Bayesovske igre

Keranović, Vanessa

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vanessa Keranović

BAYESOVSKE IGRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Lavoslavu Čakloviću na pristupačnosti i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada. Veliko hvala mami i tati na bezuvjetnoj podršci tijekom svih godina studiranja i hvala prijateljima koji su vjerovali u mene od samog početka.

Sadržaj

Uvod

U igrama s potpunom informacijom igračima je poznat broj igrača u igri, strategije dostupne svakom igraču te funkcije isplate svakog igrača obzirom na danu strategiju. Posebna skupina takvih igara je i igra s nesavršenom informacijom, gdje potezi igrača nisu poznati, ali sama igra jest.

Suprotno tome, Bayesovske igre su igre s nepotpunom informacijom - obzirom na samu igru. Dakle, igraču nije poznata informacija o funkcijama isplate ostalih igrača. Nepotpuna informacija modelira se pretpostavkom o postojanju tipa igrača. Preciznije, svaki igrač zauzima jedan od tipova igrača koja su mu dostupna na način da se obuhvate sve moguće strategije i funkcije isplate. Daljnja je pretpostavka da svaki igrač zna samo svoj tip, a uz taj dani tip i vjerojatnosnu distribuciju o mogućim tipovima preostalih igrača (s kojom vjerojatnošću se određeni tip igrača pojavljuje). Kada uzimamo da je vjerojatnosna distribucija o tipovima igrača dana, igra s nepotpunom informacijom o samoj igri svodi se na igru s nesavršenom informacijom o tipu igrača. Broj igrača, tipova ili strategija može biti konačan, ali i beskonačan. Ovu transformaciju iz igre s nepotpunom informacijom u igru s nesavršenom informacijom zovemo Harsanyijeva transformacija. John C. Harsanyi je 1967. godine u svom radu *„Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players"* predstavio novi način rješavanja igara s nepotpunom informacijom gdje ih uvođenjem *tipa igrača* transformira u igre s nesavršenom informacijom, igra za koje je koncept Nashove ravnoteže primjenjiv, stoga takvu igru znamo „riješiti".

Zasebno analiziramo statičke i dinamičke Bayesovske igre, razvijajući teoriju i upoznavajući se s problematikom kroz statičke igre te produbljujući već razvijenu teoriju na dinamičke igre, odnosno igre gdje dolazi do ponavljanja ili gdje potezi ne moraju biti simultani kao u statičkim igrama. Promotrit ćemo primjere s neprekidnim brojem tipovima.

Potom ćemo se posvetiti posebnoj vrsti igara gdje je primjena nepotpunosti informacija prilično uspješna, aukcijama. Aukcije se upotrebljavaju diljem svijeta kao način kupnje/prodaje nekog objekta te metode aukcija variraju. Stoga ćemo promatrati više vrsta aukcija te ih međusobno uspoređivati, a u jednom ćemo primjeru proučiti koja aukcija je bolja iz perspektive prodavača.

Poglavlje 1

Statičke Bayesovske igre

U ovom ćemo poglavlju, kada govorimo o Bayesovskim igrama, misliti na statičke Bayesovske igre, igre gdje se potezi odvijaju simultano.

1.1 Igre s nepotpunom informacijom

Igre s nepotpunom informacijom su one igre u kojima je funkcija isplate nepoznata. Preciznije, u takvim igrama postoje igrači koji sadrže privatnu informaciju o igri (odnosno o vlastitoj funkciji isplate), koja nije poznata ostalim igračima. Suprotno tome, u igri s potpunom informacijom ne postoje privatne informacije te su sva saznanja o igri i o funkcijama isplate javno dostupna.

Brojni primjeri igara zapravo sadrže do neke mjere nepotpunu informaciju, stoga je slučaj savršenog poznavanja funkcija isplata pojednostavljenje koje može biti zadovoljavajuće u nekim slučajevima. Nastavljamo baviti se onim primjerima igara u kojima nepotpunost informacija nije zanemariva te koristimo se sljedećim uvodnim primjerom kako bismo potom formalno uveli potrebne definicije.

Primjer 1.1.1. ***Gradnja objekta***

Pretpostavimo postojanje dviju tvrtki u nekoj industriji. Prva tvrtka, igrač 1, koja se već nalazi na tržištu te druga, igrač 2, koja će potencijalno ući na tržište. Igrač 1 odlučuje hoće li izgraditi novi objekt te označimo s B odluku da izgradi, a s D odluku da ne izgradi. Nadalje, igrač 2 odlučuje hoće li ući na tržište te analogno tome označimo s E odluku o ulasku, a s D odluku da ne ulazi na tržište. Igrač 1 zna troškove izgradnje, dok igrač 2 nije siguran radi li se o visokim ili niskim troškovima. Matrice isplata su sljedeće:

- *u slučaju visokog troška:*

Igrač 1 \Igrač 2	***ući (E)***	***ne ući (D)***
izgraditi (B)	*0,-1*	*2,0*
ne izgraditi (D)	*2,1*	*3,0*

- *u slučaju niskog troška:*

Igrač 1 \Igrač 2	***ući (E)***	***ne ući (D)***
izgraditi (B)	*1.5,-1*	*3.5,0*
ne izgraditi (D)	*2,1*	*3,0*

Igre zapisane na ovaj način, u obliku matrice, zovemo igre u normalnoj formi.

Iz matrica uočavamo da isplata igrača 2 ovisi o tome hoće li igrač 1 izgraditi objekt. Ulazak na tržište za igrača 2 jedino je isplativo ako igrač 1 odluči ne graditi. Za igrača 1 vidi se da je u slučaju većeg troška dominantni redak D (ne gradi objekt), dok u slučaju manjeg ovisi o njegovoj predikciji hoće li igrač 2 ulaziti na tržište.

Iz perspektive igrača 1, potrebno je procijeniti hoće li igrač 2 ulaziti na tržište. Označimo s y vjerojatnost ulaska igrača 2 na tržište. Tada je u slučaju niskih troškova za igrača 1 isplativije izgraditi objekt ako je očekivana isplata gradnje veća ili jednaka očekivanoj isplati u slučaju da ne gradi, odnosno ako je

$$1.5y + 3.5(1-y) \geq 2y + 3(1-y) \iff y \leq \frac{1}{2}\,.$$

Odnosno, ako je vjerojatnost ulaska igrača 2 manja od $\frac{1}{2}$ igrač 1 u slučaju niskih troškova bira izgraditi objekt.

Dakle, primjećujemo sljedeće probleme pri određivanju poteza: igrač 1 mora predvidjeti poteze igrača 2 kako bi izabrao vlastite, a igrač 2 mora uzeti u obzir da potez igrača 1 ovisi o predikcijama o njegovom potezu (potezu igrača 2).

Dano rješavamo Harsanyijevom transformacijom iz igre s nepotpunom informacijom u igru s nesavršenom informacijom uvođenjem **tipa igrača** *za igrača 1 te pripadnu vjerojatnost događaja većeg, odnosno manjeg troška izgradnje objekta. Pretpostavkom da je ta vjerojatnost dana, nepotpuna informacija o funkciji isplate igrača svodi se na nesavršenu informaciju o tipu igrača.*

Preciznije, označimo s p vjerojatnost visokih troškova izgradnje te pretpostavljamo da je p unaprijed poznat obojici igrača, odnosno da se „odabir" tipa igrača dogodio prije početka same igre. Sada igrač 1 zna svoj tip i vjerojatnost p, a igrač 2 zna samo p. Kažemo da igrač 1 ima **privatnu informaciju***.*

Sada, kada smo igru transformirali u igru s nesavršenom, ali potpunom informacijom, moguće je primijeniti koncept Nashove ravnoteže na danu igru.

Zapravo, Bayesova ravnoteža igre s nepotpunom informacijom je upravo Nashova ravnoteža ekvivalentne igre s nesavršenom informacijom. No, prije formalnih definicija, riješimo dani problem.

Primijetimo da je ravnoteža zapravo trojka strategija; dvije su strategije igrača 1, jedna kada su u pitanju visoki troškovi te druga kada su u pitanju niski, dok je jedna strategija igrača 2 jer on poznaje samo vjerojatnost p. Kažemo da igrač 1 ima ***2 skupa informacija*** *jer njegova strategija ovisi radi li se o visokim ili niskim troškovima, a on posjeduje tu informaciju na početku igre. Suprotno tome, igrač 2 ima* ***1 skup informacija****, odnosno njegova strategija ima samo jednu komponentu budući da ne zna tip igrača 1, već samo vjerojatnost p.*

Stoga su čiste strategije transformirane igre igrača 1 $S_1 = \{Bb, Bd, Db, Dd\}$*, gdje je prva komponenta strategija u slučaju visokog troška, a druga u slučaju niskog. Čiste strategije igrača 2 su* $S_2 = \{E, D\}$*. Uz navedene čiste strategije, matrica isplate je sljedeća:*

Igrač 1 \Igrač 2	***E***	***D***
Bb	$1.5 - 1.5p, -1$	$3.5 - 1.5p, 0$
Bd	$2 - 2p, 1 - 2p$	$3 - p, 0$
Db	$1.5 + 0.5p, 2p - 1$	$3.5 - 0.5p, 0$
Dd	$2, 1$	$3, 0$

Uočimo kako redak Db (strogo) dominira Bb te redak Dd (strogo) dominira Bd. Stroga dominacija ne vrijedi samo onda kada je $p = 0$*, no u tom slučaju zapravo nemamo nepotpunu informaciju jer se visoki trošak pojavljuje s vjerojatnošću 1, pa taj slučaj možemo zanemariti.*

Dakle, izbacivanjem strogo dominiranih redaka dobivamo sljedeću matricu isplata:

Igrač 1 \Igrač 2	***E***	***D***
Db	$1.5 + 0.5p, 2p - 1$	$3.5 - 0.5p, 0$
Dd	$2, 1$	$3, 0$

Zbog prethodno spomenutog pretpostavljamo da je $p \in \langle 0, 1\rangle$ *jer granični slučajevi* $p = 0$ *ili* $p = 1$ *zapravo isključuju postojanje nepotpune informacije - samo jedan događaj je tada moguć. Pogledajmo moguće slučajeve.*

- *Ako igrač 2 odabere E, jedinstven najbolji odgovor igrača 1 je Dd, neovisno o* $p \in \langle 0, 1\rangle$*. Slijedi da je* $\langle Dd, E\rangle$ *Nashova ravnoteža* $\forall p \in \langle 0, 1\rangle$*. Nadalje, primijetimo da stupac E strogo dominira D za* $2p - 1 > 0 \iff p > \frac{1}{2}$*. Dakle, za* $p > \frac{1}{2}$ *igrač 2 uvijek bira E, pa je tada* $\langle Dd, E\rangle$ *jedina ravnoteža.*

- *Neka je sada* $p \leq \frac{1}{2}$*. Slijedi da je onda* $\langle Db, D\rangle$ *također Nashova ravnoteža.*

- *Našli smo sve ravnoteže čistih strategija. Pretpostavimo sada postojanje miješane strategije. Ima smisla promatrati samo za* $p \leq \frac{1}{2}$ *jer u suprotnom postoji jedinstvena Nashova ravnoteža čistih strategija. Dakle, igrač 2 je sklon slučajnom odabiru, što* *znači da mu je očekivana isplata za obje čiste strategije jednaka, odnosno vrijedi sljedeća jednakost:*

$$EU_2(E) = EU_2(D)\ , \tag{1.1}$$

gdje $EU_i : S_i \mapsto \mathbb{R}$ označava funkciju očekivane isplate igrača i, $i \in \{1, 2\}$. Označimo li sa $\sigma_i(x)$ vjerojatnost da igrač i, $i \in \{1, 2\}$, odabere strategiju x, iz (1.1) slijedi

$$\sigma_1(Db) \cdot (2p - 1) + (1 - \sigma_1(Db)) \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow\ \sigma_1(Db) = \frac{1}{2(1 - p)}$$

Za igrača 1 zaključujemo analogno:

$$EU_1(Db) = EU_1(Dd)\ , \tag{1.2}$$

pa slijedi

$$(1.5+0.5p)\cdot\sigma_2(E)+(3.5-0.5p)\cdot(1-\sigma_2(E)) = 2\cdot\sigma_2(E)+3\cdot(1-\sigma_2(E)) \ \Rightarrow\ \sigma_2(E) = \frac{1}{2}$$

Dakle, za $p \le \frac{1}{2}$ dobili smo miješanu strategiju Nashove ravnoteže uz

$$\sigma_1(Db) = \frac{1}{2(1 - p)}\ ,\ \sigma_2(E) = \frac{1}{2}\ . \tag{1.3}$$

Sumirajmo dobivene ravnoteže:

1. *$\forall p \in \langle 0, 1\rangle$ igrač 1 ne gradi objekt ni u slučaju većih ni u slučaju manjih troškova te igrač 2 ulazi na tržište. Tu ravnotežu možemo zapisati kao $\langle Dd, E\rangle$. Za $p > \frac{1}{2}$ ovo je jedina ravnoteža.*

2. *Za $p \le \frac{1}{2}$ postoje 2 ravnoteže: $\langle Db, D\rangle$ (za igrača 1 vrijedi da uz veći trošak ne gradi, uz manji trošak gradi i igrač 2 ne ulazi na tržište) i miješana ravnoteža gdje igrač 1 u slučaju većih troškova ne gradi objekt, dok u slučaju manjih ga gradi uz vjerojatnost $\frac{1}{2(1-p)}$, a igrač 2 ulazi na tržište s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Ovaj slučaj zapisujemo kao $\langle \frac{1}{2(1-p)}Db + \frac{1-2p}{2(1-p)}Dd, \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}D\rangle$.*

3. *Posljednje nam preostaje pogledati granični slučaj gdje je $p = \frac{1}{2}$. Tada iz (1.1) slijedi $\sigma_1(Db) = 1$, pa jer igrač 1 bira strategiju Db s vjerojatnošću 1, očekivana isplata njegovih strategija više nije nužno jednaka, već slijedi*

   $$U_1(Db) \ge U_1(Dd) \Rightarrow \sigma_2(E) \le \frac{1}{2}\ .$$

   Odnosno, igrač 1 ne gradi u slučaju većih troškova te gradi u slučaju manjih, dok igrač 2 ulazi na tržište s vjerojatnošću manjom ili jednakom $\frac{1}{2}$.

Iako još nismo uveli sve oznake, ovdje ćemo dati definiciju Nashove ravnoteže potpune igre kako bi kasnije mogli zaključiti zašto su definicije Nashove i Bayesove ravnoteže (za transformiranu igru) zapravo „ekvivalentne".

Definicija 1.1.2. ***(Najbolji odgovor)*** *Neka je dana* $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n)$*, gdje je* Σ_i *skup svih miješanih strategija igrača i, a* $u_i : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ *njegova funkcija isplate. Najbolji odgovor igrača i na profil strategija preostalih igrača* $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ *je* $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ *takav da vrijedi* $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$*,* $\forall \sigma_i \in \Sigma_i$*.*

Definicija 1.1.3. ***(Nashova ravnoteža potpune igre)*** *Profil strategija* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ *je Nashova ravnoteža ako je, za svakog igrača i,* σ_i *najbolji odgovor na* σ_{-i}*.*

Definicija 1.1.4. ***(Slaba i jaka dominiranost)*** *Neka su a i b strategije igrača i te neka je* $\Sigma_{-i} = (\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, ..., \Sigma_n)$*, gdje je* $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ *profil strategija preostalih igrača (bez igrača i). Kažemo da*

- *strategija a slabo dominira strategiju b ako vrijedi* $u_i(a, \sigma_{-i}) \geq u_i(b, \sigma_{-i})$*,* $\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$*;*
- *strategija a jako dominira strategiju b ako vrijedi* $u_i(a, \sigma_{-i}) > u_i(b, \sigma_{-i})$*,* $\forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$*.*

1.2 *Ex Ante* predviđanja

U primjeru 1.1.1. uzmimo da je i igrač 2 imao privatnu informaciju, može biti jedan od dva različita tipa igrača - agresivan i susretljiv. Postavlja se pitanje kako bismo mogli promatrati ta dva različita tipa igrača 2.

Naime, na jednu stranu, tipove igrača 2 možemo promatrati kao 2 različita „igrača" te svaki „igrač" donosi svoju predikciju obzirom na igrača 1. Drugačije, možemo pretpostaviti da je odluka o predikciji jednaka za sve tipove igrača 2, odnosno da njegove tipove tretiramo kao jednog igrača te da različiti tipovi donose istu odluku o igraču 1. Ovakav pristup nazivamo *ex ante* te njega primjenjujemo nadalje. Taj pristup ima smisla u našem okruženju jer igrači donose odluku o strategijama prije nego li prime „signal" o tome koji je njihov tip, pa ih zapravo tretiramo kao jednog igrača.

Sada smo, nakon uvodnih razmatranja, spremni uvesti formalne definicije Bayesovske igre.

1.3 Bayesova ravnoteža

Definicija 1.3.1. *Bayesovsku igru BG definiramo kao uređenu petorku* $BG = (N, A, \Theta, p, u)$ *, gdje je:*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *skup igrača;*

- $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *, gdje je* A_i *skup akcija igrača i;*
- $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times ... \times \Theta_n$ *, gdje je* Θ_i *skup tipova igrača i;*
- $p : \Theta \mapsto [0, 1]$ *je prethodno dano zajedničko uvjerenje o tipovima (vjerojatnost pridodana tipovima igrača koja je unaprijed dana i poznata svim igračima) gdje se svaki tip igrača pojavljuje s pozitivnom vjerojatnošću;*
- $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$*, gdje je* $u_i : A \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *funkcija korisnosti (funkcija isplate, isplata) igrača i.*

Pretpostavka jest da je uređena petorka iz definicije Bayesovske igre poznata svim igračima te da svaki igrač zna svoj tip. Isplata igrača i uz dane tipove igrača $\theta \in \Theta$ i akcije igrača $a \in A$ dana je s $u_i(a, \theta)$. Također pretpostavljamo da se svaki tip pojavljuje s pozitivnom vjerojatnošću, u protivnom ga mičemo iz skupa tipova.

Uz ovu je terminologiju ekvivalentno reći da je igrač zna svoju funkciju isplate i da igrač zna svoj tip. Analogno, ekvivalentno je reći da igrač i nije siguran u vezi funkcija isplata ostalih igrača i da nije siguran koji su tipovi preostalih igrača, odnosno da mu $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, ..., \theta_n)$ nije poznat.

Uvedimo nekoliko oznaka:

- $\theta_i \in \Theta_i$ neki tip igrača i, svaki tip odgovara drugoj funkciji isplate igrača i;
- $\theta \in \Theta$ profil tipova igrača gdje je $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$, $\theta_i \in \Theta_i$;
- $a_i \in A_i$ čista strategija igrača i;
- $a \in A$ profil čistih strategija igrača gdje je $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \in A_i$;
- $\sigma_i \in \Sigma_i$ miješana strategija igrača i, gdje je Σ_i skup svih miješanih strategija igrača i;
- $\sigma \in \Sigma$ profil miješanih strategija igrača gdje je $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, $\sigma_i \in \Sigma_i$;
- $a_i(\theta_i)$ čista strategija igrača i kada je tipa θ_i;
- $a(\theta)$ profil čistih strategija igrača kada im je profil tipova θ;
- $\sigma_i(\theta_i)$ miješana strategija igrača i kada je tipa θ_i;
- $\sigma(\theta)$ profil miješanih strategija igrača im je profil tipova θ;
- $\sigma_i(a_i|\theta_i)$ vjerojatnost da igrač i unutar miješane strategije σ_i odigra čistu strategiju a_i uz tip θ_i.

Strategija igrača određuje potez igrača u svakom trenutku igre. *Miješana strategija* je zapravo vjerojatnosna distribucija nad čistim strategijama gdje igrač na slučajan način odabire jednu od čistih strategija, uz pripadnu vjerojatnost odabira te strategije. Čistu strategiju jednostavno možemo prikazati kao miješanu tako da u miješanoj strategiji se sve ostale čiste strategije pojavljuju s vjerojatnošću 0, a ona koja nam treba s vjerojatnošću 1. Iz tog razloga daljnje definicije spominju samo miješane strategije jer na taj način obuhvaćamo i čiste i miješane strategije.

Također, primijetimo da kada govorimo o strategijama ili tipovima svih igrača, koristimo termin *profil* te svaki profil uključuje točno jednu strategiju (odnosno tip) za pojedinog igrača.

Napomena 1.3.2. *Za $\theta_i \in \Theta_i$, $i \in \{1, 2, ...n\}$, označimo $\theta_{-i} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, ..., \theta_n)$. Neka je $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ uvjerenje i-tog igrača o tipovima ostalih igrača θ_{-i} uz dani njegov tip θ_i, ono će nam koristiti pri izračunu očekivane korisnosti igrača i, stoga nam je od interesa ju izračunati. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je skup Θ_i i skup igrača N konačan. Budući da je unaprijed dano uvjerenje $p(\theta)$ poznato, igrač i može koristiti* ***Bayesovo pravilo*** *kako bi izračunao svoja uvjerenja i to čini na sljedeći način:*

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{p(\theta_{-i}, \theta_i)}{p(\theta_i)} = \frac{p(\theta_{-i}, \theta_i)}{\sum_{\theta_{-i}' \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i}', \theta_i)} = \frac{p(\theta_i|\theta_{-i})p(\theta_{-i})}{\sum_{\theta_{-i}' \in \Theta_{-i}} p(\theta_i|\theta_{-i}')p(\theta_{-i}')} . \tag{1.4}$$

Za uvjerenja koja zadovoljavaju (1.4) kažemo da su konzistentna.

Nadalje ćemo pretpostavljati da su uvjerenja igrača u Bayesovskoj igri uvijek konzistentna te da su skupovi tipova svih igrača i skup igrača konačni. Ako promatramo neki primjer koji ne zadovoljava ove pretpostavke, posebno ćemo to naglasiti.

Okolina u kojoj je na gore naveden način definirana Bayesovska igra zahtijeva i definiranje očekivane funkcije korisnosti i to na 3 različita načina; uvodimo nazive za svaki: *ex post, ex interim i ex ante*. Prvi način računa očekivanu korisnost uz dani tip svih igrača, drugi to radi uzimajući u obzir da igrač poznaje samo svoj tip i prethodno danu distribuciju p te zadnji način računanja očekivane korisnosti kreće od pretpostavke da igrač ne poznaje niti jedan tip, pa tako ni svoj. Definiranjem ovih triju očekivanih funkcija korisnosti bit ćemo u mogućnosti uvesti formalnu definiciju Bayesove ravnoteže.

Definicija 1.3.3. ***(Ex post očekivana korisnost)*** *Ex post očekivana funkcija korisnosti igrača i u Bayesovskoj igri (N, A, Θ, p, u), gdje je profil strategija igrača dan sa σ i profil tipova igrača dan s θ, je definirana s*

$$EU_i(\sigma, \theta) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, \theta) . \tag{1.5}$$

Uočimo kako u slučaju ex post očekivane korisnosti su zapravo jedina „nepoznanica” miješane strategije preostalih igrača. Ovo, naravno, nije realno za pretpostaviti kod Bayesovskih igara budući da igrači poznaju samo svoj tip, no koristi nam kod definiranja preostalih dviju očekivanih korisnosti.

Definicija 1.3.4. ***(Ex interim očekivana korisnost)*** *Ex interim očekivana funkcija korisnosti igrača i u Bayesovskoj igri (N, A, Θ, p, u), gdje je profil strategija igrača dan sa σ i s θ_i je dan tip igrača i, je definirana s*

$$EU_i(\sigma, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, (\theta_{-i}, \theta_i)) \ , \tag{1.6}$$

odnosno, ekvivalentno tome

$$EU_i(\sigma, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) EU_i(\sigma, (\theta_i, \theta_{-i})) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) EU_i(\sigma, \theta) \ . \tag{1.7}$$

Definicija 1.3.5. ***(Ex ante očekivana korisnost)*** *Ex ante očekivana funkcija korisnosti igrača i u Bayesovskoj igri (N, A, Θ, p, u) gdje je profil strategija igrača dan sa σ je definirana s*

$$EU_i(\sigma) = \sum_{\theta \in \Theta} p(\theta) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(a_j|\theta_j) \right) u_i(a, \theta) \ , \tag{1.8}$$

odnosno, ekvivalentno tome

$$EU_i(\sigma) = \sum_{\theta \in \Theta} p(\theta) EU_i(\sigma, \theta) \ . \tag{1.9}$$

Napomena 1.3.6. *Uočimo kako (1.4), (1.7) i (1.9) povlače*

$$EU_i(\sigma) = \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) EU_i(\sigma, \theta_i) \ . \tag{1.10}$$

Naime,

$$\sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) EU_i(\sigma, \theta_i) = \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) EU_i(\sigma, (\theta_i, \theta_{-i})) =$$

$$= \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_i) p(\theta_{-i}|\theta_i) EU_i(\sigma, \theta) = \sum_{\theta \in \Theta} p(\theta) EU_i(\sigma, \theta) = EU_i(\sigma) \ .$$

Definicija 1.3.7. ***(Najbolji odgovori Bayesovske igre)*** *Skup najboljih odgovora igrača i na miješane strategije preostalih igrača σ_{-i} je dan s*

$$NO_i(\sigma_{-i}) = arg \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \tag{1.11}$$

Naravno, NO_i je skup jer više strategija može dati istu (maksimalnu) očekivanu korisnost. Objasnimo zašto je opravdano računati najbolje odgovore pomoću *ex ante* očekivane korisnosti. Naime, promotrimo li desnu stranu jednakosti u (1.10), vidimo kako $EU_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}, \theta_i)$ ne ovisi o strategijama koje bi igrač i odigrao kada ne bi bio tipa θ_i, pa isto vrijedi i za $EU_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i})$. Stoga, zapravo provodimo nezavisnu maksimizaciju *ex interim* očekivane korisnosti uvjetovanu pojedinim tipom igrača koji može poprimiti (budući da za tipove po pretpostavci vrijedi $p(\theta_i) > 0$).

Odnosno, ako je određena strategija najbolji odgovor nakon danog signala o kojem je tipu igrača riječ, onda je ona i najbolji odgovor prije samog signala uvjetno planiran kao rješenje što učiniti pojavi li se određeni signal. Ovo možemo jasnije vidjeti na primjeru 1.1.1. gdje smo došli do ravnoteža *ex ante* putem. Jednako tako, mogli smo ravnoteže računati posebno za matricu isplata visokog troška i za matricu isplata niskog troška (polazne matrice isplata), što je zapravo nezavisna maksimizacija *ex interim* očekivane korisnosti.

Definicija 1.3.8. ***(Bayesova ravnoteža)*** *Za $\sigma \in \Sigma$ kažemo da je Bayesova ravnoteža ako $\forall i$ vrijedi $\sigma_i \in NO_i(\sigma_{-i})$.*

Definicija Bayesove ravnoteže je upravo definicija Nashove ravnoteže: svaki igrač bira potez koji je najbolji odgovor na strategije preostalih igrača. Razlikuje se u tome što je Bayesova ravnoteža definirana pomoću očekivane korisnosti.

Uočimo da, jer se svaki tip igrača pojavljuje s pozitivnom vjerojatnošću, ova *ex ante* formulacija ravnoteže je zapravo ekvivalentna tome da igrač *i* maksimizira svoju očekivanu korisnost za dani θ_i, to jest svoju *ex interim* očekivanu korisnost, za svaki mogući tip θ_i. U tom slučaju tvrdimo da je σ Bayesova ravnoteža ako $\forall i$ i $\forall \theta_i$ vrijedi

$$\sigma_i(\theta_i) \in arg \max_{\sigma_i^{'} \in \Sigma_i} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} | \theta_i) EU_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}, (\theta_i, \theta_{-i})) \tag{1.12}$$

Pokažimo formalno da su definicija Bayesove ravnoteže i (1.12) ekvivalentni. Tada možemo zaključiti da na ravnotežu Bayesovske igre ne utječe poznavanje vlastitog tipa. Preciznije, da igrač donosi istu odluku o svojoj strategiji prije i nakon poznavanja kojeg je tipa. Tek smo tada, zapravo, opravdali našu definiciju Bayesove ravnoteže koja je upravo Nashova ravnoteža ekvivalentne transformirane igre u igru s nesavršenom (ali potpunom) informacijom i potvrdili da su u pitanju *ex ante* predviđanja. Nepotpuna informacija o samoj igri svodi se na nesavršenu informaciju o tipu igrača, uz danu vjerojatnosnu distribuciju.

Teorem 1.3.9. *Neka je dana Bayesovska igra (N, A, Θ, p, u) te neka je $\sigma \in \Sigma$ neki profil miješanih strategija. Pretpostavimo da je Θ_i konačan, $\forall i \in N$. Tada za $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \Sigma$ vrijedi*

$$\forall i \in N,\ \sigma_i \in arg \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \iff \forall i \in N,\ \forall \theta_i \in \Theta_i,\ \sigma_i(\theta_i) \in arg \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}, \theta_i) \tag{1.13}$$

Dokaz. Neka je $\sigma^* \in \Sigma$ takva da vrijedi

$$\forall i \in N,\ \forall \theta_i \in \Theta_i,\ \sigma_i^*(\theta_i) \in arg \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}, \theta_i),$$

odnosno

$$\forall i \in N,\ EU_i(\sigma^*, \theta_i) \geq EU_i(a, \theta_i),\ \forall a \in A.$$

Tada uz (1.10) slijedi da $\forall i \in N$ i za svaku čistu strategiju a_i igrača i vrijedi

$$EU_i(a_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) EU_i(a_i, \sigma_{-i}^*, \theta_i) \leq \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) EU_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*, \theta_i) = EU_i(\sigma^*)$$

Budući da ova nejednakost vrijedi za svaku čistu strategiju igrača i, onda ona vrijedi i za svaku miješanu strategiju igrača i. Slijedi da je σ_i^* najbolji odgovor na σ_{-i}^* te kako je to istinito za svakog igrača, slijedi da je $\forall i \in N,\ \sigma_i \in arg \max_{\sigma_i' \in \Sigma_i} EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

Preostaje pokazati drugi smjer. To pokazujemo na način da ako ne vrijedi desna strana ekvivalencije, neće vrijediti ni lijeva. Odnosno, pretpostavimo da je $\sigma^* \in \Sigma$ takva da postoje igrač $i \in N$, neki njegov tip $\theta_i \in \Theta_i$ te akcija $a_i \in A_i$ takvi da vrijedi

$$EU_i(\sigma^*, \theta_i) < EU_i(a_i, \sigma_{-i}^*, \theta_i). \tag{1.14}$$

Neka je σ_i' strategija igrača i definirana na sljedeći način:

$$\sigma_i'(\theta_i') = \begin{cases} \sigma_i^*(\theta_i') & \text{ako } \theta_i' \neq \theta_i \\ a_i & \text{ako } \theta_i' = \theta_i. \end{cases}$$

Sada uz (1.10) i (1.14) slijedi

$$EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*) = \sum_{\theta_i' \in \Theta_i} p(\theta_i') EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*, \theta_i') =$$

$$= \sum_{\theta_i' \neq \theta_i} p(\theta_i') EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*, \theta_i') + p(\theta_i) EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*, \theta_i) =$$

$$= \sum_{\theta_i' \neq \theta_i} p(\theta_i') EU_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*, \theta_i') + p(\theta_i) EU_i(a_i, \sigma_{-i}^*, \theta_i) >$$

$$> \sum_{\theta_i' \neq \theta_i} p(\theta_i')EU_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*, \theta_i') + p(\theta_i)EU_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*, \theta_i) =$$

$$= \sum_{\theta_i' \in \Theta_i} p(\theta_i')EU_i(\sigma^*, \theta_i') = EU_i(\sigma^*)$$

Dakle, dobili smo da je $EU_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*) > EU_i(\sigma^*)$, odnosno da ne vrijedi ni lijeva strana ekvivalencije za naš σ^*. Ovime je pokazan i drugi smjer. □

Napomena 1.3.10. ***(Postojanje Bayesove ravnoteže za Bayesovsku igru)*** *Uz pretpostavku iz napomene 1.3.2. da su skupovi tipova igrača i skup igrača konačni, postojanje Bayesove ravnoteže direktna je posljedica postojanja Nashove ravnoteže. Naime, Bayesova ravnoteža Bayesovske igre je upravo Nashova ravnoteža ekvivalentne transformirane igre gdje ju uvođenjem tipova možemo prikazati u normalnoj formi, pa je koncept postojanja Nashove ravnoteže primjenjiv.*

1.4 Primjer neprekidnih tipova igrača

U sljedećem primjeru bavimo se klasičnim problemom u Teoriji igara, takozvani Rat spolova (engleskoj literaturi poznat kao *„Battle of the sexes”*), gdje će tipova igrača biti beskonačno i neprebrojivo.

Primjer 1.4.1. ***(Rat spolova)*** *U ovom primjeru bavimo se modifikacijom standardnog Rata spolova s obostranom nepotpunom informacijom. Dakle, igra se sastoji od 2 igrača, igrač 1 - muškarac (M) i igrač 2 - žena (W) te imaju isti skup akcija; mogu odabrati otići na nogomet (F) ili na balet (B). Odnosno, imamo*

$$N = \{M, W\}, \ A_1 = A_2 = \{F, B\}$$

te pripadnu matricu isplata:

$M \backslash W$	***F***	***B***
F	$2 + \theta_1, 1$	*0,0*
B	*0,0*	$1, 2 + \theta_2$

Tip θ_1 poznat je muškarcu, to je njegova privatna informacija, dok je θ_2 poznata ženi (njena privatna informacija). Pretpostavimo da su θ_1, θ_2 nezavisno odabrani iz uniformne distribucije na segmentu $[0, x]$, gdje je $x > 0$. Slijedi da je skup tipova za oba igrača dan s $\Theta_1 = \Theta_2 = [0, x]$. Dakle, svaki igrač ima kontinuum tipova te su uvjerenja igrača definirana na početku igre time što znamo iz koje distribucije dolaze tipovi igrača.

Uvodimo pojam ***„cut-point” strategije****; u slučaju kada je skup tipova interval i skup akcija svakog igrača dvočlan, to su strategije gdje postoji poseban tip za kojeg svi tipovi s* *njegove lijeve strane biraju jednu strategiju, a svi ostali s njegove desne strane drugu. Taj poseban tip igrača predstavlja „cut-point" tip, a sve korištene strategije zajedno zovemo „cut-point" strategije. Pokazat ćemo prvo da takvo što ima smisla tražiti u našem primjeru sljedećom propozicijom koja tvrdi da svaka Bayesova ravnoteža ove modificirane igre Rata spolova sadrži takav tip igrača.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je dana Bayesovska igra primjerom 1.4.1. (modificirana igra Rata spolova). Tada svaka Bayesova ravnoteža mora sadržavati „cut-point" strategije.*

Dokaz. Slijedi iz činjenice da ako u ravnoteži neki tip θ_1 bira F, tada svi tipovi $\hat{\theta}_1 > \theta_1$ će također izabrati F. Pokažimo to kontradikcijom.

Uzmimo proizvoljnu Bayesovu ravnotežu i neki tip θ_1 čija je optimalna strategija F. Sada uzmimo neki $\hat{\theta}_1 > \theta_1$ i pretpostavimo da je njegova optimalna strategija B te neka je σ_2^* neka strategija igrača W.
θ_1 bira F u ravnoteži $\Rightarrow$

$$(2 + \theta_1)\sigma_2^*(F) = EU_1((F, \sigma_2^*), \theta_1) \geq EU_1((B, \sigma_2^*), \theta_1) = 1(1 - \sigma_2^*(F)). \tag{1.15}$$

Također, $\hat{\theta}_1$ bira B u ravnoteži $\Rightarrow$

$$1(1 - \sigma_2^*(F)) = EU_1((B, \sigma_2^*), \hat{\theta}_1) \geq EU_1((F, \sigma_2^*), \hat{\theta}_1) = (2 + \hat{\theta}_1)\sigma_2^*(F). \tag{1.16}$$

Iz (1.15) i (1.16) slijedi $(2 + \theta_1)\sigma_2^*(F) \geq (2 + \hat{\theta}_1)\sigma_2^*(F)$.
Ako je $\sigma_2^*(F) = 0$, igrač W uvijek bira B, pa je onda najbolji odgovor igrača M upravo B, neovisno o tipu, što je kontradikcija s pretpostavkom da θ_1 bira F.
Dakle, mora vrijediti $\sigma_2^*(F) > 0$ što povlači $2 + \theta_1 \geq 2 + \hat{\theta}_1 \Rightarrow \theta_1 \geq \hat{\theta}_1$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\hat{\theta}_1 > \theta_1$.
Dakle, ako igrač M nekog tipa bira strategiju F, svi tipovi „iznad" njega također biraju tu strategiju. Simetrično, ako igrač W nekog tipa bira B, tada svaki tip „iznad" njega također bira B. Drugim riječima, igrači moraju koristiti „cut-point" strategije u svojim ravnotežama. □

Vratimo se rješavanju igre. Sada tražimo kritičnu vrijednost x_1 za koju igrač M kada θ_1 postane veći od te vrijednosti odlazi na nogomet, a u protivnom odlazi na balet. Analogno tome, tražimo x_2 takav da igrač W kada θ_2 postane veći od x_2 odlazi na balet, a u protivnom na nogomet. Označimo s $\sigma_1(\theta_1)$ vjerojatnost da igrač M ide na nogomet, odnosno

$$\sigma_1(\theta_1) = P(\theta_1 > x_1) = 1 - P(\theta_1 \leq x_1) = 1 - \frac{x_1}{x}. \tag{1.17}$$

Analogno, označimo s $\sigma_2(\theta_2)$ vjerojatnost da W ide na balet:

$$\sigma_2(\theta_2) = P(\theta_2 > x_2) = 1 - P(\theta_2 \leq x_2) = 1 - \frac{x_2}{x}. \tag{1.18}$$

Zadnje jednakosti u (1.17) i (1.18) slijede iz činjenice da θ_1 i θ_2 dolaze iz uniformne razdiobe na segmentu $[0, x]$. Uz $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, očekivane ex post isplate igrača M za svaku čistu strategiju su sljedeće:

$EU_1((F, \sigma_2(\theta_2)), \theta) = (2 + \theta_1) \cdot (1 - \sigma_2(\theta_2)) + 0 \cdot \sigma_2(\theta_2) = \frac{x_2}{x}(2 + \theta_1),$
$EU_1((B, \sigma_2(\theta_2)), \theta) = 0 \cdot (1 - \sigma_2(\theta_2)) + 1 \cdot \sigma_2(\theta_2) = 1 - \frac{x_2}{x}.$

$$\begin{aligned} \text{Igrač } M \text{ bira } F &\iff EU_1((F, \sigma_2(\theta_2)), \theta) \geq EU_1((B, \sigma_2(\theta_2)), \theta) \\ &\iff \frac{x_2}{x}(2 + \theta_1) \geq 1 - \frac{x_2}{x} \\ &\iff \theta_1 \geq \frac{x}{x_2} - 3. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dakle, kritična vrijednost igrača M je

$$x_1 = \frac{x}{x_2} - 3. \tag{1.20}$$

Analogno rješavamo za igrača W:
$EU_2((\sigma_1(\theta_1), F), \theta) = 1 \cdot \sigma_1(\theta_1) + 0 \cdot (1 - \sigma_1(\theta_1) = \sigma_1(\theta_1) = 1 - \frac{x_1}{x},$
$EU_2((\sigma_1(\theta_1), B), \theta) = 0 \cdot \sigma_1(\theta_1) + (2 + \theta_2) \cdot (1 - \sigma_1(\theta_1) = \frac{x_1}{x}(2 + \theta_2).$

$$\begin{aligned} \text{Igrač } W \text{ bira } B &\iff EU_2((\sigma_1(\theta_1), B), \theta) \geq EU_2((\sigma_1(\theta_1), F), \theta) \\ &\iff \frac{x_1}{x}(2 + \theta_2) \geq 1 - \frac{x_1}{x} \\ &\iff \theta_2 \geq \frac{x}{x_1} - 3. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Odnosno, kritična vrijednost igrača W je

$$x_2 = \frac{x}{x_1} - 3. \tag{1.22}$$

Iz (1.20) i (1.22) imamo sustav jednadžbi iz kojeg računamo kritične vrijednosti:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2^2 + 3x_2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2}. \tag{1.23}$$

Konačno, jedna Bayesova ravnoteža $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ je dana s:

$$\sigma_1^*(\theta_1) = \begin{cases} F & \text{ako } \theta_1 \geq y \\ B & \text{ako } \theta_1 < y \end{cases}, \ \sigma_2^*(\theta_2) = \begin{cases} F & \text{ako } \theta_2 < y \\ B & \text{ako } \theta_2 \geq y \end{cases}; \tag{1.24}$$

gdje je

$$y = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2}.$$

Primijetimo da kod „cut-point” strategija zapravo nije specificirano što učiniti za $\theta_i = x_i$, ali vjerojatnost tog događaja je 0 (radi se o neprekidnoj distribuciji), pa je uobičajeno staviti „ $\geq$ ” umjesto „ $>$ ” u (1.24).

Naravno, ovo nije jedina ravnoteža. Dvije ravnoteže čistih strategija koje igrači biraju neovisno o svom tipu su $\langle F, F\rangle$ i $\langle B, B\rangle$. Uočimo kako se i ovdje radi o „cut-point” strategijama, gdje se „cut-point” tipovi nalaze na rubovima, pa zapravo svi preostali tipovi koji biraju istu strategiju nalaze se sa samo „jedne strane”.

U Bayesovoj ravnoteži (1.24), iz (1.17), (1.18) i (1.23) slijedi da vjerojatnost igrača M da odabere F jednaka je vjerojatnosti igrača W da odabere B te,uz $y = \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}$, za $i \in \{1, 2\}$, one iznose

$$\sigma_i(\theta_i) = P(\theta_i > x_i) = 1 - \frac{y}{x} = 1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2x}. \tag{1.25}$$

Primijetimo da zapravo izvornu igru Rata spolova možemo dobiti kada pustimo $x \to 0$, jer će i tada θ_i biti 0 i dobili bismo igru s potpunom informacijom gdje je matrica isplata:

M \ *W*	***F***	***B***
F	2, 1	*0,0*
B	*0,0*	1, 2

Pogledajmo što za (1.25) znači kada neizvjesnost nestaje, odnosno kada $x \to 0$ za $i \in \{1, 2\}$ imamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sigma_i(\theta_i) &= \lim_{x\to 0}\left[1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2x}\right] = 1 - \lim_{x\to 0}\left[\frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2x}\right] = \\ &= 1 - \lim_{x\to 0}\frac{2(9 + 4x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{2}{3},\end{aligned} \tag{1.26}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili L'Hospitalovo pravilo. Kako je Nashova ravnoteža miješanih strategija potpune igre Rata spolova $\langle \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}B, \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}F\rangle$, vidimo da je vjerojatnost dobivena u (1.26) eliminacijom neizvjesnosti upravo vjerojatnost Nashove ravnoteže miješanih strategija potpune igre.

Poglavlje 2

Dinamičke Bayesovske igre

Za razliku od statičkih Bayesovskih igara, u dinamičkim Bayesovskim igrama svi potezi igrača nisu simultani. Važan poseban slučaj takvih igara su signalizirajuće igre, gdje najjednostavnije možemo pokazati komplikacije koje nastaju kada se sa statičkih prebacimo na dinamičke Bayesovske igre. Stoga ćemo prvo krenuti sa signalizirajućim igrama, potom prijeći na općenite dinamičke igre.

2.1 Signalizirajuće igre

Konačna signalizirajuća igra je igra dvaju igrača koja počinje (slučajnim) izborom tipa igrača 1, dok igrač 2 ima samo jedan tip. Igrač 1 poznaje svoj tip, ali igrač 2 ne zna kojeg je tipa igrač 1. Igrač 1 ima prvi potez, igrač 2 prati taj potez te nakon njega slijedi potez igrača 2. Kada igrač 2 odigra svoj potez, završava igra. Takvu igru zovemo signalizirajuća igra jer akcija igrača 1 može biti signal o njegovom tipu; igrač 2 iz akcije igrača 1 može otkriti nešto više o tipu igrača 1.

Primjer 2.1.1. *Pogledajmo igru danu slikom 2.1. Za ovakvu igru, zadanu grafičkim prikazom, kažemo da je u ekstenzivnoj formi. Brojevi uz sive linije su uvjerenja igrača 2 o tipovima θ_1 i θ_2 igrača 1. U danoj igri, igrač 1 otkrije svoj tip koji nije poznat igraču 2. Vidimo da su 2 moguća tipa (θ_1 i θ_2) te se svaki pojavljuje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Igrač 2 ima samo jedan tip, pa za njega nemamo vjerojatnosnu distribuciju. Plave linije predstavljaju poteze igrača 1; oba njegova tipa mogu birati između L i R. Igrač 2 samo promatra potez, L ili R, ne znajući koji tip povlači taj potez.*

Kako bismo mogli analizirati ovu igru i naći ravnoteže, igru možemo svesti na normalnu formu. Oba igrača imaju po četiri strategije. Skup strategija igrača 1 je

$$A_1 = \{LL, LR, RL, RR\},$$

gdje se prvo slovo odnosi na akciju tipa θ_1, a drugo na akciju tipa θ_2. Skup strategija igrača 2 je

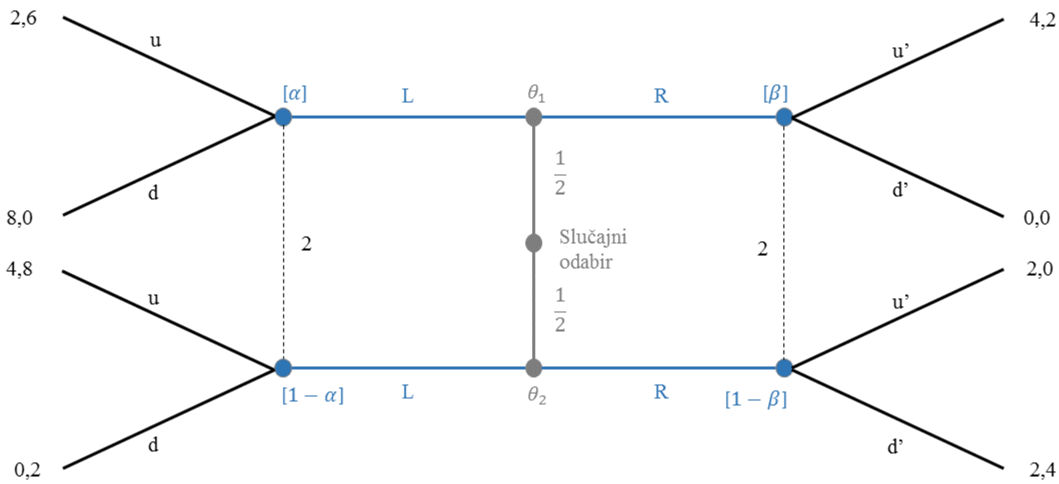
$$A_2 = \{uu', ud', du', dd'\},$$

gdje se prvo slovo odnosi na odgovor ako igrač 1 odigra L, a drugo ako igrač 1 odigra R.

Zapravo računamo očekivanu normalnu formu igre uz danu vjerojatnosnu distribuciju tipova igrača 1. Primjerice, za profil strategija $\langle LL, uu' \rangle$ očekivana isplata je

$$\frac{1}{2} \cdot (2, 6) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8) = (3, 7).$$

Analogno izračunamo ostale te u matrici isplata podcrtamo najbolje odgovore (čistih strategija).



Slika 2.1: Signalizirajuća igra

Matrica isplata je sljedeća:

Igrač 1 \Igrač 2	***uu'***	***ud'***	***ud'***	***dd'***
LL	$3,\underline{7}$	$\underline{3},\underline{7}$	$4,1$	$4,1$
LR	$2,3$	$2,\underline{5}$	$\underline{5},0$	$\underline{5},2$
RL	$\underline{4},\underline{5}$	$2,4$	$2,2$	$0,1$
RR	$3,1$	$1,\underline{2}$	$3,1$	$1,\underline{2}$

Prije nego se zabavimo Nashovim ravnotežama, spomenimo definiciju SPE („subgame perfect equilibrium"), koja je bitna u dinamičkim igrama općenito.

Definicija 2.1.2. ***Skup informacija*** *u dinamičkim igramama je skup čvorova (odluka) takvih da:*

1. *svaki čvor pripada jednom igraču,*

2. *kada igra dođe to tog skupa informacija, igrač koji je sljedeći na redu ne zna koji točno čvor je dosegnut, tj. ne zna o kojem čvoru iz skupa informacija se radi.*

Skup informacija bolje možemo razumijeti na primjeru. U našem slučaju, kada pogledamo sliku 2.1, isprekidanim su linijama označeni skupovi informacija igrača 2. Točnije, recimo da je igrač 1 izabrao L. Tada igrač 2 zapravo ne zna radi li se o „gornjem" ili „donjem" čvoru, odnosno ne zna koji tip je izabrao potez L. Odnosno, zna o kojem je skupu informacija riječ (oba čvora do kojih se dođe kada igrač 1 izabere L), ali ne zna koji čvor točno.

Definicija 2.1.3. ***Podigra*** *(engl. subgame) je podskup neke igre koji sadrži proizvoljan početni čvor takav da je jedini čvor u svom skupu informacija (ne nalazi se u skupu informacija gdje je više čvorova) te sve njegove nasljednike. Također, ako je čvor nekog skupa informacija u podigri, onda su svi članovi tog skupa informacija u podigri.*

Definicija 2.1.4. ***SPE*** *(engl. „subgame perfect equilibrium") je posebna vrsta Nashove ravnoteže u dinamičkim igrama. Profil strategija je SPE ako je Nashova ravnoteža svake podigre originalne igre.*

Nashova ravnoteža dobivena iz normalne forme ekvivalentna je Bayesovoj ravnoteži (to znamo iz prvog poglavlja), no mi želimo tražiti posebnu vrstu Bayesove ravnoteže na sličan način kao što smo tražili SPE unutar Nashovih ravnoteža kod dinamičkih igara s potpunom informacijom. Tu posebnu vrstu zvat ćemo PBE (engl. „perfect Bayesian equilibrium"), definiciju uvodimo nakon primjera, a sada ćemo se pozabaviti osnovnim idejama i naći PBE bez formalne definicije. Glavna ideja je nakon svakog koraka igre zahtijevati konzistentnost novonastalih uvjerenja (onda kada su poznati potezi do danog trenutka) i optimalnost odgovora uzimajući u obzir i novonastala uvjerenja. Polazimo od Bayesovih ravnoteža jer one zadovaljavaju tražene uvjete za „nulti" korak, odnosno konzistentnost uvjerenja na početku igre i, sukladno tome, optimalnost odgovora te prelazimo na daljnje korake. Pogledajmo na našem primjeru jesu li ravnoteže ujedno i PBE.

Normalna forma ukazuje na dvije Nashove ravnoteže (čistih strategija): $\langle RL, uu' \rangle$ *i* $\langle LL, ud' \rangle$. *Kako je svaka podigra ove igre zapravo originalna igra, trivijalno slijedi da su ove ravnoteže ujedno i SPE. No, trebamo provjeriti jesu li ove ravnoteže i PBE, odnosno jesu li uvjerenja konzistentna (nakon svakog koraka igre) i jesu li potezi optimalni uz dani tip (ex interim).*

Uzmimo prvo ravnotežu $\langle RL, uu' \rangle$. *Neka je* α *vjerojatnost da je igrač 1 tipa* θ_1 *uvjetno na događaj da igrač 1 odigra potez L. Tada je konzistentnost zadovoljena kada*

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 | \textit{igrač 1 odigra L}) = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 \textit{ i igrač 1 odigra L})}{P(\textit{igrač 1 odigra L})} = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1) \cdot P(\textit{igrač 1 odigra L} | \textit{igrač 1 je tipa } \theta_1)}{P(\textit{igrač 1 odigra L})} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0}{\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Slično, stavimo da je β *vjerojatnost da je igrač 1 tipa* θ_1 *uvjetno na događaj da igrač 1 odigra potez R. Konzistentnost je zadovoljena kada je*

$$\begin{aligned}\beta &= P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 | \textit{igrač 1 odigra R}) = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 \textit{ i igrač 1 odigra R})}{P(\textit{igrač 1 odigra R})} = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1) \cdot P(\textit{igrač 1 odigra R} | \textit{igrač 1 je tipa } \theta_1)}{P(\textit{igrač 1 odigra R})} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = 1.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Uz ova uvjerenja (igrača 2), promatramo li lijevi skup informacija, uočavamo da odigra li igrač 2 u, dobiva isplatu 8, a odigra li d dobiva 2. Dakle, u je optimalan. Također, obzirom na desni skup informacija, odigra li u', igrač 2 dobiva isplatu 2, a odigra li d', dobiva 0. Slijedi da je u' optimalan. Stoga, uu' zaista je najbolji odgovor igrača 2. Možemo zaključiti da je profil strategija $\langle RL, uu' \rangle$ *PBE uz uvjerenja* $\alpha = 0$ *i* $\beta = 1$.

Sljedeće, pogledajmo je li $\langle LL, ud' \rangle$ *i PBE. Ovdje, ako je* α *vjerojatnost da je igrač 1 tipa* θ_1 *uvjetno na događaj da igrač 1 odigra potez L, tada je konzistentnost zadovoljena kada*

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 | \textit{igrač 1 odigra L}) = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 \textit{ i igrač 1 odigra L})}{P(\textit{igrač 1 odigra L})} = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1) \cdot P(\textit{igrač 1 odigra L} | \textit{igrač 1 je tipa } \theta_1)}{P(\textit{igrač 1 odigra L})} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{1} = \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Odnosno, budući da će svaki tip igrača 1 odigrati L, uvjetne vjerojatnosti čvorovima odluke u lijevom setu informacija (tj. α *i* $1 - \alpha$*) su obje jednake* $\frac{1}{2}$. *Uz* $\alpha = \frac{1}{2}$, *slijedi da* *je u optimalan odgovor za lijevi set informacija. Uočimo da to zapravo vrijedi za svaki α, što možemo vidjeti i iz normalne forme budući da su najbolji odgovori igrača 2 na LL uu' i ud'.*

Pogledajmo sada uvjetne vjerojatnosti na desnom skupu informacija, odnosno uvjerenja $(\beta, 1-\beta)$. Kako igrač 1 uvijek igra L, desni skup informacija igrača 2 se dostiže s vjerojatnošću 0. To jest, vjerojatnost da igrač 1 odigra R je 0, stoga β ne možemo izračunati pomoću formule za uvjetnu vjerojatnost. Naime, pogledajmo formalno:

$$\begin{aligned}\beta &= P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 | \textit{igrač 1 odigra } R) = \\ &= \frac{P(\textit{igrač 1 je tipa } \theta_1 \textit{ i igrač 1 odigra } R)}{P(\textit{igrač 1 odigra } R)},\end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje se nazivnik pojavljuje s vrijednošću 0. No, svejedno moramo zadovoljiti sljedeće kako bi ravnoteža bila i PBE: očekivana isplata igrača 2 ako odigra potez d' mora biti barem onolika kolika je očekivana isplata u slučaju da odigra u' (tj. tražimo optimalnost poteza). Odnosno, mora vrijediti:

$$4(1-\beta) \geq 2\beta \iff \beta \leq \frac{2}{3}.$$

Dakle, $\langle LL, ud' \rangle$ je PBE uz uvjerenja $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta \leq \frac{2}{3}$.

Vidimo da su u ovome primjeru sve Nashove ravnoteže ujedno i PBE.

Uočimo da kada tražimo PBE neke igre, polazimo od Bayesove ravnoteže i svakim sljedećim korakom tražimo da trenutna uvjerenja budu konzistentna te da odgovori igrača budu optimalni.

Napomena 2.1.5. *Uvjerenja α i β iz prethodnog primjera zovemo a posteriori uvjerenja.*

Dakle, vidimo da u primjeru 2.1.1. signalizirajuće igre korištenjem konzistentnosti *a posteriori* uvjerenja, možemo zaključiti da su sve Nashove ravnoteže čistih strategija ujedno i PBE. Prije formalne definicije, u sljedećoj napomeni vidjet ćemo kako je moguće računati PBE signalizirajuće igre bez da prvo tražimo normalnu formu igre.

Napomena 2.1.6. ***(Računanje PBE u ekstenzivnoj formi)***
Računamo PBE signalizirajuće igre iz primjera 2.1.1. bez računanja normalne forme. Pretpostavit ćemo ravnoteže za svaki potez igrača 1 te izračunati uvjerenja α i β igrača 2 za te poteze. Potom gledamo najbolje odgovore igrača 2 na dane poteze igrača 1 te utvrđujemo jesu li ti profili strategija PBE.

- *Prvo, pretpostavimo ravnotežu gdje igrač 1 igra LL. Tada je po konzistentnosti a posteriori uverenja $\alpha = \frac{1}{2}$, a optimalan odgovor igrača 2 na lijevi skup informacija (skup informacija koji slijedi nakon što igrač 1 odabere L) je u. Za desni skup informacija (igrač 1 je odigrao R) optimalni odgovor igrača 2 je u' ako je $\beta \geq \frac{2}{3}$, a*

d' ako je $\beta \leq \frac{2}{3}$. Kada bi igrač 2 odigrao u' nakon R, tada bi tip θ_1 igrača 1 mogao poboljšati svoju isplatu tako da umjesto L odigra R, stoga možemo zaključiti da taj slučaj ne može biti ravnoteža. No, ako igrač 2 odigra d' nakon R, tada niti jedan tip igrača 1 ne bi odigrao R umjesto L. Zaključujemo da je $\langle LL, ud' \rangle$ s uvjerenjima $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta \geq \frac{2}{3}$ PBE.

- *Drugo, pretpostavimo da igrač 1 odigra LR u ravnoteži. Tada su a posteriori uvjerenja igrača 2 dana s $\alpha = 1$, $\beta = 0$, a najbolji odgovor igrača 2 je ud'. No, onda tip θ_2 igrača 1 bi imao veću isplatu odigra li L umjesto R, što ne može vrijediti za ravnotežu.*

- *Treće, pretpostavimo da je potez RL igrača 1 u ravnoteži. Tada je $\alpha = 0$, $\beta = 1$, a najbolji odgovor igrača 2 je uu'. Najbolji odgovor igrača 1 na potez RL, pa je $\langle RL, uu' \rangle$ s uvjerenjima $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ PBE.*

- *Četvrto i posljednje, pretpostavimo da je potez igrača 1 u ravnoteži RR. Tada je $\beta = \frac{1}{2}$, a najbolji odgovor igrača 2 nakon R je d', dok je nakon L najbolji odgovor u, za svaki α. Na potez ud' igrača 2, tip θ_1 igrača 1 bi povećao isplatu kada bi umjesto R odigrao L. Slijedi da RR ne može biti dio ravnoteže.*

Dakle, bez računanja normalne forme, dobili smo iste PBE kao računanjem normalnih formi.

Prije nego krenemo na općenite dinamičke igre gdje ćemo i formalno definirati PBE, uvedimo sljedeću definiciju:

Definicija 2.1.7. *U Bayesovoj ravnoteži, ako svi tipovi igrača poduzimaju isti potez u igri, takvu ravnotežu zovemo ujedinjujuća ravnoteža. Obrnuto, ako različiti tipovi igrača poduzimaju različite akcije, takvu ravnotežu zovemo razdvajajuća ravnoteža. Ako neki tipovi poduzimaju isti potez, a neki različit, takvu ravnotežu zovemo polurazdvajajuća ravnoteža.*

U primjeru 2.1.1. razdvajajuća ravnoteža bi bila $\langle RL, uu' \rangle$, dok bi $\langle LL, ud' \rangle$ bila ujedinjujuća.

2.2 Općenite dinamičke Bayesovske igre

Kao i u statičkim Bayesovskim igrama, na samom početku dinamičke Bayesovske igre svaki igrač otkrije kojeg je tipa te su mu poznata uvjerenja o ostalim igračima. Baš kao i u dinamičkim igrama s potpunom informacijom, igra se odvija u više koraka (vremenskih perioda) $t = 0, 1, 2, ..., T$, $T \in \mathbb{N}$, gdje se u svakom trenutku t akcije odvijaju simultano, kao u statičkoj igri.

Radi jednostavnosti zapisa, pretpostavit ćemo da svaki skup akcija igrača u svakom trenutku t ne ovisi o danom tipu tog igrača. Neka je $a_i^t \in A_i(h^t)$ akcija igrača i u trenutku t, uz profil akcija u trenutku t (svih n igrača) $a^t = (a_1^t, a_2^t, ..., a_n^t)$ i neka je $h^t = (a^0, a^1, ..., a^{t-1})$ cijela povijest poteza do početka trenutka t. Sa $\sigma_i(a_i \mid h^t, \theta_i)$ označimo vjerojatnost akcije a_i uvjetno na povijest h^t i tip θ_i. Isplata igrača i za povijest h^{T+1} i tipove igrača θ je dana s $u_i(h^{T+1}, \theta)$.

Kao i u dinamičkim igrama s potpunom informacijom, zanimaju nas podigre originalne igre. U ovom slučaju nećemo promatrati prave podigre već modifikaciju. Promatrat ćemo igru nakon određenog koraka kao igru s „novim" uvjerenjima. Sukladno tome, zanimat će nas uvjerenja nastala nakon svakog koraka igre, odnosno zanimat će nas uvjetna vjerojatnost (uvjerenje) igrača i na početku perioda t o tipovima preostalih igrača θ_{-i} uz dani njegov tip θ_i i povijest do trenutka t h^t, a tu uvjetnu vjerojatnost zovemo *a posteriori* uvjerenje te označavamo s $\mu_i(\theta_{-i} \mid \theta_i, h^t)$.

Pretpostavljamo sljedeće:

1. A posteriori uvjerenja su nezavisna i svi tipovi igrača i imaju ista uvjerenja. Dakle, za sve θ, t i h^t vrijedi
$$\mu_i(\theta_{-i} \mid \theta_i, h^t) = \prod_{j \neq i} \mu_i(\theta_j \mid h^t). \tag{2.5}$$

2. Bayesovo pravilo primjenjuje se za *a posteriori* uvjerenja gdje god je to moguće, odnosno za sve $i \neq j$, t, h^t i $a_j^t \in A_j(h^t)$, ako postoji $\hat{\theta}_j$ takav da je $\mu_i(\hat{\theta}_j \mid h^t) > 0$ i $\sigma_j(a_j^t \mid h^t, \hat{\theta}_j) > 0$ (tj. igrač i bira akciju a_j^t s pozitivnom vjerojatnošću uz dane h^t i $\hat{\theta}_j$), tada je *a posteriori* uvjerenje igrača i nakon vremenskog perioda t i izbor strategija a^t uz povijest h^t dan s
$$\mu_i(\theta_j \mid (h^t, a^t)) = \frac{\mu_i(\theta_j \mid h^t)\sigma_j(a_j^t \mid h^t, \theta_j)}{\sum_{\tilde{\theta}_j} \mu_i(\tilde{\theta}_j \mid h^t)\sigma_j(a_j^t \mid h^t, \tilde{\theta}_j)}. \tag{2.6}$$
Uočimo da je (2.6) zapravo konzistentnost *a posteriori* uvjerenja. Igrači, kao i na početku same igre, tokom trajanja cijele igre koriste Bayesovo pravilo kako bi izračunali svoja uvjerenja.

3. Za svaki t, h^t, $i \neq j$, a^t i $\hat{a}^t$ vrijedi
$$\mu_i(\theta_j \mid (h^t, a^t)) = \mu_i(\theta_j \mid (h^t, \hat{a}^t)), \text{ ako je } a_j^t = \hat{a}_j^t. \tag{2.7}$$
Ovaj bi uvjet mogli interpretirati kao „nema signaliranja nečega što ne znaš". Odnosno, za igrača j, potezi u trenutku t ostalih igrača ne utječu na uvjerenje u tom trenutku o tipu igrača j.

4. Za sve h^t, θ_k i $i \neq j \neq k$,
$$\mu_i(\theta_k \mid h^t) = \mu_j(\theta_k \mid h^t). \tag{2.8}$$
Odnosno, različiti igrači imaju ista *a posteriori* uvjerenja o tipu nekog igrača.

Zadnja pretpostavka nam omogućava da *a posteriori* uvjerenja igrača označimo na sljedeći način:
$$\mu(\theta_k \mid h^t) = \mu_i(\theta_k \mid h^t), \tag{2.9}$$
za igrače $i \neq k$. Nadalje, jer su *a posteriori* uvjerenja nezavisna, vrijedi sljedeće:
$$\mu(\theta_{-i} \mid h^t)\mu(\theta_i \mid h^t) = \mu(\theta \mid h^t)\ . \tag{2.10}$$

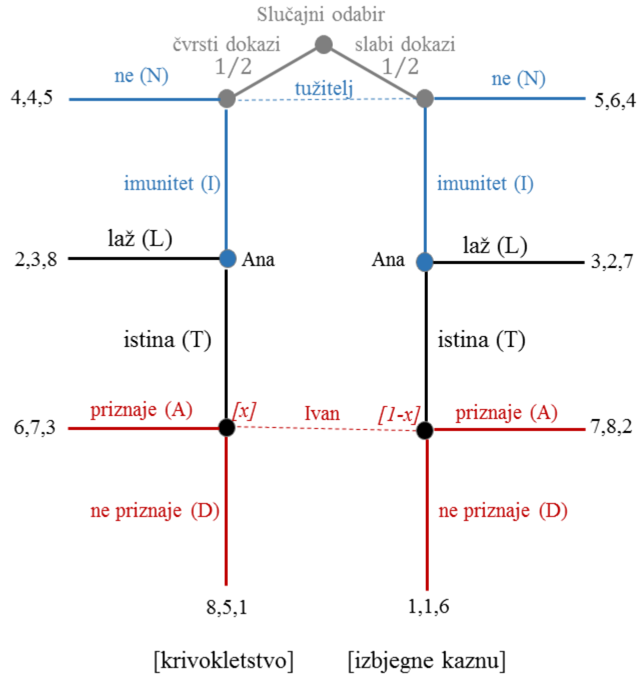
Sada smo spremni definirati ranije u primjeru spomenuti PBE.

Definicija 2.2.1. *Neka su dani profil strategija σ i a posteriori uvjerenja μ te neka su zadovoljene pretpostavke 1-4. Tada je (σ, μ)* ***PBE*** *(engl. „perfect Bayesian equilibrium") ako za svaki vremenski period t, igrača i, tip θ_i, strategiju $\sigma_i^{'}$ i povijest h^t vrijedi*
$$u_i(\sigma \mid h^t, \theta_i, \mu(\cdot \mid h^t)) \geq u_i((\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) \mid h^t, \theta_i, \mu(\cdot \mid h^t)). \tag{2.11}$$

Sljedeći je primjer igra sa troje igrača od kojih jedan ima 2 moguća tipa, ostali po jedan. Igra se odvija u 3 koraka.

Primjer 2.2.2. ***(Zamka za krivokletstvo)***
Troje su igrača, tužitelj, visoko rangirani državni službenik, kojeg ćemo radi jednostavnosti zvati Ivan i njegova zaposlenica, kojoj također radi jednostavnosti dajemo ime Ana. Tužitelj istražuje Ivana, ali razmišlja podnijeti tužbu protiv njegove zaposlenice Ane za koju sumnjiči da je u prošlosti lagala da bi zaštitila Ivana. Tužitelj vjeruje da Ana posjeduje nekakve dokaze protiv Ivana, koji mogu biti čvrsti ili slabi, te umjesto da provodi tužbu protiv nje, razmišlja hoće li joj ponuditi imunitet kako bi ona pristala svjedočiti protiv Ivana.

Problem nastaje jer nije siguran hoće li ona pristati reći istinu i svjedočiti protiv Ivana. Ona, dakle, ako joj je ponuđen imunitet ima 2 izbora: ili reći laž i izbjeći suđenje Ivanu, ili reći istinu i time pokrenuti suđenje na koje Ivan mora doći dati izjavu. Također, iako ona pristane reći istinu, dokazi koje posjeduje ne moraju biti čvrsti te se Ivan osuđuje jedino ako prizna krivnju. Naime, ako Ana odluči reći istinu, Ivan dolazi dati izjavu i bira jednu od dva moguća ishoda: priznaje sve ili tvrdi da nije kriv. U slučaju izjave da nije kriv, ako su dokazi čvrsti, biva osuđen za zločine na koje dokazi upućuju i za krivokletstvo. No, ako dokazi nisu čvrsti i ne prizna krivicu, sud ga oslobađa. Ana ne želi lagati, ali također ne želi biti u situaciji gdje će ostali misliti da laže ako okrivi svog šefa kojeg potom progasle nevinim. Ivan želi izbjeći osudu (bilo zbog priznanja ili krivokletstva), a tužitelj želi da Ivan bude osuđen. Igru prikazujemo u ekstenzivnoj formi na slici 2.2, uz pretpostavku



Slika 2.2: Dinamička igra

da se i čvrsti i slabi dokazi pojavljuju s jednakom vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ *te da je ta početna distribucija poznata svima, a samo Ana zna o kakvim je dokazima riječ, odnosno kojeg je ona tipa. Stavimo da je tip* θ_1 *slučaj kada se radi o čvrstim dokazima, a tip* θ_2 *kada se radi o slabima.*

Kada dolazi red da Ivan odluči o svom potezu, već su i tužitelj i Ana odigrali svoje poteze te njegova uvjerenja nakon tih poteza se mijenjaju u odnosu na uvjerenja na početku same igre. Stoga označimo s x *vjerojatnost da su dokazi čvrsti uz uvjet da je tužitelj ponudio imunitet Ani i da je Ana rekla istinu. Suprotno tome, neka je* $1-x$ *vjerojatnost da su dokazi slabi uz uvjet da je tužitelj ponudio imunitet Ani i da je Ana rekla istinu. Napomenimo još da isplate dane slikom 2.2 redom odgovaraju tužitelju, Ani i Ivanu, dok su slova u zagradi kratice za poteze igrača koje ćemo koristiti. Također, s* $EU_T(a)$, $EU_A(b)$, $EU_I(c)$ *označimo redom očekivane (ex ante) isplate tužitelja, Ane i Ivana obzirom na pripadne strategije a, b i c.*

Tražimo PBE dane igre. Krenimo prvo od osnovnih razmatranja igre, od zadnjeg poteza prema prvom. Naime, Ivan neće priznati krivnju kada god je očekivana isplata opovrga-

vanja $EU_I(D)$ iznad očekivane isplate priznavanja krivice, $EU_I(A)$. Jer je

$$EU_I(D) = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 6 = 6 - 5x$$

$$EU_I(A) = x \cdot 3 + (1 - x) \cdot 2 = 2 + x,$$

slijedi da Ivan odbija priznati kada god je $6 - 5x > 2 + x \iff x < \frac{2}{3}$. To jest, Ivan odbija priznati krivicu ako vjeruje da se radi o čvrstim dokazima s vjerojatnošću manjom od $\frac{2}{3}$; inače priznaje krivnju. No, za $x = \frac{2}{3}$ on je očito indiferentan i u tom slučaju bira potez na slučajan način.

Pogledajmo sada Anu. Iako ona zna o kakvim se dokazima radi, nije sigurna koji potez će Ivan odigrati ako ona odluči reći istinu. Neka je p vjerojatnost da Ivan ne priznaje krivnju u slučaju da daje izjavu. Tada, ako su dokazi čvrsti, Anina očekivana isplata je $5p + 7(1 - p) = 7 - 2p$ ako kaže istinu te 3 ako laže. Uočimo kako je očekivana isplata u slučaju da kaže istinu jednaka barem 5, stoga u slučaju čvrstih dokaza Ana isključivo bira reći istinu. Slijedi da svaka ravnoteža mora sadržavati da Anin tip θ_1 (čvrsti dokazi) bira potez T (reći istinu).

No, ako su dokazi slabi situacija je drugačija. Ako laže, isplata joj je 2, a ako kaže istinu očekivana isplata je $1 \cdot p + 8 \cdot (1 - p) = 8 - 7p$. Stoga će odabrati reći istinu kada god je $8 - 7p > 2 \iff p < \frac{6}{7}$. Odnosno, ako su Anini dokazi slabi, ona će reći istinu ako očekuje da Ivan neće priznati krivnju s vjerojatnošću manjom od $\frac{6}{7}$; za $p > \frac{6}{7}$ će lagati. Naravno, ako je $p = \frac{6}{7}$, tada joj je svejedno i bira potez na slučajan način.

Ispitat ćemo moguće ishode igre i provjeriti jesu li oni PBE. Kako smo zaključili da Ana u slučaju čvrstih dokaza uvijek bira reći istinu, za nju preostaju tri mogućnosti u slučaju slabih dokaza: reći istinu, laž ili odabrati jedno od poteza na slučajan način (odnosno, koristiti miješanu strategiju). Idemo redom:

- ***(Ujedinjujuća ravnoteža.)*** *Pretpostavimo da Ana uvijek govori istinu, neovisno o svom tipu. Kako bi ovo bilo istina, znamo da za vjerojatnost da Ivan ne prizna krivnju, p, mora vrijediti $p \leq \frac{6}{7}$. Ako joj tužitelj ponudi imunitet, očekuje da će reći istinu neovisno o dokazima, pa je njegova očekivana isplata tada:*

  $$EU_T(I) = \frac{1}{2} \cdot [8p + 6(1 - p)] + \frac{1}{2}[1p + 7(1 - p)] = \frac{1}{2} \cdot (13 - 4p) = \frac{13}{2} - 2p.$$

  Ako joj ne ponudi imutitet, očekivana isplata mu je

  $$EU_T(N) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{9}{2}.$$

  Stoga, tužitelj će Ani ponuditi imunitet ako je $EU_T(I) \geq EU_T(N)$, to jest $\frac{13}{2} - 2p \geq \frac{9}{2} \iff p \leq 1$. Odnosno, neovisno o tome što će Ivan napraviti, tužitelj će uvijek ponuditi imunitet Ani.

Uočimo da Ivan ne može promijeniti svoja a posteriori uvjerenja od početnih jer kojeg god da je Ana tipa, tužitelj će uvijek ponuditi imunitet i Ana će uvijek reći istinu. Dakle, $x = \frac{1}{2}$ (kao na početku igre). Prisjetimo se da smo došli do zaključka da Ivan ne priznaje krivnju za svaki x takav da je $x < \frac{2}{3}$, pa kako je u ovom slučaju taj uvjet zadovoljen, vidimo da Ivan sigurno neće priznati krivnju. Slijedi da je $p = 1$, pa uvjet $p \leq \frac{6}{7}$ da bi Ana u slučaju slabih dokaza rekla istinu nije zadovoljen. Ovo je kontradikcija, stoga ovaj profil strategija ne može biti ravnoteža.

- ***(Razdvajajuća ravnoteža.)*** *Pretpostavimo sada razdvajajuću ravnotežu. Kako Ana u slučaju čvrstih dokaza uvijek govori istinu, jedina moguća razdvajajuća ravnoteža bi bila da u slučaju slabih dokaza laže. Dakle, pretpostavimo da u ravnoteži Ana govori istinu u slučaju čvrstih, a laže u slučaju slabih dokaza. Da bi to vrijedilo, znamo da za vjerojatnost da Ivan ne prizna krivnju, p, mora vrijediti $p \geq \frac{6}{7}$. Ako tužitelj ponudi Ani imunitet, očekivana isplata mu je:*

$$EU_T(I) = \frac{1}{2} \cdot [8p + 6(1-p)] + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} + p.$$

Već znamo da je $EU_T(N) = \frac{9}{2}$, slijedi da je tužitelj spreman ponuditi imunitet ako je $\frac{9}{2} + p \geq \frac{9}{2} \iff p \geq 0$. Odnosno, neovisno o tome što će Ivan napraviti, tužitelj će uvijek ponuditi imunitet. Ovo sada omogućava Ivanu da sa sigurnošću zaključi o kakvim je dokazima riječ: budući da će tužitelj uvijek ponuditi imunitet, a Ana će reći istinu samo ako su u pitanju čvrsti dokazi, Ivan zna da ako bude morao dati izjavu, radi se o čvrstim dokazima. Inače Ana bira lagati, zbog čega on izbjegne suđenje. Dakle, $x = 1$, Ivan u ovom slučaju bira priznati krivnju (on to čini kada god je $x > \frac{2}{3}$), što znači da je $p = 0$. Ali, ovo je u kontradikciji s činjenicom da ova ravnoteža zahtijeva $p \geq \frac{6}{7}$, da bi Ana bila spremna lagati u slučaju slabih dokaza. Stoga ova ravnoteža ne postoji.

- ***(Polurazdvajajuća ravnoteža.)*** *Pretpostavimo da Ana u slučaju čvrstih dokaza govori istinu, a u slučaju slabih dokaza koristi miješanu strategiju: bira neku od 2 mogućih strategija s određenim vjerojatnostima. Budući da u slučaju čvrstih dokaza jedino i može reći istinu, ovo je jedina moguća polurazdvajajuća ravnoteža. Da bi ovakav Anin izbor bio moguć, znamo da za vjerojatnost da Ivan ne prizna krivnju, p, mora vrijediti $p = \frac{6}{7}$, što znači da i Ivan koristi miješanu strategiju (bira ne priznati krivnju s vjerojatnošću $\frac{6}{7}$), što zatim implicira da je $x = \frac{2}{3}$ (inače bi birao jednu od čistih strategija).*

  Neka je q vjerojatnost da Ana kaže istinu ako su u pitanju slabi dokazi. Ako joj tužitelj ponudi imunitet, njegova očekivana isplata je:

$$EU_T(I) = \frac{1}{2} \cdot [8p + 6(1-p)] + \frac{1}{2} \cdot [q \cdot (1p + 7(1-p)) + (1-q) \cdot 3] = \frac{1}{2} \cdot [9 + 2p + 2q(2-3p)].$$

Kao i prije, vrijedi $EU_T(N) = \frac{1}{2} \cdot 9$*, što znači da je spreman ponuditi imunitet ako je* $9 + 2p + 2q(2 - 3p) \geq 9 \iff p + q(2 - 3p) \geq 0$. *Koristeći* $p = \frac{6}{7}$*, dobivamo da je* $q \leq \frac{3}{2}$. *Dakle, tužitelj će ponuditi imunitet neovisno o tome s kojom vjerojatnošću će Ana reći istinu u slučaju slabih dokaza. Sada računamo Ivanova a posteriori uvjerenja koristeći Bayesovo pravilo:*

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q} = \frac{1}{1+q}. \tag{2.12}$$

Pojasnimo kako smo dobili (2.12). Neka su dani sljedeći događaji:

– A_1 *- u pitanju su čvrsti dokazi,*

– A_2 *- Ana govori istinu,*

– A_3 *- tužitelj nudi imunitet i*

– A_4 *- u pitanju su slabi dokazi.*

Tada vrijedi sljedeće:

$$x = P(A_1 | A_2 \cap A_3) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_2 \cap A_3)} = \frac{P(A_2 | A_1 \cap A_3) P(A_3 | A_1) P(A_1)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_4 \cap A_2 \cap A_3)} =$$

$$= \frac{P(A_2 | A_1 \cap A_3) P(A_3 | A_1) P(A_1)}{P(A_2 | A_1 \cap A_3) P(A_3 | A_1) P(A_1) + P(A_2 | A_4 \cap A_3) P(A_3 | A_4) P(A_4)},$$

pa jer je $P(A_1) = P(A_4) = \frac{1}{2}$, $P(A_3|A_1) = P(A_3|A_4) = 1$, $P(A_2|A_1 \cap A_3) = 1$ *i* $P(A_2|A_4 \cap A_3) = q$ *slijedi jednakost u (2.12).*

Jer i Ivan bira miješanu strategiju znamo da vrijedi $x = \frac{2}{3}$*, stoga slijedi da je* $q = \frac{1}{2}$. *Vidimo, dakle, da je ovo jedinstvena PBE.*

Sumirajući rezultat, sljedeće strategije čine jedinstvenu PBE igre krivokletstva:

- *tužitelj uvijek nudi imunitet Ani;*

- *Ana će reći istinu u slučaju čvrstih dokaza, a u slučaju slabih će reći istinu s vjerojatnošću* $\frac{1}{2}$*;*

- *Ivan ne priznaje krivnju s vjerojatnošću* $\frac{6}{7}$ *te vjeruje da se radi o čvrstim dokazima s vjerojatnošću* $\frac{2}{3}$ *(a posteriori uvjerenje).*

Poglavlje 3

Aukcije

Uvod

U ovom poglavlju bavimo se aukcijama, igrama gdje je primjena igara s nepotpunom informacijom prilično uspješna, a vidjet ćemo i zašto. Aukcija je mehanizam kupnje/prodaje objekata gdje vlasnik objekta želi prodati te potencijalni kupci daju svoje ponude iznosa za koje bi kupili objekt, a objekt se prodaje onome s najvišom ponudom. Aukciju predstavljamo kao igru s nepotpunom informacijom te će od glavnog interesa biti Bayesova ravnoteža igre, odnosno ponude cijena (strategije) kupaca i prihod prodavača.

Bavit ćemo se različitim vrstama aukcija, stoga navodimo glavne karakteristike po kojima razlikujemo aukcije:

- **Otvorena ili zatvorena ponuda.** U aukcijama s otvorenim ponudama, kupci se čuju ili vide u stvarnom vremenu, u trenutku kad se ponude stvaraju i u mogućnosti su dati protuponudu. U zatvorenim aukcijama, svi kupci simultano daju svoje ponude i ne znaju ponude ostalih.

  Zatvorenu ponudu možemo zamisliti kao skup potencijalnih kupaca koji istovremeno predaju kuvertu s ponudom te je pobjednik onaj koji je ponudio najveći iznos.

- **Privatna ili zajednička vrijednost.** Vrijednost je igračeva procjena vrijednosti objekta na prodaji. Kada je igračeva vrijednost privatna, nezavisna je od vrijednosti ostalih kupaca i ne mora nužno biti jednaka. Privatna igračeva vrijednost poznata je samo tom igraču. Kada je vrijednost zajednička, kod svih igrača je jednaka ali je nepoznata. Ovo je možda manje jasno, pa dajemo jedan primjer takve aukcije. Kada se prodaju prava za naftnu bušotinu, svim kupcima je poznata cijena nafte, ali ne znaju zapravo koliko točno nafte će biti moguće izvući iz tog polja.

  Zapravo, aukcije mogu biti i mješavina privatne i zajedničke informacije. Recimo da je određena umjetnina na aukciji; ona ima neku svoju procijenjenu vrijednost, no ta vrijednost varira među kupcima ovisno o njihovim preferencijama, ukusu, emocijama i slično. Stoga će za nekoga vrijediti možda nešto iznad procijenjene vrijednosti, a za nekoga ispod. Cijena bi svakako trebala fluktuirati oko te procijenjene.

- **Prodaja samo jednog ili više objekata.** Također jedna od karakteristika aukcija je koliko se objekata na njoj prodaje. Nekad je to samo jedan objekt, nekad više kopija istog objekta (primjerice, obveznice), a nekada i više objekata s različitim karakteristikama (prodaju određenih prava, zasebno za svaku regiju, moguće je provesti na jednoj aukciji).

- **Prva ili druga cijena.** U aukcijama objekt dobiva onaj kupac s najvećom ponudom te u slučaju aukcija prve cijene plaća za objekt onoliko koliko je ponudio. No, u slučaju aukcija druge cijene kupac s najvećom ponudom plaća objekt za iznos druge po redu najveće ponude.

U ovome se poglavlju bavimo aukcijama gdje kupci imaju privatne vrijednosti te gdje je jedan objekt na prodaji.

3.1 Zatvorene aukcije s privatnim vrijednostima

Definirajmo formalno aukciju sa zatvorenom ponudom gdje su vrijednosti privatne.

Definicija 3.1.1. *Aukcija sa zatvorenom ponudom i privatnim vrijednostima je vektor* $(N, (V_i, F_i)_{i \in N}, p, C)$*, gdje je:*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *je skup kupaca,*

- $V_i \subseteq \mathbb{R}$ *je skup mogućih privatnih vrijednosti kupca* i*, za svaki* $i \in N$*; označimo s* $V^N = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ *skup vektora privatnih informacija,*

- $\forall i \in N$ *dana je funkcija distribucije* F_i *definirana za skup privatnih informacija* V_i*,*

- $p : [0, \infty\rangle^N \mapsto \Delta(N)$*, za* $\Delta(N) = \{x \in [0, 1]^N \ : \ \sum_{i \in N} x_i = 1\}$ *skup vjerojatnosnih distribucija na skupu igrača* $N = \{1, 2, ..., n\}$*, je funkcija koja svakom vektoru ponuda iznosa* $b \in [0, \infty\rangle^N$ *kupaca pridoda distribuciju,*

- $C : N \times [0, \infty\rangle^N \mapsto \mathbb{R}^N$ *je funkcija koja određuje iznos koji svaki kupac plaća, za svaki vektor ponuda* $b \in [0, \infty\rangle^N$*, ovisno o igraču (kupcu)* $i_* \in N$ *koji je pobjednik.*

Aukcija sa zatvorenom ponudom i privatnim vrijednostima provodi se na sljedeći način:

- Privatna vrijednost v_i svakog kupca i izabrana je iz skupa V_i na slučajan način, sukladno funkciji distribucije F_i.

- Svaki kupac i upoznat je sa svojom privatnom vrijednosti v_i, ali ne zna privatne vrijednosti ostalih igrača.
- Svaki kupac i daje svoju ponudu iznosa $b_i \in [0, \infty\rangle$ (ovisno o njegovoj privatnoj vrijednosti v_i).
- Kupac i_* koji osvoji objekt na aukciji, odabran je sukladno distribuciji $p(b_1, b_2, ..., b_n)$; vjerojatnost da kupac i osvoji objekt je $p_i(b_1, b_2, ..., b_n)$.
- Svaki kupac i plati iznos $C_i(i_*; b_1, b_2, ..., b_n)$, gdje je C funkcija plaćanja.

Napomena 3.1.2. *Uočimo sljedeće obzirom na ovako danu definiciju:*

- *Privatne vrijednosti igrača su međusobno nezavisne, pa je vektor privatnih vrijednosti $(v_1, v_2, ..., v_n)$ dobiven iz produkta distribucija $F^N = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$.*
- *U većini aukcija koje poznajemo (pa tako i aukcija sa zatvorenom ponudom) pobjednik je onaj s najvišom ponudom. To jest, ako postoji igrač i takav da je $b_i > \max_{j \neq i} b_j$, tada je $p(b_1, b_2, ..., b_n)$ distribucija koja pridodaje vjerojatnost 1 igraču i. Ako dva ili više igrača daju istu najvišu ponudu, po prethodno dogovorenom pravilu bira se pobjednik (primjerice, tko je prvi dao ponudu ili bacanje novčića). Pretpostavit ćemo pravilo slučajnog odabira: ako $m \geq 2$ igrača da istu najvišu ponudu, tada svakom od tih m igrača pridodana je ista vjerojatnost osvajanja objekta, jednaka $\frac{1}{m}$.*
- *Kod većine, pobjednik plaća najvišu ili drugu najvišu ponudu za objekt na aukciji. Funkcija plaćanja u našoj je definiciji općenitija jer dopušta da se teorija proširi i na aukcije gdje se plaća participacija i slično.*

Pokažimo sada kako aukciju sa zatvorenom ponudom iz definicije 3.1.1. prikazujemo kao igru s nepotpunom informacijom:

- Skup igrača je skup kupaca $N = \{1, 2, ..., n\}$.
- Skup tipova igrača i dan je s V_i.
- Distribucija nad vektorom tipova igrača dana je kao produktna distribucija s funkcijom distribucije $F^N = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$.
- Za svaki vektor tipova $v \in V^N$, gdje je $\forall i \in N$ skup akcija igrača i dan s $[0, \infty\rangle$ i za svaki vektor akcija $x \in [0, \infty\rangle^N$, profit, odnosno korisnost igrača i dan je s

$$p_i(x)v_i - \sum_{i_* \in N} p_{i_*}(x) C_i(i_*; x). \tag{3.1}$$

Odnosno, ako je igrač i pobjednik, dobije v_i (njegova privatna vrijednost objekta), a plati $C_i(i_*; x)$ u svakom slučaju (neovisno o tome je li pobjednik), gdje je i_* pobjednik.

Kada govorimo o aukcijama, umjesto isplate ili korisnosti koristit ćemo termin profit, kako ne bismo pomiješali isplatu u teoriji igara koja predstavlja korisnost igrača s isplatom kao iznos koji kupac mora platiti za objekt.

- Čista strategija igrača i u aukciji sa zatvorenom ponudom izmjeriva je funkcija

$$\beta_i : V_i \mapsto [0, \infty\rangle, \tag{3.2}$$

koja svakom tipu v_i igrača i pridoda iznos koji će ponuditi na aukciji.

Ako igrač i koristi čistu strategiju β_i, tada on ako je tipa v_i za objekt na aukciji nudi $\beta_i(v_i)$. Ako svi kupci koriste profil strategija $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$, očekivani profit kupca i je

$$EU_i(\beta) = \int_{V^N} \left(p_i(\beta_1(x_1), ..., \beta_n(x_n))x_i - \sum_{i_* \in N} p_{i_*}(\beta_1(x_1), ..., \beta_n(x_n)) C_i(i_*; \beta_1(x_1), ..., \beta_n(x_n)) \right) dF^N(x). \tag{3.3}$$

Sljedeća dva teorema bave se dominiranim strategijama i ravnotežom aukcija sa zatvorenom ponudom druge cijene.

Teorem 3.1.3. *U aukcijama sa zatvorenom ponudom druge cijene, strategija igrača i u kojoj daje ponudu jednakog iznosa kao i njegova privatna vrijednost (tog objekta) slabo dominira sve ostale strategije.*

Dokaz. Neka je dan kupac i s privatnom vrijednosti v_i. Podijelimo skup mogućih ponuda,$[0, \infty\rangle$, u 3 podskupa:

- ponude koje su manje od v_i; skup $[0, v_i\rangle$,
- ponuda jednaka v_i; skup $\{v_i\}$,
- ponude veće od v_i; $\langle v_i, \infty\rangle$.

Pokažimo da strategija za koju je ponuda $b_i = v_i$ dominira sve ostale strategije (čije su ponude u preostala 2 skupa).

Očekivana isplata igrača i, u ovoj vrsti aukcije, ovisi o strategijama preostalih igrača (točnije o najvećoj ponudi među njima) te o broju igrača koji su dali najvišu ponudu. Označimo najvišu ponudu među preostalim igračima s

$$B_{-i} = \max_{j \neq i} b_j, \tag{3.4}$$

i broj igrača koji su dali tu ponudu s

$$N_{-i} = |\{k \neq i : b_k = B_{-i}\}| \,. \tag{3.5}$$

Očekivana isplata igrača i, kao funkcija vektora ponuda b (vektor ponuda svih igrača) dana je s

$$EU_i(b) = \begin{cases} 0 & \text{ako } b_i < B_{-i}, \\ \frac{v_i - B_{-i}}{N_{-i}+1} & \text{ako } b_i = B_{-i}, \\ v_i - B_{-i} & \text{ako } b_i > B_{-i}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Neka je $a_i < v_i$. Pokažimo da tada ponuda $b_i = v_i$ dominira ponudu a_i. Da bismo to pokazali, moramo provjeriti da za sve moguće B_{-i} vrijedi $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(a_i, b_{-i})$.

- Uočimo prvo da za sve $B_{-i} \in [0, a_i\rangle$ vrijedi

  $$EU_i(v_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} \text{ i } EU_i(a_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} \Rightarrow EU_i(v_i, b_{-i}) = EU_i(a_i, b_{-i}),$$

  pa je posebno i nejednakost zadovoljena.

- Za $B_{-i} = a_i$ vrijedi

  $$EU_i(v_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} \text{ i } EU_i(a_i, b_{-i}) = \frac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1},$$

  pa jer je $N_{-i} \geq 0$ slijedi da je zadovoljeno $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(a_i, b_{-i})$.

- Pogledajmo slučaj $B_{-i} \in \langle a_i, v_i\rangle$. Vrijedi

  $$EU_i(v_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} > 0 \text{ i } EU_i(a_i, b_{-i}) = 0,$$

  pa je opet zadovoljeno $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(a_i, b_{-i})$.

- Ako je $B_{-i} = v_i$, tada je

  $$EU_i(v_i, b_{-i}) = \frac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1} = \frac{v_i - v_i}{N_{-i} + 1} = 0 \text{ i } EU_i(a_i, b_{-i}) = 0 \Rightarrow EU_i(v_i, b_{-i}) = EU_i(a_i, b_{-i}),$$

  pa je i nejednakost zadovoljena.

- Posljednje još treba provjeriti vrijedi li nejednakost za $B_{-i} > v_i$. Vrijedi

  $$EU_i(v_i, b_{-i}) = 0 \text{ i } EU_i(a_i, b_{-i}) = 0 \Rightarrow EU_i(v_i, b_{-i}) = EU_i(a_i, b_{-i}),$$

  stoga je nejednakost opet zadovoljena.

Dakle, $\forall B_{-i} \in [0, \infty\rangle$ vrijedi $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(a_i, b_{-i})$.

Budući da je a_i bio proizvoljan uz uvjet da je manji od v_i, slijedi da strategija kupca i da odabere ponudu $b_i = v_i$ dominira sve strategije gdje je ponuda $b_i \in [0, v_i\rangle$.

Učinimo isto za proizvoljni $c_i > v_i$, što će analogno povlačiti da strategija kupca i da odabere ponudu $b_i = v_i$ slabo dominira sve strategije gdje je ponuda $b_i \in \langle v_i, \infty\rangle$. Za sve moguće B_{-i} pokazujemo da vrijedi $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(c_i, b_{-i})$.

- Neka je $B_{-i} \in [0, v_i\rangle$. Tada je
$$EU_i(v_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} \text{ i } EU_i(c_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} \Rightarrow EU_i(v_i, b_{-i}) = EU_i(c_i, b_{-i}),$$
pa vrijedi tražena nejednakost.

- Neka je $B_{-i} = v_i$. Slijedi
$$EU_i(v_i, b_{-i}) = \frac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1} = 0 \text{ i } EU_i(c_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} = 0,$$
pa vrijedi tražena nejednakost.

- Ako je $B_{-i} \in \langle v_i, c_i\rangle$, vrijedi
$$EU_i(v_i, b_{-i}) = 0 \text{ i } EU_i(c_i, b_{-i}) = v_i - B_{-i} < 0,$$
slijedi da je $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(c_i, b_{-i})$ zadovoljeno.

- Slučaj kada je $B_{-i} = c_i$ povlači
$$EU_i(v_i, b_{-i}) = 0 \text{ i } EU_i(c_i, b_{-i}) = \frac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1} < 0,$$
slijedi $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(c_i, b_{-i})$.

- Posljednje, neka je $B_{-i} > c_i$. Tada je
$$EU_i(v_i, b_{-i}) = 0 \text{ i } EU_i(c_i, b_{-i}) = 0,$$
stoga je $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(c_i, b_{-i})$ zadovoljeno.

Dakle, $\forall B_{-i} \in [0, \infty\rangle$ vrijedi $EU_i(v_i, b_{-i}) \geq EU_i(c_i, b_{-i})$, odnosno strategija kupca i da odebere ponudu $b_i = v_i$ dominira sve strategije gdje je ponuda $b_i \in \langle v_i, \infty\rangle$.

Konačno, možemo zaključiti da strategija gdje je ponuda igrača i jednaka njegovoj privatnoj vrijednosti v_i (slabo) dominira sve ostale strategije.

$\square$

Teorem 3.1.4. *U aukcijama sa zatvorenom ponudom druge cijene profil strategija za koje svaki igrač daje ponudu jednaku njegovoj privatnoj vrijednosti objekta na aukciji je Bayesova ravnoteža.*

Dokaz. Ovaj je teorem zapravo posljedica teorema 3.1.3. Naime, za svakog igrača strategija gdje daje ponudu jednaku privatnoj vrijednosti dominira sve preostale strategije, pa je ona najbolji odgovor na proizvoljne strategije preostalih igrača (ne može odigrati ništa bolje jer bi to bilo kontradiktorno tvrdnji da dana strategija dominira sve ostale). Dakle, za svakog igrača najbolji odgovor na strategije ostalih igrača je strategija gdje daje ponudu jednaku njegovoj privatnoj vrijednosti, stoga je upravo taj profil strategija ravnoteža. □

3.2 Otvorene aukcije s privatnim vrijednostima

Iako nećemo dati formalnu definiciju otvorenih aukcija, dat ćemo opis dviju najčešćih, kako bi svejedno mogli donijeti određene zaključke o ravnotežama i eventualno im naći ekvivalentne aukcije sa zatvorenom ponudom čiju formalnu definiciju imamo. Vidjet ćemo kako će za jednu od tih aukcija biti moguće naći ekvivalentnu aukciju sa zatvorenom ponudom.

Engleska aukcija

Engleska aukcija je aukcija s otvorenom rastućom ponudom. Voditelj aukcije započinje s početnom cijenom koja je niska i dokle god ima barem dvoje kupaca spremnih platiti objekt na aukciji za tu cijenu, voditelj aukcije podiže cijenu. Aukcija završava onda kada je još samo jedan kupac voljan platiti objekt po zadnje podignutoj cijeni te je objekt prodan tom kupcu po toj zadnjoj cijeni. Također, ako igra završi „neriješeno", odnosno za predzadnju cijenu je barem dvoje kupaca pristalo kupiti, a za zadnju niti jedan, onda se koristi prethodno dogovoreno pravilo (npr. bacanje novčića) kako bi se odredio pobjednik koji potom plaća cijenu koju je posljednju bio prihvatio. Kao pravilo koristit ćemo slučajan odabir, isto kao u slučaju aukcija sa zatvorenom ponudom.

Internetske aukcije i aukcije za umjetnine obično koriste ovu metodu.

Nizozemska aukcija

Nizozemska aukcija je aukcija s otvorenom padajućom ponudom, zapravo je obrnuta od Engleske aukcije. Ovdje, voditelj aukcije započinje aukciju s početnom vrlo visokom cijenom za koju se očekuje da niti jedan kupac neće biti spreman platiti. Dokle god niti jedan kupac nije spreman platiti objekt po toj cijeni, voditelj aukcije smanjuje cijenu do trenutka kada je barem jedan igrač spreman pristati na tu smanjenu cijenu. Kao i u Engleskoj aukciji, ako više igrača prvi pristanu platiti tu cijenu, pobjednik se bira po unaprijed dogovorenom pravilu i plaća tu cijenu na koju je pristao. Ako cijena padne ispod unaprijed rečenog minimuma, a još nitko nije pristao platiti taj iznos za objekt, aukcija se zaustavlja i objekt se ne prodaje.

Aukcija cvijeća u blizini Amsterdama koristi ovu metodu.

Pokažimo sljedećim teoremom vezu između Nizozemske aukcije i aukcije sa zatvorenom ponudom.

Teorem 3.2.1. *Nizozemska aukcija je ekvivalentna aukciji sa zatvorenom ponudom prve cijene: obje vrste aukcija opisuju istu igru u normalnoj formi, s istim skupovima strategija i funkcijama isplata.*

Dokaz. Skup svih mogućih čistih strategija u aukciji sa zatvorenom ponudom je, za svakog kupca i, skup svih izmjerivih funkcija $\beta_i : V_i \mapsto [0, \infty\rangle$. Ovaj skup je također skup svih čistih strategija kupca i u aukciji s otvorenom padajućom aukcijom. Zaista, strategija igrača i je funkcija koja govori što odigrati za svaki skup informacija. Aukcija s otvorenom padajućom ponudom završava kada prvi kupac pristane na datu cijenu. Dakle, jedina informacija koju posjeduje je trenutna cijena. Stoga, jedino što strategija igrača i mora odrediti, za svaku njegovu moguću privatnu vrijednost objekta, cijenu za koju će pristati kupiti objekt. Odnosno, svaka (čista) strategija igrača i je izmjeriva funkcija $\beta_i : V_i \mapsto [0, \infty\rangle$.

Kod obje vrste aukcija, svaki profil strategija $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$ vodi istom ishodu. Naime, u aukcijama sa zatvorenom ponudom pobjednik je onaj s najvišom ponudom, $\max_{i \in N} \beta_i(v_i)$ i cijena po kojoj plaća objekt je njegova ponuda. U aukciji s otvorenom padajućom ponudom, pobjednik je onaj koji prvi pristane na ponuđenu cijenu (koja je u padu sve do tog trenutka), pa je ta cijena upravo $\max_{i \in N} \beta_i(v_i)$ i upravo to je iznos koji plati za objekt. Slijedi da obje vrste aukcija odgovaraju istoj igri u normalnoj formi. □

Za aukciju s otvorenom rastućom ponudom (Engleska aukcija) nećemo tražiti ekvivalentnu aukciju sa zatvorenom ponudom, ali ćemo kroz sljedeća dva teorema reći nešto o njenoj ravnoteži.

Teorem 3.2.2. *U Engleskoj aukciji, strategija igrača i da se prestane nadmetati (pristajati na ponude cijena za objekt) u trenutku kada proglašena cijena dosegne njegovu privatnu vrijednost (danog objekta) slabo dominira njegove preostale strategije.*

Dokaz. Sve dok je proglašena cijena manja od privatne vrijednosti igrača i, njegova je isplata 0 ako odustane od nadmetanja. S druge strane, ako se nastavi nadmetati, može ostvariti pozitivan profit, a izgubiti sigurno ne može (isplata je veća ili jednaka 0, što je vrijednost isplate kada bi odustao u tom vremenskom periodu od nadmetanja). Kada je proglašena cijena jednaka njegovoj privatnoj vrijednosti, ako odustane dobiva 0, ali ako se nastavi nadmetati u mogućnosti je pobijediti i ostvariti negativnu isplatu (sada je isplata manja ili jednaka 0, što je vrijednost isplate kada bi odustao u tom vremenskom periodu od nadmetanja). Dakle, pokazali smo slabu dominaciju uz činjenicu da se ovdje oslanjamo na pretpostavku da kupac i zna svoju privatnu informaciju i da je ona nezavisna od privatnih informacija ostalih kupaca, stoga informacija kada se ostali kupci odluče prestati nadmetati ne utječe na njegovu odluku. □

Teorem 3.2.3. *U Engleskoj aukciji, profil strategija u kojoj svaki kupac odluči prestati se nadmetati za objekt kada proglašena cijena dosegne njegovu privatnu vrijednost (danog objekta) je Bayesova ravnoteža.*

Dokaz. Ovaj je teorem zapravo direktna posljedica teorema 3.2.2. uz korištenje jednakog argumenta kao i u dokazu teorema 3.1.4. □

3.3 Simetrične aukcije s nezavisnim privatnim vrijednostima

Promatramo modele aukcija sa zatvorenom ponudom koje su ujedno i simetrične.

Definicija 3.3.1. *Aukcija je simetrična s nezavnisnim privatnim vrijednostima ako zadovoljava sljedeće:*

(1) Jedan je (nedjeljiv) objekt na aukciji.

(2) Prodavač je spreman prodati objekt za proizvoljnu nenegativnu cijenu.

(3) Postoji n kupaca koje označavamo s $1, 2, ..., n$.

(4) Svi kupci imaju isti skup mogućih privatnih vrijednosti V. Taj skup može biti ograničen zatvoren interval $[0, \bar{v}]$ ili skup svih nenegativnih brojeva $[0, \infty\rangle$. Svaku kupac zna svoju privatnu vrijednost i slučajne varijable $X_1, X_2, ..., X_n$ privatnih vrijednosti kupaca su nezavisne i jednako distribuirane. Stoga možemo s F označiti zajedničku funkciju distribucije tih slučajnih varijabli (nad V).

(5) Za svakog kupca i slučajna varijabla X_i je neprekidna i njena funkcija gustoće f je neprekidna i pozitivna na V.

(6) Svi kupci maksimiziraju svoj očekivani profit.

Dakle, budući da kupac zna svoju privatnu vrijednost, sve dodatne informacije (obzirom na privatne vrijednosti ostalih kupaca) ne utječu na njegovu zbog nezavisnosti privatnih vrijednosti. Dakle, ako je privatna vrijednost kupca i v_i, onda ako on osvoji objekt na aukciji po cijeni p, njegov profit je $v_i - p$, neovisno o tome zna li privatne vrijednosti ostalih kupaca.

U nešto općenitijim modelima aukcija gdje kupac ne zna vrijednost objekta na aukciji, privatne vrijednosti ostalih kupaca mogu mu biti važne kako bi ažurirao svoju privatnu vrijednost.

Definicija 3.3.2. *U simetričnoj aukciji s nezavisnim privatnim vrijednostima Bayesova ravnoteža* $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, ..., \beta_n^*)$ *je simetrična ako svi kupci primijene iste strategije, odnosno ako je* $\beta_i^* = \beta_j^*$, *za sve* $1 \leq i, j \leq n$.

Sljedećim primjerom ćemo izračunati ravnotežu simetrične aukcije sa zatvorenom ponudom prve cijene, potom usporediti s ravnotežom druge cijene. Zatim cijelu situaciju promatramo iz perspektive prodavača.

Primjer 3.3.3. ***(Dva igrača s uniformno distribuiranim privatnim vrijednostima)*** *Pretpostavimo da postoje dva kupca i da* X_i *ima uniformnu distribuciju na* $[0, 1]$, *za* $i = 1, 2$ *te po pretpostavci su* X_1 *i* X_2 *nezavisni. Pokažimo da u simetričnoj aukciji sa zatvorenom ponudom prve cijene sljedeća je strategija (simetrična) Bayesova ravnoteža:*

$$\beta_i^*(v_i) = \frac{v_i}{2}, \ i = 1, 2. \tag{3.7}$$

Ovom strategijom svaki kupac daje ponudu jednaku polovici njegove privatne vrijednosti. Pretpostavimo da igrač 2 primjenjuje ovu strategiju, tražimo najbolji odgovor igrača 1. Ako je njegova privatna vrijednost v_1, *ponuda koju je dao* b_1, *tada je njegov očekivani (ex interim) profit:*

$$\begin{aligned} EU_1((b_1, \beta_2^*), v_1) &= EU_1\left((b_1, \frac{X_2}{2}), v_1\right) = \\ &= P\left(b_1 > \frac{X_2}{2}\right) \cdot (v_1 - b_1) = \\ &= P(2b_1 > X_2) \cdot (v_1 - b_1) = \\ &= min\{2b_1, 1\} \cdot (v_1 - b_1) = \\ &= \begin{cases} 2b_1 \cdot v_1 - 2b_1^2 & ako \ b_1 \leq \frac{1}{2} \\ v_1 - b_1 & ako \ b_1 > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Želimo naći za koji $b_1 \in [0, 1]$ *se postiže maksimum funkcije* EU_1. *Budući da je* v_1 *dan, dobijemo da se maksimum postiže u* $b_1 = \frac{v_1}{2}$. *Naime, funkcija je neprekidna za* $b_1 \in [0, 1]$, *kvadratna za* $b_1 \leq \frac{1}{2}$ *te linearna s negativnim nagibom za* $b_1 > \frac{1}{2}$. *Za* $b_1 \leq \frac{1}{2}$ *postiže maksimum u* $b_1 = \frac{v_1}{2}$ *(maksimum konkavne kvadratne funkcije), što je sigurno manje ili jednako od* $\frac{1}{2}$ *jer je* $v_1 \in [0, 1]$. *Slijedi da je to maksimum funkcije za* $b_1 \in [0, 1]$ *jer* *je nakon postignutog maksimuma funkcija počela padati te u trenutku kada prestaje biti kvadratna i postaje linearna, nastavlja padati.*

Dakle, najbolji odgovor kupca 1 na strategiju $\beta_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}$ *kupca 2 je* $\frac{v_1}{2}$, *pa zbog simetričnosti aukcije vrijedi i obrat, da je najbolji odgovor kupca 2 na strategiju* $\beta_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}$ *kupca 1 upravo* $\frac{v_2}{2}$. *Dakle,* $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*)$ *je simetrična ravnoteža dane aukcije.*

Uočimo kako različite aukcije mogu dati različite ravnoteže:

(A) *Za simetričnu aukciju sa zatvorenom ponudom prve cijene u ovome smo primjeru došli do ravnoteže dane s* $\beta_i^*(v_i) = \frac{v_i}{2}$, $i = 1, 2$.

(B) *Za simetričnu aukciju sa zatvorenom ponudom koja se od ove iz primjera razlikuje jedino po tome što je druge cijene, iz teorema 3.1.4. slijedi da je (simetrična) ravnoteža dana s* $\beta_i^*(v_i) = v_i$.

Možemo se pitati: koja je od ovih metoda bolja iz perspektive prodavača? Kako bismo odgovorili na to pitanje, potrebno je izračunati očekivani prihod prodavača u obje metode. Njegov očekivani prihod jednak je očekivanoj cijeni po kojoj se objekt proda. Za ravnotežu izračunatu u ovom primjeru (simetrična aukcija sa zatvorenom ponudom prve cijene) očekivana je prodajna cijena:

$$E\left[max\left\{\frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}\right\}\right] = \frac{1}{2}E[max\{X_1, X_2\}]. \tag{3.8}$$

Označimo li s $Z := max\{X_1, X_2\}$, *slijedi da je funkcija distribucije od* Z *zbog nezavisnosti i uniformne distribucije od* X_1, X_2 *sljedeća:*

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(max\{X_1, X_2\} \leq z) = P(X_1 \leq z) \cdot P(X_2 \leq z) = z^2.$$

Slijedi da je gustoća od Z *dana s*

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2z & , \text{ako } 0 \leq z \leq 1, \\ 0 & , \text{inače}. \end{cases}$$

Stoga je očekivani prihod prodavača u ovom slučaju jednak:

$$\frac{1}{2}E[Z] = \frac{1}{2}\int_0^1 z f_Z(z) dz = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}. \tag{3.9}$$

Očekivani prihod prodavača u slučaju simetrične aukcije sa zatvorenom ponudom druge cijene dan je s $E[min\{X_1, X_2\}]$. *Budući da je*

$$min\{X_1, X_2\} + max\{X_1, X_2\} = X_1 + X_2,$$

vrijedi sljedeće:

$$E[min\{X_1, X_2\}] + E[max\{X_1, X_2\}] = E[X_1] + E[X_2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

A kako smo u (3.9) već izračunali $E[max\{X_1, X_2\}] = E[Z] = \frac{2}{3}$, *slijedi da je očekivani prihod u ovome slučaju jednak*

$$E[min\{X_1, X_2\}] = \frac{1}{3}.$$

Dakle, očekivani prihod prodavača simetrične aukcije sa zatvorenom ponudom je jednak neovisno o tome radi li se o prvoj ili drugoj cijeni te iznosi $\frac{1}{3}$.

Rezultat da je očekivani prihod prodavača iz prethodnog primjera jednak intuitivno proizlazi iz toga da u slučaju prve cijene kupci će ponuditi iznos koji je manji od iznosa koji bi ponudili u slučaju druge cijene jer u slučaju prve plaća taj iznos koji je ponudio, dok u slučaju druge cijene plaća manje od ponuđenog iznosa.

Bibliografija

[1] Drew Fudenberg i Jean Tirole, *Game Theory*, The MIT Press, 1991.

[2] William H. Sandholm, *Lecture Notes on Game Theory*, (2013).

[3] Levent Koçkesen i Efe A. Ok, *An Introduction to Game Theory*, (2007), http://home.ku.edu.tr/~lkockesen/teaching/econ333/lectnotes/uggame.pdf.

[4] Branislav L. Slantchev, *Game Theory: Static and Dynamic Games of Incomplete Information*, (2008), http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/06-incomplete-info.pdf.

[5] Kevin Leyton-Brown i Yoav Shoham, *Essentials of Game Theory*, Morgan & Claypool, 2008.

[6] Michael Maschler, Eilon Solan i Shmuel Zamir, *Game Theory*, Cambridge University Press, 2013.

[7] Hans Peters, *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*, Springer, 2015.

Sažetak

U ovome radu obrađene su igre s nepotpunom informacijom, koje još zovemo i Bayesovske igre. Bayesovske igre podijelili smo na 2 podvrste, statičke i dinamičke, gdje smo svaku podvrstu obradili u zasebnom poglavlju te potom posvetili još jedno poglavlje primjeni Bayesovskih igara u stvarnom životu, aukcijama.

Statičke Bayesovske igre sastoje se od simultanih poteza igrača nakon čega igra završava. Ovo poglavlje započinjemo motivacijskim primjerom, čime uočavamo potrebne definicije kako bi se početna igra transformirala u onu koju možemo riješiti. U istom poglavlju uvodimo osnovne definicije i pravila koja se kasnije poopćavaju u dinamičkim Bayesovskim igrama. Te osnovne definicije i pravila odnose se između ostalog na uvođenje *tipa igrača*, čime se igra s nepotpunom informacijom (o funkciji ispate igrača) svodi na igru s nesavršenom informacijom (o tipu grača). Definiramo Bayesovu ravnotežu te uočavamo da je ona ekvivalentna ravnoteži koju bismo dobili nakon „signala", odnosno nakon što igrači upoznaju svoje tipove. Također, uočavamo da je Bayesova ravnoteža zapravo Nashova ravnoteža ekvivalentne transformirane igre. Poglavlje završavamo modificiranim poznatim primjerom *Rat spolova*, gdje je broj tipova neprekidan.

U dinamičkim igrama potezi nisu nužno simultani. Dinamičke Bayesovske igre prvo predstavljamo pomoću posebnog slučaja signalizirajućih igara, gdje također započinjemo motivacijskim primjerom te uvodimo grafički prikaz igre koji još zovemo i ekstenzivna forma. Potom prelazimo na općenite dinamičke Bayesovske igre, gdje uz poopćenje postojećih definicija iz poglavlja o statičkim Bayesovskim igrama, uvodimo modifikaciju podigara originalnih igara iz dinamičkih igara s potpunom informacijom. Nadalje, pomoću te modifikacije definiramo *PBE*, posebnu vrstu Bayesove ravnoteže za dinamičke Bayesovske igre te poglavlje završavamo zanimljivim primjerom gdje koristimo novo definirane pojmove.

U posljednjem poglavlju bavimo se aukcijama, prilično uspješnom primjenom Bayesovskih igara. Dotičemo se različitih vrsta aukcija (koje se još uvijek danas koriste u svijetu) te se bavimo njihovim ravnotežama. Na kraju, dajemo primjer aukcije gdje, osim ravnoteža igrača, promatramo i položaj prodavača, odnosno koja od dviju aukcija bi za njega bila profitabilnija. Ovime završavamo rad.

Summary

In this paper we are studying games with incomplete information, also known as Bayesian games. We have divided Bayesian games into two types, static and dynamic, where each of the types are studied in separate chapters. There is one more chapter dedicated to an application of Bayesian games in real life, auctions.

Static Bayesian games consist of simultaneous moves made by players, after which the game ends. This chapter we open with a motivational example that shows us necessary definitions to transform a game we start with into one we can solve. In the same chapter, we give definitions and rules about Bayesian games that we later on, for dynamic Bayesian games, generalize. These definitions and rules refer to introducing *types of players*, which transforms a game with incomplete information (about the utility function) into a game with imperfect information (about the types of players). By defining Bayesian equilibrium we notice the equivalence between equilibria calculated before and after ”the signal”, the moment when the players find out their type. We also show that Bayesian equilibrium is actually Nash equilibrium of the equivalent, transformed game. We finish the chapter about static Bayesian games with a modified example of *Battle of the Sexes*, where the number of types of players is continuous.

In dynamic games player’s moves aren’t necessarily simultaneous. Chapter Dynamic Bayesian games we begin by introducing a special case of dynamic Bayesian games, ”signaling” games. Here as well we start with a motivational example and a graphical representation of the game, also called an extensive form. We then study dynamic Bayesian games in general, where in addition to generalized definitions introduced in the chapter about static Bayesian games, we define a modification of a subgame in a game with complete information. Further more, using that modification we define PBE (perfect Bayesian equilibrium), a special kind of Bayesian equilibrium and we finish the chapter with an interesting example of a perjury trap where we apply newly defined terms.

The last chapter deals with auctions, a very successful application of Bayesian games. We consider different types of auctions (which are still used nowadays) and their equilibria. We finish the chapter with an example of an auction where we in addition to finding equilibria regarding players, we also consider the position the seller is in and which of the two auctions considered in the example are more profitable for him.

Životopis

Rođena sam 1.4.1993. godine u Rijeci, gdje sam završila Osnovnu školu Zamet Rijeka i srednju školu Prva sušačka hrvatska gimnazija u Rijeci, opći smjer. Nakon završetka srednje škole 2012. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon stjecanja zvanja sveučilišne prvostupnice matematike, 2015. godine upisala sam Diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Na zadnjoj sam godini radila kao student u Privrednoj banci Zagreb gdje sam stekla uvid u osnove bankarskog i financijskog poslovanja te upravljanja rizicima.