

# Konkurentni pravci

---

**Gračan, Maria**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:561220>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maria Gračan

**KONKURENTNI PRAVCI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Metode dokazivanja konkurentnosti pravaca</b>	<b>2</b>
1.1 Metoda 1 . . . . .	2
1.2 Metoda 2 . . . . .	5
1.3 Metoda 3 . . . . .	13
1.4 Metoda 4 . . . . .	14
1.5 Metoda 5 . . . . .	16
1.6 Metoda 6 . . . . .	18
1.7 Metoda 7 . . . . .	24
<b>2 Zadaci s natjecanja</b>	<b>27</b>
<b>3 Neke karakteristične točke</b>	<b>38</b>
3.1 Karakteristične točke trokuta . . . . .	38
3.1.1 Apolonijeva točka . . . . .	38
3.1.2 Schifflerova točka . . . . .	43
3.2 Karakteristične točke četverokuta . . . . .	48
3.2.1 Anticentar četverokuta . . . . .	48
3.3 Karakteristične točke kružnice . . . . .	50
3.3.1 Simetrane tetiva kružnice . . . . .	50
3.4 Karakteristične točke šesterokuta . . . . .	51
3.4.1 Brianchonov teorem . . . . .	51
3.4.2 Daov teorem . . . . .	59
<b>Bibliografija</b>	<b>66</b>

# Uvod

Jedan od čestih geometrijskih problema je kako dokazati da se tri ili više pravaca sijeku u istoj točki. Takve pravce zovemo konkurentnim pravcima. Možemo primijetiti da postoje razne tehnike dokaza koje ćemo u prvom poglavlju ovog rada pobliže opisati. Točnije, u prvom poglavlju opisat ćemo sedam metoda dokazivanja konkurentnosti pravaca te ih primijeniti na najpoznatije primjere konkurentnosti pravaca, odnosno na dokazivanje postojanja karakterističnih točaka trokuta (ortocentar, težište, središte opisane te središte upisane kružnice trokuta). U drugom poglavlju, navedene metode primijenit ćemo u rješavanju zadataka sa županijskih i državnih natjecanja iz matematike za srednju školu u Republici Hrvatskoj. U posljednjem, trećem poglavlju ovog rada, definirat ćemo još neke poznate točke koje su nastale presijecanjem tri ili više pravaca. Opravdat ćemo njihovu definiciju primjenom opisanih metoda. Naime, definirat ćemo Apolonijevu i Schifflerovu točku kao karakteristične točke trokuta, anticentar četverokuta kao karakterističnu točku četverokuta, sjecište simetrala tetiva kružnice kao karakterističnu točku kružnice. Također, osvrnut ćemo se na dva teorema, Brianchonov i Daov teorem, u kojima se dokazuje konkurentnost pravaca u šesterokutu.

# Poglavlje 1

## Metode dokazivanja konkurentnosti pravaca

Postoje različite metode dokazivanja konkurentnosti pravaca, a u ovom poglavlju proučit ćemo i sistematizirati neke od metoda te ih primijeniti na dokazivanje sljedećih teorema u kojima se spominju najpoznatiji primjeri konkurentnosti pravaca.

**Teorem 1.0.1.** *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki.*

**Teorem 1.0.2.** *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

**Teorem 1.0.3.** *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

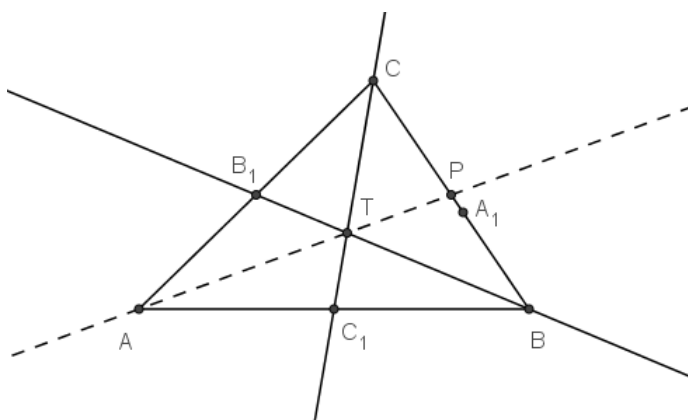
**Teorem 1.0.4.** *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

### 1.1 Metoda 1

Najprije ćemo dokazati da se tri pravca sijeku u istoj točki tako da iskoristimo sjecište samo dva od ta tri pravca. Nakon toga, umjesto trećeg pravca, promatramo pravac koji prolazi jednom od točaka koje određuju treći pravac i prethodno spomenutim sjecištem. Cilj je dokazati da je tako definirani pravac jednak trećem pravcu te će zbog toga sva tri pravca prolaziti istom točkom.

Provedimo dokaz za Teorem 1.0.1.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (prvi način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Neka se pravci  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u točki  $T$ . Neka pravac  $AT$  siječe stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $P$ . Trebamo dokazati da je točka  $P$  polovište stranice  $\overline{BC}$  (Slika 1.1).



Slika 1.1: Metoda 1 - sjecište težišnica

Promotrimo trokute  $ATC_1$  i  $BTC_1$ . Budući da je točka  $C_1$  polovište stranice  $\overline{AB}$ , ti trokuti imaju osnovice jednake duljine, tj.

$$|AC_1| = |BC_1|.$$

S druge strane, visine tih trokuta iz vrha  $T$  su jednake pa iz toga slijedi da trokuti  $ATC_1$  i  $BTC_1$  imaju jednake površine, odnosno

$$P(\triangle ATC_1) = P(\triangle BTC_1) = P_1.$$

Iz sličnih razloga je i

$$P(\triangle ATB_1) = P(\triangle CTB_1) = P_2.$$

Kako je  $P(\triangle ACC_1) = P(\triangle BCC_1)$ , slijedi da je

$$\begin{aligned} P(\triangle BTC) &= P(\triangle BCC_1) - P(\triangle BTC_1) \\ &= P(\triangle ACC_1) - P(\triangle ATC_1) \\ &= P(\triangle ACT) \\ &= 2P(\triangle ATB_1) \\ &= 2P_2, \end{aligned}$$

a kako je  $P(\triangle ABB_1) = P(\triangle CBB_1)$ , slijedi da je

$$\begin{aligned} P(\triangle BTC) &= P(\triangle CBB_1) - P(\triangle CTB_1) \\ &= P(\triangle ABB_1) - P(\triangle ATB_1) \\ &= P(\triangle ABT) \\ &= 2P(\triangle ATC_1) \\ &= 2P_1. \end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$P(\triangle BTC) = 2P_2 \quad \text{i} \quad P(\triangle BTC) = 2P_1$$

pa slijedi da je

$$P_1 = P_2,$$

odnosno

$$P(\triangle AC_1T) = P(\triangle AB_1T).$$

Iz toga zaključujemo da su visine iz  $C_1$  i  $B_1$  na stranicu  $\overline{AT}$  jednake. Budući da su visine iz  $B$  i  $C$  na stranicu  $\overline{AT}$  dvostruko dulje od visina iz  $C_1$  i  $B_1$  na stranicu  $\overline{AT}$ , zaključujemo da su i one jednake.

Dakle, trokuti  $ABP$  i  $ACP$  imaju zajedničku osnovicu ( $\overline{AP}$ ) i jednake duljine visina na tu osnovicu pa su im površine jednake, odnosno

$$P(\triangle ABP) = P(\triangle ACP).$$

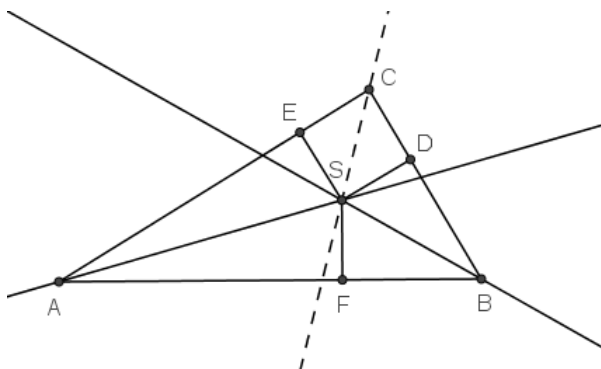
Kako trokuti  $ABP$  i  $ACP$  imaju jednake površine i jednaku visinu iz vrha  $A$ , zaključujemo da je

$$|CP| = |BP|,$$

odnosno da je točka  $P$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , tj.  $P = A_1$ . Time smo dokazali da težišnica iz  $A$  pripada pravcu  $AT$ .  $\square$

Sada metodom 1 dokažimo teorem 1.0.4.

*Dokaz Teorema 1.0.4. (prvi način).* Neka se u trokutu  $ABC$  simetrale kutova  $CAB$  i  $ABC$  sijeku u točki  $S$ . Pokažimo sada da je pravac  $CS$  simetrala kuta  $BCA$  (Slika 1.2).



Slika 1.2: Metoda 1 - sjecište simetrala kutova

Spustimo okomice iz točke  $S$  na stranice trokuta. Neka je točka  $D$  nožište okomice iz točke



$S$  na stranicu  $\overline{BC}$ , točka  $E$  nožište okomice iz točke  $S$  na stranicu  $\overline{AC}$ , a točka  $F$  nožište okomice iz točke  $S$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Kako točka  $S$  leži na simetrali kuta iz vrha  $A$  i simetrali kuta iz vrha  $B$ , zaključujemo da je

$$|SE| = |SF| \quad \text{i} \quad |SF| = |SD|,$$

jer je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova kuta. Iz toga slijedi da je

$$|SE| = |SD|,$$

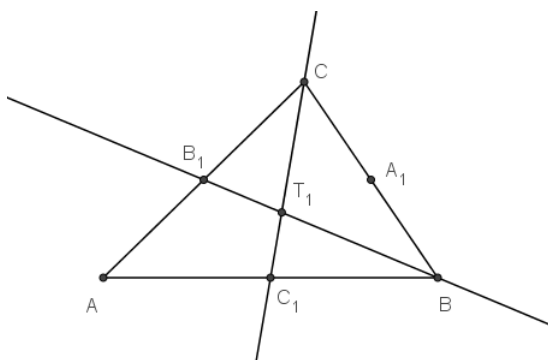
što znači da je pravac  $CS$  simetrala kuta  $BCA$ .

□

## 1.2 Metoda 2

Konkurentnost pravaca možemo dokazati i tako da promatramo dva para pravaca od zadanog tri pravca. Ako se svaki od parova pravaca siječe, dokazujemo da se ta dva sjecišta podudaraju. Pritom možemo izraziti radij-vektore tih sjecišta da bismo dokazali jednakost točaka ili koristiti analitički račun, odnosno naći koordinate sjecišta preko jednadžbi odgovarajućih pravaca. Također, možemo koristiti i neki geometrijski argument da bismo pokazali jednakost točaka pa dokažimo na taj način Teorem 1.0.1.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (drugi način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Neka se pravci  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u točki  $T_1$  (Slika 1.3).



Slika 1.3: Metoda 2 - sjecište težišnica

Kao i u dokazu Teorema 1.0.1. (prvi način), koristimo jednakost površina pa imamo da je

$$P(\triangle AC_1T_1) = \frac{1}{3}P(\triangle AC_1C) \quad \text{i} \quad P(\triangle AB_1T_1) = \frac{1}{3}P(\triangle AB_1B).$$

Dakle, točka  $T_1$  dijeli dužine  $\overline{CC_1}$  i  $\overline{BB_1}$  u omjeru 2 : 1.

Označimo sada s  $T_2$  sjecište pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$ . Analogno se dokažu dvije jednakosti površina

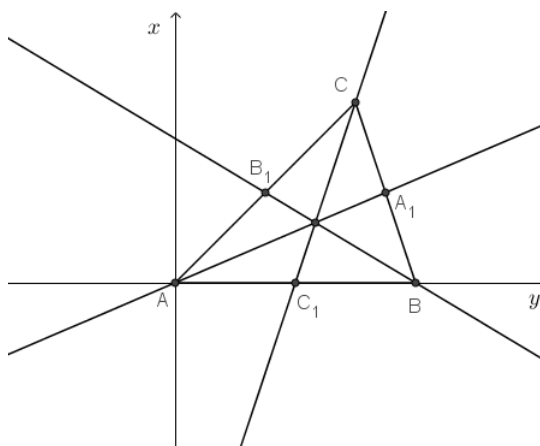
$$P(\triangle CA_1T_2) = \frac{1}{3}P(\triangle CA_1A) \quad \text{i} \quad P(\triangle CB_1T_2) = \frac{1}{3}P(\triangle CB_1B).$$

Dakle, točka  $T_2$  dijeli dužine  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{BB_1}$  u omjeru 2 : 1.

Kako  $T_1$  i  $T_2$  dijele dužinu  $\overline{BB_1}$  u istom omjeru, točke  $T_1$  i  $T_2$  se podudaraju.  $\square$

Dokažimo sada isti teorem koristeći sličnu tehniku kao i u prethodnom dokazu, ali analitički, tj. određivanjem koordinata sjecišta para pravaca.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (treći način).* Postavimo trokut  $ABC$  u koordinatni sustav tako da se vrh  $A$  podudara s ishodištem, dok se vrh  $B$  nalazi na  $x$ -osi (Slika 1.4).



Slika 1.4: Metoda 2 - sjecište težišnica

Koordinate vrhova trokuta su tada

$$A = (0, 0), \quad B = (b_1, 0), \quad C = (c_1, c_2).$$

Polovišta stranica tada imaju koordinate

$$A_1 = \left( \frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{c_2}{2} \right), \quad B_1 = \left( \frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2} \right), \quad C_1 = \left( \frac{b_1}{2}, 0 \right).$$

Odredimo sada pravce  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$ . Imamo

$$\begin{aligned} AA_1 \dots y &= \frac{\frac{c_2}{2}}{\frac{b_1 + c_1}{2}} x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{c_2}{b_1 + c_1} x, \end{aligned}$$

$$BB_1 \dots y = \frac{\frac{c_2}{2}}{\frac{c_1}{2} - b_1} (x - b_1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c_2}{c_1 - 2b_1} (x - b_1),$$

$$CC_1 \dots y - c_2 = \frac{-c_2}{\frac{b_1}{2} - c_1} (x - c_1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2c_2}{2c_1 - b_1} (x - c_1) + c_2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2c_2(x - c_1) + 2c_1c_2 - c_2b_1}{2c_1 - b_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c_2(2x - 2c_1 + 2c_1 - b_1)}{2c_1 - b_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c_2}{2c_1 - b_1} (2x - b_1).$$

Uočimo da se u eksplicitnom obliku jednadžbi pravaca  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  pojavljuju razlomci pri čemu nazivnici mogu biti i 0. Kada bi nazivnik bio nula, to bi značilo da je pravac okomit na  $x$ -os pa ga ne možemo zapisati u eksplicitnom obliku već u implicitnom. Primjerice, kada je  $b_1 + c_1 = 0$ , onda jednadžbu pravca  $AA_1$  možemo pisati kao  $x = 0$ . S druge strane, kada je  $c_1 - 2b_1 = 0$ , onda je pravac  $BB_1$  zadan jednadžbom  $x = b_1$ , a kada je  $2c_1 - b_1 = 0$ , onda pravac  $CC_1$  pišemo kao  $x = c_1$ . Daljnji račun provodio bi se analogno.

Odredimo sada koordinate sjecišta pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$  te  $AA_1$  i  $CC_1$  rješavanjem sustava jednadžbi

$$AA_1 \cap BB_1 \dots \begin{cases} y = \frac{c_2}{b_1 + c_1} x \\ y = \frac{c_2}{c_1 - 2b_1} (x - b_1), \end{cases}$$

$$AA_1 \cap CC_1 \dots \begin{cases} y = \frac{c_2}{b_1 + c_1} x \\ y = \frac{c_2}{2c_1 - b_1} (2x - b_1). \end{cases}$$

Odredimo najprije presjek pravca  $AA_1$  i  $BB_1$ . Uvrštavanjem  $y$  iz prve jednadžbe u sustavu jednadžbi u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{c_2}{b_1 + c_1}x &= \frac{c_2}{c_1 - 2b_1}(x - b_1) \\
\Leftrightarrow \frac{c_2x}{b_1 + c_1} &= \frac{c_2x - c_2b_1}{c_1 - 2b_1} \\
\Leftrightarrow c_2x(c_1 - 2b_1) &= (c_2x - c_2b_1)(b_1 + c_1) \\
\Leftrightarrow c_1c_2x - 2c_2xb_1 &= c_2xb_1 + c_1c_2x - c_2b_1^2 - c_1c_2b_1 / -c_1c_2x - c_2b_1x \\
\Leftrightarrow -3c_2b_1x &= -c_2b_1^2 - c_1c_2b_1 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{-c_2b_1^2 - c_1c_2b_1}{-3c_2b_1} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{b_1 + c_1}{3}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $x = \frac{b_1+c_1}{3}$  u  $y = \frac{c_2}{b_1+c_1}x$  dobivamo

$$y = \frac{c_2}{b_1 + c_1} \cdot \frac{b_1 + c_1}{3} = \frac{c_2}{3}.$$

Dakle, koordinate točke sjecišta pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$  su  $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$ .

Sada odredimo presjek pravca  $AA_1$  i  $CC_1$ .

Uvrštavanjem  $y$  iz prve jednadžbe u sustavu jednadžbi u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{c_2}{b_1 + c_1}x &= \frac{c_2}{2c_1 - b_1}(2x - b_1) \\
\Leftrightarrow \frac{c_2x}{b_1 + c_1} &= \frac{2c_2x - c_2b_1}{2c_1 - b_1} \\
\Leftrightarrow c_2x(2c_1 - b_1) &= (b_1 + c_1)(2c_2x - c_2b_1) \\
\Leftrightarrow 2c_1c_2x - c_2b_1x &= 2c_2b_1x - c_2b_1^2 + 2c_1c_2x - c_1c_2b_1 / -2c_1c_2x - 2c_2b_1x \\
\Leftrightarrow -3c_2b_1x &= -c_2b_1^2 - c_1c_2b_1 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{c_2b_1^2 + c_1c_2b_1}{3c_2b_1} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{b_1 + c_1}{3}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $x = \frac{b_1+c_1}{3}$  u  $y = \frac{c_2}{b_1+c_1}x$  dobivamo

$$y = \frac{c_2}{b_1 + c_1} \cdot \frac{b_1 + c_1}{3} = \frac{c_2}{3}.$$

Dakle, koordinate točke sjecišta pravaca  $AA_1$  i  $CC_1$  su  $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$ .

Uočavamo da smo u oba slučaja dobili točku  $\left(\frac{b_1+c_1}{3}, \frac{c_2}{3}\right)$  pa zaključujemo da su pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  konkurentni.  $\square$

Na sličan način, postavljanjem trokuta  $ABC$  u koordinatni sustav tako da se vrh  $A$  podudara s ishodištem, a vrh  $B$  nalazi na  $x$ -osi možemo dokazati i Teorem 1.0.2.

*Dokaz Teorema 1.0.2. (prvi način).* Koordinate vrhova trokuta i polovišta stranica su kao i u dokazu Teorema 1.0.1 (treći način), odnosno

$$A = (0, 0), \quad B = (b_1, 0), \quad C = (c_1, c_2)$$

te

$$A_1 = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad B_1 = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), \quad C_1 = \left(\frac{b_1}{2}, 0\right).$$

Odredimo sada pravce na kojima leže stranice trokuta. Imamo

$$\begin{aligned} AB \dots y &= 0, \\ BC \dots y &= \frac{c_2}{c_1 - b_1}(x - b_1), \\ AC \dots y &= \frac{c_2}{c_1}x. \end{aligned}$$

Uočimo da se u jednadžbama pravaca  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  pojavljuju razlomci čiji nazivnici mogu biti i 0. To, kao i u dokazu Teorema 1.0.1. (treći način), znači da su pravci okomiti na  $x$ -os te se trebaju zapisati u implicitnom obliku.

Odredimo sada simetrale stranica trokuta  $ABC$  u oznaci  $s_a$ ,  $s_b$  i  $s_c$ . Neka je jednadžba simetrale oblika  $y = kx + l$ .

Kako je pravac  $s_a$  okomit na  $BC$ , imamo

$$k = -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \Rightarrow s_a \dots y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + l,$$

a budući da  $s_a$  prolazi točkom  $A_1$ , dobivamo

$$\frac{c_2}{2} = -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 + c_1}{2} + l \Leftrightarrow l = \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Dakle, jednadžba simetrale  $s_a$  glasi

$$s_a \dots y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Kako je pravac  $s_b$  okomit na  $AC$ , imamo

$$k = -\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow s_b \dots y = -\frac{c_1}{c_2}x + l,$$

a budući da  $s_b$  prolazi točkom  $B_1$ , dobivamo

$$\frac{c_2}{2} = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_1}{2} + l \Leftrightarrow l = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Dakle, jednadžba simetrale  $s_b$  je

$$s_b \dots y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Kako je pravac  $s_c$  okomit na  $AB$  i prolazi točkom  $C_1$ , dobivamo da je jednadžba simetrale  $s_c$

$$s_c \dots x = \frac{b_1}{2}.$$

Uočimo da se u jednadžbama stranica trokuta pojavljuju razlomci čiji nazivnici mogu biti nula. Takve slučajeve treba posebno promatrati, odnosno tada je potrebno jednadžbe stranica prikazati u implicitnom obliku. Kod jednadžbi simetrala, također se pojavljuju razlomci čiji nazivnik može biti nula, ako i samo ako je  $c_2 = 0$ . No, kada bi  $c_2$  bio jednak nula, to bi značilo da je točka  $C$  na  $x$ -osi pa bi točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  bile kolinearne i ne bi činile trokut kao što je zadano.

Odredimo sada koordinate sjecišta pravaca  $s_a$  i  $s_c$  te  $s_b$  i  $s_c$  rješavanjem sustava jednadžbi

$$s_a \cap s_c \dots \begin{cases} y = -\frac{c_1 - b_1}{c_2}x + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ x = \frac{b_1}{2}, \end{cases}$$

$$s_b \cap s_c \dots \begin{cases} y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ x = \frac{b_1}{2}. \end{cases}$$

Odredimo najprije presjek pravaca  $s_a$  i  $s_c$ . Uvrštavanjem  $x$  iz druge jednadžbe u prvu dobivamo

$$\begin{aligned} y &= -\frac{c_1 - b_1}{c_2} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{-b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-c_1 b_1 + b_1^2 - b_1^2 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-c_1 b_1 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}. \end{aligned}$$

Dakle koordinate sjecišta pravaca  $s_a$  i  $s_c$  su  $\left(\frac{b_1}{2}, \frac{-c_1b_1+c_1^2+c_2^2}{2c_2}\right)$ .

Odredimo sada presjek pravaca  $s_b$  i  $s_c$ . Uvrštavanjem  $x$  iz druge jednadžbe u sustavu jednadžbi u prvu dobivamo

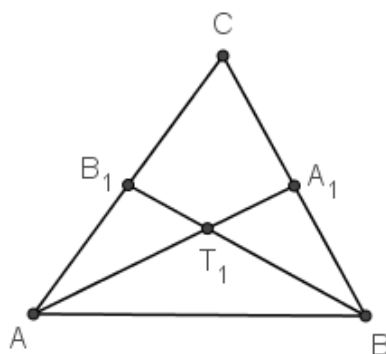
$$y = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-c_1b_1 + c_1^2 + c_2^2}{2c_2}.$$

Dakle, koordinate sjecišta pravaca  $s_b$  i  $s_c$  su također  $\left(\frac{b_1}{2}, \frac{-c_1b_1+c_1^2+c_2^2}{2c_2}\right)$  pa zaključujemo da se pravci  $s_a$ ,  $s_b$  i  $s_c$  sijeku u istoj točki, odnosno pravci  $s_a$ ,  $s_b$  i  $s_c$  su konkurentni.  $\square$

Određivanje sjecišta para težišnica možemo provesti i vektorski pa dokažimo Teorem 1.0.1. na taj način.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (četvrti način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Neka se dužine  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{BB_1}$  sijeku u točki  $T_1$  (Slika 1.5).



Slika 1.5: Metoda 2 - sjecište težišnica

Stavimo da je

$$\overrightarrow{AT_1} = x\overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BT_1} = y\overrightarrow{BB_1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT_1} &= x\overrightarrow{AA_1} \\ &= x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}) \\ &= x\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).\end{aligned}$$

Isti vektor možemo raspisati na još jedan način:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT_1} \\ &= \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BB_1} \\ &= \overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{-AB} + \overrightarrow{AB_1}) \\ &= \overrightarrow{AB} + y\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).\end{aligned}$$

Kako su vektori  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$  nekolinearni, odnosno linearno nezavisni, izjednačavanjem koeficijenata uz vektore  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$  imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x &= 1 - y \\ \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}y.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $\frac{1}{2}x$  iz prve jednadžbe u drugu dobivamo

$$\begin{aligned}1 - y &= \frac{1}{2}y \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem  $y = \frac{2}{3}$  u  $x = y$  dobivamo

$$x = \frac{2}{3}.$$



Dakle, dobivamo  $\overrightarrow{AT_1} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ .

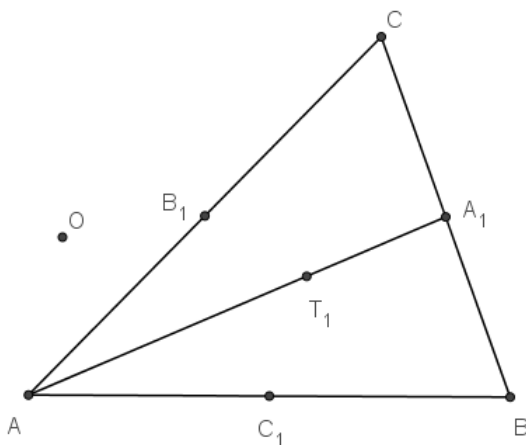
Sada sa  $T_2$  označimo presjek težišnica  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{CC_1}$ . Posve analognim računom dobivamo  $\overrightarrow{AT_2} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ .

Dakle, točke  $T_1$  i  $T_2$  se podudaraju. □

### 1.3 Metoda 3

Još jedan od načina na koji možemo dokazati konkurentnost pravaca je da na svakom od pravaca odaberemo točku s nekim svojstvom koje smo naslutili i zatim dokažemo da se sve te točke podudaraju. Primijenimo tu metodu za dokaz Teorema 1.0.1.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (peti način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Ovdje možemo naslutiti da tražena točka presjeka dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1, od vrha trokuta. Sada na svakoj težišnici uzmimo točku s tim svojstvom i dokažimo da se zapravo radi o istoj točki. Neka je točka  $T_1$  na težišnici  $\overline{AA_1}$ , točka  $T_2$  na težišnici  $\overline{BB_1}$  i točka  $T_3$  na težišnici  $\overline{CC_1}$  s navedenim svojstvom. Uzmimo neku proizvoljnu točku  $O$  (Slika 1.6).



Slika 1.6: Metoda 3 - sjecište težišnica

Tada je

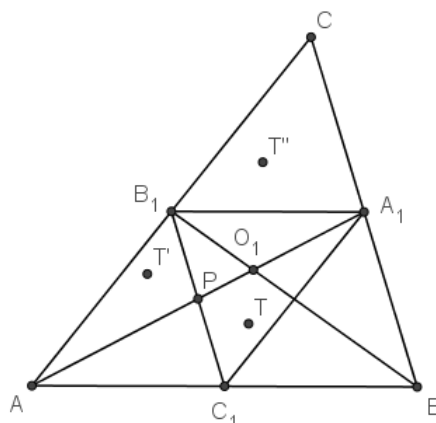
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OT_1} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT_1} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}) \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})\right] \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\
 &= \overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\
 &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).
 \end{aligned}$$

Posve analogno dobivamo iste izraze i za  $\overrightarrow{OT_2}$  i  $\overrightarrow{OT_3}$  pa se točke  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  podudaraju.  $\square$

## 1.4 Metoda 4

Da bismo dokazali da se pravci sijeku u istoj točki, možemo iskoristiti i neku tvrdnju koja ovisi o prirodi zadatka. Ovu metodu primijenit ćemo na dokazivanje Teorema 1.0.1. tako da ćemo uočiti određenu homotetiju.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (šesti način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Uočimo da je trokut  $A_1B_1C_1$  homotetičan trokutu  $ABC$  (Slika 1.7).



Slika 1.7: Metoda 4 - sjecište težišnica

Prvo vidimo da je trokut  $A_1B_1C_1$  centralno simetričan trokutu  $AC_1B_1$  u odnosu na polovište dužine  $\overline{B_1C_1}$ , odnosno za svaku točku  $T$  trokuta  $A_1B_1C_1$  postoji točka  $T'$  trokuta  $AC_1B_1$  takva da vrijedi

$$\overrightarrow{PT} = -\overrightarrow{PT'},$$

gdje je  $P$  polovište dužine  $\overline{B_1C_1}$ .

Trokut  $AC_1B_1$  je očito homotetičan trokutu  $ABC$  s koeficijentom homotetije  $\frac{1}{2}$  i centrom homotetije  $A$  pa za točku  $T'$  trokuta  $AB_1C_1$  postoji točka  $T''$  trokuta  $ABC$  takva da je

$$\overrightarrow{AT'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AT''}.$$

Sada za proizvoljnu točku  $O$  imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT''} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT''} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AT'} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PT'}) \\ &= \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PT}) \\ &= \overrightarrow{OA} + 2[\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OT})] \\ &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{OT}. \end{aligned}$$

Odaberimo sada točku  $O$  tako da poništava izraz

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PO} \\ &= \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) - 2\overrightarrow{PO} \\ &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OP} \\ &= -\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OP}. \end{aligned}$$

Dakle, točka  $O$  se nalazi na težišnici  $\overline{AA_1}$  i dijeli ju u omjeru  $2 : 1$ . Nazovimo ju s  $O_1$ . Tada vrijedi

$$\overrightarrow{O_1T''} = -2\overrightarrow{O_1T}$$

pa je trokut  $A_1B_1C_1$  homotetičan trokutu  $ABC$  s obzirom na točku  $O_1$  s koeficijentom  $-\frac{1}{2}$ . Pritom je točka  $A_1$  homotetična točki  $A$ , točka  $B_1$  točki  $B$  i točka  $C_1$  točki  $C$ .

Sada ponovimo isti postupak tako da koristimo trokute  $BA_1C_1$  i  $CA_1B_1$  umjesto  $AB_1C_1$ . Dobivena središta homotetije označimo s  $O_2$  i  $O_3$ . Imamo dakle

$$\overrightarrow{O_1A} = -2\overrightarrow{O_1A_1},$$

$$\overrightarrow{O_2A} = -2\overrightarrow{O_2A_1}.$$

Oduzimanjem dobivamo  $\overrightarrow{O_1O_2} = -2\overrightarrow{O_1O_2}$  pa je  $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$ , odnosno  $O_1 = O_2$ .

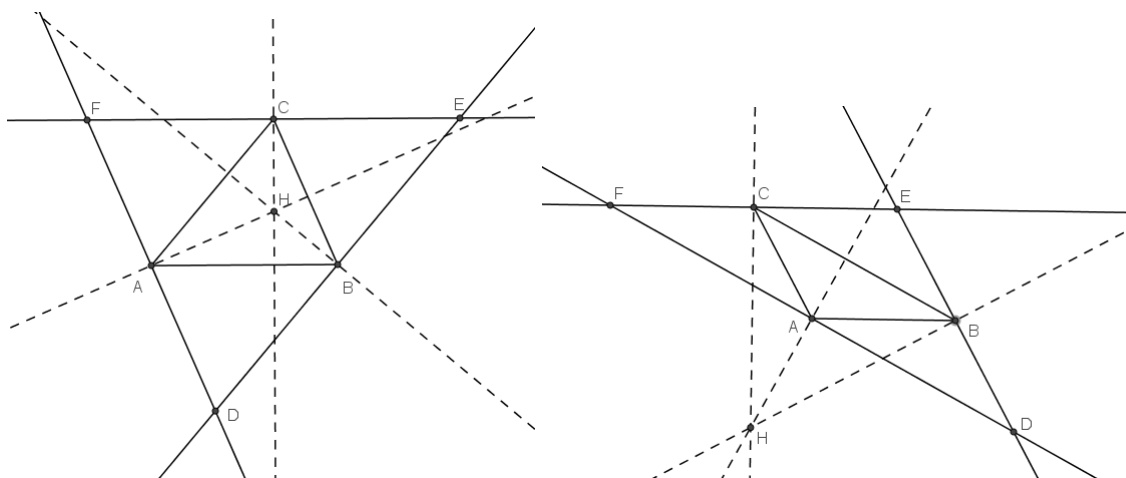
Analogno se pokaže i da je  $O_2 = O_3$ .

Kako točka  $T = O_1 = O_2 = O_3$  pripada pravcima  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$ , oni se sijeku u istoj točki.  $\square$

## 1.5 Metoda 5

Konkurentnost pravaca može se dokazati i tako da u zadanim pravcima prepoznamo pravce koji imaju neko drugo svojstvo te zatim iskoristimo rezultat o konkurentnosti pravaca koji nam je poznat iz tog drugog konteksta. Tako, primjerice, da bismo dokazali Teorem 1.0.3., možemo iskoristiti Teorem 1.0.2. koji kaže da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki.

*Dokaz Teorema 1.0.3. (prvi način).* Neka je zadan trokut  $ABC$ . Konstruirajmo trokut  $DEF$  kojemu su stranice usporedne sa stranicama trokuta  $ABC$ , pri čemu je  $AB \parallel FE$ ,  $BC \parallel DF$  i  $AC \parallel DE$ , i prolaze vrhovima tog trokuta. Na slici 1.8 prikazane su konstrukcije trokuta  $DEF$  u slučaju kada je trokut  $ABC$  šiljastokutan, odnosno, tupokutan. Kod pravokutnog trokuta s pravim kutom u vrhu  $C$ , vrh  $C$  očito pripada svim visinama pa odmah



Slika 1.8: Metoda 5 - sjecište visina

zaključujemo da su pravci na kojima leže visine trokuta konkurentni.

Četverokuti  $ABEC$ ,  $ABCF$  i  $ADBC$  su tada paralelogrami. Promotrimo paralelograme  $ABEC$  i  $ABCF$ . Tada imamo

$$|AB| = |CE| \quad \text{i} \quad |AB| = |FC|$$

pa je

$$|CE| = |CF|.$$

Isto tako dobivamo i da je

$$|BD| = |BE| \quad \text{i} \quad |AD| = |AF|$$

pa zaključujemo da su točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  polovišta stranica trokuta  $DEF$ .

Konstruirajmo sada pravce na kojima leže visine trokuta  $ABC$ . Neka su  $N_A$ ,  $N_B$  i  $N_C$  nožišta visina trokuta iz  $A$ ,  $B$  i  $C$  redom. Budući da je

$$CN_C \perp AB \quad \text{i} \quad EF \parallel AB,$$

zaključujemo da je

$$CN_C \perp EF.$$

Isto tako, kako je

$$BN_B \perp AC \quad \text{i} \quad DE \parallel AC,$$

zaključujemo da je

$$BN_B \perp DE.$$

Također, kako je

$$AN_A \perp BC \quad \text{i} \quad DF \parallel BC,$$

dobivamo da je

$$AN_A \perp DF.$$

Dakle, pravci na kojima leže visine trokuta  $ABC$  okomiti su na stranice trokuta  $DEF$  i prolaze polovištima njegovih stranica pa su to ujedno i simetrale stranica trokuta  $DEF$ . Prema Teoremu 1.0.2. znamo da se simetrale stranica sijeku u jednoj točki, a kako tim simetralama, odnosno pravcima, pripadaju visine trokuta  $ABC$ , i pravci na kojima leže visine su konkurentni.  $\square$

## 1.6 Metoda 6

Još jedan način da dokažemo da se pravci sijeku u istoj točki je da iskoristimo neki općenitiji rezultat. Ovdje je, primjerice, to Cevin teorem. Prije samog iskaza teorema definirajmo sljedeću funkciju. Neka su točke  $X, Y$  i  $Z$  kolinearne i međusobno različite. Tada je

$$\left[ \frac{|XY|}{|YZ|} \right] = \operatorname{sgn}(X, Y, Z) \cdot \frac{|XY|}{|YZ|},$$

pri čemu je  $\operatorname{sgn}(X, Y, Z) = 1$  ako je  $Y$  između  $X$  i  $Z$ , a  $-1$  inače.

Iskažimo sada Cevin teorem:

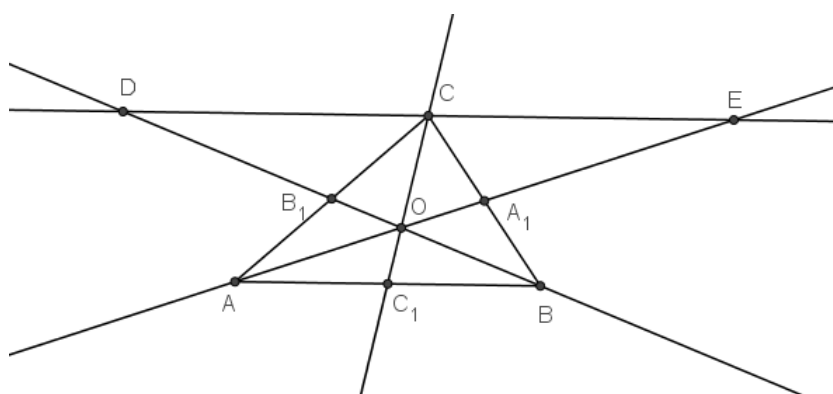
**Teorem 1.6.1.** *Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  na pravcima  $BC, AC$  i  $AB$  redom, pri čemu se točke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  ne podudaraju ni sa jednom od točaka  $A, B$  i  $C$ . Pravci  $AA_1, BB_1$  i  $CC_1$  sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

$$\left[ \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \right] \cdot \left[ \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \right] \cdot \left[ \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \right] = 1.$$

*Dokaz.*  $\Rightarrow$ : Neka se pravci  $AA_1, BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u točki  $O$ . Uočimo da se točka  $O$  može nalaziti unutar i izvan trokuta  $ABC$ .

Provedimo najprije dokaz za slučaj kada se točka  $O$  nalazi unutar trokuta  $ABC$ . Tada se točke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  nalaze na stranicama trokuta  $\overline{BC}, \overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom pa su predznaci svih orijentiranih kvocijenata iz Cevinog identiteta pozitivni i u produktu iznose 1. Sada dokažimo da je produkt kvocijenata duljina također 1.

Povucimo paralelu sa stranicom  $\overline{AB}$  kroz točku  $C$ . Neka je točka  $D$  sjecište te paralele s pravcem  $BB_1$ , a točka  $E$  sjecište paralele s pravcem  $AA_1$  (Slika 1.9).



Slika 1.9: Cevin teorem

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1, \text{ pa je } \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CD|}{|AB|},$$

$$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1, \text{ pa je } \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CE|},$$

$$\triangle OAC_1 \sim \triangle OEC, \text{ pa je } \frac{|AC_1|}{|CE|} = \frac{|C_1O|}{|CO|},$$

$$\triangle CDO \sim \triangle C_1BO, \text{ pa je } \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CO|}{|C_1O|}.$$

Slijedi

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1O|}{|CO|} \cdot \frac{|CO|}{|C_1O|}$$

i nakon sređivanja

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Provedimo sada dokaz za slučaj kada se točka  $O$  nalazi izvan trokuta  $ABC$ . Tada se, primjerice, točke  $A_1$  i  $C_1$  nalaze na produžecima stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$ , a točka  $B_1$  na stranici  $\overline{AC}$  (preostale situacije se pokazuju analogno). Tada je

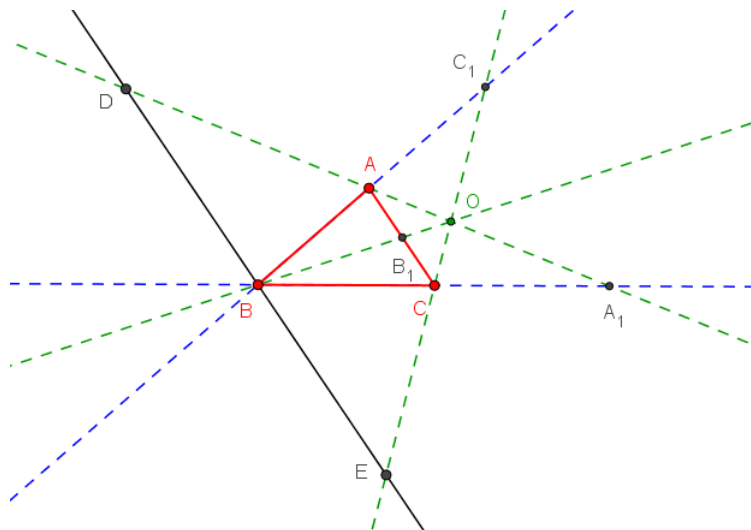
$$\text{sgn}(A, C_1, B) = -1, \quad \text{sgn}(B, A_1, C) = -1, \quad \text{sgn}(C, B_1, A) = 1$$

pa je

$$\text{sgn}(A, C_1, B) \cdot \text{sgn}(B, A_1, C) \cdot \text{sgn}(C, B_1, A) = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

Sada dokažimo da je produkt kvocijenata duljina također 1.

Povucimo paralelu sa stranicom  $\overline{AC}$  kroz točku  $B$ . Neka je točka  $D$  sjecište te paralele s pravcem  $AA_1$ , a točka  $E$  sjecište paralele s pravcem  $CC_1$  (Slika 1.10).



Slika 1.10: Cevin teorem

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle C_1BE \sim \triangle C_1AC, \text{ pa je } \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC|}{|BE|},$$

$$\triangle A_1DB \sim \triangle A_1AC, \text{ pa je } \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|DB|}{|AC|},$$

$$\triangle OBE \sim \triangle OB_1C, \text{ pa je } \frac{|CB_1|}{|BE|} = \frac{|OB_1|}{|OB|},$$

$$\triangle ODB \sim \triangle OAB_1, \text{ pa je } \frac{|DB|}{|B_1A|} = \frac{|OB|}{|OB_1|}.$$

Slijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|BE|} \cdot \frac{|DB|}{|B_1A|} = \frac{|AC|}{|BE|} \cdot \frac{|DB|}{|AC|} \cdot \frac{|OB_1|}{|OB|} \cdot \frac{|OB|}{|OB_1|}$$

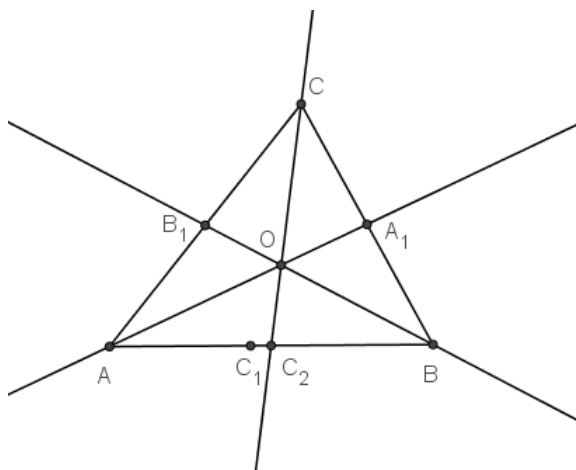
i nakon sređivanja

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

$\Leftrightarrow$ : Neka je sada  $\left[\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\right] \cdot \left[\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\right] \cdot \left[\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\right] = 1$ . Dokaz ćemo provesti za slučaj kada se točke  $A_1$ ,



$B_1$  i  $C_1$  nalaze na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. U ovom slučaju produkt odgovarajućih predznaka kvocijenata jednak je jedan pa je ta situacija moguća. Ostali slučajevi dokazuju se analogno. Za nastavak dokaza koristimo metodu 1. Označimo sa  $O$  presjek pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$ , a s  $C_2$  presjek pravaca  $CO$  i  $AB$  (Slika 1.11).



Slika 1.11: Cevin teorem

Sada zaključujemo da su pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_2$  konkurentni pa prema prvom dijelu dokaza imamo jednakost

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Sada, prema pretpostavci, vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}.$$

S obzirom na to da točke  $C_1$  i  $C_2$  leže na dužini  $\overline{AB}$ , slijedi

$$\frac{|AB| - |BC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB| - |BC_2|}{|BC_2|},$$

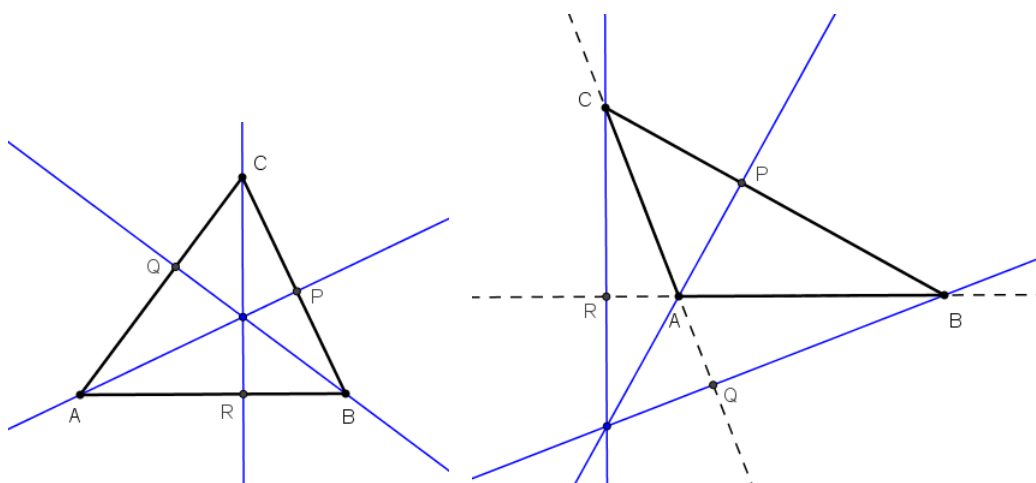
pa je

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} = \frac{|AB|}{|BC_2|}.$$

Dakle,  $|BC_1| = |BC_2|$  pa zaključujemo da se točke  $C_1$  i  $C_2$  podudaraju, odnosno, pravac  $CC_1$  prolazi točkom  $O$ . Zaključujemo da se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u jednoj točki.  $\square$

Sada primijenjujući Cevin teorem dokažimo Teorem 1.0.3.

*Dokaz Teorema 1.0.3. (drugi način).* Neka je zadan trokut  $ABC$  i točke  $P$ ,  $Q$  i  $R$  koje su nožišta okomica iz  $A$ ,  $B$  i  $C$  na pravce  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  redom (Slika 1.12).



Slika 1.12: Metoda 6 - sjecište visina

Uočimo da postoje dva slučaja, kad je trokut  $ABC$  šiljastokutan, odnosno tupokutan. Također, primijetimo da je kod šiljastokutnog trokuta produkt predznaka kvocijenata iz Cevinog identiteta jednak 1, jer je svaki kvocijent pozitivan, dok kod tupokutnog trokuta imamo dva negativna kvocijenata i jedan pozitivan pa je produkt orijentiranih kvocijenata opet pozitivan.

Provedimo najprije dokaz za slučaj kada je trokut  $ABC$  šiljastokutan. Tada su  $P$ ,  $Q$  i  $R$  na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom.

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle BCQ \sim \triangle ACP, \text{ pa je } \frac{|CQ|}{|PC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

$$\triangle CAR \sim \triangle BAQ, \text{ pa je } \frac{|AR|}{|QA|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\triangle ABP \sim \triangle CBR, \text{ pa je } \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|CQ|}{|PC|} \cdot \frac{|AR|}{|QA|} \cdot \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, prema Cevinom teoremu, visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

Sada promotrimo slučaj kada je trokut  $ABC$  tupokutan te kada su, bez smanjenja općenitosti, točke  $R$  i  $Q$  na produžetcima stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  redom.

Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta imamo da je

$$\triangle BCQ \sim \triangle ACP, \text{ pa je } \frac{|CQ|}{|PC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

$$\triangle CAR \sim \triangle BAQ, \text{ pa je } \frac{|AR|}{|QA|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\triangle ABP \sim \triangle CBR, \text{ pa je } \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|CQ|}{|PC|} \cdot \frac{|AR|}{|QA|} \cdot \frac{|BP|}{|RB|} = \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

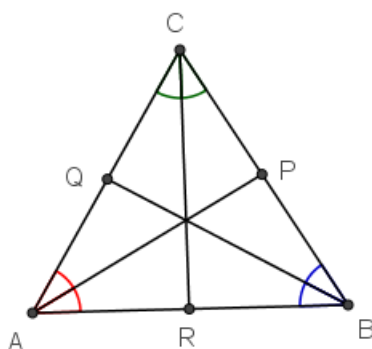
odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, i u slučaju tupokutnog trokuta dobili smo da se, prema Cevinom teoremu, pravci na kojima leže visine sijeku u istoj točki.  $\square$

Slično možemo dokazati i Teorem 1.0.4.

*Dokaz Teorema 1.0.4. (drugi način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $P$ ,  $Q$  i  $R$  presjeci simetrala kutova sa stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom (Slika 1.13). Očito je da  $P$ ,  $Q$  i  $R$  mogu biti samo na stranicama trokuta  $ABC$  pa je produkt orijentiranih kvocijenata iz pripadnog Cevinog identiteta pozitivan. Primjenjujemo poučak o simetrali kuta koji glasi: omjer duljina dužina na koje simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu trokuta jednak je omjeru duljina odgovarajućih stranica trokuta nad tim segmentima.



Slika 1.13: Metoda 6 - sjecište simetrala kutova

Dakle, imamo

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BR|}{|AR|},$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|BP|},$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|CQ|}.$$

Množenjem tih triju jednakosti dobivamo

$$\frac{|BR|}{|AR|} \cdot \frac{|CP|}{|BP|} \cdot \frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|},$$

odnosno,

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Dakle, prema Cevinom teoremu, simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.  $\square$

## 1.7 Metoda 7

Još jedan od načina dokazivanja konkurentnosti pravaca je korištenje trilinearnih koordinata. Naime, trilinearne koordinate točaka ne pokazuju položaj točke u odnosu na ishodište i osi koordinatnog sustava već se njima točke opisuju pomoću udaljenosti od tri zadana pravca. Te udaljenosti nisu nužno točne, već je dovoljno da su omjeri udaljenosti točni pa

se zbog toga trilinearne koordinate ne zapisuju kao  $(x, y, z)$ , već kao omjer  $x : y : z$ .

Primjerice, najlakše je odrediti trilinearne koordinate točke koja je središte upisane kružnice trokuta  $ABC$  u odnosu na pravce na kojima leže stranice tog trokuta. S obzirom na to da se ona nalazi u sjecištu simetrala kutova, zaključujemo da su joj udaljenosti do svake stranice jednake (to je zapravo radijus  $r$  upisane kružnice). Dakle, tada su njene trilinearne koordinate oblika  $r : r : r$ . Međutim, kod trilinearnih koordinata se uglavnom uzima skraćeni oblik pa bi to u ovom slučaju glasilo  $1 : 1 : 1$ .

Slično možemo zapisati i trilinearne koordinate točaka koje leže na simetralama kutova (unutar trokuta). Neka pojedine koordinate predstavljaju redom udaljenosti promatrane točke do pravaca  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  redom. Tada simetrala kuta  $\angle BAC$  ima trilinearne koordinate  $x : 1 : 1$ . Tu vidimo da je bitno da su udaljenosti točaka do stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  jednake, dok treća udaljenost varira.

Vrlo je bitno naglasiti da su kod trilinearnih koordinata sve koordinate pozitivne ako je točka unutar trokuta. Ako točka prijeđe na drugu stranu nekog od pravaca koji određuju trokut, onda joj udaljenost mijenja predznak, tj. kažemo da koordinate zapravo predstavljaju orijentirane udaljenosti. Zbog toga su koordinate  $x : 1 : 1$  zapravo koordinate točaka koje leže na simetrali kuta  $\angle BAC$  i pripadaju tom kutu.

Uzmimo točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom i neka su trilinearne koordinate dužina  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  i  $\overline{CC_1}$  redom  $x : q : r$ ,  $p : y : r$  i  $p : q : z$  pri čemu su  $p$ ,  $q$  i  $r$  pozitivne konstante. Neka je točka  $T$  presjek dužina  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{BB_1}$  i neka su joj  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  udaljenosti do stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Tada postoje  $x_T$  i  $y_T$  takvi da je

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{x_T}{q} = \frac{p}{y_T}$$

i također je

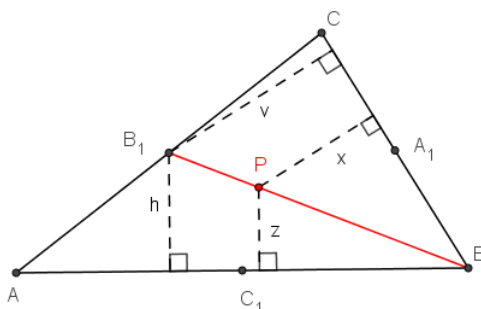
$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{x_T}{r} = \frac{p}{r}.$$

Dakle iz druge jednakosti dobivamo da je  $x_T = p$ , a onda iz prve da je  $y_T = q$ . Drugim riječima, dobili smo trilinearne koordinate točke  $T$ , a to su  $p : q : r$ . Međutim, to znači da se točka  $T$  nalazi i na dužini  $\overline{CC_1}$  pa se zadane dužine sijeku u jednoj točki.

Iskoristimo sada dobiveni zaključak u dokazu Teorema 1.0.1.

*Dokaz Teorema 1.0.1. (sedmi način).* Neka su u trokutu  $ABC$  točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom. Odredimo trilinearne koordinate težišnica.

Promatramo težišnicu  $\overline{BB_1}$ . Neka je točka  $P$  proizvoljna točka koja leži na težišnici  $\overline{BB_1}$  i neka su joj udaljenosti do stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Neka su  $v$  i  $h$  visine iz  $B_1$  u trokutima  $BCB_1$  i  $BB_1A$  (Slika 1.14).



Slika 1.14: Metoda 7 - sjecište težišnica

Iz sličnosti trokuta dobivamo

$$\frac{x}{v} = \frac{z}{h}.$$

Također, vidimo da je površina trokuta  $ABC$  jednaka

$$P(\triangle ABC) = av = ch$$

pa dobivamo da je

$$x : z = v : h = c : a,$$

pri čemu su  $a$  i  $c$  duljine stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$  redom.

Tada su trilinearne koordinate težišnice  $\overline{BB_1}$  jednake  $c : y' : a$ . Te koordinate možemo pisati i kao  $bc : y'' : ab$  gdje su  $y$ ,  $y'$  i  $y''$  neke varijabilne vrijednosti.

Analogno bismo za preostale dvije težišnice odredili trilinearne koordinate te dobili  $b : a : z'$  i  $x' : c : b$ , odnosno  $bc : ca : z''$  i  $x'' : ca : ab$ .

Iz napomene prije ovog teorema zaključujemo da se težišnice sijeku unutar trokuta u točki s trilinearnim koordinatama  $bc : ca : ab$ , odnosno, to su trilinearne koordinate težišta.  $\square$

## Poglavlje 2

### Zadaci s natjecanja

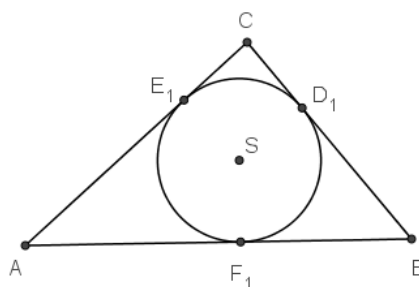
U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se navedene metode dokazivanja konkurentnosti pravaca primjenjuju u rješavanju raznih zadataka. Zadaci su sa županijskih i državnih natjecanja iz matematike provedenih u Republici Hrvatskoj.

**Zadatak 1.** (državno natjecanje iz matematike za 3. razred, 2013. godina) Točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  središta su triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana. U točkama u kojima se kružnice dodiruju povučene su zajedničke tangente. Pokažite da je središte upisane kružnice trokuta  $ABC$  sjecište tih triju tangenti.

#### Rješenje.

Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 4, odnosno, iskoristit ćemo razne tvrdnje koje ovise o prirodi zadatka.

Neka su  $D_1$ ,  $E_1$  i  $F_1$  dirališta upisane kružnice sa središtem u točki  $S$  polumjera  $r$  trokuta  $ABC$  na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom (Slika 2.1).



Slika 2.1: Zadatak 1.

Prema S-S-K teoremu o sukkladnosti trokuta imamo

$$\triangle AF_1S \cong \triangle AE_1S \quad (|SF_1| = |SE_1| = r, \overline{AS} \text{ zajednička, } \angle AF_1S = \angle AE_1S = 90^\circ)$$

pa je

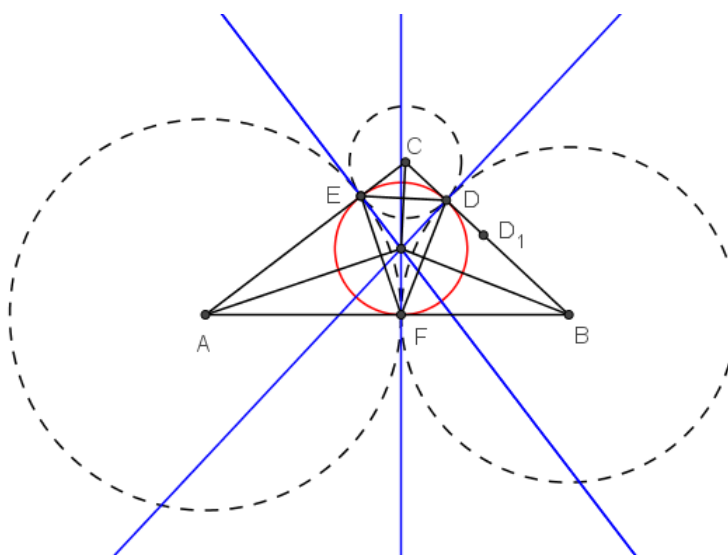
$$|AF_1| = |AE_1|.$$

Analogno zaključujemo da je

$$|BF_1| = |BD_1| \quad \text{i} \quad |CD_1| = |CE_1|.$$

Označimo li sa  $D$ ,  $E$  i  $F$  dirališta triju zadanih kružnica sa središtima u  $A$ ,  $B$  i  $C$  (Slika 2.2), imamo da je

$$|AF| = |AE|, \quad |BF| = |BD| \quad \text{i} \quad |CD| = |CE|.$$



Slika 2.2: Zadatak 1.

Trebamo pokazati da se točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  podudaraju s točkama  $D_1$ ,  $E_1$  i  $F_1$  redom. Pretpostavimo suprotno i bez smanjenja općenitosti da se  $D$  ne podudara s  $D_1$ . Tada je  $|BD| > |BD_1|$  ili  $|BD| < |BD_1|$ .

Uzmimo da je  $|BD| < |BD_1|$  (drugi slučaj pokaže se analogno), a onda je  $|CD| > |CD_1|$ . Tada je

$$|AF| = |AB| - |BF| = |AB| - |BD| > |AB| - |BD_1| = |AB| - |BF_1| = |AF_1|,$$



odnosno,

$$|AF| > |AF_1|.$$

Sada je

$$|AC| = |AE| + |CE| = |AF| + |CD| > |AF_1| + |CD_1| = |AE_1| + |CE_1| = |AC|.$$

Dakle,  $|AC| > |AC|$  pa smo dobili kontradikciju. Drugim riječima, dokazali smo da su  $D$ ,  $E$  i  $F$  upravo dirališta upisane kružnice trokuta  $ABC$ .

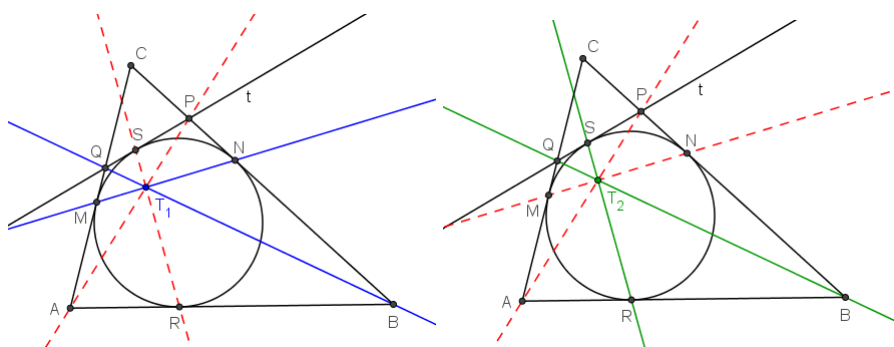
Kako su pravci  $DS$ ,  $ES$  i  $FS$  okomiti na pripadne stranice trokuta  $ABC$ , oni se upravo podudaraju sa zadanim tangentama. Prema tome, zadane tangente se sijeku u točki  $S$ .

**Zadatak 2.** (državno natjecanje iz matematike za 3. razred, 2005. godina) Upisana kružnica trokuta  $ABC$  dodiruje stranice  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $M$ ,  $N$  i  $R$ . Neka je  $S$  točka na manjem od dva luka  $\widehat{MN}$  i  $t$  tangenta na taj luk s diralištem  $S$ . Tangenta  $t$  siječe  $\overline{NC}$  i  $\overline{MC}$  redom u točkama  $P$  i  $Q$ . Dokažite da se pravci  $AP$ ,  $BQ$ ,  $SR$  i  $MN$  sijeku u jednoj točki.

**Rješenje.**

Pri rješavanju ovog zadatka najprije od četiri zadana pravca odaberemo dva "fiksna" pravca. Zatim promatramo dva slučaja. U prvom slučaju promatramo odabrane "fiksne" pravce i jedan od preostala dva, a zatim koristimo metodu 2 i promatramo dva para pravaca od zadana tri. Nakon toga, u drugom slučaju, promatramo odabrane "fiksne pravce" i jedan od preostala dva pravca, različit od onog iz prvog slučaja, a zatim koristimo metodu 2. U konačnici, u svakom slučaju dobivamo da pravci prolaze istom točkom te zaključujemo da su sva četiri zadana pravca konkurentni.

Neka je točka  $T_1$  sjecište pravaca  $MN$  i  $QB$ , a točka  $T_2$  sjecište pravaca  $SR$  i  $QB$  (Slika 2.3).



Slika 2.3: Zadatak 2.

S obzirom na to da je trokut  $MNC$  jednakokračan s osnovicom  $\overline{MN}$ , vrijedi

$$\angle T_1MQ = \angle T_1NC = 180^\circ - \angle T_1NB,$$

a također su vršni kutovi  $\angle MT_1Q$  i  $\angle BT_1N$  jednaki.

Primjenom poučka o sinusima za trokute  $MT_1Q$  i  $BT_1N$  imamo

$$\frac{|QT_1|}{|MQ|} = \frac{\sin \angle T_1MQ}{\sin \angle MT_1Q} = \frac{\sin (180^\circ - \angle T_1NB)}{\sin \angle BT_1N} = \frac{\sin \angle T_1NB}{\sin \angle BT_1N} = \frac{|T_1B|}{|BN|}. \quad (2.1)$$

Analogno vrijedi

$$\angle T_2SQ = \angle T_2RA = 180^\circ - \angle T_2RB \quad \text{i} \quad \angle ST_2Q = \angle RT_2B$$

pa primjenom poučka o sinusima na trokute  $ST_2Q$  i  $RT_2B$  dobivamo

$$\frac{|QT_2|}{|SQ|} = \frac{\sin \angle T_2SQ}{\sin \angle ST_2Q} = \frac{\sin (180^\circ - \angle T_2RB)}{\sin \angle RT_2B} = \frac{\sin \angle T_2RB}{\sin \angle RT_2B} = \frac{|T_2B|}{|BR|}. \quad (2.2)$$

Kako su trokuti  $MSQ$  i  $NRB$  jednakokračni s osnovicama  $\overline{MS}$ , odnosno  $\overline{NR}$ , imamo da je

$$|MQ| = |SQ| \quad \text{i} \quad |BN| = |BR|.$$

Sada iz (2.1) i (2.2), odnosno

$$\frac{|QT_1|}{|BT_1|} = \frac{|MQ|}{|BN|}, \quad \frac{|QT_2|}{|BT_2|} = \frac{|SQ|}{|BR|}, \quad |MQ| = |SQ| \quad \text{i} \quad |BN| = |BR|,$$

slijedi da je

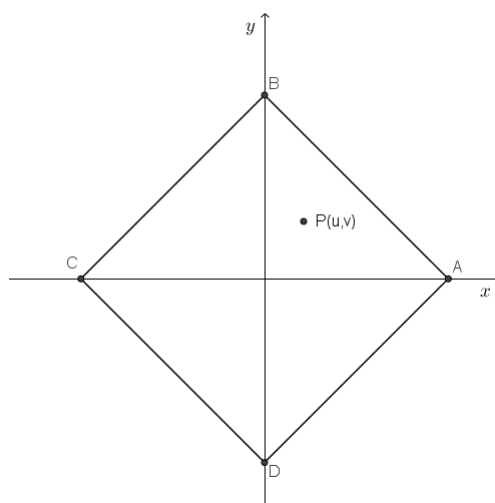
$$\frac{|QT_1|}{|BT_1|} = \frac{|QT_2|}{|BT_2|}.$$

Konačno, kako  $T_1$  i  $T_2$  leže na  $\overline{BQ}$ , slijedi da se točke  $T_1$  i  $T_2$  podudaraju.

Analogno bi vrijedilo i kada bi bismo s  $T_1$  i  $T_2$  označili presjek pravaca  $MN$  i  $AP$ , odnosno  $SR$  i  $AP$  pa zaključujemo da se pravci  $AP$ ,  $BQ$ ,  $SR$  i  $MN$  sijeku u jednoj točki.

**Zadatak 3.** (županijsko natjecanje iz matematike za 3. razred, 2002. godina) Ako je  $ABCD$  kvadrat i  $P$  bilo koja točka u njegovoj ravnini koja se ne podudara ni sa jednim vrhom kvadrata, dokažite da se okomice iz točaka  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $A$  redom na pravce  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  i  $DP$  sijeku u istoj točki.

**Rješenje.** Ovaj zadatak možemo riješiti koristeći metodu 2, postavljajući kvadrat u koordinatni sustav u ravnini kao na slici 2.4 jer točka  $P$  može biti bilo gdje u ravnini pa bi inače trebalo promatrati dosta slučajeva.



Slika 2.4: Zadatak 3.

Koordinate vrhova kvadrata i točke  $P$  su tada

$$A = (d, 0), \quad B = (0, d), \quad C = (-d, 0), \quad D = (0, -d) \quad \text{i} \quad P = (u, v).$$

Koeficijenti smjerova pravaca  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  i  $DP$  su tada

$$k_{AP} = \frac{v}{u-d}, \quad k_{BP} = \frac{v-d}{u}, \quad k_{CP} = \frac{v}{u+d} \quad \text{i} \quad k_{DP} = \frac{v+d}{u}$$

pa okomice iz točaka  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $A$  redom na te pravce imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} y - d &= \frac{d-u}{v}x, \\ y &= \frac{u}{d-v}(x+d), \\ y + d &= -\frac{u+d}{v}x, \\ y &= -\frac{u}{v+d}(x-d). \end{aligned}$$

Uočimo da se pri određivanju koeficijenata smjerova pravaca pojavljuje razlomak čiji nazivnik može biti i nula što bi značilo da je taj pravac okomit na  $x$ -os pa se jednadžba takvih pravaca ne može napisati u eksplicitnom već u implicitnom obliku.

Pretpostavimo da je  $u-d \neq 0$ ,  $u \neq 0$ ,  $u+d \neq 0$ ,  $v \neq 0$ ,  $d-v \neq 0$  i  $v+d \neq 0$ . Oduzimanjem prve i treće jednadžbe tada dobivamo

$$-2d = \frac{2d}{v}x \Leftrightarrow x = -v.$$

Sada, zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{d-u}{v}x - \frac{u+d}{v}x \Leftrightarrow 2y = \frac{dx - ux - ux - dx}{v} \\ &\Leftrightarrow 2y = \frac{-2ux}{v} \\ &\Leftrightarrow 2yv = -2ux \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{ux}{v} \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{u \cdot (-v)}{v} \\ &\Leftrightarrow y = u. \end{aligned}$$

Dakle, sjecište prve i treće okomice je točka  $(-v, u)$ .

Analogno bismo dobili za bilo koje dvije jednadžbe pa zaključujemo da se sva četiri pravca sijeku u točki  $(-v, u)$ .

Riješimo sada slučaj kada je  $v = 0$ . Tada je točka  $P$  oblika  $P(u, 0)$ , a koeficijenti smjerova pravaca  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  i  $DP$  su tada

$$k_{AP} = 0, \quad k_{BP} = -\frac{d}{u}, \quad k_{CP} = 0 \quad \text{i} \quad k_{DP} = \frac{d}{u},$$

odnosno jednadžbe pravaca  $AP$  i  $CP$  su  $y = 0$ .

Sada okomice iz točaka  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $A$  redom na te pravce imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \frac{u}{d}(x+d), \\ x &= 0, \\ y &= -\frac{u}{d}(x-d). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  iz prve jednadžbe u drugu dobivamo

$$y = \frac{u}{d}(0+d) \Leftrightarrow y = u.$$

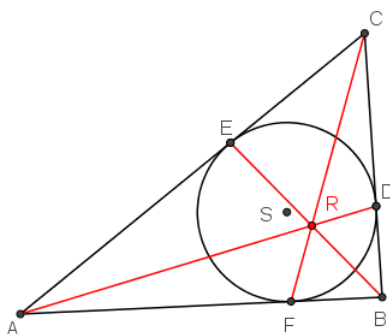
Prema tome, prve dvije okomice se sijeku u točki  $(0, u)$ . Analogno bismo dobili za bilo koje dvije jednadžbe pa zaključujemo da se sva četiri pravca sijeku u točki  $(0, u)$ . Analogni postupak primijenili bismo i kada bi uzeli da je  $u-d = 0$ ,  $u = 0$ ,  $u+d = 0$ ,  $d-v = 0$  ili  $v+d = 0$ .

**Zadatak 4.** (županijsko natjecanje iz matematike za 2. razred, 2001. godina) Trokutu  $ABC$  upisana je kružnica koja redom dodiruje stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  u točkama  $D$ ,  $E$  i  $F$ .

Dokažite da se pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  sijeku u istoj točki  $R$ .

**Rješenje.**

Zadatak ćemo riješiti pomoću metode 6, primijenjujući Cevin teorem. Označimo sa  $S$  središte upisane kružnice trokuta  $ABC$  (Slika 2.5).



Slika 2.5: Zadatak 4.

Prema S-S-K teoremu o sukladnosti trokuta imamo

$$\triangle AFS \cong \triangle AES \quad (|SF| = |SE| = r, \overline{AS} \text{ zajednička, } \angle AFS = \angle AES = 90^\circ)$$

pa je

$$|AF| = |AE|.$$

Analogno zaključujemo da je

$$|BF| = |BD| \quad \text{i} \quad |CD| = |CE|.$$

Sada imamo

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AE|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|CE|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

pa po Cevinom teoremu slijedi da se pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  sijeku u jednoj točki.

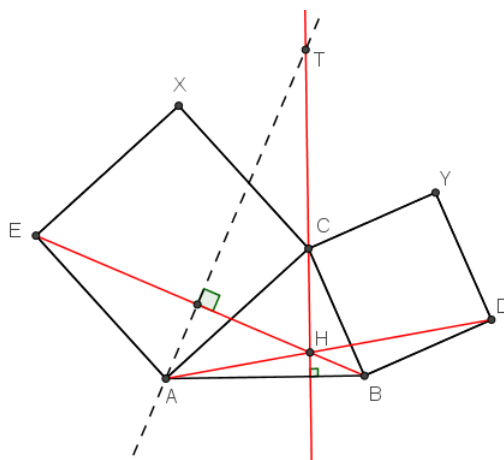
Točka  $R$  zapravo predstavlja poznatu Gergonneovu točku pa je rješenje ovog zadatka upravo dokaz teorema koji kaže da se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$ , pri čemu su točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  dirališta upisane kružnice trokuta  $ABC$  sa stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom, sijeku u istoj, takozvanoj, Gergonneovoj točki.

**Zadatak 5.** (državno natjecanje iz matematike za 2. razred, 2000. godina) Nad stranicama  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  šiljastokutnog trokuta  $ABC$  s vanjske strane konstruirani su kvadrati  $ACXE$  i  $CBDY$ . Dokažite da se pravci  $AD$  i  $BE$  sijeku na visini iz vrha  $C$  trokuta  $ABC$ .

**Rješenje.**

Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 5, primjenjujući Teorem 1.0.3.

Neka se pravci  $AD$  i  $BE$  sijeku u točki  $H$ . Konstruirajmo točku  $T$  takvu da je  $AT \perp EB$  i  $CT \perp AB$  (Slika 2.6).



Slika 2.6: Zadatak 5.

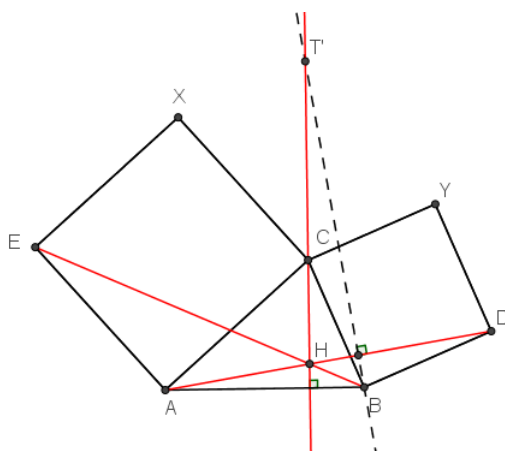
S obzirom na to da je

$$|EA| = |AC|, \quad \angle BEA = \angle TAC \quad \text{i} \quad \angle EAB = \angle ACT$$

(jer su to kutevi s okomitim kracima), zaključujemo da su trokuti  $EAB$  i  $ACT$  sukladni. Iz toga slijedi da je

$$|CT| = |AB|.$$

Konstruirajmo sada točku  $T'$  takvu da je  $BT' \perp AD$  i  $CT' \perp AB$  (Slika 2.7).



Slika 2.7: Zadatak 5.

Na analogan način dokazujemo da su trokuti  $ABD$  i  $T'CB$  sukladni pa slijedi da je

$$|CT'| = |AB|.$$

Dakle, imamo da je

$$|CT| = |AB| \quad \text{i} \quad |CT'| = |AB|$$

pa zaključujemo da se točke  $T$  i  $T'$  podudaraju.

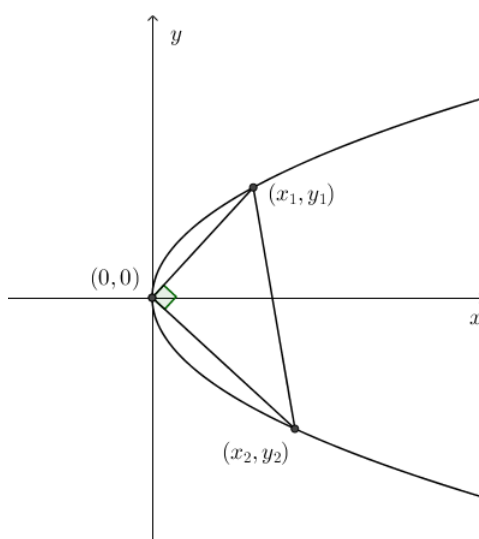
Primijetimo da visine trokuta  $ABT$  leže na pravcima  $BE$ ,  $AD$  i  $TC$ . Stoga se ti pravci sijeku u jednoj točki, odnosno u točki  $H$ . Kako visina trokuta  $ABC$  iz vrha  $C$  leži na pravcu  $CT$ , pravci  $AD$  i  $BE$  sijeku se na toj visini što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 6.** (državno natjecanje iz matematike za 4. razred, 1998. godina) Dokažite da sve tetive parabole  $y^2 = 4ax$ , koje su hipotenuze pravokutnog trokuta s pravim kutem u ishodištu, prolaze istom točkom.

### Rješenje.

Za rješavanje ovog zadatka koristimo metodu 2, odnosno, polazimo od pretpostavke da će svi pravci na kojima leže tetive biti konkurentni s  $x$ -osi pa određujemo sjecište svakog od njih s  $x$ -osi i dobivamo da je to uvijek ista točka.

Neka su  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  krajnje točke tetive koja je hipotenuza pravokutnog trokuta  $ABO$  (Slika 2.8), gdje je  $O$  ishodište koordinatnog sustava.



Slika 2.8: Zadatak 6.

Tetive  $\overline{OA}$  i  $\overline{OB}$  leže na okomitim pravcima s jednadžbama

$$OA \dots y = \frac{y_1}{x_1}x, \quad OB \dots y = \frac{y_2}{x_2}x.$$

Dakle, prema uvjetu okomitosti, vrijedi

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1x_2 = -y_1y_2.$$

Pretpostavimo da je  $x_1 \neq x_2$ . Neka je jednadžba pravca na kojem leži tetiva  $\overline{AB}$

$$y = mx + b.$$

Kako točke  $A$  i  $B$  pripadaju tom pravcu i paraboli,  $x_1$  i  $x_2$  su rješenja kvadratne jednadžbe

$$(mx + b)^2 = 4ax,$$

odnosno

$$m^2x^2 + x(2bm - 4a) + b^2 = 0.$$

Tada, primijenjujući Vieteove formule, dobivamo

$$x_1x_2 = \frac{b^2}{m^2}, \quad x_1 + x_2 = \frac{4a - 2mb}{m^2}.$$



Također vrijedi

$$\begin{aligned}
 y_1 y_2 &= (mx_1 + b)(mx_2 + b) \\
 &= m^2 x_1 x_2 + mbx_1 + mbx_2 + b^2 \\
 &= m^2 x_1 x_2 + mb(x_1 + x_2) + b^2 \\
 &= m^2 \cdot \frac{b^2}{m^2} + mb \cdot \frac{4a - 2mb}{m^2} + b^2 \\
 &= 2b^2 + \frac{4ab - 2mb^2}{m} \\
 &= \frac{4ab}{m}.
 \end{aligned}$$

Sada iz  $x_1 x_2 = -y_1 y_2$  dobivamo

$$\frac{b^2}{m^2} = -\frac{4ab}{m} \Leftrightarrow b = -4am.$$

Dakle, svaka tetiva koja je hipotenuza pravokutnog trokuta s vrhom u ishodištu, leži na pravcu čija je jednadžba oblika

$$y = mx - 4am = m(x - 4a),$$

a to je pravac koji prolazi kroz točku  $(4a, 0)$ .

Promotrimo sada poseban slučaj kada je  $x_1 = x_2$ . Tada je

$$y_1 = \sqrt{4ax_1} \quad \text{i} \quad y_2 = -\sqrt{4ax_1}.$$

Iz uvjeta okomitosti dobivamo

$$x_1^2 = 4ax_1 \Leftrightarrow x_1 = 4a.$$

Pravac koji prolazi točkama  $A$  i  $B$  je tada  $x = x_1$ , odnosno  $x = 4a$  pa tetiva  $\overline{AB}$  opet prolazi točkom  $(4a, 0)$ .

## Poglavlje 3

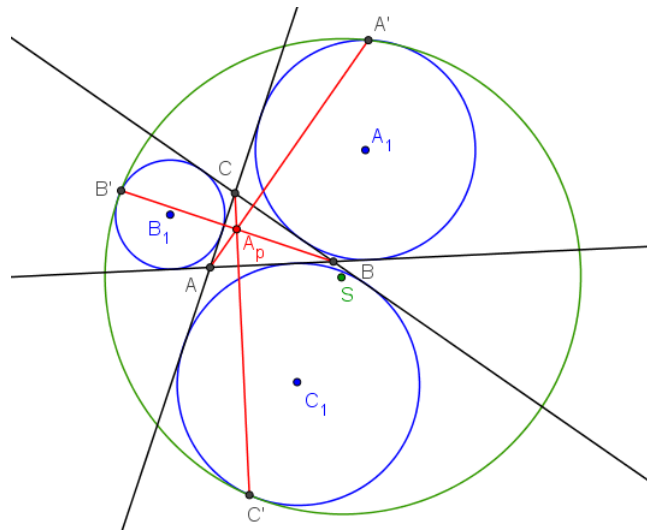
### Neke karakteristične točke

Konkurentnost pravaca usko je povezana i s mnogim poznatim točkama koje se definiraju kao sjecišta određenih pravaca. Tih pravaca je često više od dva pa je potrebno i opravdati takvu definiciju točke, odnosno dokazati da se pravci uistinu sijeku u samo jednoj točki. Najpoznatije takve točke su ortocentar (sjecište visina u trokutu), težište (sjecište težišnica u trokutu), središte opisane kružnice trokuta (sjecište simetrala stranica trokuta) te središte upisane kružnice trokuta (sjecište simetrala kutova trokuta), čije smo postojanje opravdali u prvom poglavlju. No, postoje i razni primjeri drugih točaka definiranih kao sjecišta nekih pravaca, ne samo u trokutu već u četverokutima, šesterokutima, kružnicama, elipsama, hiperbolama i slično. U ovom poglavlju navest ćemo neke primjere takvih točaka te za njih provesti dokaz, odnosno opravdati njihovu definiciju.

#### 3.1 Karakteristične točke trokuta

##### 3.1.1 Apolonijeva točka

Problem konstrukcije kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice poznat nam je kao Apolonijev problem. Iako je on poznat već stoljećima, Apolonijeva točka prvi put je uočena tek 1987. godine. Naime, neka je zadan trokut  $ABC$  i tri kružnice izvan trokuta  $ABC$ :  $k_A$  (koja dira stranicu  $\overline{BC}$  i pravce na kojima leže preostale dvije stranice),  $k_B$  (koja dira stranicu  $\overline{AC}$  i pravce na kojima leže preostale dvije stranice) te  $k_C$  (koja dira stranicu  $\overline{AB}$  i pravce na kojima leže preostale dvije stranice). Također, neka je zadana Apolonijeva kružnica, tj. kružnica  $k$  koja dira tri zadane kružnice (kružnicu  $k_A$  u točki  $A'$ , kružnicu  $k_B$  u točki  $B'$  i kružnicu  $k_C$  u točki  $C'$ ), pri čemu se kružnice  $k_A$ ,  $k_B$  i  $k_C$  nalaze unutar kružnice  $k$ . Tada su pravci  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  konkurentni i sijeku se u Apolonijevoj točki (Slika 3.1).



Slika 3.1: Apolonijeva točka

*Dokaz.* Da bismo dokazali da su pravci  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  konkurentni, koristit ćemo trilinearne koordinate. Neka omjer  $(x_1 : x_2 : x_3)$  predstavlja omjer orijentiranih udaljenosti do pravaca  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  redom. Tada su trilinearne koordinate vrhova trokuta  $ABC$

$$C(1 : 0 : 0), \quad A(0 : 1 : 0) \quad \text{i} \quad B(0 : 0 : 1).$$

S druge strane, trilinearne koordinate točke  $C_1$ , odnosno središta kružnice  $k_C$  su

$$C_1(-r_1 : r_1 : r_1),$$

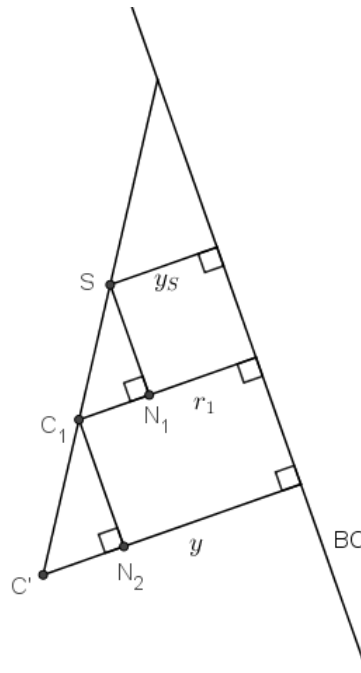
gdje je  $r_1$  polumjer kružnice  $k_C$ .

Ako sa  $R$  označimo polumjer Apolonijeve kružnice, a njezino središte sa  $S$ , tada je

$$|SC'| = R \quad \text{i} \quad |C_1C'| = r_1.$$

Spustimo sada okomice iz točaka  $C'$ ,  $C_1$  i  $S$  na pravac  $BC$ . Neka su  $x_S$ ,  $y_S$  i  $z_S$  udaljenosti točke  $S$ , tj. središta Apolonijeve kružnice do pravaca  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  redom.

Odredimo sada udaljenost točke  $C'$  do pravca  $BC$ , u oznaci  $y$ , iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.2.



Slika 3.2: Apolonijeva točka - dokaz

Dakle, imamo da je

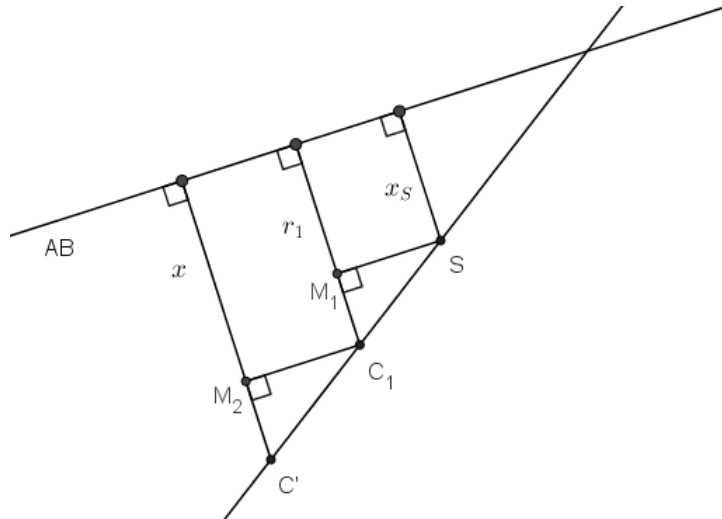
$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1N_1| = r_1 - y_S \quad \text{i} \quad |C'N_2| = y - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{|C'N_2|}{|C_1C'|} &= \frac{|C_1N_1|}{|SC_1|} = \frac{y - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - y_S}{R - r_1} \Leftrightarrow (y - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - y_S) \\ &\Leftrightarrow yR - yr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1y_S \\ &\Leftrightarrow y(R - r_1) = Rr_1 - r_1y_S \\ &\Leftrightarrow y = \frac{r_1(R - y_S)}{R - r_1}. \end{aligned}$$

Primijetimo da smo promatrali slučaj kada se točka  $S$  nalazi sa iste strane pravca  $BC$  kao i točke  $C$  i  $C'$ . No, kada bi se točka  $S$  nalazila sa suprotne strane pravca  $BC$  od točaka  $C$  i  $C'$  (što ovisi o trokutu  $ABC$ ) razlika bi bila u  $|C_1N_1| = r_1 + y_S$ , a dokaz bi se provodio analogno.

Analognim postupkom odredimo udaljenost točke  $C'$ , u oznaci  $x$ , do pravca  $AB$  iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.3.



Slika 3.3: Apolonijeva točka - dokaz

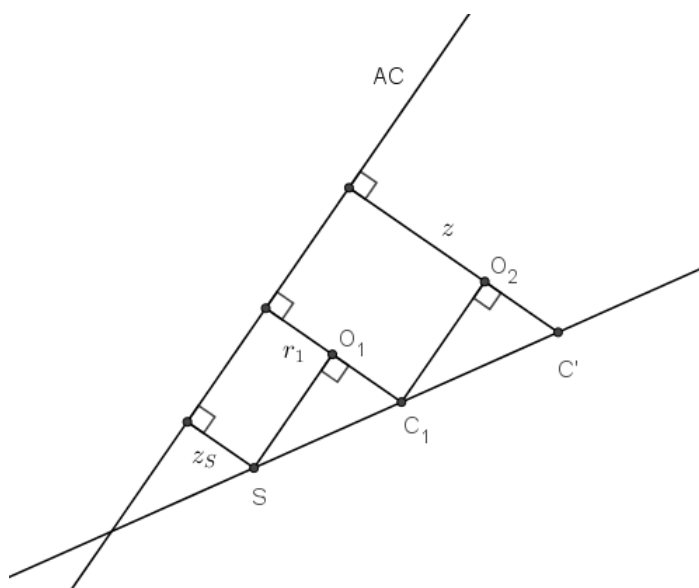
Dakle, imamo da je

$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1M_1| = r_1 - x_S \quad \text{i} \quad |C'M_2| = x - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{|C'M_2|}{|C_1C'|} &= \frac{|C_1M_1|}{|SC_1|} = \frac{x - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - x_S}{R - r_1} \Leftrightarrow (x - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - x_S) \\ &\Leftrightarrow xR - xr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1x_S \\ &\Leftrightarrow x(R - r_1) = Rr_1 - r_1x_S \\ &\Leftrightarrow x = \frac{r_1(R - x_S)}{R - r_1}. \end{aligned}$$

Također, iz omjera sličnih trokuta sa slike 3.4 dobivamo udaljenost točke  $C'$ , u oznaci  $z$ , do pravca  $AC$ .



Slika 3.4: Apolonijeva točka - dokaz

Dakle, imamo da je

$$|SC_1| = R - r_1, \quad |C_1O_1| = r_1 - z_S \quad \text{i} \quad |C'O_2| = z - r_1$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{|C'O_2|}{|C_1C'|} &= \frac{|C_1O_1|}{|SC_1|} = \frac{z - r_1}{r_1} = \frac{r_1 - z_S}{R - r_1} \Leftrightarrow (z - r_1)(R - r_1) = r_1(r_1 - z_S) \\ &\Leftrightarrow zR - zr_1 - Rr_1 + r_1^2 = r_1^2 - r_1z_S \\ &\Leftrightarrow z(R - r_1) = Rr_1 - r_1z_S \\ &\Leftrightarrow z = \frac{r_1(R - z_S)}{R - r_1}. \end{aligned}$$

Dakle, trilinearne koordinate točke  $C'$  su

$$-\frac{r_1(R - x_S)}{R - r_1} : \frac{r_1(R - y_S)}{R - r_1} : \frac{r_1(R - z_S)}{R - r_1}.$$

S obzirom da je  $\frac{r_1}{R - r_1}$  konstanta, a trilinearne koordinate su određene do na multiplikativnu konstantu, uzmimo da je

$$C' : -R + x_S : R - y_S : R - z_S.$$

Budući da su trilinearne koordinate točke  $C$  jednake  $1 : 0 : 0$ , trilinearne koordinate bilo koje točke koja leži na pravcu  $CC'$  su oblika

$$x : R - y_S : R - z_S.$$

Analognim postupkom dobivamo da su trilinearne koordinate točaka koje leže na pravcu  $AA'$  oblika

$$R - x_S : y : R - z_S,$$

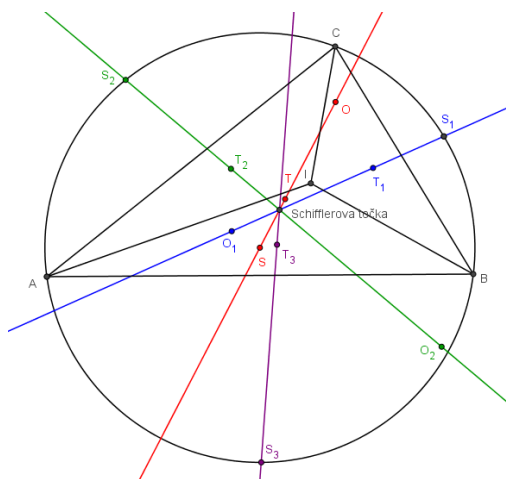
a onih koje leže na pravcu  $BB'$  oblika

$$R - x_S : R - y_S : z.$$

Dakle, zaključujemo da se pravci  $CC'$ ,  $AA'$  i  $BB'$  sijeku u točki s trilinearnim koordinatama  $R - x_S : R - y_S : R - z_S$ , odnosno ti pravci su konkurentni što je i trebalo dokazati.  $\square$

### 3.1.2 Schifflerova točka

Sljedeći primjer je Schifflerova točka, no kako bismo ju mogli definirati, moramo definirati najprije Eulerov pravac. Naime, ako je zadan trokut  $ABC$ , tada su ortocentar, težište i središte opisane kružnice tog trokuta kolinearne točke koje leže na takozvanom Eulerovom pravcu. Neka su sada u istom trokutu konstruirane simetrale kutova te sjecište tih simetrala, odnosno, središte upisane kružnice trokuta u oznaci  $I$ . Tada Eulerovi pravci trokuta  $ABC$ ,  $ABI$ ,  $BCI$  i  $ACI$  prolaze istom točkom koju nazivamo Schifflerova točka (Slika 3.5).

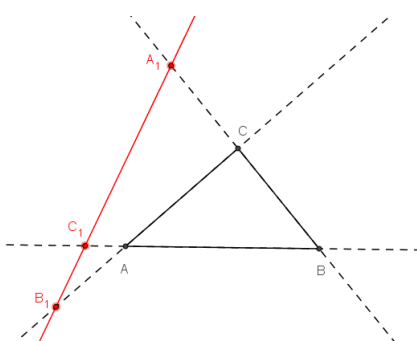


Slika 3.5: Schifflerova točka

*Dokaz.* Za dokaz postojanja Schifflerove točke koristit ćemo Menelajev teorem koji glasi:

**Teorem 3.1.1.** *Neka je dan trokut  $ABC$  i neka su točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  na pravcima  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  redom, pri čemu se  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  ne podudraju ni sa jednim vrhom trokuta  $ABC$ . Točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi*

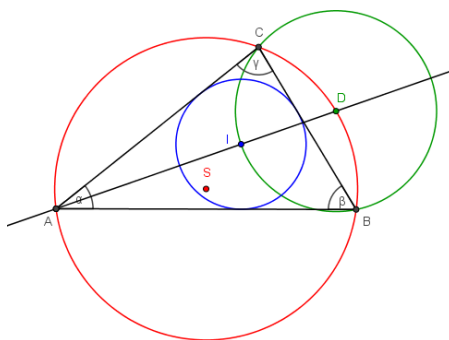
$$\left[ \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \right] \cdot \left[ \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \right] \cdot \left[ \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \right] = -1.$$



Slika 3.6: Menelajev teorem

Neka je  $k(S, R)$  opisana kružnica trokuta  $ABC$  polumjera  $R$ . Neka je  $k(I, r)$  upisana kružnica trokuta  $ABC$  polumjera  $r$ . Neka je točka  $T$  težište trokuta  $ABC$ . Tada je pravac  $ST$  Eulerov pravac trokuta  $ABC$ .

Konstruirajmo sada točku  $D$  takvu da je  $D = AI \cap k(S, R)$  (Slika 3.7).



Slika 3.7: Schifflerova točka - dokaz



Kako lukovima  $\widehat{BD}$  i  $\widehat{DC}$  pripadaju obodni kutevi jednake veličine ( $\angle BAD = \angle CAD$  zbog simetrale kuta), točka  $D$  je polovište luka  $\widehat{BC}$ .

Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  kutovi trokuta  $ABC$  kao na slici 3.7. Tada je

$$\angle CDA = \beta \quad (\text{obodni kutevi nad lukom } \widehat{CA}),$$

$$\angle ADB = \gamma \quad (\text{obodni kutevi nad lukom } \widehat{AB}),$$

$$\angle ICB = \frac{\gamma}{2} \quad \text{i} \quad \angle CBI = \frac{\beta}{2} \quad (\text{zbog simetrale kuta}).$$

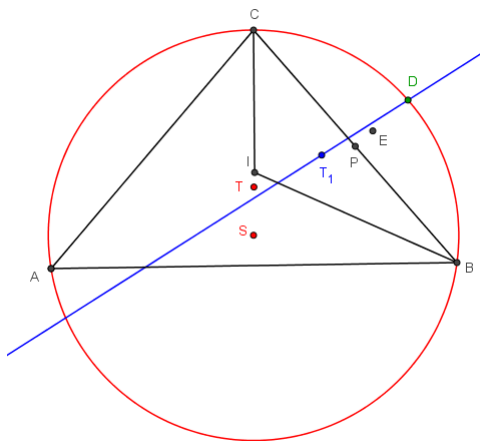
Sada neka je dana kružnica  $c$  kojoj je središte točka  $D$  i prolazi kroz  $B$  i  $C$  (očito je da takva postoji jer su  $\widehat{CD}$  i  $\widehat{BD}$  jednake duljine).

Tada je obodni kut nad lukom  $\widehat{CB}$  jednak  $\frac{\beta+\gamma}{2}$  (jer je središnji  $\beta + \gamma$ ) pa je onda je obodni kut nad lukom  $\widehat{BC}$  jednak  $180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$ .

Kut  $BIC$  jednak je  $180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$  (iz trokuta  $BCI$ ). Međutim, iz toga zaključujemo da je  $I$  na kružnici  $c$  pa je točka  $D$  i središte opisane kružnice trokuta  $BCI$  te stoga vrijedi

$$|CD| = |ID|. \quad (3.1)$$

Neka je točka  $T_1$  težište trokuta  $BCI$ . Tada je pravac  $DT_1$  Eulerov pravac trokuta  $BCI$ . Neka je točka  $P$  polovište stranice  $\overline{BC}$  (Slika 3.8).



Slika 3.8: Schifflerova točka - dokaz

Budući da su  $T$  i  $T_1$  točke težišta trokuta  $ABC$  i  $BCI$ , imamo

$$\frac{|AT|}{|TP|} = \frac{|IT_1|}{|T_1P|} = 2.$$

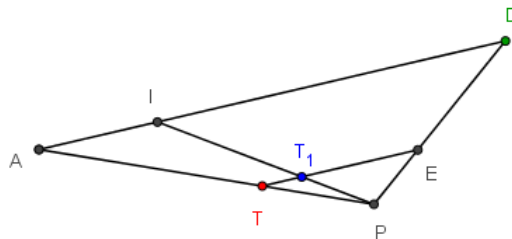
Dakle, iz Talesovog teorema o proporcionalnosti, zaključujemo da je  $TT_1 \parallel AI$ . Označimo sada  $E = TT_1 \cap SD$ . Uočimo da se pravci  $AT$ ,  $IT_1$  i  $DE$  sijeku u točki  $P$ . Naime,  $\overline{AP}$  i  $\overline{IP}$  su težišnice trokuta  $ABC$  i  $BCI$  pa  $T$  i  $T_1$  pripadaju tim dužinama. Točka  $E$  očito pripada pravcu  $SD$ , a kako je  $SD$  simetrala stranice  $\overline{BC}$ , i točka  $P$  pripada tom pravcu. Dakle, pravci  $DE$  i  $SD$  se podudaraju pa točka  $P$  pripada pravcu  $DE$ .

Iz sličnosti trokuta  $TT_1P$  i  $AIP$  te  $T_1EP$  i  $IDP$  sa slike 3.9 dobivamo

$$\frac{|TT_1|}{|T_1E|} = \frac{|AI|}{|ID|}, \quad (3.2)$$

a kako su trokuti  $APD$  i  $TPE$  slični i znamo da je  $|AT| = \frac{2}{3}|AP|$ , imamo

$$|DE| = \frac{2}{3}|DP|. \quad (3.3)$$



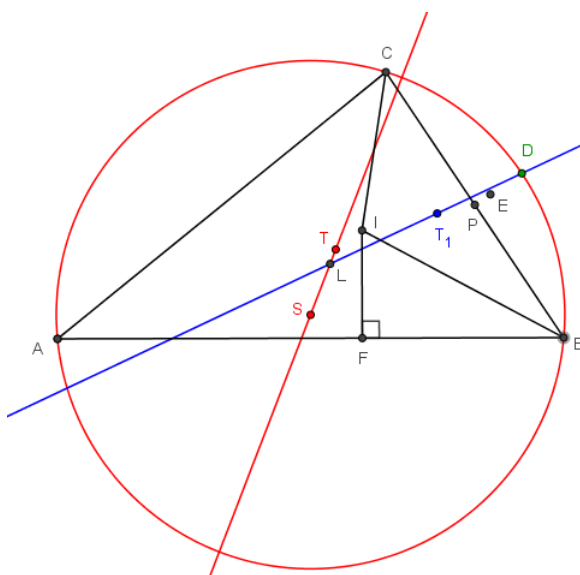
Slika 3.9: Schifflerova točka - dokaz

Kako pravac  $DT_1$  prolazi kroz trokut  $DPT$ , a pravac  $DP$  je jednak pravcu  $DS$ , zaključujemo da će Eulerov pravac  $DT_1$  trokuta  $BCI$  sjeći Eulerov pravac  $ST$  trokuta  $ABC$  između točaka  $T$  i  $S$ .

Neka se pravci  $DT_1$  i  $ST$  sijeku u točki  $L$ . Označimo sa  $F$  nožište okomice iz točke  $I$  na stranicu  $\overline{AB}$  (Slika 3.10).

S obzirom na to da je  $\angle BAD = \angle BCD$ , trokuti  $AFI$  i  $CPD$  su slični pa slijedi

$$\frac{|IA|}{|CD|} = \frac{|FI|}{|PD|} = \frac{r}{|PD|}. \quad (3.4)$$



Slika 3.10: Schifflerova točka - dokaz

Kako je  $L$  na dužini  $\overline{TS}$ ,  $T_1$  na dužini  $\overline{ET}$ , a  $D$  na pravcu  $ES$ , ali izvan dužine  $\overline{ES}$ , možemo primijeniti Menelajev teorem na trokut  $TSE$  i pravac  $DL$  (na kojem leži i točka  $T_1$ ) pa zbog (3.1)-(3.4) dobivamo

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|ET_1|}{|TT_1|} \\
 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|ID|}{|AI|} \\
 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{|SD|}{|ED|} \cdot \frac{|CD|}{|AI|} \\
 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{R}{\frac{2}{3}|DP|} \cdot \frac{|CD|}{|AI|} \\
 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{3R}{2|DP|} \cdot \frac{|DP|}{r} \\
 &= \frac{|TL|}{|SL|} \cdot \frac{3R}{2r},
 \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{|TL|}{|SL|} = \frac{2r}{3R}.$$

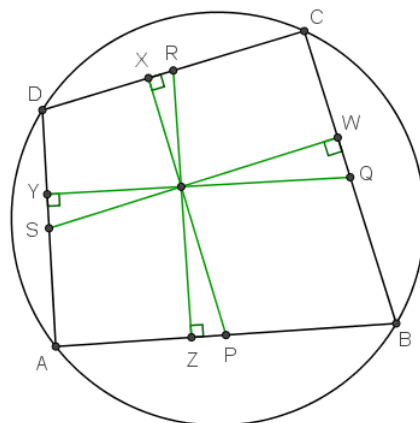
Analognim postupkom za trokute  $AIB$  i  $CIA$  dobili bismo točke koje pripadaju njihovim

Eulerovim pravcima i dužini  $\overline{ST}$  te ju dijele u istom omjeru kao i točka  $L$ . Dakle, sva četiri promatrana Eulerova pravca sijeku se u istoj točki što je i trebalo dokazati.  $\square$

## 3.2 Karakteristične točke četverokuta

### 3.2.1 Anticentar četverokuta

Neka je dan tetivni četverokut  $ABCD$ . Neka su točke  $P, Q, R$  i  $S$  polovišta stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  i  $\overline{AD}$ . Iz točaka  $P, Q, R$  i  $S$  konstruirajmo okomice na nasuprotnu stranicu. Sjecište okomice iz točke  $P$  na stranicu  $\overline{CD}$  označimo sa  $X$ , sjecište okomice iz točke  $Q$  na stranicu  $\overline{AD}$  označimo sa  $Y$ , sjecište okomice iz točke  $R$  na stranicu  $\overline{AB}$  označimo sa  $Z$  i sjecište okomice iz točke  $S$  na stranicu  $\overline{BC}$  označimo sa  $W$ . Dužine  $\overline{PX}, \overline{QY}, \overline{RZ}$  i  $\overline{SW}$  zovu se maltitude i sijeku se u istoj točki koju nazivamo anticentar četverokuta  $ABCD$  (Slika 3.11).

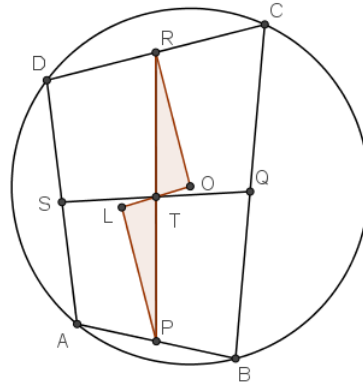


Slika 3.11: Anticentar četverokuta

*Dokaz.* Neka se pravci  $PR$  i  $QS$  sijeku u točki  $T$ . Konstruirajmo pravac  $OT$  pri čemu je točka  $O$  središte opisane kružnice  $k$  četverokuta  $ABCD$ . Zatim na pravcu  $OT$  konstruirajmo točku  $L$  takvu da je

$$|OT| = |TL|, \quad O \neq L.$$

Dokazat ćemo da su pravci koji prolaze točkom  $L$  i točkama  $P, Q, R$  i  $S$  okomiti na nasuprotnu stranicu (Slika 3.12).



Slika 3.12: Anticentar četverokuta - dokaz

Kako je  $\overline{PQ}$  srednjica trokuta  $ABC$ , onda je

$$|AC| = 2|PQ|,$$

a kako je  $\overline{RS}$  srednjica trokuta  $ACD$ , onda je

$$|AC| = 2|RS|.$$

Dakle,

$$|PQ| = |RS|.$$

Analogno bismo pokazali da je

$$|QR| = |SP|$$

pa zaključujemo da je  $PQRS$  paralelogram. Kako je točka  $T$  sjecište dijagonala četverokuta  $PQRS$ , zaključujemo da je

$$|PT| = |TR| \quad \text{i} \quad |QT| = |TS|.$$

Budući da je

$$|PT| = |TR|, \quad \angle RTO = \angle PTL \quad (\text{vršni kutevi}) \quad \text{i} \quad |TO| = |TL|,$$

zaključujemo da su trokuti  $OTR$  i  $LTP$  sukladni. Iz toga slijedi da je

$$\angle TPL = \angle TRO,$$

odnosno da su pravci  $PL$  i  $RO$  paralelni.

Kako je točka  $R$  polovište stranice  $\overline{CD}$  (koja je ujedno i tetiva opisane kružnice  $k$  četverokuta  $ABCD$  sa središtem u točki  $O$ ), zaključujemo da je

$$OR \perp CD,$$

odnosno

$$PL \perp CD.$$

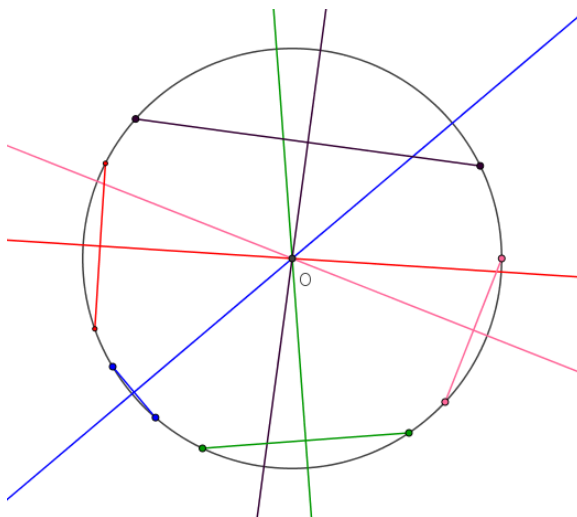
Analognim postupkom promatrajući trokute  $SLT$  i  $TOQ$  dobivamo da je  $SL \perp BC$ , promatrajući trokute  $RLT$  i  $TOP$  dobivamo da je  $RL \perp AB$  te promatranjem trokuta  $TLQ$  i  $OTS$  dobivamo da je  $QL \perp AD$ .

Dakle, dobili smo da su pravci  $PL$ ,  $QL$ ,  $RL$  i  $SL$  okomiti na nasuprotne stranice što je i trebalo dokazati.  $\square$

### 3.3 Karakteristične točke kružnice

#### 3.3.1 Simetrane tetiva kružnice

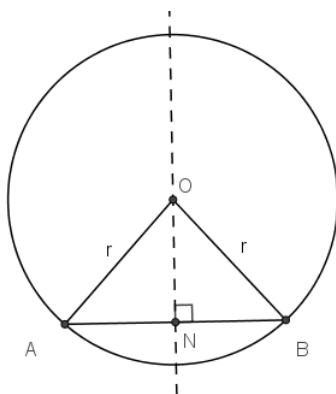
Neka je dana kružnica sa središtem u  $O$  polumjera  $r$ . Simetrane tetiva te kružnice tada se sijeku u središtu kružnice (Slika 3.13).



Slika 3.13: Simetrane tetiva kružnice

*Dokaz.* Dokazat ćemo da simetrala bilo koje tetive kružnice prolazi središtem te kružnice iz čega slijedi da se sve simetrale tetiva sijeku u središtu kružnice.

Neka je zadana kružnica  $k(O, r)$ . Promatrajmo tetivu  $\overline{AB}$  kružnice  $k$ . Označimo sa  $N$  nožište okomice iz točke  $O$  na tetivu  $\overline{AB}$  (Slika 3.14).



Slika 3.14: Simetrale tetiva kružnice - dokaz

Budući da je

$$|OA| = |OB| = r, \quad \angle ANO = \angle BNO = 90^\circ \quad \text{i} \quad \overline{ON} \text{ zajednička,}$$

trokuti  $ANO$  i  $BNO$  su sukladni.

Iz toga slijedi da je

$$|AN| = |BN|$$

pa je  $N$  polovište  $\overline{AB}$  i pravac  $ON$  je simetrala tetive  $\overline{AB}$ . Dakle, simetrala tetive  $\overline{AB}$  prolazi točkom  $O$  što je i trebalo dokazati.  $\square$

## 3.4 Karakteristične točke šesterokuta

### 3.4.1 Brianchonov teorem

Još jedan od primjera konkurentnih pravaca pronalazimo u sljedećem, takozvanom Brianchonovom teoremu:

**Teorem 3.4.1.** *U svakom tangencijalnom šesterokutu dijagonale koje nastaju spajanjem nasuprotnih vrhova prolaze istom točkom.*

Za dokazivanje Teorema 3.4.1. koristit ćemo nešto manje poznate pojmove potencije točke u odnosu na kružnicu i radikalne osi kružnica pa ćemo prije samog dokaza razjasniti sve te pojmove. Definirajmo najprije potenciju točke u odnosu na kružnicu  $k$ .

**Definicija 3.4.2.** Neka je  $p$  pravac koji prolazi točkom  $T$  i siječe kružnicu  $k$  u točkama  $P_1$  i  $P_2$ . Tada je potencija točke  $T$  u odnosu na kružnicu  $k$  jednaka produktu

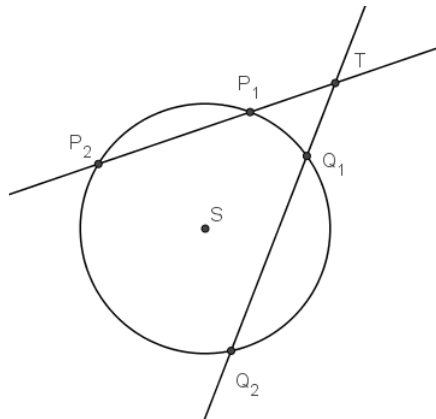
$$|TP_1| \cdot |TP_2|.$$

**Teorem 3.4.3.** Neka se točka  $T$  nalazi izvan kružnice  $k(S, r)$ . Tada je produkt  $|TP_1| \cdot |TP_2|$  konstanta bez obzira na pravac  $p$  te vrijedi

$$|TP_1| \cdot |TP_2| = |TS|^2 - r^2 = d^2,$$

gdje je  $d$  udaljenost točke  $T$  do dirališta tangente iz nje na kružnicu.

*Dokaz.* Uzmimo pravac  $q$  koji prolazi točkom  $T$  i siječe kružnicu u točkama  $Q_1$  i  $Q_2$  (Slika 3.15).



Slika 3.15: Potencija točke obzirom na kružnicu - dokaz

Kako je

$$\angle Q_1P_2P_1 = \angle Q_1Q_2P_1 \quad (\text{obodni kutevi nad lukom } \widehat{Q_1P_1}),$$

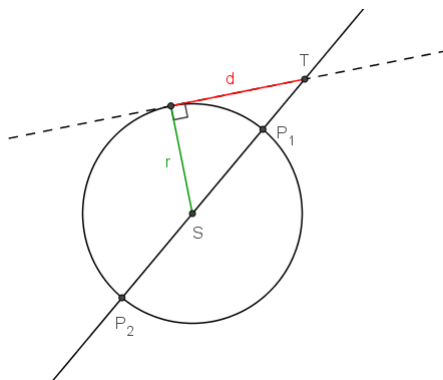
trokuti  $TQ_1P_2$  i  $TP_1Q_2$  su slični pa imamo

$$\frac{|TP_1|}{|TQ_2|} = \frac{|TQ_1|}{|TP_2|} \Leftrightarrow |TP_1| \cdot |TP_2| = |TQ_1| \cdot |TQ_2|.$$

Dakle, bez obzira na pravac  $p$  potencija točke je konstantan produkt.

Zanimljiv je slučaj kada pravac  $p$  prolazi kroz središte  $S$  kružnice  $k$ . Neka je polumjer kružnice  $k$  jednak  $r$  (Slika 3.16).





Slika 3.16: Potencija točke obzirom na kružnicu - dokaz

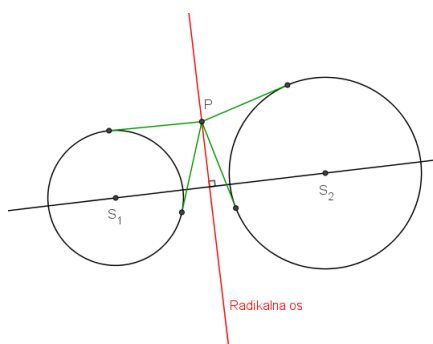
Tada je potencija točke  $T$  obzirom na kružnicu  $k$

$$\begin{aligned} |TP_1| \cdot |TP_2| &= (|TS| - r)(|TS| + r) \\ &= |TS|^2 - r^2 = d^2, \end{aligned}$$

gdje je  $d$  udaljenost točke  $T$  do dirališta tangente iz  $T$  na  $k$ . □

Za dokaz Brianchonovog teorema koristimo teorem o radikalnim kružnicama koji glasi:

**Teorem 3.4.4.** *Neka su dane dvije kružnice  $k_1$  i  $k_2$  polumjera  $r_1$  i  $r_2$  redom koje se ne dodiruju. Iz točke  $P$  na te dvije kružnice povučene su tangente. Geometrijsko mjesto točaka  $P$  za koje vrijedi da su im udaljenosti do dirališta svih tangenti jednake pravac je koji je okomit na spojnicu središta kružnica i naziva se radikalna os (Slika 3.17).*



Slika 3.17: Radikalna os

*Dokaz.* Neka je  $d = d(S_1, S_2)$ , gdje su  $S_1$  i  $S_2$  središta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  redom. Tada postoje  $a$  i  $b$  takvi da je

$$a + b = d \quad \text{i} \quad a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Naime, uvrštavanjem  $b = d - a$  u  $a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2$  dobivamo

$$\begin{aligned} a^2 - (d - a)^2 = r_1^2 - r_2^2 &\Leftrightarrow a^2 - d^2 + 2ad - a^2 = r_1^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow 2ad = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}. \end{aligned}$$

Kako se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  ne dodiruju, vrijedi

$$r_1 + r_2 < d \Leftrightarrow r_2 < d - r_1.$$

Kako su obje strane nejednakosti veće od nule, kvadriranjem dobivamo

$$r_2^2 < d^2 - 2dr_1 + r_1^2 < d^2 + r_1^2$$

pa je

$$r_1^2 - r_2^2 + d^2 > 0.$$

Kako je  $r_1 < d$ , imamo

$$r_1^2 - r_2^2 < r_1^2 < d^2$$

pa je

$$r_1^2 - r_2^2 + d^2 < 2d^2$$

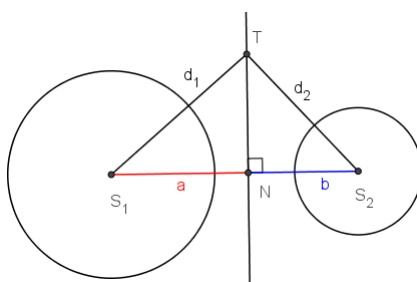
i

$$a < \frac{2d^2}{2d} = d.$$

Dakle, vrijedi

$$0 < a, b < d.$$

Sada s  $N$  označimo točku na dužini  $\overline{S_1S_2}$  koja ima svojstvo  $|S_1N| = a$ . Dakle,  $|S_2N| = b$ . Kako je  $a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2$ , iz Teorema 3.4.3. prepoznavamo da su to potencije točke  $N$  u odnosu na zadane kružnice te znamo da su one jednake kvadratima udaljenosti točke  $N$  do dirališta tangenti iz nje na te kružnice. Dakle, te udaljenosti su jednake pa  $N$  zadovoljava tražena svojstva. Povucimo sada okomicu  $r$  iz točke  $N$  na pravac  $S_1S_2$ . Neka je  $T$  neka točka na toj okomici i neka je ona od  $S_1$  i  $S_2$  redom udaljena za  $d_1$  i  $d_2$  (Slika 3.18).



Slika 3.18: Radikalna os - dokaz

Tada iz Pitagorina teorema dobivamo

$$d_1^2 - a^2 = d_2^2 - b^2.$$

Zbrajanjem jednakosti  $a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2$  s prethodnom dobivamo

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

pa sada imamo jednakost potencija točke  $T$  s obzirom na zadane kružnice i zaključujemo, kao i kod točke  $N$ , da i  $T$  zadovoljava zadani uvjet. Dakle, sve točke na osi  $r$  zadovoljavaju taj uvjet.

Sad znamo da sve točke na pravcu  $r$  imaju zadano svojstvo, ali možda ima negdje još takvih točaka. Dakle, treba dokazati obrat. Pretpostavimo da postoji takva točka  $M$  i neka se nalazi između pravaca  $p$  i  $q$ , koji su okomice iz  $S_1$  i  $S_2$  na pravac  $S_1S_2$ . Označimo opet njezine udaljenosti od  $S_1$  i  $S_2$  redom s  $d_1$  i  $d_2$  (Slika 3.19). Tada je zbog jednakosti potencija

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

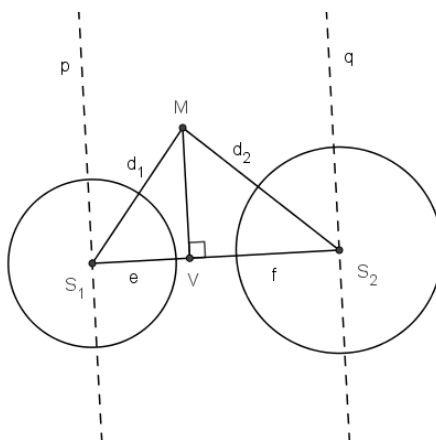
Neka je  $V$  nožište okomice iz  $M$  na  $S_1S_2$  i neka je  $|S_1V| = e$  i  $|S_2V| = f$ . Tada je iz Pitagorina teorema

$$d_1^2 - e^2 = d_2^2 - f^2.$$

Oduzimanjem prethodne dvije jednakosti dobivamo

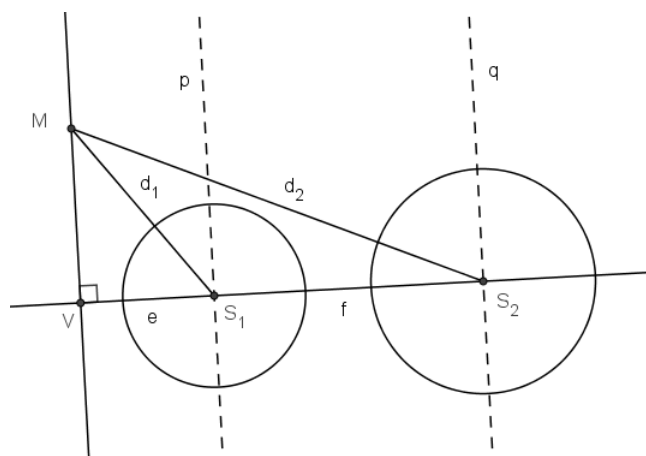
$$e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

a vrijedi i  $e + f = d$  pa smo dobili sustav za  $e$  i  $f$ , koji smo već rješavali, i on ima jedinstveno rješenje. Znači,  $e = a$  i  $f = b$ , gdje su  $a$  i  $b$  vrijednosti koje smo dobili prije te je  $V = N$ , odnosno  $M \in r$ .



Slika 3.19: Radikalna os - dokaz

Promotrimo sada slučaj kada se točka  $M$  nalazi "lijevo" od pravca  $p$  kao na slici 3.20 (analogno se pokaže kada je  $M$  "desno" od  $q$ ).



Slika 3.20: Radikalna os - dokaz

Neka su opet  $d_1$  i  $d_2$  njezine udaljenosti do  $S_1$  i  $S_2$ , te neka je  $V$  nožište okomice iz  $M$  na  $S_1S_2$ . Opet označimo  $|S_1V| = e$  i  $|S_2V| = f$  te imamo da je  $f - e = d$ . Tada, zbog zadanog svojstva točke  $M$ , vrijedi

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2,$$

dok iz Pitagorina teorema imamo

$$d_1^2 - e^2 = d_2^2 - f^2.$$

Oduzimanjem prethodne dvije jednakosti dobivamo

$$e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Uvrštavanjem  $f = d + e$  u  $e^2 - f^2 = r_1^2 - r_2^2$  dobivamo

$$\begin{aligned} e^2 - (d + e)^2 &= r_1^2 - r_2^2 \Leftrightarrow e^2 - d^2 - 2ed - e^2 = r_1^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow -2ed = r_1^2 - r_2^2 + d^2 \\ &\Leftrightarrow e = -\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}. \end{aligned}$$

Prije smo pokazali da je  $r_1^2 - r_2^2 + d^2 > 0$  pa zaključujemo da smo dobili da je  $e < 0$  što je nemoguće. Dakle, ne postoji takva točka  $M$  koja se nalazi "lijevo" od pravca  $p$  i zadovoljava zadano svojstvo.

Analogno se pokaže i da točka  $M$  ne može biti na pravcima  $p$  i  $q$  te da je jedina točka sa zadanim svojstvom na  $S_1S_2$  točka  $N$ .  $\square$

Sada još iskažimo i dokažimo teorem o radikalnim osima za tri kružnice.

**Teorem 3.4.5.** *Neka su zadane tri kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  od kojih se nikoje dvije ne sijeku. Neka su pravci  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$  radikalne osi kružnica  $k_2$  i  $k_3$ ,  $k_1$  i  $k_3$ ,  $k_1$  i  $k_2$  redom. Tada su pravci  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$  konkurentni (Slika 3.21).*

*Dokaz.* Označimo s  $R$  presjek pravaca  $r_1$  i  $r_2$ . Označimo udaljenosti točke  $R$  do dirališta tangenti, koje su iz nje povučene na kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ , s  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  redom.

Kako je  $R \in r_1$ , vrijedi

$$d_2 = d_3,$$

a kako je  $R \in r_2$ , imamo i

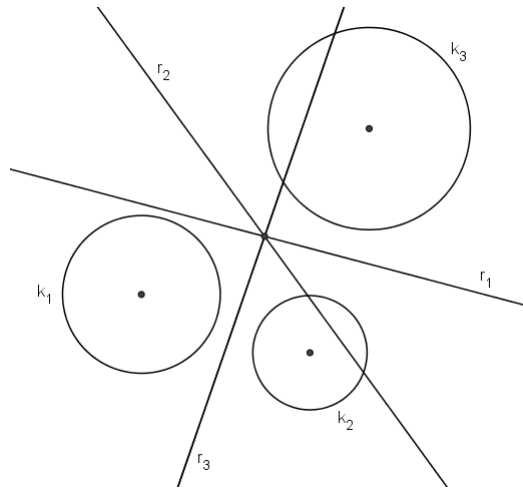
$$d_1 = d_3.$$

To znači i da je

$$d_1 = d_2$$

pa je  $R \in r_3$ .

Znači, točka  $R$  pripada svim trima pravcima te su oni konkurentni.  $\square$



Slika 3.21: Teorem o radikalnim osima za tri kružnice

Sada dokažimo Brianchonov teorem.

*Dokaz (Brianchonov teorem).* Neka je zadan tangencijalni šesterokut  $ABCDEF$ . Neka su  $P, Q, R, S, T$  i  $U$  dirališta stranica šesterokuta i kružnice upisane tom šesterokutu kao na slici 3.22.

Uzmimo sada proizvoljnu duljinu  $|MN|$  te ju nanesimo na tangente kružnice tako da je  $|PG| = |QH| = |RI| = |SJ| = |TK| = |UL| = |MN|$ . Konstruirajmo sada kružnicu  $k_1$  koja ima središte u sjecištu okomica iz  $G$  i  $J$  na pravce  $PG$  i  $SJ$  redom i koja dira pravce na kojima leže nasuprotne stranice šesterokuta, odnosno pravce  $PG$  i  $SJ$  u točkama  $G$  i  $J$ . Zatim konstruirajmo kružnicu  $k_2$  koja ima središte u sjecištu okomica iz  $K$  i  $H$  na pravce  $TK$  i  $QH$  redom i koja dira pravce  $QH$  i  $TK$  u točkama  $H$  i  $K$ . Također, konstruirajmo kružnicu  $k_3$  čije je središte sjecište okomica iz  $L$  i  $I$  na pravce  $UL$  i  $RI$  redom i koja dira pravce  $RI$  i  $UL$  u točkama  $I$  i  $L$  (Slika 3.22).

Znamo da je

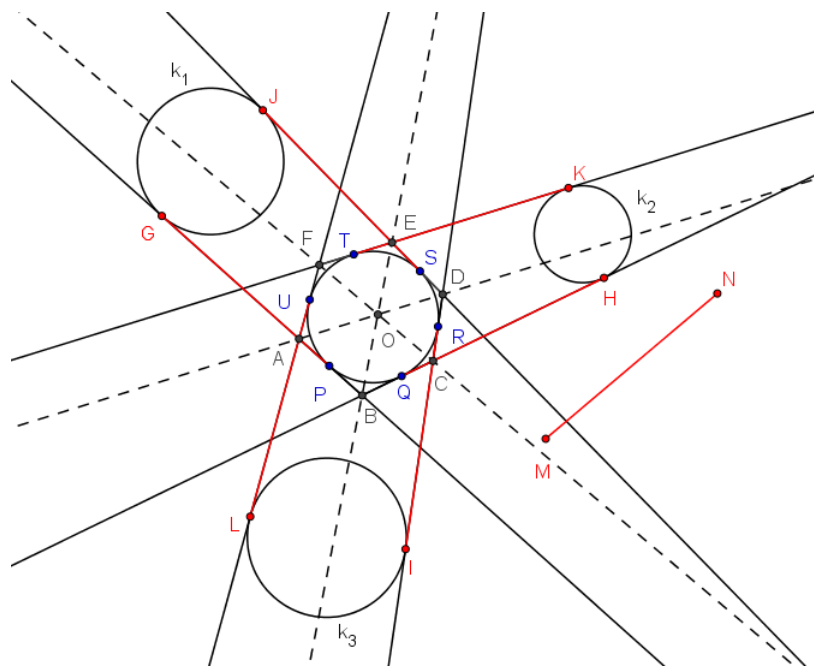
$$|TK| = |SJ|,$$

ali kako su  $TK$  i  $SJ$  tangente iz točke  $E$  na kružnicu upisanu šesterokutu, vrijedi i

$$|ET| = |ES|$$

pa dobivamo

$$|EJ| = |EK|.$$



Slika 3.22: Brianchonov teorem - dokaz

Dakle, točka  $E$  je na radikalnoj osi kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .  
S druge strane, iz istih razloga je i

$$|PB| = |BQ| \quad (\text{zbog tangenti}),$$

a znamo i da je

$$|PG| = |QH|$$

pa je

$$|BG| = |BH|.$$

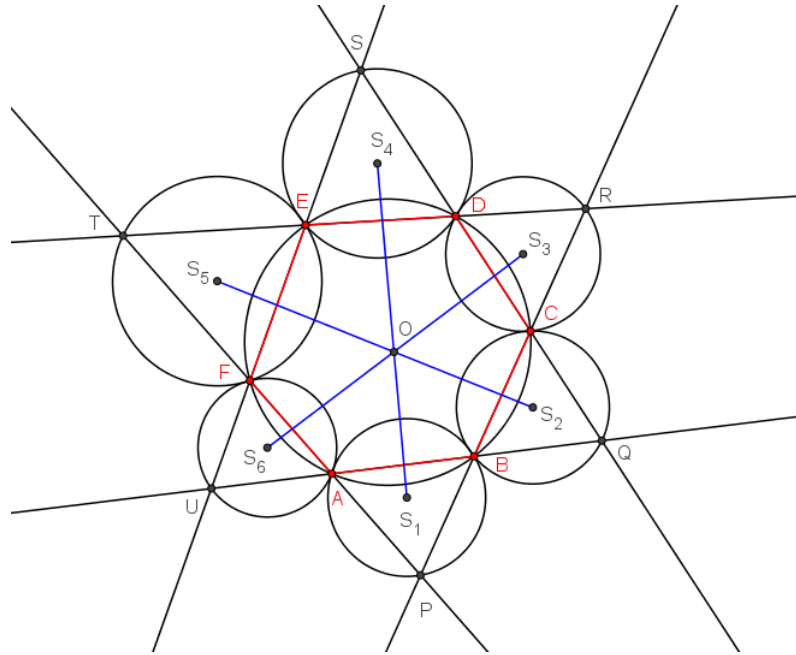
Dakle, i točka  $B$  je na istoj radikalnoj osi pa je ta os zapravo pravac  $BE$ . Analognim postupkom bismo dobili da je pravac  $CF$  radikalna os kružnica  $k_2$  i  $k_3$ , a pravac  $AD$  radikalna os kružnica  $k_1$  i  $k_3$ .

Dakle, prema Teoremu 3.4.5., zaključujemo da su pravci  $BE$ ,  $CF$  i  $AD$  konkurentni što je i trebalo dokazati.  $\square$

### 3.4.2 Daov teorem

Konkurentnost pravaca javlja se i u sljedećem teoremu:

**Teorem 3.4.6.** *Neka je zadan tetivni šesterokut  $ABCDEF$  te neka su točke  $P, Q, R, S, T$  i  $U$  sjecišta pravaca  $AF$  i  $BC$ ,  $AB$  i  $CD$ ,  $BC$  i  $DE$ ,  $CD$  i  $EF$ ,  $DE$  i  $AF$ ,  $AB$  i  $EF$  redom. Neka su  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  i  $S_6$  središta opisanih kružnica trokuta  $ABP, BCQ, CDR, DES, EFT$  i  $AFU$  redom. Tada se pravci  $S_1S_4, S_2S_5$  i  $S_3S_6$  sijeku u jednoj točki (Slika 3.23).*



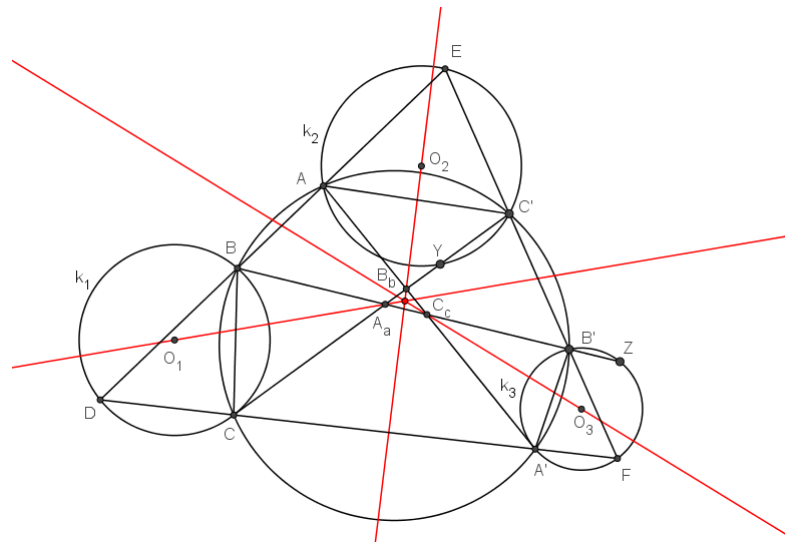
Slika 3.23: Daov teorem

Da bi smo dokazali Teorem 3.4.6., potrebne su nam dvije leme.

**Lema 3.4.7.** *Neka točke  $A, B, C, A', B'$  i  $C'$  leže na kružnici te neka je  $D = CA' \cap AB$ ,  $E = AB \cap B'C'$ ,  $F = B'C' \cap CA'$ ,  $A_a = BB' \cap CC'$ ,  $B_b = CC' \cap AA'$ ,  $C_c = AA' \cap BB'$ . Neka su točke  $O_1, O_2$  i  $O_3$  središta opisanih kružnica trokuta  $DBC, EC'A, FA'B'$  redom. Tada su pravci  $A_aO_1, B_bO_2$  i  $C_cO_3$  konkurentni.*

*Dokaz.* Označimo sa  $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$  opisane kružnice trokuta  $DBC, EC'A, FA'B'$  redom. Neka su  $d_{ia}, d_{ib}, d_{ic}$  udaljenosti točke  $O_i$  do pravaca  $AA', BB', CC', i = 1, 2, 3$  redom. Neka kružnica  $k_2$  siječe pravac  $CC'$  u  $Y$ , a kružnica  $k_3$  pravac  $BB'$  u  $Z$  (Slika 3.24).





Slika 3.24: Lema 3.4.7. - dokaz

Kako je

$$\angle EYC' = \angle EAC' \quad (\text{obodni kutevi nad lukom } \widehat{C'E}),$$

te kako je

$$\begin{aligned} \angle BCC' &= 180^\circ - \angle BAC' \quad (\text{iz tetivnog četverokuta } BCC'A) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle EAC') = \angle EAC', \end{aligned}$$

onda je

$$\angle EYC' = \angle BCC',$$

odnosno

$$EY \parallel BC.$$

Analogno je  $EY \parallel FZ \parallel BC$ .

Kako je

$$\angle YO_2C' = 2\angle YEC' = 2\angle ZFB' = \angle ZO_3B',$$

jednakokrani trokuti  $YO_2C'$  i  $ZO_3B'$  su slični.

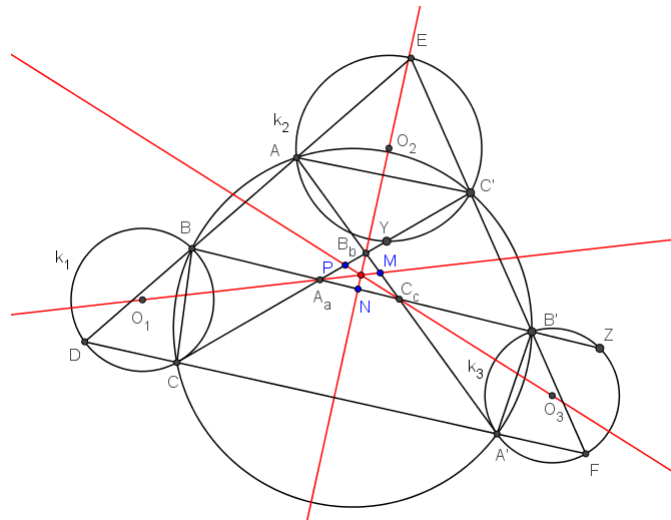
Iz toga slijedi

$$\frac{d_{2c}}{d_{3b}} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Slično, dobivamo da je

$$\frac{d_{3a}}{d_{1c}} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{i} \quad \frac{d_{1b}}{d_{2a}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Neka je sada  $M = A_a O_1 \cap B_b C_c$ ,  $N = B_b O_2 \cap C_c A_a$  i  $P = C_c O_3 \cap A_a B_b$  (Slika 3.25).



Slika 3.25: Lema 3.4.7. - dokaz

Neka su  $v_1$  i  $v_2$  duljine visina iz  $B_b$  i  $C_c$  u trokutima  $A_a M B_b$  i  $A_a M C_c$  redom. Tada zbog zajedničke stranice  $A_a M$  imamo

$$\frac{|MB_b|}{|MC_c|} = \frac{v_1}{v_2}.$$

No, kako su  $v_1$  i  $v_2$  duljine visina iz  $B_b$  i  $C_c$  u trokutima  $O_1 A_a B_b$  i  $O_1 A_a C_c$  redom, koji imaju zajedničku stranicu  $O_1 A_a$ , omjer njihovih površina je upravo  $\frac{v_1}{v_2}$ . Stoga dobivamo da je

$$\frac{|MB_b|}{|MC_c|} = \frac{P(\triangle O_1 A_a B_b)}{P(\triangle O_1 A_a C_c)}.$$

Analognim zaključivanjem dolazimo do

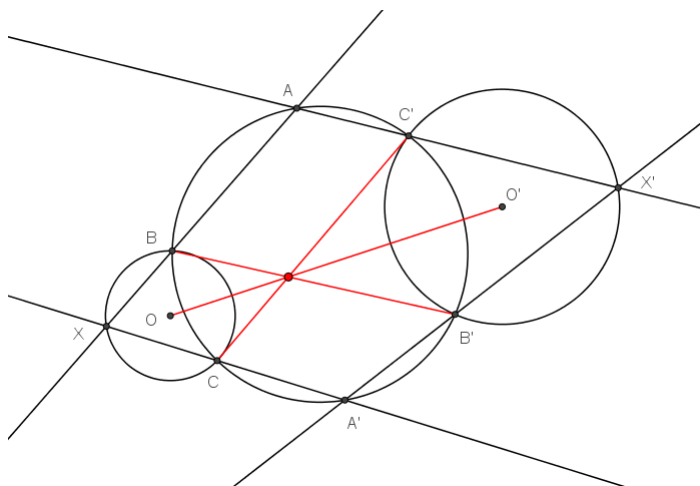
$$\begin{aligned}
 \frac{|MB_b|}{|MC_c|} \cdot \frac{|NC_c|}{|NA_a|} \cdot \frac{|PA_a|}{|PB_b|} &= \frac{P(\Delta O_1 A_a B_b)}{P(\Delta O_1 A_a C_c)} \cdot \frac{P(\Delta O_2 B_b C_c)}{P(\Delta O_2 B_b A_a)} \cdot \frac{P(\Delta O_3 C_c A_a)}{P(\Delta O_3 C_c B_b)} \\
 &= \frac{P(\Delta O_2 B_b C_c)}{P(\Delta O_3 B_b C_c)} \cdot \frac{P(\Delta O_3 C_c A_a)}{P(\Delta O_1 C_c A_a)} \cdot \frac{P(\Delta O_1 A_a B_b)}{P(\Delta O_2 A_a B_b)} \\
 &= \frac{d_{2a}}{d_{3a}} \cdot \frac{d_{3b}}{d_{1b}} \cdot \frac{d_{1c}}{d_{2c}} \\
 &= \frac{d_{2a}}{d_{1b}} \cdot \frac{d_{3b}}{d_{2c}} \cdot \frac{d_{1c}}{d_{3a}} \\
 &= \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_3} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

te sređivanjem dobivamo

$$\frac{|A_a N|}{|NC_c|} \cdot \frac{|C_c M|}{|MB_b|} \cdot \frac{|B_b P|}{|PA_a|} = 1$$

pa prema Cevinom teoremu za trokut  $A_a B_b C_c$  zaključujemo da su pravci  $A_a O_1$ ,  $B_b O_2$  i  $C_c O_3$  konkurentni.  $\square$

**Lema 3.4.8.** Neka točke  $A, B, C, A', B'$  i  $C'$  leže na kružnici te neka je  $X = AB \cap A'C$ ,  $X' = A'B' \cap AC'$ . Neka su  $O$  i  $O'$  središta opisanih kružnica  $k_1$  i  $k_2$  trokuta  $XBC$  i  $X'B'C'$  redom. Tada su pravci  $OO'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  konkurentni (Slika 3.26).



Slika 3.26: Lema 3.4.8. - dokaz

*Dokaz.* Kako je

$$\begin{aligned} \angle BXO &= \frac{180^\circ - \angle BOX}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{\angle BOX}{2} \\ &= 90^\circ - \angle XCB \quad (\text{jer je } \angle BOX \text{ središnji kut kuta } \angle XCB), \end{aligned}$$

te kako je

$$\begin{aligned} \angle XCB &= 180^\circ - \angle A'CB \\ &= \angle BAA' \quad (\text{iz tetivnog četverokuta } ABCA') \\ &= \angle XAA', \end{aligned}$$

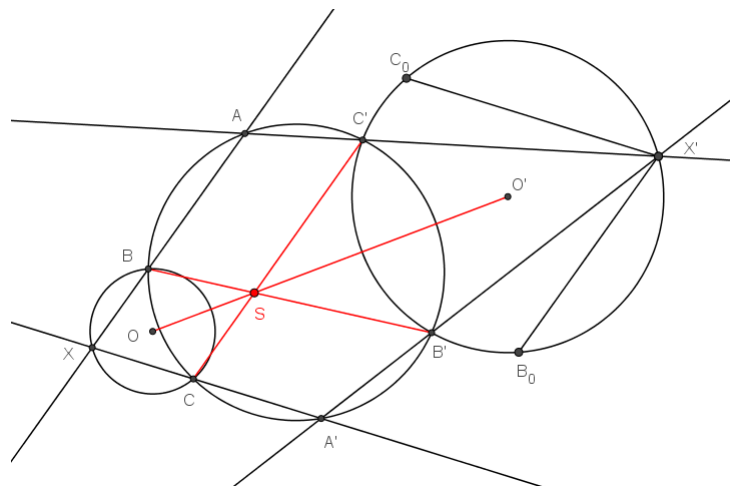
onda je  $\angle BXO = 90^\circ - \angle XAA'$  pa je

$$XO \perp AA'.$$

Analogno se dokaže da je  $X'O' \perp AA'$  pa je onda

$$X'O' \parallel XO.$$

Neka su  $B_0$  i  $C_0$  točke na opisanoj kružnici trokuta  $X'B'C'$  takve da je  $X'B_0 \parallel XB$  i  $X'C_0 \parallel XC$  (Slika 3.27).



Slika 3.27: Lema 3.4.8. - dokaz

Sada lako zaključimo da se pravci  $XX'$ ,  $OO'$ ,  $BB_0$  i  $CC_0$  sijeku u točki  $S$  koja je središte

homotetije kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

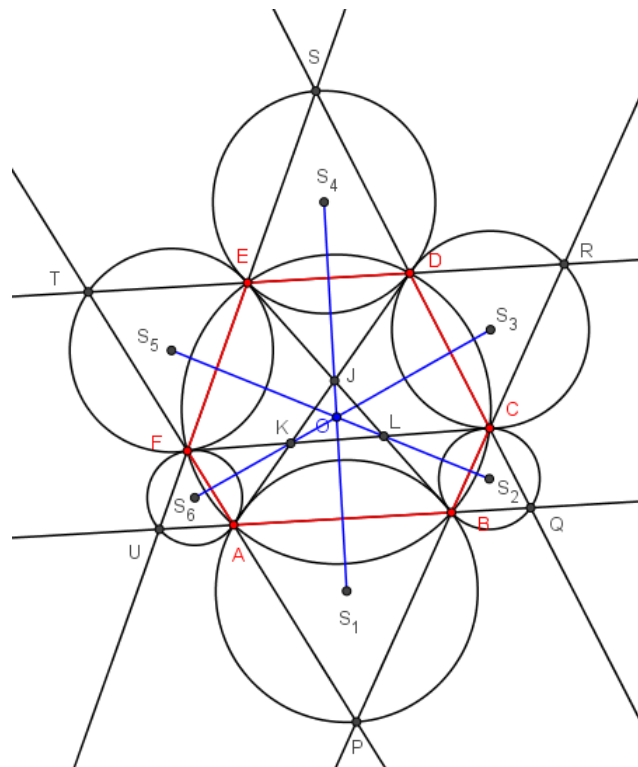
Kako je

$$\begin{aligned} \angle B_0B'C' &= 180^\circ - \angle B_0X'C' \quad (\text{iz tetivnog četverokuta } B_0B'C'X') \\ &= \angle BAC' \\ &= 180^\circ - \angle BB'C', \end{aligned}$$

točke  $B$ ,  $B'$  i  $B_0$  su kolinearne. Analogno zaključujemo da su i točke  $C$ ,  $C'$  i  $C_0$  kolinearne. Prema tome, pravci  $OO'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  su konkurentni.  $\square$

Sada dokažimo Daov teorem.

*Dokaz (Daov teorem).* Neka je  $J = BE \cap AD$ ,  $K = AD \cap CF$  i  $L = CF \cap BE$  (Slika 3.28).



Slika 3.28: Daov teorem - dokaz

Prema Lemi 3.4.7, slijedi da su  $S_4J$ ,  $S_6K$ ,  $S_2L$  konkurentni pravci. S druge strane, prema lemi 3.4.8., slijedi da su  $S_1$ ,  $J$  i  $S_4$  kolinearne točke,  $S_3$ ,  $K$  i  $S_6$  kolinearne točke te  $S_5$ ,  $L$  i  $S_2$  kolinearne točke pa su pravci  $S_1S_4$ ,  $S_2S_5$  i  $S_3S_6$  konkurentni što je i trebalo dokazati.  $\square$

# Bibliografija

- [1] A. Marić, *Trokut, 1. izdanje*, Element, Zagreb, 2007.
- [2] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, second edition*, Chapman & Hall/CRC, CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 2003.
- [3] C. Kimberling, S. Iwata, F. Hidetosi, *Crux Mathematicorum, Volume 13*, 1997.
- [4] K. Schiffler, G. Veldkamp, W. A. van der Spek, *Crux Mathematicorum, Volume 12*, 1986.
- [5] I. Grbac, *Karakteristične točke i pravci četverokuta*, Diplomski rad, Prirodoslovno matematički fakultet, Zagreb, 2015.
- [6] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Concurrent lines*:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Concurrent\\_lines](https://en.wikipedia.org/wiki/Concurrent_lines), (lipanj, 2017.)
- [7] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Trilinear coordinates*:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates), (srpanj, 2017.)
- [8] Wikipedia The Free Encyclopedia, *Radical axis*:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Radical\\_axis](https://en.wikipedia.org/wiki/Radical_axis), (srpanj, 2017.)
- [9] *Brianchon's theorem*:  
<http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Brianchon.html>, (srpanj, 2017.)
- [10] N. T. Dung, *A simple proof of Dao's theorem on six circumcenters*:  
<http://geometry-math-journal.ro/pdf/Volume6-Issue1/6.pdf>, (srpanj, 2017.)
- [11] B. Dakić, *Cevin poučak i neke osobite točke trokuta*:  
<http://mis.element.hr/fajli/384/21-11.pdf>, (srpanj, 2017.)

- [12] Z. Topić, *Menelajev teorem i neke primjene*:  
<https://www.halapa.com/odmor/pravipdf/menelej.pdf>, (srpanj, 2017.)
- [13] Natjecanja iz matematike u RH, *Državno natjecanje iz matematike, 3. razred - srednja škola - B varijanta, Dubrovnik, 3. travnja 2013.*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-drz-1234-zad+rj/2013-SS-drz-1234-B-zad.pdf>,  
(svibanj, 2017.)
- [14] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Omišalj, 4. - 7. svibnja 2005. godine, 3. razred*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2005/2005-SS-drz-1234-zad+rj/2005-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf>, (svibanj, 2017.)
- [15] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 25. ožujka 2002., 3. razred*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2002/2002-SS-zup-1234-zad+rj/2002-SS-zup-1234-zad%2brj.pdf>, (svibanj, 2017.)
- [16] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 6. travnja 2001., 2. razred*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2001/2001-SS-zup-1234-zad+rj/2001-SS-zup-1234-zad%2brj.pdf>, (svibanj, 2017.)
- [17] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Mali Lošinj, 10. - 13. svibnja 2000. godine, 2. razred*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2000/2000-SS-drz-1234-zad+rj/2000-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf>, (svibanj, 2017.)
- [18] Natjecanja iz matematike u RH, *Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske, Kraljevica, 7. - 10. svibnja 1998. godine, 4. razred*:  
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1998/1998-SS-drz-1234-zad+rj/1998-SS-drz-1234-zad%2brj.pdf>, (svibanj, 2017.)

# Sažetak

Konkurentni pravci su pravci koji se sijeku u istoj točki. U ovom radu opisano je sedam metoda dokazivanja konkurentnosti pravaca koje smo zatim primijenili na opravdavanje postojanja raznih točaka vezanih za trokut, četverokut, kružnicu, šesterokut koje su nastale presijecanjem tri ili više pravaca. Riješeno je i nekoliko primjera zadataka s natjecanja iz matematike provedenih u Republici Hrvatskoj u kojima je bilo potrebno dokazati konkurentnost pravaca.



# Summary

Concurrent lines are lines that intersect at the same point. Seven methods of proving the concurrency of lines have been described in this thesis, which we then applied to justify the existence of various points related to triangle, circle, quadrilateral, hexagon, which are result of intersecting three or more lines. A couple of examples from math competitions conducted in the Republic of Croatia have been solved in which it was necessary to prove the concurrency of lines.

# Životopis

Zovem se Maria Gračan. Rođena sam 19. listopada 1992. godine u Zagrebu gdje živim do 1999. godine nakon čega se selim u Slunj i pohađam Osnovnu školu Slunj. Po završetku osnovne škole, školovanje nastavljam u općoj gimnaziji u Slunju pri čemu svaki razred završavam s odličnim uspjehom. 2011. godine nakon polaganja državne mature upisujem Prirodoslovno matematički fakultet u Zagrebu, Matematički odsjek na kojem 2015. godine stječem zvanje prvostupnika edukacije matematike. Nakon toga, iste godine, upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer. U slobodno vrijeme bavim se kuglanjem.