligned}$$

te kako je

$$\begin{aligned}\angle XCB &= 180^\circ - \angle A'CB \\ &= \angle BAA' \quad \text{(iz tetivnog četverokuta ABCA')} \\ &= \angle XAA',\end{aligned}$$

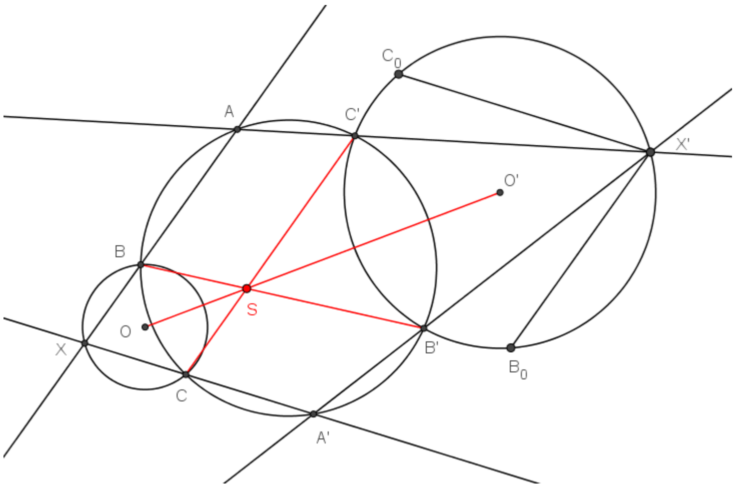
onda je $\angle BXO = 90^\circ - \angle XAA'$ pa je

$$XO \perp AA'.$$

Analogno se dokaže da je $X'O' \perp AA'$ pa je onda

$$X'O' \parallel XO.$$

Neka su B_0 i C_0 točke na opisanoj kružnici trokuta $X'B'C'$ takve da je $X'B_0 \parallel XB$ i $X'C_0 \parallel XC$ (Slika 3.27).



Slika 3.27: Lema 3.4.8. - dokaz

Sada lako zaključimo da se pravci XX', OO', BB_0 i CC_0 sijeku u točki S koja je središte

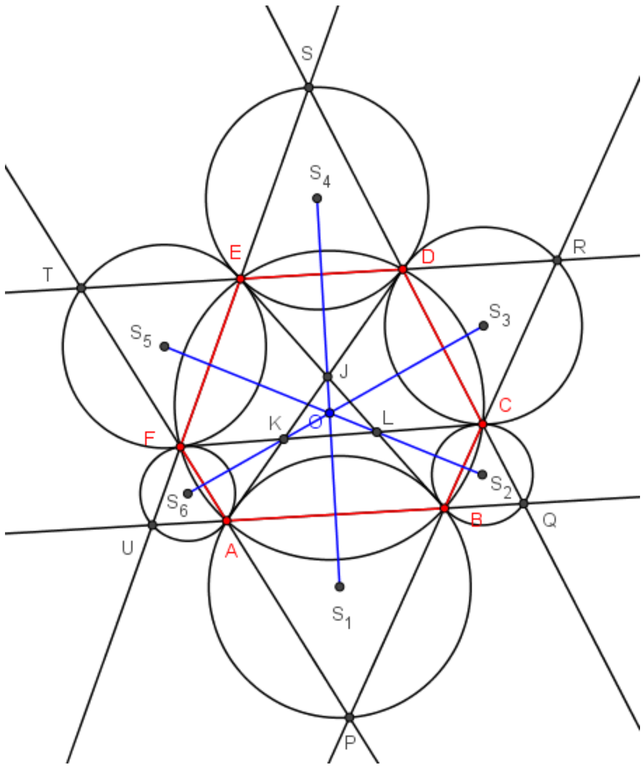
homotetije kružnica k_1 i k_2.
Kako je

$$\begin{aligned}\angle B_0B'C' &= 180^\circ - \angle B_0X'C' \quad \text{(iz tetivnog četverokuta } B_0B'C'X')\\ &= \angle BAC'\\ &= 180^\circ - \angle BB'C',\end{aligned}$$

točke B, B' i B_0 su kolinearne. Analogno zaključujemo da su i točke C, C' i C_0 kolinearne. Prema tome, pravci OO', BB' i CC' su konkurentni. □

Sada dokažimo Daov teorem.

Dokaz (Daov teorem). Neka je $J = BE \cap AD$, $K = AD \cap CF$ i $L = CF \cap BE$ (Slika 3.28).



Slika 3.28: Daov teorem - dokaz

Prema Lemi 3.4.7, slijedi da su S_4J, S_6K, S_2L konkurentni pravci. S druge strane, prema lemi 3.4.8., slijedi da su S_1, J i S_4 kolinearne točke, S_3, K i S_6 kolinearne točke te S_5, L i S_2 kolinearne točke pa su pravci S_1S_4, S_2S_5 i S_3S_6 konkurentni što je i trebalo dokazati. □

Bibliografija

[1] A. Marić, *Trokut, 1. izdanje,* Element, Zagreb, 2007.

[2] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, second edition,* Chapman & Hall/CRC, CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 2003.

[3] C. Kimberling, S. Iwata, F. Hidetosi, *Crux Mathematicorum, Volume 13,* 1997.

[4] K. Schiffler, G. Veldkamp, W. A. van der Spek, *Crux Mathematicorum, Volume 12,* 1986.

[5] I. Grbac, *Karakteristične točke i pravci četverokuta,* Diplomski rad, Prirodoslovno matematički fakultet, Zagreb, 2015.

[6] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Concurrent lines*: `https://en.wikipedia.org/wiki/Concurrent_lines`, (lipanj, 2017.)

[7] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Trilinear coordinates*: `https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates`, (srpanj, 2017.)

[8] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Radical axis*: `https://en.wikipedia.org/wiki/Radical_axis`, (srpanj, 2017.)

[9] *Brianchon's theorem*: `http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Brianchon.html`, (srpanj, 2017.)

[10] N. T. Dung, *A simple proof of Dao's theorem on six circumcenters*: `http://geometry-math-journal.ro/pdf/Volume6-Issue1/6.pdf`, (srpanj, 2017.)

[11] B. Dakić, *Cevin poučak i neke osobite točke trokuta*: `http://mis.element.hr/fajli/384/21-11.pdf`, (srpanj, 2017.)

[12] Z. Topić, *Menelajev teorem i neke primjene*:
https://www.halapa.com/odmor/pravipdf/menelej.pdf, (srpanj, 2017.)

[13] Natjecanja iz matematike u RH, *Državno natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, Dubrovnik, 3. travnja 2013.*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-drz-1234-zad+rj/2013-SS-drz-1234-B-zad.pdf, (svibanj, 2017.)

[14] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Omišalj, 4. - 7. svibnja 2005. godine, 3. razred*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2005/2005-SS-drz-1234-zad+rj/2005-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf, (svibanj, 2017.)

[15] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 25. ožujka 2002., 3. razred*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2002/2002-SS-zup-1234-zad+rj/2002-SS-zup-1234-zad%2brj.pdf, (svibanj, 2017.)

[16] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 6. travnja 2001., 2. razred*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2001/2001-SS-zup-1234-zad+rj/2001-SS-zup-1234-zad%2brj.pdf, (svibanj, 2017.)

[17] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Mali Lošinj, 10. - 13. svibnja 2000. godine, 2. razred*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2000/2000-SS-drz-1234-zad+rj/2000-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf, (svibanj, 2017.)

[18] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Kraljevica, 7. - 10. svibnja 1998. godine, 4. razred*:
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1998/1998-SS-drz-1234-zad+rj/1998-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf, (svibanj, 2017.)

Sažetak

Konkurentni pravci su pravci koji se sijeku u istoj točki. U ovom radu opisano je sedam metoda dokazivanja konkurentnosti pravaca koje smo zatim primijenili na opravdavanje postojanja raznih točaka vezanih za trokut, četverokut, kružnicu, šesterokut koje su nastale presijecanjem tri ili više pravaca. Riješeno je i nekoliko primjera zadataka s natjecanja iz matematike provedenih u Republici Hrvatskoj u kojima je bilo potrebno dokazati konkurentnost pravaca.

Summary

Concurrent lines are lines that intersect at the same point. Seven methods of proving the concurrency of lines have been described in this thesis, which we then applied to justify the existence of various points related to triangle, circle, quadrilateral, hexagon, which are result of intersecting three or more lines. A couple of examples from math competitions conducted in the Republic of Croatia have been solved in which it was necessary to prove the concurrency of lines.

Životopis

Zovem se Maria Gračan. Rođena sam 19. listopada 1992. godine u Zagrebu gdje živim do 1999. godine nakon čega se selim u Slunj i pohađam Osnovnu školu Slunj. Po završetku osnovne škole, školovanje nastavljam u općoj gimnaziji u Slunju pri čemu svaki razred završavam s odličnim uspjehom. 2011. godine nakon polaganja državne mature upisujem Prirodoslovno matematički fakultet u Zagrebu, Matematički odsjek na kojem 2015. godine stječem zvanje prvostupnika edukacije matematike. Nakon toga, iste godine, upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer. U slobodno vrijeme bavim se kuglanjem.