Evolucijska teorija igara

Ileković, Antonija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Ileković

EVOLUCIJSKA TEORIJA IGARA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija igara je od svojeg začetka budila zanimanje ne samo matematičara nego i znanstvenika iz društvenih područja poput sociologije i ekonomije. Igrom se smatra svaka interakcija između agenata koji imaju dostupne poteze te postoji skup pravila koji definira isplate agentima ovisno o tome koja kombinacija poteza je odigrana. Kako se mnoge situacije iz svakodnevnog života mogu postaviti u takav okvir, alat koji bi rekao što je najbolje napraviti u određenoj situaciji i koji nam pomaže predvidjeti što će protivnik napraviti bio bi jako vrijedan. Kao jedno od rješenja dana je Nashova ravnoteža. To je vjerojatno najfascinantniji i najproučavaniji koncept koji nam teorija daje. Na prvi pogled, čini se sasvim prirodno za rješenje igre uzeti onu situaciju gdje nijedan igrač nema poticaj promijeniti svoju strategiju kako bi povećao svoju dobit. Ipak, Nashova ravnoteža u pozadini postavlja poprilično jake uvjete na ponašanje igrača te se zbog toga našla pod mnogim kritikama. Ona od igrača zahtjeva da bude 'racionalan' u smislu da odabire strategiju koja maksimizira njegovu korisnost, ali ne samo to. Igrač bira strategije pod pretpostavkom da su i ostali igrači racionalni te da i oni znaju da su preostali igrači racionalni[1]. Ako i prihvatimo ovu pretpostavku da su svi igrači savršeno racionalni te da se brinu samo za maksimiziranje svoje korisnosti, javlja se drugi problem. Naime, iako Nashova ravnoteža uvijek postoji, rijetko je jedinstvena. Kako onda znati u kojoj ravnoteži će igra završiti?

Evolucijska teorija igara daje okvir koji može pomoći kod ovih problema. Umjesto pretpostavke da igrači dolaze do ravnoteže pažljivim racionaliziranjem svojih poteza i mogućih poteza protivnika, ona omogućava da ravnotežu promatramo kao stanje do kojeg igrači dolaze učenjem na temelju pokušaja i pogrešaka. Temelje teorije postavio je Maynard Smith [3] gledajući biološku interpretaciju. On je tražio odgovor na pitanje koji fenotipi (varijacije u osobinama poput boje, oblika krila i slično) će prevladati u promatranoj populaciji. Kako korisnost koju jedinka ostvaruje u populaciji ne ovisi samo o tome što ona sama čini nego i o tome kakve su ostale jedinke, teorija igara je prikladan okvir. Čiste strategije su osobine koje mogu imati jedinke iz populacije dok su miješane strategije interpretirane kao udjeli populacije koji imaju određenu osobinu. Za korisnost Smith uzima broj potomaka kojeg će jedinka ostaviti uz pretpostavku da će potomci imati istu osobinu kao roditelj (tj. pratiti istu čistu strategiju). Nashova ravnoteža ovdje nije prikladna kako

[1] Detaljnije kritike mogu se naći u knjizi *Game Theory: A Critical Introduction*[2]

rješenje jer se za životinje teško može reći da su racionalne u smislu u kojem to Nashova ravnoteža zahtjeva. Umjesto toga Smith uvodi koncept evolucijski stabilne strategije[2]. On promatra koji je to sastav populacije koji je otporan na pojavu mutanata u njemu. Za mutante uzima pojavu jedniki koje počinju pratiti neku drugu čistu strategiju. Stabilnost u ovoj situaciji zahtjeva da mutantska strategija ostvaruje nižu korist od urođene, to jest, da se ne uspije proširiti u populaciji. U sociološkoj interpretaciji, evolucijski stabilno stanje je ono gdje mala grupica ljudi koja pokuša promijeniti strategiju ostvaruje nižu korist od ostatka populacije koji prati uvriježenu strategiju. Ovakvu strategiju bismo mogli nazvati konvencijom te nam ovaj pristup daje objašnjenje zašto je konvencije teško izmijeniti. Većina nema poticaj da se prebaci na novu strategiju jer vidi da pojedinici koji su pokušali prolaze lošije, dok pojedinici imaju poticaj da se priklone natrag većini. Pokazat će se da je evolucijski stabilna strategija uvijek Nashova ravnoteža, ali da nisu sve Nashove ravnoteže evolucijski stabilne. Ovaj pristup nam dakle smanjuje skup ravnoteža.

Daljni koncept koji se proučava jest dinamika replikacije[3] koji su uveli Taylor i Jonker [6]. Dok se evolucijski stabilna strategija bavila pojmom mutacije, sada situaciju promatramo iz konteksta selekcije. Ako populacija nije u stanju ravnoteže, hoće li s vremenom doći do tog stanja i koje su to strategije koje će preostati u ravnotežnom stanju. Odgovore na ta pitanja potražit ćemo pomoću sustava diferencijalnih jednadžbi koji će nam modelirati kretanje udjela populacije koji prate određenu strategiju. Pokazat će se da postoji veza između stabilnih stanja dinamike replikacije koja predstavlja evoluciju sastava populacije kroz vrijeme i evolucijski stabilnih strategija. Na taj način evolucijski stabilnu strategiju možemo shvatiti kao krajnju točku evolucije.

U ovom radu dat ćemo pregled rezultata iz evolucijske teorije igara koristeći kao interpretaciju primarno biološki kontekst. Prvo počinjemo s evolucijski stabilnom strategijom, dajemo njenu definiciju i pokazujemo da iako ne zahtjeva racionalnost igrača, evolucijski stabilna strategija odgovara Nashovoj ravnoteži igre. Zatim ilustriramo definiciju na nekoliko primjera te gledamo u kojim situacijama igra ima evolucijski stabilnu strategiju. Nakon toga dajemo još neke karakterizacije evolucijske stabilnosti preko invazijskih barijera i lokalne superiornosti. Na kraju promatramo dvostruko simetrične igre igre, tj. one gdje oba igrača dobivaju jednaku ispaltu. Pokazuje se da kod takvih igara postoji veza između evolucijski stabilne i socijalno optimalne strategije.

U drugom dijelu proučavamo koncept dinamike replikacije, tj. proučavamo kako se tijekom vremena mijenja sastav populacije. Počinjemo s definicijom dinamike replikacije i nekim općenitim konceptima iz teorije diferencijalnih jednadžbi. Zatim gledamo hoće li dominirane strategije izumrijeti iz populacije, a nakon toga kakva svojstva ima Nashova ravnoteža u ovom dinamičkom kontekstu. Zatim povezujemo statički i dinamički pristup

---

[2]evolutionary stable strategy

[3]replicator dynamics

tj. povezujemo stabilna stanja dinamike replikacije i evolucijski stabilne strategije. Prvo počinjemo s 2×2 igrama, a da bismo rezultat mogli poopćiti predstavljamo i Ljapunovu metodu određivanja stabilnosti stacionarnih stanja. Na kraju se opet vraćamo na dvostruko simetrične igre i dolazimo do tzv. fundamentalnog teorema prirodnog izbora. On nam kaže da kod ove vrste igara evolucija dovodi do monotonog povećanja prosječne korisnosti populacije. Posebno će iz toga slijediti da kod dvostruko simetričnih igara postoji ekvivalencija između evolucijski stabilnih strategija i asimptotskih stanja dinamike replikacije.

Poglavlje 1

Evolucijski stabilna strategija

U kontekstu evolucijske teorije igara koncentriramo se na proučavanje interakcija između jedinki iz iste populacije. Svaka jedinka iz populacije je genetski programirana da se ponaša na određeni način u susretima s drugim jedinkama. Ta ponašanja mogu biti npr. agresivnost kod borbe za resurse, boja jedinke i slično. Jedinke iz populacije gledamo kao igrače, a genetski zadana ponašanja jedinki interpretiramo kao čiste strategije dostupne svakom igraču. Skup čistih strategija označavamo sa $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$. Populacija se sastoji od različitih vrsta jedinki pa ćemo sastav populacije modelirati kao miješanu strategiju $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$. Ovdje nam vjerojatnost x_i predstavlja udio jedinki iz populacije koje prate pripadnu čistu strategiju s_i. Skup svih mogućih sastava populacije, tj. skup miješanih strategija dostupnih svakom od igrača, kao i inače označava simpleks $\Sigma = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_k) : x_1, x_2, ..., x_k > 0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1\right\}$. Nadalje, iako se populacija sastoji od mnogo jedinki, promatrat ćemo samo igre između dva igrača. Situacija koju modeliramo je iduća: iz populacije nasumično izvlačimo parove jedinki te promatramo korisnost $u(s_i, s_j)$ koju jedinka ostvaruje. Korisnost možemo interpretirati kao broj potomaka koji će nastaviti pratiti tu strategiju. Kako je izvlačenje nasumično, vjerojatnost da smo izvukli jedinku koja prati strategiju s_i je jednaka udjelu takvih jedinki u cjelokupnoj populaciji x_i. Na ovaj način možemo konstruirati isplate koje jedan sastav populacije ostvaruje kada se natječe s drugim sastavom kao

$$u(x, y) = \sum_{s_i \in S} \sum_{s_j \in S} x_i y_j u(s_i, s_j).$$

Kako su sve jedinke iz iste populacije i imaju dostupan isti skup čistih strategija, igre koje ćemo promatrati će biti simetrične igre dva igrača, tj. ako isplate prvom igraču prikažemo kao matricu isplata A, tada isplate njegovom protivniku možemo dati transponiranom matricom isplate A^τ.

Ovo poglavlje se temelji na knjizi Jörgena Weibulla *Evolutionary Game Theory*[8].

1.1 Definicija evolucijski stabilne strategije

Kod promatranja evolucije populacije jedna od stvari koja nas zanima je kada je evolucija došla do krajnje točke, tj. koji je to sastav populacije koji je otporan na pojavu mutacija u populaciji. Za takav sastav ćemo reći da je evolucijski stabilan, tj. za pripadnu strategiju x ćemo reći da je evolucijski stabilna strategija. Pokušajmo sada matematički modelirati što bi to značilo u našem kontekstu.

Pretpostavimo da imamo veliku populaciju jedinki sa sastavom $x \in \Sigma$. Iako po biološkoj interpretaciji koju smo dali, pojedinačne jedinke mogu igrati samo čiste strategije, matematički je to ekvivalentno situaciji gdje svaka jedinka iz populacije prati tu miješanu strategiju x. Pretpostavimo da je dio jedinki iz populacije mutirao, tj. počeo je pratiti neku drugu, mutantsku, strategiju $y \in \Sigma$. Označimo s $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$ udio populacije koji igra mutantsku strategiju. Sada nasumično biramo jedinku i njenog protivnika. Vjerojatnost da protivnik igra mutantsku strategiju y je ε, a vjerojatnost da igra urođenu strategiju x je $1-\varepsilon$. Isplata u ovakvoj igri je jednaka isplati u slučaju da jedinka igra protiv miješane strategije

$$w_\varepsilon = \varepsilon y + (1-\varepsilon)\, x.$$

Dakle, isplata za pojedinca koji igra urođenu strategiju je $u(x, w_\varepsilon)$, dok je za pojedinca koji igra mutantsku strategiju $u(y, w_\varepsilon)$. Kako isplate predstavljaju broj potomaka koji će nastaviti igrat tu strategiju, u populaciji će nastaviti prevladavat ona strategija koja daje veću isplatu u novonastaloj situaciji, tj. čija isplata nasuprot miješane strategije w_ε je veća. To je glavna ideja kod definiranja evolucijski stabilne strategije. Također bismo željeli da takva strategija bude otporna na sve mutacije dok god se one javljaju u dovoljno malim udjelima. Dakle došli smo do sljedeće definicije:

Definicija 1.1.1. *Strategija x je* evolucijski stabilna strategija *ako za svaku drugu strategiju $y \neq x$ postoji neki $\varepsilon_y \in \langle 0, 1\rangle$ takav da nejednakost*

$$u(x, w_\varepsilon) > u(y, w_\varepsilon) \tag{1.1}$$

vrijedi za svaki $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_y\rangle$, gdje je $w_\varepsilon = \varepsilon y + (1-\varepsilon)x$.

Skup evolucijski stabilnih strategija igre označavat ćemo

$$\Sigma^{ESS} = \{x \in \Sigma : x \ je\ evolucijski\ stabilna\ strategija\}$$

Sada kada imamo definiciju "rješenja" evolucijske igre, prirodno se zapitati u kakvom je odnosu s klasičnom Nashovom ravnotežom. Za očekivati je da će evolucijski stabilna strategija biti u ravnoteži sama sa sobom inače bi populacija počela divergirat od takvog sastava. To ćemo i pokazati u sljedećem teoremu:

Teorem 1.1.2. *Ako je $x \in \Sigma$ evolucijski stabilna strategija, tada je (x, x) Nashova ravnoteža igre.*

Dokaz. Neka je $y \in \Sigma,\ y \neq x$ neka druga strategija. Dovoljno je pokazati $u(x, x) \geq u(y, x)$. Neka je ε_y kao iz definicije 1.1.1, tada vrijedi definicijska nejednakost

$$u(x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x) > u(y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x),\ \forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_y$$

Kako je u neprekidna funkcija, puštanjem ε u nulu slijedi $u(x, x) \geq u(y, x)$. □

Dakle, uz oznaku $\Sigma^{NR} = \{x \in \Sigma : (x, x)\ je\ NR\}$, imamo tvrdnju $\Sigma^{ESS} \subseteq \Sigma^{NR}$. Nashova ravnoteža je u prirodnoj vezi s najboljim odgovorima pa istu vezu možemo primjeniti i na karakterizaciju skupa Σ^{ESS}:

Propozicija 1.1.3. $\Sigma^{ESS} = \{x \in \Sigma^{NR} : u(y, y) < u(x, y)\ \forall y \in \beta^*(x),\ y \neq x\}$ *gdje smo s $\beta^*(x)$ označili skup najboljih odgovora za x.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je lijevi skup sadržan u desnom. Neka je $x \in \Sigma^{ESS}$. Pokazali smo da je tada x i Nashova ravnoteža pa imamo jedan dio tvrdnje. Nadalje, uzmimo y iz skupa najboljih odgovora za x. Tada za njega vrijedi $u(y, x) \geq u(x, x)$ iz čega, za neki $\varepsilon > 0$, dobivamo $u(y, (1 - \varepsilon)x)) \geq u(x, (1 - \varepsilon)x))$. Pretpostavimo suprotno, tj. $u(y, y) \geq u(x, y)$. Iz ovoga dobivamo $u(y, \varepsilon y) \geq u(x, \varepsilon y)$. Zbrajanjem te dvije nejednakosti i korištenjem bilinearnosti od u slijedi $u(y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x) \geq u(x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x)$. Kako je ε bio proizvoljan, imamo kontradikciju s $x \in \Sigma^{ESS}$.

Obratno, neka je x Nashova ravnoteža i neka za svaki alternativni najbolji odgovor y vrijedi $u(y, y) < u(x, y)$. Tada za dovoljno mali ε vrijedi i $u(y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x) < u(x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x)$. Dakle x je ESS. □

Ekvivalent ovom rezultatu je tvrdnja da je $x \in \Sigma$ evolucijski stabilna strategija ako zadovoljava sljedeće kriterije:

$$u\,(y, x) \leq u\,(x, x)\,\forall y \tag{1.2}$$

$$u\,(y, x) = u\,(x, x) \Rightarrow u\,(y, y) < u\,(x, y)\,\forall y \neq x \tag{1.3}$$

Ovdje prva tvrdnja slijedi iz uvjeta Nashove ravnoteže, a druga iz uvjeta na alternativne najbolje odgovore. To je ustvari definicija evolucijske stabilnosti kako ju je originalno Smith postavio.

Promotrimo sada neke primjere igara i nađimo njihove evolucijski stabilne strategije ako postoje. Općeniti postupak za traženje ESS jest takav da prvo pronađemo simetričnu Nashovu ravnotežu, a zatim pomoću uvjeta 1.3 provjerimo je li to stvarno ESS.

Primjer 1.1.4. *Sokol-Golub igra*
Ovo je klasičan primjer iz teorije igara gdje se dva igrača natječu za zajednički resurs. Igrači imaju mogućnost ponašati se agresivno (Sokol) ili pasivno (Golub). Agresivni igrač u u susretu s pasivnim uzima sav resurs za sebe, dva pasivna igrača dijele resurs međusobno dok dva agresivna igrača ulaze u sukob koji prouzrokuje štetu za svakoga. Opisana situacija prikazana je u matrici:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Sokol & Golub \end{array} \\ \begin{array}{c} Sokol \\ Golub \end{array} & \begin{bmatrix} -1,-1 & 6,0 \\ 0,6 & 3,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Miješana strategija $\mathrm{p} = (p_1, p_2)$ *predstavlja udjele pojedinca iz populacije koje karakterizira ista vrsta ponašanja. Dakle* $p_1 \times 100\%$ *populacije su Sokolovi i* $p_2 \times 100\%$ *su Golubovi.*

Matrica isplate je:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ova igra ima tri Nashove ravnoteže: $(G,S), (S,G), \left(\frac{3}{4}S + \frac{1}{4}G, \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}G\right)$

Vidimo da je $\mathrm{x} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *jedina strategija koja daje simetričnu Nashovu ravnotežu te je jedini kandidat za* ESS. *Provjeravamo još vrijedi li uvjet 1.3.* $u(y,x) = u(x,x)$ *vrijedi* $\forall \mathrm{y} = (y, 1-y) \neq \mathrm{x}$. *Nadalje, imamo*

$$\begin{aligned} u(\mathrm{x}-\mathrm{y},\mathrm{y}) &= -\left(\frac{3}{4} - y\right)y + 6\left(-\frac{3}{4} + y\right)y + 3\left(-\frac{3}{4} + y\right)(1-y) \\ &= 7\left(y - \frac{3}{4}\right)y + 3\left(y - \frac{3}{4}\right)(1-y) \\ &= 4\left(y - \frac{3}{4}\right)y + 3\left(y - \frac{3}{4}\right) \\ &= 4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 > 0 \ \ \forall y \neq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dakle $x = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *je jedina evolucijski stabilna strategija za ovu igru. Iako su populacije sastavljene samo od Golubova ili Sokola u ravnoteži, nisu otporne na pojavu mutanata u njima. Dovoljno je da se jedna jedinka počne ponašati na drugi način i populacija je izbačena iz ravnoteže.*

Idući primjer je preuzet od Webba [7].

Primjer 1.1.5. *Omjer spolova u populaciji*
Razlog zašto je omjer spolova kod ljudi i većine životinjskih populacija 50:50 se može

formulirati pomoću evolucijski stabilne strategije. Promotrimo igru definiranu na sljedeći način:

1. *Udio muških jedinki u populaciji je* μ *te udio ženskih* $1 - \mu$.
2. *Svaka ženska jedinka se pari točno jednom i daje točno n potomaka.*
3. *Svaka muške jedinka se pari u prosjeku* $\frac{1-\mu}{\mu}$ *puta.*
4. *Samo ženske jedinke donose odluku o omjeru spolova među svojim potomcima.*

U ovom slučaju ne promatramo igru na ranije opisan način gdje se nasumično izvlače parovi jedinki te se oni nasumično susreću, nego promatramo tzv. "igru protiv polja"[1]*. To je situacija u kojoj isplata pojedincu ne ovisi o konkretnom protivniku, nego o ponašanju cijele populacije te isplata nije nužno linearna u vjerojatnostima s kojima se pojedina čista strategija javlja u populaciji.*

Modelirajmo isplate u ovoj igri. Pretpostavljamo da ženska jedinka ima izbor između dvije čiste strategije: daje sve muške potomke (m) ili daje sve ženske potomke (z). Tada miješana strategija $y = (p, 1 - p)$ *predstavlja situaciju u kojoj ženska jedinka daje udio p muških potomaka i ostalo ženske. Populaciju protiv koje ovakva jedinka igra predstavljena je miješanom strategijom* $x = (\mu, 1 - \mu)$*. Kao isplatu u ovoj situaciji ne možemo uzeti broj potomaka jer je on fiksiran, ali zato možemo gledati broj unuka koje će jedinka imati. Kako će se svaki muški potomak pariti* $(1 - \mu)/\mu$ *puta i svaki puta dati n potomaka, dok će svaki ženski potamak dati n potomaka, isplate možemo zapisati kao:*

$$u(m, x) = n^2 \frac{1 - \mu}{\mu} \tag{1.4}$$

$$u(z, x) = n^2 \tag{1.5}$$

$$u(y, x) = n^2 \left(p \left(\frac{1 - \mu}{\mu} \right) + (1 - p) \right) \tag{1.6}$$

Kako n ne ovisi o odabranoj strategiji te nas ne zanima konkretan broj potomaka, nego samo odnos muških i ženskih, možemo pojednostaviti situaciju i staviti $n = 1$*. Ovaj način definicije isplata isključuje mogućnost* $\mu = 0$*, ali za tu situaciju će se pokazati da je daleko od stabilne točke. Također možemo primijetiti da isplate stvarno nisu linearne po* μ.

Nađimo sada ESS ove igre. Kako za izvođenje uvjeta 1.2 nismo koristili linearnost od u po drugom argumentu, možemo taj uvjet iskoristiti i u ovom slučaju za eliminaciju nekih strategija iz razmatranja. Promotrimo iduća tri slučaja.

[1] game against the field

1. $\mu < \frac{1}{2}$, *tj. u populaciji je veći udio ženskih jedinki nego muških. Tada* $\forall\ \mu \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ *vrijedi*

$$u(m, x) = \frac{1}{\mu} - 1 > 2 - 2\mu = u(x, x)$$

   Dakle, nije zadovoljen uvjet 1.2 pa sastav populacije x ne može biti evolucijski stabilan. Ovo se čini razumnim jer jedinke koje daju samo muške potomke ostvaruju veću dobit od prosječne dobiti populacije pa je za očekivati da će udio muških jedinki u populaciji s vremenom rasti.

2. $\mu > \frac{1}{2}$, *tj. u populaciji je veći udio muških jedinki. Tada vrijedi*

$$u(z, x) = 1 > 2 - 2\mu = u(x, x)$$

   Analogno prethodnom slučaju, x ne može biti evolucijski stabilna strategija.

3. $\mu = \frac{1}{2}$, *tada za svaku strategiju* $y = (p, 1 - p)$, $p \in [0, 1]$ *vrijedi*

$$u(y, x) = 1 = u(x, x)$$

   Dakle u ovom slučaju nijedna strategija ne prolazi bolje od prosjeka populacije, tj. zadovoljen je uvjet 1.2. Ovo nam kaže da je strategija $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *potencijalno ESS.*

Kako smo za izvođenje uvjeta 1.3 koristili činjenicu o bilinearnosti od u, ne možemo ga koristiti u ovom slučaju za potvrdu evolucijske stabilnosti. Zato ćemo morati provjeriti vrijedi li za strategiju $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *originalna definicija 1.1.1. Uzmimo* $y = (p, 1 - p)$, $p \neq \frac{1}{2}$ *i* $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$. *Tada je*

$$w_\varepsilon = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x = \left(\varepsilon p + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon),\ \frac{1}{2} - \varepsilon\left(p - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Uz oznaku $\mu_\varepsilon = \varepsilon p + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) = \frac{1}{2} + \varepsilon\left(p - \frac{1}{2}\right)$, *imamo* $w_\varepsilon = (\mu_\varepsilon, 1 - \mu_\varepsilon)$.
Definicija funkcije isplate 1.6 sada daje

$$u(x, w_\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}$$
$$u(y, w_\varepsilon) = p\left(\frac{1 - \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\right) + (1 - p)$$

Razlika u isplatama iznosi

$$\begin{aligned} u(x, w_\varepsilon) - u(y, w_\varepsilon) &= \left(p - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - p\right)\left(\frac{1 - \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - p\right)\left(\frac{1 - 2\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Potrebno je još pokazati da je ta razlika pozitivna za svaki $p \neq \frac{1}{2}$. *Imamo*

$$p < \frac{1}{2} \implies \mu_\varepsilon < \frac{1}{2} \implies \frac{1-2\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} > 0 \implies u(x, w_\varepsilon) - u(y, w_\varepsilon) > 0$$

$$p > \frac{1}{2} \implies \mu_\varepsilon > \frac{1}{2} \implies \frac{1-2\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} < 0 \implies u(x, w_\varepsilon) - u(y, w_\varepsilon) > 0$$

Dakle $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *je evolucijski stabilna strategija.*

Grafički prikaz

Ekvivalenciju između danih kriterija evolucijske stabilnosti možemo ilustrirati na sljedeći način koji će nam kasnije biti od koristi u nekim dokazima. Definirajmo funkciju

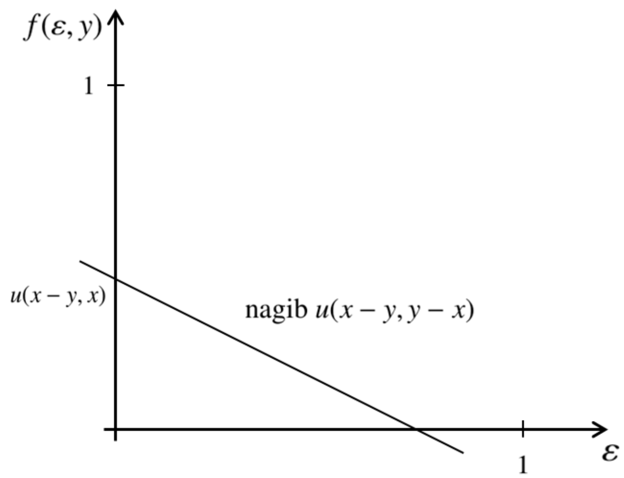
$$f : [0, 1] \times \Sigma \to \mathbb{R}$$
$$f(\varepsilon, y) = u(x - y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x)$$

Za danu strategiju $x \in \Sigma$ definicijsku nejednakost 1.1 možemo zapisati kao $f(\varepsilon, y) > 0$. Znači evolucijska stabilnost od x traži da funkcija f bude pozitivna za svaki $y \neq x$ uz dovoljno mali ε.

Po bilineranosti od u imamo

$$f(\varepsilon, y) = u(x - y, x) + \varepsilon u(x - y, y - x) \tag{1.7}$$

što nam kaže da je za fiksne $x, y \in \Sigma$, f afina funkcija po ε s odsječkom $u(x - y, x)$ i koeficijentom nagiba $u(x - y, y - x)$.



Slika 1.1: funkcija f za dane x i y

Uvjet 1.2 je ekvivalentan zahtjevu da odsječak bude nenegativan za svaki $y \in \Sigma$, dok je uvjet 1.3 ekvivalentan zahtjevu da za svaki $y \neq x$ nagib bude pozitivan ako je odsječak jednak 0. Dakle, ako su ta dva uvjeta zadovoljena, postoji neki $\varepsilon_y \in \langle 0, 1\rangle$ takav da vrijedi $f(\varepsilon, y) > 0$ za svaki $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_y\rangle$, tj. x je ESS.

1.2 Egzistencija evolucijski stabilne strategije

Evolucijski stabilna strategija ne mora uvijek postojati što vidimo iz sljedećeg primjera:

Primjer 1.2.1. *Kamen-Škare-Papir*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} K & S & P \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ S \\ P \end{array} & \begin{bmatrix} 0,0 & 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 0,0 & 1,-1 \\ 1,-1 & -1,1 & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ova igra ima jedinstvenu Nashovu ravnotežu (x, x) gdje je $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, ali x nije ESS jer je npr. $u(x, x) = 0 = u(P, x)$, ali je i $u(P, P) = 0 = u(x, P)$ pa nije zadovoljen uvjet 1.3.

Ipak postoji jedna vrsta igara koja će uvijek imati evolucijski stabilnu strategiju. To su simetrične 2×2 igre te ćemo se njima posebno baviti u idućem dijelu.

Simetrične 2x2 igre

Kako u evolucijskoj teoriji igara promatramo ponašanje jedinki iz iste populacije, simetrične igre i simetrične ravnoteže su jedino što ima smisla jer kod njih nije bitno tko je odigrao određenu strategiju nego samo koja je strategija odigrana. Sada ćemo posebno promotriti igru dva igrača kada svaki igrač može birati između samo dvije čiste strategije (označavat ćemo ih e_1 i e_2 što predstavlja vektore kanonske baze za $\mathbb{R}^2$) te ćemo ih razvrstati u kategorije ovisno o njihovim Nashovim ravnotežama. Podsjetimo se da općenito za simetrične igre vrijedi iduće:

Teorem 1.2.2. *Svaka simetrična igra dana matricom isplate $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ima simetričnu Nashovu ravnotežu.*

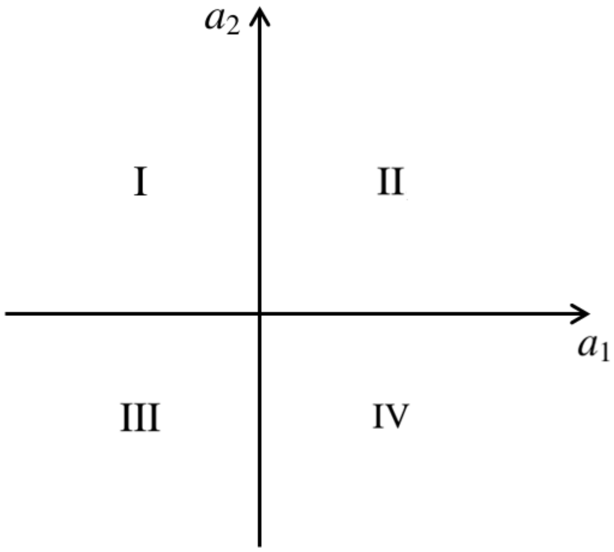
Vratimo se sada na 2×2 igre. Neka je matrica isplata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Kako strogo pozitivne transformacije korisnosti čuvaju Nashove ravnoteže, možemo uzeti ekvivalentnu matricu

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

gdje je $a_1 := a_{11} - a_{21}$ i $a_2 := a_{22} - a_{12}$. Na ovaj način možemo svaku simetričnu 2×2 igru poistovjetiti s točkom $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ u ravnini. Ovisno o tome u kojem kvadrantu Kartezijevog koordinatnog sustava se nalazi a, uz pretpostavku da je $a_1, a_2 \neq 0$ možemo igre podijelit u četiri kategorije te će one imati ista svojstva u smislu Nashovih ravnoteža (pokazat će se da su kategorije I i IV ekvivalentne pa ćemo efektivno imati tri kategorije).



Slika 1.2: Kategorije simetričnih 2x2 igara

Kategorija I

Ovdje se nalaze igre za čiji vektor (a_1, a_2) vrijedi $a_1 < 0,\ a_2 > 0$. Očito strategija e_2 strogo dominira e_1 pa imamo samo jednu Nashovu ravnotežu (e_2, e_2) koja je ujedno i simetrična. Kako je e_2 jedinstveni najbolji odgovor za bilo koju strategiju $y \in \Sigma$ tada i jedinstvena evolucijski stabilna strategija. Dakle

$$\Sigma^{NR} = \{e_2\} = \Sigma^{ESS}$$

Primjer 1.2.3. *Dilema zatvorenika*
Dvije osobe su ulovljene i optužene za pljačku. Svaka od njih se nalazi u posebnoj sobi gdje ih tužitelji ispituju te optuženici ne mogu međusobno komunicirati. Svaki od optuženika

ima dvije opcije: Šuti ili Optuži drugoga. Ako oba optuženika šute, svaki će odslužiti jednu godinu u zatvoru. Ako svaki optuži onog drugoga, kazna će biti dvije godine za svakoga. Ako jedan od optuženika optuži drugoga dok ovaj drugi šuti, prvi će biti oslobođen optužbi dok će ovaj koji je šutio biti osuđen na tri godine u zatvoru. Isplate zapisujemo u terminima gubitka slobode:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jedinstvena Nashova ravnoteža ove igre je (e_2, e_2)*, tj. kada oba igrača igraju čistu strategiju Optuži što je i jedinstvena ESS. Kako bi oba igrača ostvarila veću korisnost kada bi igrala* e_1*, tj. Šuti, možemo vidjet da ESS nije nužno socijalno optimalna strategija.*

Kategorija II

Ovdje su igre kod kojih vrijedi $a_1 > 0,\ a_2 > 0$. Ovakve igre imaju tri Nashove ravnoteže: (e_1, e_1), (e_2, e_2) i (x, x) gdje je $x = \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2}\right)$. Svaka od čistih Nashovih ravnoteža je stroga pa su obje čiste strategije ESS. x pak nije evolucijski stabilna jer je npr. e_1 alternativni najbolji odgovor za x i $u(x, e_1) = \frac{a_2}{a_1+a_2} a_1 < a_1 = u(e_1, e_1)$. Dakle imamo

$$\Sigma^{NR} = \{e_1, e_2, x\} \text{ i } \Sigma^{ESS} = \{e_1, e_2\}$$

Primjer 1.2.4. *Igra koordinacije*
Zamislimo populaciju ljudi na izoliranom otoku koji razvijaju trgovinu. Na otoku postoje dvije stvari koje su pogodne za koristiti kao novac: Perlice i Školjke. Svaka osoba može birati koju vrstu novca će koristiti, ali će transakcija biti obavljena samo ako osoba s kojom želi trgovati koristi isti novac. Ako je transakcija uspješno obavljena, svakom sudioniku se korisnost poveća za 1 dok je povećanje 0 ako transakcija ne uspije. Matrica isplata tada je dana kao

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Evolucijski stabilne strategije su tada stanja u kojima cijela populacija na otoku koristi ili samo Perlice ili samo Školjke za trgovinu. Kasnije ćemo pokazati da smjer u kojem populacija evoluira ovisi o početnom udjelu ljudi koji koriste određenu vrstu novca.

Promotrimo malo drugačiju matricu isplate koja i dalje pripada ovakvoj vrsti igre:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz ovoga vidimo da će strategija e_2 *biti evolucijski stabilna čak i u slučaju kada je socijalno optimalnija strategija* e_1 *također ESS.*

Kategorija III

U ovoj kategoriji se nalaze igre za koje je (a_1, a_2) takav da vrijedi $a_1 < 0,\ a_2 < 0$. Ovdje nijedna strategija nije dominirana i najbolji odgovor za danu čistu strategiju je druga čista strategija. Ovakve igre imaju dvije asimetrične Nashove ravnoteže $(e_1, e_2), (e_2, e_1)$ i jednu simetričnu (x, x) gdje je opet $x = \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2}\right)$. Za razliku od Kategorije II, ovdje x je evolucijski stabilna jer za svaki $y \in \Sigma$ imamo

$$u(x, y) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} a_1 y_1 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} a_2 y_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

i za svaki $y \neq x$ vrijedi

$$u(y, y) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 < \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

Iz ovoga slijedi

$$\Sigma^{NR} = \{e_2\} = \Sigma^{ESS}$$

Primjer ovakve igre je Sokol-Golub igra dana u primjeru 1.1.4.

Kategorija IV

Ovoj kategoriji pripadaju igre kod kojih je $a_1 > 0,\ a_2 < 0$. Kako su ove igre identične igrama iz kategorije I uz zamjenu oznaka za čiste strategije, možemo ih bez smanjena općenitosti poistovjetiti.

Ovime smo pokazali da vrijedi idući teorem:

Teorem 1.2.5. *Svaka simetrična 2×2 za čiju matricu isplate A vrijedi $a_{11} \neq a_{21},\ a_{22} \neq a_{12}$ ima evolucijski stabilnu strategiju.*

1.3 Struktura skupa evolucijski stabilnih strategija

Pogledajmo sada kakva je općenito struktura skupa ESS-a. Iz karakterizacije skupa Σ^{ESS} slijedi iduća tvrdnja:

Propozicija 1.3.1. *Neka je $x \in \Sigma^{ESS}$ i $y \in \Sigma$, $y \neq x$. Ako je $supp(y) \subseteq supp(x)$, tada $y \notin \Sigma^{NR}$.*

Dokaz. Neka su x i y kao u iskazu. Tada je $x \in \Sigma^{NR}$ iz čega slijedi $u(x, x) = u(y, x)$. Zbog toga i činjenice $x \in \Sigma^{ESS}$ također vrijedi i $u(x, y) > u(y, y)$. Dakle y ne može biti Nashova ravnoteža. ◻

Ova propozicija nam posebno kaže da nosač jedne evolucijski stabilne strategije ne može sadržavati nosač druge. Iz nje nam također slijedi da ako je evolucijski stabilna strategija x potpuno miješana, tj. u njenom nosaču se nalaze sve čiste strategije, tada je to jedinstvena evolucijski stabilna strategija. Nadalje, kako kod konačnih igara imamo samo konačno mnogo nosača za miješane strategije, skup evolucijski stabilnih strategija će biti konačan. To formuliramo u idućen korolaru:

Korolar 1.3.2. *Skup Σ^{ESS} je konačan. Nadalje, ako je $x \in \Sigma^{ESS}$ miješana strategija, tada je $\Sigma^{ESS} = \{x\}$.*

Također vrijedi da nijedna slabo dominirana strategija nije evolucijski stabilna. Pretpostavimo da je $x \in \Sigma^{NR}$ i neka je $y \in \Sigma$ slabo dominira. Tada je y alternativni najbolji odgovor za x i po slaboj dominaciji vrijedi $u(y, y) \geq u(x, y)$. Dakle x ne zadovoljava uvjete evolucijske stabilnosti. Ovime smo pokazali:

Propozicija 1.3.3. *Ako je $x \in \Sigma$ slabo dominirana strategija, tada $x \notin \Sigma^{ESS}$.*

1.4 Ostale karakterizacije

Invazijska barijera

U definiciji ESS postoji ε_y takav da mutacija izumre ako je udio mutanata u populaciji ispod te granice. Dakle možemo reći da svaka mutacija ima barijeru koja je sprječava u preuzimanju populacije. Općenito, ova invazijska barijera može ovisiti o mutantu y, ali pokazat ćemo da u našem kontekstu konačnih igara možemo uzeti da je ε_y jednak za sve mutante. Formalno definiramo:

Definicija 1.4.1. *$x \in \Sigma$ ima* uniformnu invazijsku barijeru *ako postoji neki $\bar{\varepsilon} \in \langle 0, 1\rangle$ takav da nejednakost 1.1 vrijedi za sve strategije $y \neq x$ i za sve $\varepsilon \in \langle 0, \bar{\varepsilon}\rangle$.*

Prije nego pokažemo navedeni rezultat, definirajmo općenito, za danu strategiju $x \in \Sigma^{ESS}$, njenu invazijsku barijeru prema bilo kojoj drugoj strategiji y kao najveću vrijednost ε_y u definiciji 1.1, tj.

$$b(y) = sup\{\delta \in [0, 1] : f(\varepsilon, y) > 0 \ \forall \varepsilon \in \langle 0, \delta\rangle\} \tag{1.8}$$

Propozicija 1.4.2. *$x \in \Sigma^{ESS}$ ako i samo ako x ima uniformnu invazijsku barijeru.*

Dokaz. Ako x ima uniformnu invazijsku barijeru, tada uzimanjem $\varepsilon_y = \bar{\varepsilon}$ za svaki $y \neq x$ slijedi da je x ESS.

Obratno, pretpostavimo da je x ESS. Definirajmo skup

$$Z_x = \{z \in \Sigma : z_i = 0 \ za \ neki \ i \in supp(x)\}$$

Z_x je unija svih strana simpleksa koje ne sadrže x te je to kompaktan skup. Neka je funkcija barijere $b : Z_x \to [0, 1]$ definirana kao u 1.8. Fiksirajmo $y \in Z_x$ i promotrimo funkciju $f(\cdot, y)$. Pokazali smo da je za $x \in \Sigma^{ESS}$ funkcija $f(\varepsilon, y)$ pozitivna za neki $\varepsilon > 0$ te da je linearna po ε. Dakle postoji najviše jedan ε takav da je $f(\varepsilon, y) = 0$. Označimo ga s ε_0. Ako je $\varepsilon_0 \in \langle 0, 1\rangle$, tada je $u(x - y, x - y) \neq 0$. Kako bi vidjeli da to vrijedi, pretpostavimo $u(x - y, x - y) = 0$. Tada imamo

$$0 = f(\varepsilon_0, y) = u(x - y, x) - \varepsilon_0 u(x - y, x - y) = u(x - y, x)$$

Kako je i $u(x - y, x - y) = 0$, imamo da je $f(\varepsilon, y) = 0$ za svaki ε, što je kontradikcija.

Dakle u ovom slučaju je $b(y) = \varepsilon_0 = u(x - y, x)/u(x - y, x - y)$. Inače, $b(y) = 1$. Iz ovoga slijedi da je b neprekidna funkcija. Kako je b pozitivna i Z_x kompaktan skup, slijedi $\min_{y \in Z_x} b(y) > 0$ te je to tražena uniformna barijera za x, čime je tvrdnja pokazana za sve $y \in Z_x$.

Neka je sada $y \in \Sigma$, $y \neq x$. Tada postoji neki $z \in Z_x$ i $\lambda \in \langle 0, 1]$ takav da je $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$. Pokažimo da ovo vrijedi. Ako je $y \in Z_x$, tada su tražene vrijednosti $\lambda = 1$ i $z = y$. Neka je $y \notin Z_x$. Promotrimo za svaki $\mu \geq 0$ točku $z(\mu) = (1 - \mu)x + \mu y$. Neka je $\hat{\mu} \geq 1$ najveća vrijednost od μ takva da vrijedi $z(\mu) \in \Sigma$. Tada postoji koordinata i za koju je $z_i(\hat{\mu}) = 0$, $z_i(\mu) > 0$ za sve $\mu < \hat{\mu}$ i $z_i(\mu) < 0$ za sve $\mu > \hat{\mu}$. Iz ovoga slijedi $x_i > y_i$ zbog $i \in supp(x)$ pa imamo $z(\hat{\mu}) \in Z_x$. Sada možemo uzeti $z = z(\hat{\mu})$ i $\lambda = 1/\hat{\mu}$ što nam daje $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$. Nakon što smo pokazali ovu tvrdnju, izravnim računom dobivamo

$$f(\varepsilon, y) = u(x - y, \varepsilon\lambda z + (1 - \varepsilon\lambda)x) = f(\varepsilon\lambda, z)$$

Iz toga slijedi $b(y) = \min\{b(z)/\lambda, 1\} \geq b(z)$. Zaključujemo da je $\bar{\varepsilon} = \min_{y \in Z_x} b(y)$ uniformna invazijska barijera za x. □

Iako se tako može činiti, gornja karakterizacija ne implicira da je *ESS* nužno otporna na istodobnu pojavu više različitih mutanata. Pretpostavimo da je $x \in \Sigma$ evolucijski stabilna strategija s uniformnom invazijskom barijerom $\bar{\varepsilon}$. Neka se pojave dvije različite strategije y i z s pozitivnim udjelima u populaciji α i β respektivno takvima da je $\alpha + \beta < \bar{\varepsilon}$. Miješana populacija koja nastane na taj način

$$w = (1 - \alpha - b\beta)x + \alpha y + \beta z \in \Sigma$$

je ekvivalentna populaciji $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y'$ gdje je $y' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} y + \frac{\beta}{\alpha+\beta} z$ i $\varepsilon = \alpha + \beta < \bar{\varepsilon}$. Po definiciji $\bar{\varepsilon}$, x ostvaruje veću dobit nego konstruirana mutantska strategija y'. Iz linearnosti funkcije isplate, barem jedna od početnih mutantskih strategija y i z ostvaruje manju dobit od x. Ipak, to ne znači da obje prolaze lošije od x. Ilustrirajmo to primjerom:

Primjer 1.4.3. *Promotrimo opet igru Sokol-Golub iz primjera 1.1.4. Neka je $x = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2$ jedinstvena evolucijski stabilna strategija i neka su $y = e_1$, $z = e_2$. Pretpostavimo da* *mutanti y i z ulaze u populaciju istodobno, svaki s udjelom $\frac{1}{2}\varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Ekvivalentni konstruirani mutant je tada $y' = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$, a miješana populacija nakon pojave mutanata je $w = (1-\varepsilon)x + \varepsilon y'$. Kako je $u(x, w) < u(y, w)$, znači da mutantska strategija y ostvaruje veću isplatu nego urođena ESS x.*

Lokalna superiornost

Definicija 1.4.4. *$x \in \Sigma$ je* lokalno superiorana *strategija ako postoji otvorena okolina U od x td. je $u(x, y) > u(y, y)\ \forall y \in U,\ y \neq x$*

Ova definicija nam daje još jednu karakterizaciju evolucijske stabilnosti:

Propozicija 1.4.5. *$x \in \Sigma^{ESS}$ ako i samo ako je x lokalno superiorana.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je x lokalno superioran i neka je $U \subset \mathbb{R}^k$ okolina od x td. $u(x, y) > u(y, y)\ \forall y \neq x$. Za bilo koji $z \neq x,\ z \in \Sigma$ postoji neki $\varepsilon_z \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je za svaki $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_z\rangle$, $w = \varepsilon z + (1-\varepsilon)x \in U$. Po pretpostavci je $u(x, w) > u(w, w)$. Po bilinearnosti od u imamo $u(w, w) = \varepsilon u(z, w) + (1-\varepsilon)u(x, w)$. Sada imamo

$$u(x, w) > \varepsilon[u(z, w) - u(x, w)] + u(x, w).$$

Da bi ova nejednakost vrijedila, mora biti $u(x, w) > u(z, w)$. Dakle $x \in \Sigma^{ESS}$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \in \Sigma^{ESS}$ i neka je $\bar{\varepsilon} \in \langle 0, 1\rangle$ uniformna invazijska barijera. Neka je Z_x skup definiran kao u dokazu Propozicije 1.4.2 te označimo

$$V = \{y \in \Sigma : y = \varepsilon z + (1-\varepsilon)x \text{ za neki } z \in Z_x \text{ i } \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}\rangle\}$$

Kako je Z_x zatvoren skup koji ne sadrži x, postoji okolina $U \subset \mathbb{R}^k$ od x takva da je $U \cap \Sigma \subset V$. Pretpostavimo da je $y \neq x,\ y \in U \cap \Sigma$. Tada je $y \in V$ i zbog toga što je $\bar{\varepsilon}$ imamo $u(z, y) = u(z, \varepsilon z + (1-\varepsilon)x) < u(x, \varepsilon z + (1-\varepsilon)x) = u(x, y)$, gdje je z kao u definicji od V. Iz bilinearnosti od u slijedi da je

$$u(y, y) = \varepsilon u(z, y) + (1-\varepsilon)u(x, y) = u(x, y) - \varepsilon[u(x, y) - u(z, y)] < u(x, y).$$

Kako je $y \in \Sigma$ bila proizvoljna strategija iz U, slijedi da je x lokalno superiorna strategija. □

1.5 Socijalna efikasnost

Iako smo pokazali da evolucijski stabilna strategija ne mora biti najbolja u smislu da će maksimizirati ukupnu isplatu, može se pokazati da u nekim slučajevima postoji veza između socijalno optimalne i evolucijski stabilne strategije. Promotrimo dvostruko simetrične igre dva igrača. Igra je dvostruko simetrična ako za matricu isplate A vrijedi $A^\tau = A$. Kako za simetrične igre imamo matrice isplata prvog i drugog igrača oblika (A, A^τ), znači da kod dvostruko simetrične igre imamo (A, A). Dakle ovime modeliramo situaciju u kojoj svaki igrač ostvaruje jednaku isplatu kao i protivnik. Prethodno smo promatrali situacije gdje sve jedinke iz neke velike populacije igraju istu čistu ili miješanu strategiju $x \in \Sigma$. Evolucijska stabilnost i pripadna svojstva su definirana na temelju toga kako se mijenja dobit za igranje strategije x ako neke jedinke iz populacije počnu igrat neku drugu strategiju $y \in \Sigma$. Umjesto toga, sada ćemo promatrati isplatu kada cijela populacija prati strategiju x u usporedbi s isplatom kada cijela populacija odluči igrati y. Zanima nas koja će strategija biti bolja za populaciju pa u skladu s time postavljamo iduću definiciju:

Definicija 1.5.1. *Strategija $x \in \Sigma$ je*

a) Lokalno strogo efikasna *ako postoji otvorena okolina U od x takva da je $u(x, x) > u(y, y)$ za sve $y \in U$, $y \neq x$.*

b) Lokalno slabo efikasna *ako postoji otvorena okolina U od x takva da je $u(x, x) \geq u(y, y)$ za sve $y \in U$.*

c) Globalno efikasna *ako vrijedi $u(x, x) \geq u(y, y)$ za sve $y \in \Sigma$.*

Kako je funkcija isplate u neprekidna i skup miješanih strategija Σ kompaktan, slijedi da u svakoj konačnoj simetričnoj igri uvijek postoji barem jedna globalno efikasna strategija. Označimo skup globalno efikasnih strategija kao

$$\Sigma^* = arg \max_{x \in \Sigma} u(x, x) = \{x \in \Sigma : u(x, x) \geq u(y, y)\ \forall y \in \Sigma\}$$

Iz neprekidnosti od u slijedi da je skup Σ^* zatvoren i svaka strategija $x \in \Sigma^*$ je lokalno slabo efikasna.

Iz karakterizacije evolucijske stabilnosti preko lokalne superiornosti (Propozicija 1.4.5) slijedi da su kod dvostruko simetričnih igara evolucijska stabilnost i lokalna stroga efikasnost ekvivalentne.

Propozicija 1.5.2. *Neka je A dvostruko simetrična igra. Tada je $x \in \Sigma^{ESS}$ ako i samo ako je x lokalno strogo efikasna.*

Dokaz. Neka je $A = A^\tau$ i $x \in \Sigma$. Za bilo koji $y \neq x$ označimo $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Iz bilinearnosti od u imamo

$$\begin{aligned} 4u(z, z) &= u(x + y, x + y) \\ 2u(x, z) &= u(x, x + y) \\ 2u(z, x) &= u(x + y, x) \end{aligned}$$

iz čega slijedi $u(y, y) = u(x, x) - 2u(x, z) - 2u(z, x) + 4u(z, z)$. Dvostruka simetrija igre povlači simetriju od u, tj. vrijedi $u(x, z) = u(z, x)$. Iz svega prethodnog dobivamo

$$u(x, x) - u(y, y) = 4[u(x, z) - u(z, z)] \tag{1.9}$$

Da bi dokazali tvrdnju, po Propoziciji 1.4.5, dovoljno je za neku otvorenu okolinu U od x pokazati

$$u(x, x) > u(y, y)\ \forall y \in U,\ y \neq x \Leftrightarrow u(x, y) > u(y, y)\ \forall y \in U,\ y \neq x$$

Ekvivalencija slijedi izravno iz jednadžbe 1.9 i činjenice da je, po definiciji od z, $y \neq x$ udaljen od x za manje od ε ako i samo ako je $z \neq x$ udaljen od x za manje od $\varepsilon/2$. $\square$

Poglavlje 2

Dinamika replikacije

U prethodnom poglavlju promatrali smo stanja koja su otporna na pojavu mutanata u populaciji, dakle stanja koja su u nekom smislu krajnje točke evolucije. Sada ćemo promotriti na koji način se takva stanja dostižu. Pomoću dinamičkih sustava pokušat ćemo okarakterizirati stabilnost populacije, kako se sastav mijenja kroz vrijeme i koja su to stanja kojima teži. Nakon što postavimo ovaj model i opišemo njegova svojstva, promotrit ćemo u kakvoj je vezi sa statičkim modelom iz prethodnog poglavlja i konceptom evolucijski stabilne strategije.

Ovo poglavlje se također temelji na knjizi Jörgena Weibulla *Evolutionary Game Theory*[8].

2.1 Postavljanje dinamike replikacije

Promotrimo simetričnu igru danu $m \times m$ matricom A. Miješanu strategiju $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \Sigma$ interpretirali smo kao udjele populacije koji igraju istu čistu strategiju. Sada nas zanima kako se ti udjeli mijenjaju (evoluiraju) tijekom vremena. U populaciji čiji sastav je dan vektorom x, *očekivana dobit jedinke* koja igra čistu strategiju s_i je dana kao $u(e_i, x)$. Iz toga slijedi da *prosječna dobit populacije* iznosi

$$\sum_{i=1}^{k} x_i u(e_i, x) = u(x, x).$$

Pretpostavit ćemo da je kretanje broja jedinki koje prate određenu strategiju proporcionalno samom tom broju. Čini se razumno za pretpostaviti da će se udjeli određenog tipa jedinki u populaciji povećavati ako taj tip ostvaruje veću očekivanu dobit od prosječne dobiti populacije te će se smanjivati ako ostvaruje nižu dobit od prosjeka pa kao koeficijent proporcionalnosti uzimamo tu razliku u dobitima. Dakle možemo postaviti iduću definiciju:

Definicija 2.1.1. Dinamika replikacije *koja predstavlja kako se mijenja udio pojedinog tipa jedinki u populaciju dana je diferencijalnom jednadžbom*

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i(t)}{dt} = [u(e_i, x) - u(x, x)]x_i \tag{2.1}$$

za svaku čistu strategiju $s_1, s_2, ..., s_k$.

Iz ovoga vidimo da će najbrže rasti oni udjeli koji prate strategiju koja je najbolji odgovor na trenutni sastav populacije x. Također slijedi da će omjer između udjela $x_i > 0$ i $x_j > 0$ rasti tijekom vremena ako strategija s_i ostvaruje veću dobit od strategije s_j:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_i}{x_j}\right] = \frac{\dot{x}_i x_j - x_i \dot{x}_j}{x_j^2} = \frac{x_i}{x_j}\left[\frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{\dot{x}_j}{x_j}\right] = \left[u(e_i, x) - u(e_j, x)\right]\frac{x_i}{x_j}.$$

Rješenje dinamike replikacije

Iako nas neće zanimati konkretno rješenje prethodno navedenog sustava, nego samo njegovo kretanje tijekom vremena, bit će korisno ipak definirati pojam rješenja i neka njegova svojstva.

Definicija 2.1.2. Rješenje *sustava običnih diferencijalnih jednadžbi* $\dot{x} = \varphi(x)$ *kroz točku* $x^0 \in \mathbb{R}$ *je funkcija*

$$\xi(\cdot, x^0) : T \to \mathbb{R}$$

gdje je T *otvoreni interval koji sadrži* $t = 0$, *koja zadovoljava iduće:*

$$\xi(0, x^0) = x^0$$
$$\frac{d}{dt}\xi(t, x^0) = \varphi(\xi(t, x^0))\ \forall t \in T$$

Po Picard-Lindelöf teoremu znamo da sustav diferencijalnih jednadžbi dan s 2.1 ima jedinstveno rješenje uz dano početno stanje $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^m$. To rješenje zapisujemo kao funkciju $\xi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ koja svakom početnom stanju $x^0 \in \Sigma$ i vremenu $t \in \mathbb{R}$ pridružuje vektor sastava populacije $\xi(t, x^0)$ u trenutku t.

U svim slučajevima koje ćemo promatrati, preslikavanje ξ će zadovoljavati sljedeća tri uvjeta:

1) $\xi(0, x) = x\ \ \forall x \in \Sigma$
2) $\xi(t, \xi(s, x)) = \xi(t + s, x)\ \ \forall x \in \Sigma,\ \forall s, t \in \mathbb{R}$
3) ξ *je neprekidno preslikavanje*

Prvi uvjet nam kaže da će stanje populacije ostati isto nakon $t = 0$ trenutaka. Drugi uvjet kaže da je stanje populacije nakon $t + s$ trenutaka jednako stanju populacije nakon što se prvo populacija s trenutaka mijenja po danoj dinamici te se tako dobiven sastav još t trenutaka mijenja po istoj dinamici.

Vrijedi da je simpleks Σ, tj. skup svih mogućih sastava populacije, *invarijantan* na ovu dinamiku u smislu da je za svako dano početno stanje $x^0 \in \Sigma$ cijela orbita $\gamma(x^0) = \{x \in \Sigma : x = \xi(t, x^0)$ *za neki* $t \in \mathbb{R}\}$ sadržana u Σ. Dakle, ako krenemo od nekog sastava $x^0 \in \Sigma$, populacija će uvijek ostati u Σ. Intuitivno ovo vrijedi zbog $\sum x_i = 1$ što povlači $\sum \dot{x}_i = 0$ i činjenice da udjeli populacije ne mogu biti negativni. Označimo s $\text{Int}\,\Sigma = \{x \in \Sigma : x_i > 0\ \forall\ i = 1, ..., m\}$ unutrašnjost simpleksa, tj. skup svih potpuno miješanih strategija. Tada su i unutrašnjost i rub simpleksa $\partial\Sigma = \Sigma \backslash \text{Int}\,\Sigma$ također invarijantni na dinamiku replikacije. Ovo nam kaže da ako je neka čista strategija odsutna u populaciji u nekom trenutku, tada je ona uvijek bila odsutna u populaciji i uvijek će biti. Iskažimo sve ovo formalno:

Propozicija 2.1.3. *Dinamika replikacije dana s 2.1 ima jedinstveno rješenje $\xi(t, x^0)$, $t \in \mathbb{R}$, za svako početno stanje $x^0 \in \Sigma$. Preslikavanje $\xi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ je neprekidno i neprekidno diferencijabilno u vremenu t.*

Nadalje, ako je $x^0 \in \text{Int}\,\Sigma$, tada $\xi(t, x^0) \in Int\Sigma\ \forall t$, dok $x^0 \in \partial\Sigma$ povlači $\xi(t, x^0) \in \partial\Sigma\ \forall t$.

Ovo ne isključuje da neka unutrašnja trajektorija može konvergirati prema rubu simpleksa. Kako vrijeme ide u beskonačnost, sastav populacije $\xi(t, x^0)$ će se nalaziti u unutrašnjosti, ali će njegova udaljenost od ruba težiti nuli pa u limesu neke čiste strategije mogu izumrijeti.

Stacionarna stanja i stabilnost

Kod proučavanja dinamike sastava neke populacije prirodno je da će nas zanimati koji su to sastavi koji su u nekom smislu u ravnoteži, dakle stanja kod kojih neće dolaziti do promjene. To su stanja x koja zadovoljavaju uvjet $\xi(t, x) = x\ \forall t \in \mathbb{R}$, tj. ekvivalentno, $\dot{x} = 0$. Takva stanja se u teoriji diferencijalnih jednadžbi nazivaju *stacionarna stanja*. Možemo primjetiti da je svaka čista strategija s_i stacionarno stanje što je posljedica načina konstrukcije dinamike replikacije.

Iduća propozicija je korisna posljedica uvjeta 1), 2) i 3):

Propozicija 2.1.4. *Neka su $x, y \in \Sigma$ i $\lim_{t\to+\infty} \xi(t, x) = y$. Tada je y stacionarno stanje.*

Dokaz. Uzmimo $x, y \in \Sigma$ i neka je $\lim_{t\to+\infty} \xi(t, x) = y$. Tada za svaku otvorenu okolinu U od y postoji neki $t_U \geq 0$ takav da je $\xi(t, x) \in U$ za svaki $t \geq t_U$. Označimo $x_U = \xi(t_U, x)$ i pretpostavimo da y nije stacionarno stanje. Tada postoji neki $\hat{t} \geq 0$ takav da je $\xi(\hat{t}, y) = z \neq y$. Po neprekidnosti od ξ, tada postoji otvorena okolina V od y takva da $z \notin V$ i također

$z' = \xi(\hat{t}, y') \notin V$ za svaki $y' \in V$. Ali, za $U = V$ imamo $x_V \in V$ i $\xi(t, x_V) \in V$ za svaki $t \geq t_v$. To je po 2) ekvivalentno

$$\xi(s, x_V) = \xi(s, \xi(t_V, x)) = \xi(s + t_V, x) \in V \ \forall s \geq 0.$$

Ovo nam daje kontradikciju kada je $s = \hat{t}$. □

Ona nam kaže da ako rješenje dinamike konvergira tijekom vremena, tada će pripadno granično stanje nužno biti stacionarno. To i nije iznenađujuće jer je za očekivat da ako populacija teži prema nekom sastavu, da se tada taj sam sastav neće mijenjati. Ipak treba primijetiti da konvergencija ne znači da ćemo to stacionarno stanje ikad dostići. Dapače, zbog jedinstvenosti rješenja, ako sustav nije krenuo iz stacionarnog stanja, tada ga nikad neće ni dostići. Naime, neka je $x \neq y$ i y je stacionarno stanje, tada je $\xi(t, x) \neq y \ \forall t$ jer je zbog stacionarnosti $\xi(t, y) = y$ i to je jedinstveno rješenje kroz y.

Sada kada smo opisali stanja u kojima će populacija mirovati, zanima nas koliko je ta situacija stabilna. Hoće li perturbacije koje izbacuju populaciju iz ravnotežnog sastava, poput pojave malog broja mutanata, uzrokovati da se populacija više ne vrati u taj ravnotežni sastav ili će se populacija "oduprijeti" takvom uznemiravanju i vratiti se u ravnotežno stanje. Uz to pitanje možemo vezati dva koncepta stabilnosti: slabiji koncept *Ljapunove stabilnosti* i jaču *asimptotsku stabilnost*. Ljapunova stabilnost nam daje odgovor na gore opisanu situaciju, dakle za stanje ćemo reći da je stabilno u Ljapunovom smislu ako mali odmak od početnog stanja neće uzrokovati da se sustav nastavi udaljavati od tog stanja. Preciznije:

Definicija 2.1.5. *Stanje x je stabilno u Ljapunovom smislu ako svaka otvorena okolina U od x sadrži otvorenu okolinu U^0 od x takvu da je $\xi(t, x^0) \in U$ za svaki $x^0 \in U^0 \cap \Sigma$ i $t \geq 0$.*

Asimptotska stabilnost zahtjeva i nešto više od toga da ne postoji tendencija da se stanje nastavi odmicati od stacionarnog. Ona traži da postoji pomak natrag prema početnom stanju:

Definicija 2.1.6. *x je* asimptotski stabilno *ako je stabilano u Ljapunovom smislu i ima otvorenu okolinu U^* takvu da $\lim_{t\to\infty} \xi(x^0, t) = x$ za svaki $x^0 \in U^* \cap \Sigma$.*

Očito je da ove definicije zahtijevaju da stanje x bude stacionarno kako bi moglo biti stabilno u Ljapunovom smislu pa onda i asimptotski.

Pogledajmo neke primjere dinamika replikacije:

Primjer 2.1.7. *Promotrimo opet igru Sokol-Golub iz primjera 1.1.4. Pretpostavimo da je sastav populacije dan miješanom strategijom $x = (x, 1 - x)$ gdje x predstavlja udio*

Sokolova. Očekivana dobit jedinke koja igra strategiju s_1 tj. koja se ponaša kao Sokol, iznosi

$$-1 \cdot x + 6(1 - x) = 6 - 7x$$

Dok je očekivana dobit za strategiju s_2, tj. za jedinku koja je Golub

$$0 \cdot x + 3(1 - x) = 3 - 3x$$

Dakle prosječna dobit populacije iznosi

$$(6 - 7x)x + (3 - 3x)(1 - x) = 3 - 4x^2$$

Sada možemo naći dinamiku replikacije za udio Sokolova u populaciji:

$$\dot{x} = [(6 - 7x) - (3 - 4x^2)]x = (4x - 3)(x - 1)x$$

Kako vrijedi $x_1 + x_2 = 1$, tada je dinamika za udio Golubova jednostavno dana kao $-\dot{x}$.

Vidimo da ova dinamika ima tri stacionarne točke, $x = 0$, $x = 1$ i $x = \frac{3}{4}$. Ipak, točke $x = 0$ i $x = 1$ nisu stabilne. Vidimo da je $\dot{x} > 0$ za $x \in \langle 0, \frac{3}{4} \rangle$ što znači da je populacija koja se sastoji samo od Golubova ranjiva na pojavu Sokolova u populaciji, tada će se udio Sokolova nastaviti povećavati do iduće stacionarne točke gdje čine $\frac{3}{4}$ populacije. Analogno se udio Sokolova smanjuje u situaciji kada se populacija sastoji samo od Sokolova. Dakle vidimo da je $x = \frac{3}{4}$ jedino stabilno stanje za ovu populaciju što se poklapa s evolucijski stabilnom strategijom.

Primjer 2.1.8. *Asimetrične igre*
Iako teoriju razvijamo za simetrične igre, analogni princip se može primijeniti i na asimetrične igre. Asimetričnost u igri se može javiti kod natjecanja jedinki iz različitih populacija ili u situacijama kada igrač može prepoznati u koju ulogu je stavljen te prilagođava svoju strategiju sukladno tome. Promotrimo igru danu matricom

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0,0 & 2,2 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Populaciju čije su čiste strategije u retcima matrice zvat ćemo populacija 1, strategije u stupcima su strategije dostupne populaciji 2. Označimo s x udio jedinki iz populacije 1 koje prati strategiju U te s y udio jedinki iz populacije 2 koje prate strategiju L. Očekivana dobit za jedinku koja prati strategiju U je:

$$0 \cdot y + 2 \cdot (1 - y) = 2 - 2y.$$

Za strategiju D:

$$1 \cdot y + 1 \cdot (1 - y) = 1.$$

Za strategiju L:

$$0 \cdot x + 5 \cdot (1 - x) = 5 - 5x.$$

I konačno za strategiju R:

$$2 \cdot x + 5 \cdot (1 - x) = 5 - 3x.$$

Prosječna korisnost populacije 1 tada je dana kao:

$$x \cdot (2 - 2y) + (1 - x) \cdot 1$$

Dakle, dinamiku po kojoj se mijenja udio jedinki koje prate strategiju U u populaciji 1 možemo zapisati kao

$$\dot{x} = x[(2 - 2y) - x(2 - 2y) - (1 - x)] = x(1 - x)(1 - 2y)$$

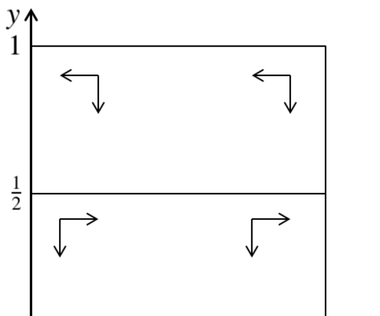
Analogno se za dinamiku populacije 2 pokaže da je oblika

$$\dot{y} = y(1 - y)(-2x)$$

Stacionarna stanja ovog sustava, tj točke za koje vrijedi $\dot{x} = 0$ i $\dot{y} = 0$, možemo zapisati kao skup

$$\{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$$

Ako promotrimo kako se kreću udjeli x i y vidimo da je $\dot{y} < 0$ za svaki nestacionarni x i y, dakle udio koji igra L u populaciji 2 opada dok populacija ne dođe u stacionarno stanje. S druge strane imamo $\dot{x} > 0$ za $y < 1/2$, dakle x raste, i $\dot{x} < 0$ za $y > 1/2$ što nam kaže da x opada. Nacrtajmo to:



Slika 2.1: Kretanje udjela x i y

Vidimo da je točka $(1, 0)$*, tj. par strategija* (U, R)*, jedina stabilna stacionarna točke ovog dinamičkog sustava.*
Skup Nashovih ravnoteža ove igre dan je skupom

$$\{(U, R), (D, L)\} \cup \left\{(D, (y, 1 - y)) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\}$$

Vidimo da stabilna stacionarna točka sustava odgovara Nashovoj ravnoteži igre. Nadalje, to je jedina stroga Nashova ravnoteža u ovoj igri. Više o asimetričnim igrama i vezi između stabilnih točaka i strogih Nashovih ravnoteža može se naći kod Seltena[5].

2.2 Dominirane strategije

Strogo dominirane strategije

Znamo da u klasičnoj teoriji igara strogo dominirane strategije nikad ne ulaze u nosač Nashove ravnoteže. To na neki način znači da igrači izbjegavaju te strategije pa se možemo pitati hoće li takve strategije eventualno nestati iz populacije. Kako se dio populacije koji prati određenu čistu strategiju povećava samo ako ostvaruje veću korisnost od prosječne, a čak i strogo dominirana strategija može ostvarivati takvu korisnost, nije odmah očito da će strategija nestati. Ipak u slijedećoj propoziciji ćemo pokazati da u modelu s neprekidnim vremenom takve strategije iščezavaju iz populacije.

Propozicija 2.2.1. *Neka je* $x^0 \in \operatorname{Int} \Sigma$ *potpuno miješana stategija takva da je čista strategija* s_i *strogo dominirana. Tada* $\lim_{t\to\infty} \xi_i(t, x^0) = 0$.

Dokaz. Neka je $y \in \Sigma$ strategija koja strogo dominira s_i. Označimo

$$\varepsilon = \min_{x\in\Sigma}(u(y, x) - u(e_i, x))$$

Zbog neprekidnosti funkcije isplate i kompaktnosti skupa Σ vrijedi $\varepsilon > 0$. Definirajmo sada funkciju $v_i : \operatorname{Int} \Sigma \to \mathbb{R}$ kao

$$v_i(x) = \ln x_i - \sum_{j=1}^{k} y_j \ln x_j$$

Funkcija v_i je diferencijabilna pa, koristeći definiciju 2.1, njena derivacija po vremenu u danoj točki $x = \xi(t, x^0)$ iznosi

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(x) &= \left[\frac{dv_i(\xi(t, x^0))}{dt}\right]_{\xi(t,x^0)=x} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}\dot{x}_j \\
&= \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j \dot{x}_j}{x_j} \\
&= u(e_i - x, x) - \sum_{j=1}^{k} y_j u(e_j - x, x) \\
&= u(e_i - x - \sum_{j=1}^{k} y_j e_j + x \sum_{j=1}^{k} y_j, x) \\
&= u(e_i - y, x) \leq -\varepsilon < 0
\end{aligned}$$

Dakle $v_i(\xi(t, x^0))$ teži prema $-\infty$ kako $t \to +\infty$. Kako je $x_j < 1\ \forall j$, imamo $-\sum_{j=1}^{k} y_j \ln x_j > 0$. Dakle $v_i(\xi(t, x^0))$ može težiti u $-\infty$ samo ako $\ln \xi_i(t, x^0)$ teži u $-\infty$ pa imamo $\xi_i(t, x^0) \to 0$. □

Uvjet da $x^0 \in \text{Int}\,\Sigma$, tj. da inicijalno sve čiste strategije moraju biti prisutne u populaciji ne možemo izostaviti. Naime, pretpostavimo da je s_i strogo dominirana čista strategija i uzmimo početno stanje $x^0 = e_i$, tj. u populaciji se nalazi samo ta čista strategija. Tada će vrijediti $\xi_i(t, x^0) = 1\ \forall\ t$. Dakle ta strategija neće izumrijeti iz populacije. Općenitije, strategija i može biti takva da više nije strogo dominirana ako izbacimo neku drugu čistu strategiju j. Tada, ako $j \notin supp(x^0)$, ne mora vrijediti $\xi_i(t, x^0) \to 0$.

Slabo dominirane strategije

Kod slabe dominacije dominirana strategija može iščeznuti, ali to nije nužno. Promotrimo sljedeće primjere:

Primjer 2.2.2. *Neka je dana igra*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovdje strategija s_1 slabo dominira strategiju s_2. Dinamika replikacije za ovu igru je

$$\dot{x}_1 = [x_2 - x_1 x_2]x_1 = x_1 x_2^2 > 0,\ x_1, x_2 \neq 0$$

Dakle udio populacije koji prati strategiju s_1 se povećava za svako početno stanje $x^0 \in \text{Int}\,\Sigma$, dok dio koji prati slabo dominiranu strategiju s_2 izumire iz populacije.

U idućem primjeru imamo igru gdje slabo dominirana strategija preživljava:

Primjer 2.2.3. *Promotrimo sljedeću igru*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

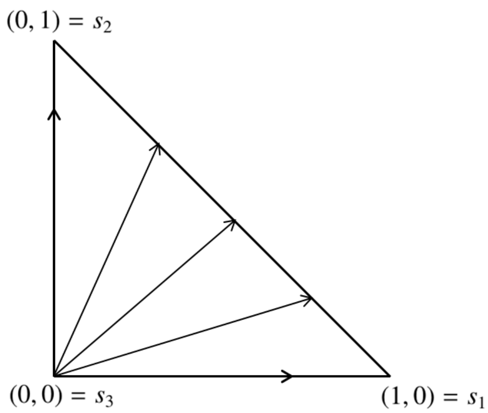
Dinamike replikacije su

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [1 - x_1 - x_2(x_1 + x_2)]x_1 = x_1x_3(1 + x_2) \geq 0 \\ \dot{x}_2 &= [x_1 + x_2 - x_1 - x_2(x_1 + x_2)]x_2 = x_2^2x_3 \geq 0 \\ \dot{x}_3 &= -\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -(x_1 + x_1x_2 + x_2^2)x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Vidimo da ako krenemo od populacije u kojoj su sve tri čiste strategije prisutne, strogo dominirana strategija s_3 izumire, dok slabo dominirana strategija s_2 ne mora iščeznuti. Pogledajmo grafički kako izgledaju trajektorije rješenja. Supstitucijom $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - x_2)(1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2^2(1 - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem se dobije da duž pravaca $x_1 = ax_2$ vrijedi $\dot{x}_1, \dot{x}_2 > 0$, tj. udjeli x_1 i x_2 rastu, dok je pravac $x_1 + x_2 = 1$ stacionaran. Dakle od svakog početnog stanje unutar simpleksa Σ, sastav teži prema situaciji gdje su samo strategije s_1 i s_2 prisutne, ali se može zaustaviti na bilo kojoj točki između njih.



Slika 2.2: Kretanje sastava populacije

Dapače, ako promotrimo kako se mijenja omjer udjela strategija $i = 1$ i $j = 2$ dobivamo

$$\frac{d}{dt}\frac{x_1}{x_2} = [u(e_1, x) - u(e_2, x)]\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 x_3}{x_2} > 0$$

iz čega vidimo da iako udio x_1 raste brže od x_2, ta razlika teži prema nula kako udio x_3 izumire.

2.3 Nashova ravnoteža u dinamici replikacije

Nashova ravnoteža je važan koncept u klasičnoj teoriji igara pa bismo željeli promotriti kakav utjecaj to ravnotežno svojstvo ima na našu dinamiku replikacije. Za naslutiti je da bi mogla postojati veza s konceptom ravnotežnih, tj. stacionarnih točaka dinamičkih sustava. Također bismo mogli promotriti kakav utjecaj na stabilnost stacionarnih točaka ima Nashova ravnoteža. Kao i prije, promatramo strategije x takve da je (x, x) Nashova ravnoteža dane igre i označavamo taj skup Σ^{NR}. U daljnjim dokazima koristit će nam idući poznati teorem iz klasične teorije igara:

Teorem 2.3.1. *O nosaču Nashove ravnoteže*
$x \in \Sigma$ je Nashova ravnoteža ako i samo ako vrijede idući uvjeti:

$$\begin{aligned} &1)\ \ u(s_i, x) = u(s_j, x)\ \forall s_i, s_j \in supp(x) \\ &2)\ \ u(s_i, x) \geq u(s_j, x)\ \forall s_i \in supp(x),\ \ \forall s_j \notin supp(x) \end{aligned}$$

Stacionarna stanja

Označimo skup stacionarnih stanja s $\Sigma^0 = \{x \in \Sigma : u(e_i - x, x)x_i = 0,\ \forall i = 1, ..., m\}$. Odnosi skupova Σ^{NR} i Σ^0 su dani u idućoj propoziciji

Propozicija 2.3.2. *Za svaku simetričnu konačnu igru dva igrača vrijedi:*

a) $\{e_1, e_2, ..., e_m\} \cup \Sigma^{NR} \subseteq \Sigma^0$, *tj. sve čiste strategije i Nashove ravnoteže su stacionarna stanja.*

b) $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma = \Sigma^{NR} \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$, *tj. ako promatramo samo potpuno miješane strategije, tada su stacinarna stanja jednaka Nashovim ravnotežama.*

c) $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ *je konveksan skup i ako je $z \in \Sigma$ linearna kombinacija elemenata tog skupa, tada je $z \in \Sigma^{NR}$*

Dokaz. Skup stacionarnih stanja možemo ekvivalentno zapisati kao

$$\Sigma^0 = \{x \in \Sigma : u(e_i, x) = u(x, x), \ \forall i \in supp(x)\}$$

Očito je $e_i \in \Sigma^0 \ \forall i$. Ako je $x \in \Sigma^{NR}$, tada iz tvrdnje 1) teorema 2.3.1 posebno vrijedi $u(x, x) = u(e_i, x) \ \forall i \in supp(x)$ pa je očito takav x stacionarno stanje.

Ovime smo pokazali *a*) i inkluziju $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma \supseteq \Sigma^{NR} \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ iz *b*). Nadalje, ako je $x \in \mathrm{Int}\,\Sigma$, tj. sve čiste strategije su u nosaču od x, tada je zadovoljena i tvrdnja 2) teorema 2.3.1 pa imamo i obratnu inkluziju.

Pokažimo još *c*). Neka su $x, y \in \Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te označimo $z = \alpha x + \beta y \in \Sigma$. Zbog bilinearnosti od u i činjenice da su sve čiste strategije u nosačima od x i y za bilo koju čistu strategiju i vrijedi

$$u(e_i, z) = \alpha u(e_i, x) + \beta u(e_i, y) = \alpha u(x, x) + \beta u(y, y)$$

Znači sve čiste strategije i ostvaruju jednaku dobit protiv z. Stoga, istim argumentom kao prije, ako vrijedi $z \in \Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$, tada je $z \in \Sigma^{NR}$. Inače, z je element ruba skupa $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$, tj. ruba skupa $\Sigma^{NR} \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$. Kako je skup Σ^{NR} zatvoren, slijedi da je $z \in \Sigma^{NR}$. Nadalje, $z \in \Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ za $\alpha + \beta = 1$ pa je $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ konveksan skup. □

Ova propozicija nam kaže kako sve mogu izgledati skupovi stacionarnih stanja za dinamiku replikacije. Ako promatramo 2×2 igru, tada je skup $\Sigma^0 \cap \mathrm{Int}\,\Sigma$ prazan, sadrži jednu točku ili je jednak cijelom $\mathrm{Int}\,\Sigma$. Kod 3×3 igri skup unutarnjih stacionarnih stanja je prazan, sadrži jednu točku, sadrži cijeli pravac kroz $\mathrm{Int}\,\Sigma$ ili je jednak cijelom $\mathrm{Int}\,\Sigma$.

Ljapunova stabilnost

Promotrimo sada mogućnost pojave mutanta u populaciji. U ovako postavljenom modelu mutacija bi predstavljala situaciju da pojedinac prestane pratiti zadanu čistu strategiju i prebaci se na neku drugu. Neka je populacija u stacionarnom stanju $x \in \Sigma$ i neka se ε dio populacije prebaci na neku drugu čistu strategiju. Ako sve čiste strategije mutiraju s jednakom vjerojatnošću i y_i je vjerojatnost da mutacija rezultira pojedincem koji prati čistu strategiju s_i, tada je ova mutacija jednaka pomaku populacije iz stanja x u stanje $x' = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y \in \Sigma$. Želimo vidjeti za koja stanja x ovakvi pomaci neće prouzročiti daljnje odmicanje od ravnotežnog stanja. Pokazat ćemo da je Nashova ravnoteža nužan uvjet da bi se stanje x bilo stabilno čak i slabijem Ljapunovom smislu.

Propozicija 2.3.3. *Neka je x stacionarno stanje takvo da $x \notin \Sigma^{NR}$. Tada stanje x nije stabilno u Ljapunovom smislu.*

Dokaz. Neka je x stacionarno stanje i $x \notin \Sigma^{NR}$. Tada postoji neki $i \notin supp(x)$ takav da je $u(e_i, x) > u(e_j, x) \ \forall j \in supp(x)$. Nadalje, zbog stacionarnosti vrijedi $u(e_j, x) =$

$u(e_k, x)\ \forall j, k \in supp(x)$. Dakle imamo $u(e_i - x, x) > 0$. Kako je u neprekidna, postoji neki $\delta > 0$ i otvorena okolina U od x takva da je $u(e_i - y, y) \geq \delta \quad \forall y \in U \cap \Sigma$. Iz definicije dinamike replikacije imamo

$$\dot{y}_i = u(e_i - y, y)y_i \Rightarrow \dot{y}_i \geq \delta y_i$$

Uzmimo neko početno stanje x^0 za koje vrijedi $x^0 \in U \cap \Sigma$ i $x_i^0 > 0$. Znamo da je rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi $\dot{\eta} = \delta\eta$ dano kao $\eta(t) = \eta(0)\exp(\delta t)$. Prema tome, slijedi $\xi_i(t, x^0) \geq x_i^0 \exp(\delta t)\ \forall t \geq 0$. Dakle $\xi(t, x^0)$ se eksponencijalno udaljava od x^0 što je u kontradikciji s Ljapunovom stabilnošću. □

Granična stanja

Promotrimo sada stanja kojima s vremenom teže trajektorije rješenje. Kao što smo već pokazali u propoziciji 2.1.4, takva stanja su ravnotežna stanja u dinamici replikacije. Nadalje, po propoziciji 2.3.2 slijedi da ako je to granično stanje iz $\operatorname{Int}\Sigma$, tada to i Nashova ravnoteža. U idućoj propoziciji ovaj rezultat ćemo proširiti i na stanja s ruba simpleksa Σ:

Propozicija 2.3.4. *Ako je* $x^0 \in \operatorname{Int}\Sigma$ *i* $\lim_{t\to\infty} \xi(t, x^0) = x$, *tada je* $x \in \Sigma^{NR}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x^0 \in \operatorname{Int}\Sigma$, $\lim_{t\to\infty} \xi(t, x^0) = x$, ali $x \notin \Sigma^{NR}$. Tada postoji neka čista strategija s_i takva da je $u(e_i - x, x) = \varepsilon > 0$. Kako je $\lim_{t\to\infty} \xi(t, x^0) = x$ i u je neprekidna, postoji neki $T \in \mathbb{R}$ takav da je $u(e_i - \xi(t, x^0), \xi(t, x^0)) > \varepsilon/2,\ \forall t \geq T$. Po 2.1 tada imamo $\dot{x}_i > (\varepsilon/2)x_i,\ \forall t \geq T$. Iz toga slijedi $\xi_i(t, x^0) > \xi_i(T, x^0)\exp(\varepsilon(t - T)/2)\ \forall t \geq T$ što nam daje $\lim_{t\to\infty} \xi_i(t, x^0) = \infty$. Kako je ovo kontradikcija, pokazali smo da je $x \in \Sigma^{NR}$. □

2.4 Simetrične 2x2 igre

Sada kada smo proučili neka svojstva dinamike replikacije željeli bismo proučiti kako se evolucijski stabilne strategije uklapaju u nju. Pogledajmo prvo jednostavniji slučaj simetričnih 2×2 igara za koje smo pokazali da uvijek imaju pripadnu evolucijski stabilnu strategiju. Kako bismo mogli kategorizirati igre na isti način kao u prethodnom poglavlju, potrebno je prvo pokazati da je dinamika replikacije invarijantna na pozitivne afine transformacije korisnosti: ako funkciju korisnosti u zamijenimo funkcijom $\bar{u} = \lambda u + \mu$, $\lambda, \mu > 0$, dinamika replikacije postaje

$$\dot{x}_i = \bar{u}(e_i - x, x)x_i = \lambda u(e_i - x, x)x_i.$$

Ovo nam kaže da transformacija funkcije korisnosti mijenja vremensku skalu za faktor λ, ali ne utječe na trajektorije rješenja. Dakle sastav populacije se i dalje mijenja na isti način, samo drugom brzinom.

Iz ovoga slijedi da bez smanjenja općenitosti možemo opet gledati normaliziranu matricu igre

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

gdje je $a_1, a_2 \neq 0$. Neka je $x = (x_1, x_2)$ neki sastav populacije. Tada se udio populacije x_1 mijenja po dinamici

$$\dot{x_1} = [u(e_i, x) - u(x, x)]x_1 = [a_1x_1 - a_1x_1^2 - a_2x_2^2]x_1 = [a_1x_1 - a_2x_2]x_1x_2$$

dok zbog $x_1 + x_2 = 1$ vrijedi $\dot{x_2} = -\dot{x_1}$. Uvrstimo li $x_2 = 1 - x_1$ u gornju jednadžbu dobivamo

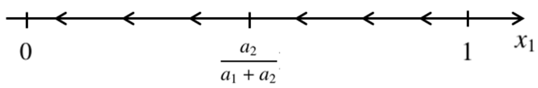
$$\dot{x_1} = (a_1 + a_2)\, x_1\, (1 - x_1) \left(x_1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right)$$

Dakle dana diferencijalna jednadžba ima tri stacionarne točke: $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_1 = \frac{a_2}{a_1+a_2}$, tj. promatrana populacija ima tri stacionarna stanja $x = (1, 0) = e_1$, $x = (0, 1) = e_2$ i $x = \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2}\right)$. Promotrimo koja od tih stanja su stabilna. Po prethodno danoj kategorizaciji imamo sljedeće:

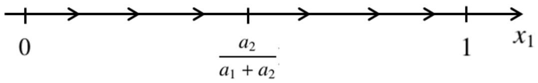
Kategorije I i IV

U kategoriji I su igre kod kojih je $a_1 < 0$ i $a_2 > 0$ pa je $\dot{x_1} < 0$ za svaki x_1 koji nije stacionarna točka. To znači da će se kod svake perturbacije koja izbaci populaciju iz ravnotežnog stanja udio populacije x_1 smanjivati prema $x_1 = 0$. Dakle $x_1 = 0$ je jedina stabilna stacionarna točka, a pokazali smo da je e_2 također i jedina evolucijski stabilna strategija ovakve igre.

Jednako se kod kategorije IV gdje vrijedi $a_1 > 0$ i $a_2 < 0$ pokaže da je $x_1 = 1$ jedina stabilna stacionarna točka.



Slika 2.3: dinamika replikacije za kategoriju I

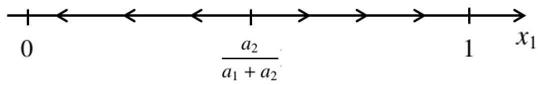


Slika 2.4: dinamika replikacije za kategoriju IV

Povezujući to s primjerom Dileme zatvorenika 1.2.3, vidimo da će, neovisno o početnom sastavu, populacija evoluirati u stanje gdje sve jedinke uvijek igraju strategiju Optuži.

Kategorija II

Iz $a_1, a_2 > 0$ slijedi $\dot{x}_1 > 0$ za $x_1 > \frac{a_2}{a_1+a_2}$ dok je $\dot{x}_1 < 0$ za $x_1 < \frac{a_2}{a_1+a_2}$. Dakle, ovisno o početnom sastavu populacije, udio x_1 će se smanjivati prema 0 ili rasti prema 1. Znači, stanja $(1, 0)$ i $(0, 1)$ su stabilna što su ujedno i evolucijski stabilne strategije.

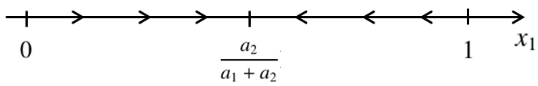


Slika 2.5: dinamika replikacije za kategoriju II

Ovo nam u primjeru o evoluciji novca 1.2.4 znači da stanje u koje će populacija evoluirati, hoće li koristiti samo perlice ili samo školjke kao valutu, ovisi o tome kojih je jedinki početno bilo više.

Kategorija III

Kako je $a_1, a_2 < 0$, imamo $\dot{x}_1 > 0$ za $x_1 < \frac{a_2}{a_1+a_2}$ i $\dot{x}_1 < 0$ za $x_1 > \frac{a_2}{a_1+a_2}$. Iz ovoga vidimo da se udio x_1 uvijek vraća prema točki $x_1 = a_2/(a_1 + a_2)$, a to je i ESS.



Slika 2.6: dinamika replikacije za kategoriju III

Kao što smo već pokazali, za primjer Sokol-Golub igre 1.1.4 ovo znači da svaki odmak od ekstremnih stanja gdje su u populaciji samo Sokolovi ili samo Golubovi pokreće evoluciju prema stanju gdje se u populaciji nalaze oba tipa jedinki.

Ovime smo našli vezu između stabilnih stacionarnih točka i evolucijskih stabilnih strategija. Iskažimo to kao propoziciju.

Propozicija 2.4.1. *Neka je simetrična* 2×2 *igra dana matricom A kod koje vrijedi* $a_1, a_2 \neq 0$. *Tada je* $x = (x_1, x_2) \in \Sigma$ *evolucijski stabilna strategija ako i samo ako je asimptotski stabilno stanje pripadne dinamike replikacije.*

2.5 ESS i dinamika replikacije

Proučavanjem simetričnih 2×2 igara naslutili smo da se evolucijski stabilne strategije poklapaju s asimptotski stabilnim stanjima dinamike replikacije. Pokušajmo to sada proširiti na općenite simetrične igre. Da bismo mogli provesti daljnju analizu dinamičke stabilnosti, objasnimo prvo jednu od općenitih metoda koja se koristi za određivanje stabilnosti nekog stacionarnog stanja. Metoda se naziva Ljapunova direktna metoda.

Ljapunova direktna metoda

Općenito, neka je $A \subset C$ neki zatvoreni skup čiju stabilnost u odnosu na dani sustav običnih diferencijalnih jednadžbi $\dot{x} = \varphi(x)$ (na kompaktnom skupu C) želimo ispitati. Pretpostavimo da smo našli neku realnu neprekidnu funkciju η definiranu na otvorenoj okolini skupa A takvu da je $\eta(x) = 0$ za $x \in A$ i $\eta(x) > 0$ izvan A. Nadalje, pretpostavimo da η evaluirana duž trajektorije rješenja ne raste s vremenom. Tada nam se čini da se sustav neće odmicati od A, barem za neka početna stanja dovoljno blizu A. Ovo se pokazuje točnim i takav skup A će biti stabilan u Ljapunovom smislu. Kako su uvjeti monotonosti općenito teški za pokazati, uobičajeno se ti uvjeti zamjenjuju uvjetima na gradijent $\nabla\eta(x) = \left(\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\eta(x)}{x_k}\right)$. Jedan način provjere stabinosti stacionarnog stanja dan je idućim teoremom:

Teorem 2.5.1. *Ljapunov prvi teorem*
Neka je $A \subset C$ zatvoren skup. Ako postoji otvorena okolina D od A i neprekidna funkcija $\eta : D \to \mathbb{R}_+$ za koju vrijedi

$$1)\ \eta(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$
$$2)\ \nabla\eta(x) \cdot \varphi(x) \leq 0\ \forall x \notin A$$

tada je A stabilan skup u Ljapunovom smislu.

Ako u uvjetu 2) stavimo strogu nejednakost, funkcija η se uobičajeno naziva *stroga lokalna Ljapunova funkcija* i pokazuje se da je pripadni skup A u tom slučaju i asimptotski stabilan. Dapače, vrijedi i ekvivalencija[1].

Teorem 2.5.2. *Ljapunov drugi teorem*
Neka je $A \subset C$ zatvoren skup. Tada postoji otvorena okolina D od A i neprekidna funkcija $\eta : D \to \mathbb{R}_+$ za koju vrijedi

$$1)\ \eta(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$
$$2)\ \nabla\eta(x) \cdot \varphi(x) \leq 0\ \forall x \notin A$$

ako i samo ako je A asimptotski stabilan skup.

[1] Dokaz se može naći u knjizi *Stability Theory of Dynamical Systems*[1]

Primijenimo sada ovu metodu na našu dinamiku replikacije. Iako nam ovi teoremi ne daju metodu kako naći prikladnu Ljapunovu funkciju, jedna klasa funkcija se pokazala kao prikladna za evolucijsku teoriju igara. To su takozvane mjere relativne entropije. Definirajmo prvo okolinu na kojoj ćemo promatrati funkciju. Za miješanu strategiju $x \in \Sigma$ definirajmo skup

$$Q_x = \{y \in \Sigma : supp(x) \subseteq supp(y)\}.$$

To je skup svih miješanih strategija y koje imaju u svom nosaču one strategije koje ima i x. To su jasno sve strategije iz $\operatorname{Int}\Sigma$ kao i one stranice simpleksa koje sadrže x. Dakle Q_x je otvorena okolina od x s obzirom na Σ, tj. $Q_x = \Sigma \cap U$, za neki otvoreni skup $U \ni x$. Sada, funkciju definiramo u odnosu na miješanu strategiju x koja je kandidat za asimptotski stabilno stanje, a kao domenu uzimamo Q_x okolinu od x. Definiramo $H_x : Q_x \to \mathbb{R}$

$$H_x(y) = \sum_{i \in supp(x)} x_i \log\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \tag{2.2}$$

Ova funkcija se u teoriji informacija uzima kao mjera udaljenosti između distribucija x i y u vjerojatnosnom prostoru. Očito je $H_x(x) = 0$ i može se pokazati da vrijedi $H_x(y) \geq \|x - y\|$. Dakle ako $H_x(y) \to 0$, tada se y približava x. Ipak, H_x nije metrika jer nije simetrična. Nadalje ova funkcija ima svojstvo da je njena vremenska derivacija evaluirana u nekoj točki y iz domene jednaka razlici u isplatama između strategija x i y kada se igraju protiv y.

Lema 2.5.3. *Neka je $x \in \Sigma$ i $y \in Q_x$. Tada je $H_x \geq 0$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $y = x$. Nadalje $\dot{H}_x(y) = -u(x - y, y)$*

Dokaz. Vrijedi $H_x(x) = 0$ i za bilo koji $y \in Q_x$ imamo

$$\begin{aligned} H_x(y) &= - \sum_{i \in supp(x)} x_i \log\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \\ &\geq -\log\left(\sum_{i \in supp(x)} \frac{x_i y_i}{x_i}\right) \\ &\geq -\log\left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) \\ &= -\log(1) = 0 \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $y \neq x$ i znamo $supp(x) \subseteq supp(y)$. Ako je $supp(x) = supp(y)$, tada je prva nejednakost stroga. Inače je druga nejednakost stroga. U svakom slučaju je $H_x(y) > 0$.

Pokažimo još drugu tvrdnju. Za bilo koji $y \in Q_x$ imamo

$$\dot{H}_x(y) = \frac{d}{dt} H_x(y) = \sum_{i=i}^{k} \frac{\partial H_x(y)}{\partial y_i} \dot{y}_i$$

Kako je

$$\frac{\partial H_x(y)}{\partial y_i} = -x_i \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \left(\frac{x_i}{y_i^2} \right) = -\frac{x_i}{y_i}$$

slijedi

$$\begin{aligned} \dot{H}_x(y) &= -\sum_{i \in supp(y)} \frac{x_i}{y_i} [u(e_i, y) - e(y, y))] y_i \\ &= -\sum_{i \in supp(x)} x_i [u(e_i, y) - e(y, y))] \\ &= -[u(x, y) - u(y, y)] \end{aligned}$$

□

Sada koristeći sve ovo možemo pokazati da evolucijski stabilna stanja zadovoljavaju svojstvo asimptotske stabilnosti.

Propozicija 2.5.4. *Svaka evolucijski stabilna strategija $x \in \Sigma^{ESS}$ je asimptotski stabilno stanje dinamike replikacije.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in \Delta^{ESS}$. Znamo da tada postoji okolina U od x takva da je $u(x - y, y) > 0$ za svaki $y \neq x,\ y \in \Delta \cap U$. Kao što smo pokazali gore, Q_x, domena funkcije H_x, je relativna okolina od x. Po lemi 2.5.3 je H_x lokalna stroga Ljapunova funkcija za dinamiku replikacije na relativnoj okolini $V = U \cap Q_x$. Preciznije, $H_x : V \to \mathbb{R}_+$ je neprekidno diferencijabilna, $H_x(y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ i $\dot{H}_x(y) < 0\ \forall y \in V$. Po teoremu 2.5.2, ovo impliciran da je x asimptotski stabilno stanje. □

2.6 Fundamentalni teorem prirodnog izbora

U nekim situacijima, evolucija populacije dovodi po monotonog povećanja prosječne jačine populacije. Ta tvrdnja se naziva *fundamentalni teorem prirodnog izbora*. Iako se čini kao poprilično očito, jer kao što smo vidjeli, dinamika replikacije dovodi do povećanja udjela populacije koji ostvaruje iznadprosječnu dobit i smanjenja udjela koji ostvaruje ispodprosječnu. Dakle, za očekivati je da će se prosječna dobit $u(x, x)$ povećavati kako se sastav populacije $x \in \Sigma$ mijenja prema dinamici replikacije. Ipak to nije općenito tako. Pogledajmo primjer Zatvorenikove dileme 1.2.3. Ako na početku gotovo cijela populacija igra

”surađuj”, tada je duljina zatvorske kazne u prosjeku blizu jedne godine. Po dinamici replikacije, udio jedinki koje igraju ”surađuj” se smanjuje dok dugoročno gotovo svi ne igraju ”optuži”. Tada je prosječna duljina zatvorske kazne dvije godine. Dakle prosječna dobit populacije se smanjila s -1 na -2.

Unatoč tome, poznato je fundamentalni teorem vrijedi za sve dvostruko simetrične igre. Preciznije, u takvoj igri se prosječna korisnost povećava putem svake ne stacionarne trajektorije riješenja dinamike replikacije.

Teorem 2.6.1. *Za svaku dvostruko simetričnu igru je* $\dot{u}(x,x) \geq 0$ *i jednakost vrijedi ako i samo ako je* $x \in \Sigma^0$.

Dokaz. Promotrimo dvostruko simetričnu igru danu matricom isplate A. Zapišimo vremensku derivaciju prosječne jačine populacije $u(x,x)$ kroz trajektoriju rješenja dinamike replikacije kao

$$\dot{u}(x,x) = \frac{d}{dt} u[\xi(t,x), \xi(t,x)]_{t=0}$$

Koristeći simetriju matrice isplate A dobivamo:

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,x) &= \frac{d}{dt} \sum_{i,j \in K} x_i u(e_i, e_j) x_j \\
&= \sum_{i,j \in K} [\dot{x}_i u(e_i, e_j) x_j + x_i u(e_i, e_j) \dot{x}_j] \\
&= 2 \sum_{i,j \in K} \dot{x}_i u(e_i, e_j) x_j \\
&= 2 \sum_{i \in K} \dot{x}_i u(e_i, x)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x_i[u(e_i,x) - u(x,x)]$ umjesto $\dot{x}_i$ dobivamo:

$$\dot{u}(x,x) = 2 \sum_{i \in K} x_i [u(e_i,x) - u(x,x)] u(e_i,x) = 2 \sum_{i \in K} x_i u^2(e_i,x) - 2u^2(x,x)$$

Željeli bismo pokazati da je to jednako $\sum_{i \in K} 2x_i[u(e_i,x) - u(x,x)]^2$.
Raspisivanjem dobijemo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in K} 2x_i [u(e_i,x) - u(x,x)]^2 &= \sum_{i \in K} 2x_i [u^2(e_i,x) - 2u(e_i,x)u(x,x) + u^2(x,x)] \\
&= 2\left(\sum_{i \in K} x_i u^2(e_i,x) \right) - 4u^2(x,x) + 2u^2(x,x) \\
&= 2 \sum_{i \in K} x_i u^2(e_i,x) - 2u^2(x,x)
\end{aligned}$$

Dakle pokazali smo da vrijedi:

$$\dot{u}(x, x) = 2\sum_{i=1}^{k} x_i[u(e_i, x) - u(x, x)]^2$$

Iz ovoga je očito $\dot{u}(x, x) \geq 0$ s jednakošću ako i samo ako je x stacionarno. Nadalje, vidimo da brzina kojom se prosječna dobit povećava ovisi o varijanci distribucije isplata u populaciji. Dakle, što je distribucija isplata po čistim strategijama neujednačenija, prosječna isplata će se brže povećavati. □

Posljedica ove tvrdnje je ekvivalencija između evolucijski stabilnih strategija i asimptotskih stanja kod dvostruko simetričnih igara. Dapače, ako se sjetimo tvrdnje o socijalnoj efikasnosti evolucijskih stabilnih strategija iz Propozicije 1.5.2, dobivamo iduću karakterizaciju asimptotski stabilnih stanja:

Propozicija 2.6.2. *Za svaku dvostruko simetričnu igru vrijedi ekvivalencija između idućih tvrdnji:*

a) $x \in \Sigma^{ESS}$.

b) $x \in \Sigma$ *je lokalno strogo efikasna.*

c) $x \in \Sigma$ *je asimptotski stabilno stanje dinamike replikacije.*

Dokaz. Ekvivalencija $a) \Leftrightarrow b)$ je pokazana u Propoziciji 1.5.2, dok smo implikaciju $a) \Rightarrow c)$ pokazali u Propoziciji 2.5.4. Znači dovoljno je pokazati da vrijedi implikacija $c) \Rightarrow b)$. To slijedi izravno iz fundamentalnog teorema. Naime, ako je x asimptotski stabilno, tada postoji otvorena okolina U od x takva da $\xi(t, y)_{t\to\infty} \to x$ za sve $y \in U$. Po fundamentalnom teoremu 2.6.1 tada imamo $u(y, y) < u(x, x)$ za svaki $y \in U$, $y \neq x$. Tj. x je lokalno strogo efikasna strategija ove igre. □

Bibliografija

[1] N.P. Bhatia i G.P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[2] S.H. Heap i Y. Varoufakis, *Game Theory: A Critical Introduction*, Taylor & Francis, 2002.

[3] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.

[4] H. Peters, *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*, Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[5] R. Selten, *A note on evolutionary stable strategies in asymmetric animal conflicts*, Journal of Theoretical Biology **84** (1980), 93–101.

[6] P.D. Taylor i L.B. Jonker, *Evolutionary stable strategies and game dynamics*, Mathematical Biosciences **40** (1978), 145 – 156.

[7] J.N. Webb, *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*, Springer London, 2007.

[8] J.W. Weibull, *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1997.

Sažetak

U ovom radu prezentirani su glavni rezultati iz evolucijske teorije igara. Evolucijska teorija igara kao igrače uzima jedinke iz iste populacije te promatra natjecanja između nasumično izvučenih jedinki. Vjerojatnosti kod miješanih strategija predstavljaju udjele pojedinog tipa jedinki u populaciji. Kao rješenje takve igra dana je evolucijski stabilna strategija, tj. ona strategija koja je otporna na pojavu mutanata u populaciji. Evolucijska stabilnost zahtjeva da jedinke koje prate urođenu strategiju ostvaruju veću korisnost od jedinki koje su mutirale (koje su počele upotrebljavati neku drugu strategiju) sve dok je udio takvih jedinki u populaciji dovoljno mali. Iako ovakav pristup ne zahtjeva racionalnost igrača, ipak se pokazuje da je svaka evolucijski stabilna strategija također i Nashova ravnoteža. U prvom dijelu rada opisana su još neka svojstva evolucijski stabilne strategije te je pokazano da kod dvostruko simetričnih igara evolucijski stabilna strategija odgovara socijalno optimalnoj strategiji.

U drugom dijelu rada proučava se kako se sastav populacije mijenja kroz vrijeme. Uz pretpostavku da će udio pojedinog tipa jedinki u populaciji rasti ako ostvaruje korisnost veću od prosječne, postaviljena je dinamiku replikacije za svaki tip jedinki. Nadalje, pokazano je da strogo dominirane strategije u limesu izumiru iz populacije, dok slabo dominirane mogu preživjeti. Zatim se pokazuje da su Nashove ravnoteže stacionarna stanja dinamike replikacije te je Nashova ravnoteža nužan uvjet da bi stacionarno stanje bilo stabilno. Na kraju je pokazano da je evolucijska stabilnost nužan uvjet za asimptotsku stabilnost stanja te da kod dvostruko simetričnih igara vrijedi ekvivalencija.

Summary

This thesis covers the main results given by the evolutionary game theory. In this approach, the players are individuals from the same population and the competition between pairs of randomly drawn individuals is studied. The probabilities in mixed strategies represent the population shares of a given type of individual. The solution of this kind of game is the evolutionary stable strategy, that is, the strategy that is resilient to the appearance of mutants in the population. Evolutionary stability requires that the individuals that follow the incumbent strategy get the higher payoff than the mutants (the individuals who started following some other strategy) as long as the share of mutants in the population is sufficiently small. Although this approach doesn't require rationality, it turns out that every evolutionary stable strategy is also in Nash equilibrium with itself. In the first part some more properties of the evolutionary stable strategies are described and the equivalence between evolutionary stable and socially optimal strategies in doubly symmetric games is shown.

The second half covers how the population state changes over time. With the assumption that the population share of individuals that achieve better than average payoff increases, the replicator dynamics for each type of individual is derived. Furthermore, it is shown that strictly dominated strategies vanish from the population in the long run, while that is not necessarily so for the weakly dominated strategies. After that, it is shown that Nash equilibria corresponds to the stationary states of the replicatory dynamics and that it's necessary for the state to be a Nash equilibrium for it to be stable. In the end, it is shown that evolutionary stability is the necessary condition for asymptotic stability and that with doubly symmetric games the equivalence holds.

Životopis

Rođena sam 1.7.1993. u Zagrebu gdje sam i pohađala osnovnu školu Ivan Meštrović te prirodoslovno-matematičku srednju školu V. Gimnazija. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog školovanja sudjelovala sam na mnogim natjecanjima iz biologije i fizike. 2012. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2014. godine sam sudjelovala u međunarodnoj ljetnoj matematičkoj školi "Modern Mathematics" u Lyonu. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2015. upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika.