Egzistencija eksponencijalne funkcije

Knezović, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Knezović

EGZISTENCIJA EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem mentoru prof.dr.sc. Zvonku Iljazoviću na ukazanom povjerenju i pruženoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada. Zahvaljujem svim članovima svoje obitelji koji su mi bili velika podrška tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo egzistenciju eksponencijalne funkcije.

U prvom poglavlju proučavamo neprekidne funkcije i dokazujemo neka važna svojstva tih funkcija koja se koriste u radu. Nadalje, definiramo a^x prvo za prirodne, cijele, racionalne, a potom i za realne brojeve x čime dolazimo do definicije eksponencijalne funkcije.

U drugom poglavlju proučavamo razna svojstva eksponencijalne funkcije. Između ostalog dokazuje se da je eksponencijalna funkcija neprekidna bijekcija. Nadalje, proučavamo logaritamsku funkciju.

Na kraju dokazujemo neke rezultate koji govore o jedinstvenosti eksponencijalne funkcije.

Poglavlje 1

Izgradnja eksponencijalne funkcije

1.1 Neprekidne funkcije

Definicija 1.1.1. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \longrightarrow T$. Kažemo da je funkcija f* ***neprekidna u točki*** *x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$\textit{ako je } |x - x_0| < \delta, \textit{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Napomena 1.1.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada vrijedi*

$$|x - y| < r \Leftrightarrow -r < x - y < r \Leftrightarrow x - r < y < x + r$$

$$\Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r \rangle .$$

Dakle, $|x - y| < r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle$.

Stoga, ako su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \longrightarrow T$, onda je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle, \text{ onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle .$$

Definicija 1.1.3. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $f : S \longrightarrow T$ funkcija. Kažemo da je f* ***neprekidna funkcija*** *ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in S$.*

Primjer 1.1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in S$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Naime, neka je $x_0 \in S$ te $\epsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $\delta \in \langle 0, \epsilon]$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(jer je $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$). Prema tome funkcija f je neprekidna u x_0. Dakle, funkcija f je neprekidna.

Primjer 1.1.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $c \in \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$ za svaki $x \in S$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Naime neka je $x_0 \in S$ te $\epsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $\delta > 0$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(jer je $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon$, za svaki $x \in S$).

Propozicija 1.1.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka su $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije te neka je $x_0 \in S$. Pretpostavimo da su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada je funkcija $f + g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $x \in S$. Vrijedi:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + f(g) - f(x_0) - g(x_0)|$$

$$= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|\,.$$

Dakle,

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|\,. \tag{1.1}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je funkcija f neprekidna u x_0 postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta_1, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Isto tako, budući da je funkcija g neprekidna u x_0 postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta_2, \text{ onda je } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada je $\delta > 0$ i $\delta \leq \delta_1$ i $\delta \leq \delta_2$. Stoga, ako je $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$, onda je $|x - x_0| < \delta_1$ i $|x - x_0| < \delta_2$ pa iz (1.2) i (1.3) slijedi da je $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ i $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$, a sada koristeći (1.1) dobivamo

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

to jest $|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \epsilon$. Dakle, dokazali smo da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \epsilon.$$

Prema tome funkcija $f + g$ je neprekidna u točki x_0. □

Propozicija 1.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : S \to \mathbb{R}$ te neka je $x_0 \in S$. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna u x_0. Tada je funkcija $-f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$ako\, je\, |x - x_0| < \delta onda\, je\, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Za svaki $x \in S$ očito vrijedi $|f(x) - f(x_0)| = |(-f)(x) - (-f)(x_0)|$.
Stoga za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$ako\, je\, |x - x_0| < \delta onda\, je\, |(-f)(x) - (-f)(x_0)| < \epsilon.$$

Dakle, funkcija $-f$ je neprekidna u x_0. □

Propozicija 1.1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije te neka je $x_0 \in S$. Pretpostavimo da su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada je funkcija $f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $x \in S$. Tada je

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)|$$

$$\begin{aligned}
&= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)| \\
&= |f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)| \\
&\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\
&= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)|\, |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\, |f(x) - f(x_0)| \\
&\leq (|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|)\, |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\, |f(x) - f(x_0)|.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| \leq (|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|)\, |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\, |f(x) - f(x_0)| \tag{1.4}$$

za svaki $x \in S$. Neka je $\epsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < \epsilon.$$

U tu svrhu možemo pretpostaviti da je $\epsilon < 1$. Budući da je funkcija g neprekidna u x_0 postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta_1, \text{ onda je } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2\,(|f(x_0)| + 1)}. \tag{1.5}$$

Budući da je funkcija f neprekidna u x_0 postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta_2, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2\,(|g(x_0)| + 1)}. \tag{1.6}$$

Posebno za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta_2, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < 1 \tag{1.7}$$

(jer je $\frac{\epsilon}{2(|g(x_0)|+1)} < \epsilon < 1$). Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pretpostavimo da je $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$. Tada je $|x - x_0| < \delta_1$ i $|x - x_0| < \delta_2$ pa iz: (1.5), (1.6) i (1.7) slijedi:

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|f(x_0)| + 1)},$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|g(x_0)| + 1)}$$

i

$$|f(x) - f(x_0)| < 1.$$

Sada koristeći (1.4) dobivamo

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < (1 + |f(x_0)|) \cdot \frac{\epsilon}{2(|f(x_0)| + 1)} + |g(x_0)| \cdot \frac{\epsilon}{2(|g(x_0)| + 1)}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|g(x_0)|}{|g(x_0)| + 1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < \epsilon.$$

Time smo dokazali da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < \epsilon. \quad \square$$

Korolar 1.1.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada su $f + g, -f$ i $f \cdot g$ neprekidne funkcije.*

Definicija 1.1.10. *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo broj x^n induktivno na sljedeći način:*

$$x^1 = x,$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

.

Primjer 1.1.11. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(x) = x$. Funkcija f je neprekidna prema primjeru 1.1.4.*

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana pravilom $g_n(x) = x^n$. Tvrdimo da je g_n neprekidna funkcija.

Dokažimo to indukcijom po n.

Za $n = 1$ tvrdnja je jasna jer je $g_1 = f$.

Pretpostavimo da je g_n neprekidna funkcija za neki $n \in \mathbb{N}$.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$g_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = g_n(x) \cdot f(x) = (g_n \cdot f)(x),$$

to jest $g_{n+1}(x) = (g_n \cdot f)(x)$. Prema tome $g_{n+1} = g_n \cdot f$. Iz korolara 1.1.9 slijedi da je funkcija g_{n+1} neprekidna.

Time smo dokazali da je g_n neprekidna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Nultočke neprekidnih funkcija

Definicija 1.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je gornja međa skupa S ako je $x \leq a$ za svaki $x \in S$. Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji bar jedna gornja međa skupa S.*

Definicija 1.2.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je supremum skupa S ako je a najmanja gornja međa skupa S, to jest ako vrijedi sljedeće:*

1) a je gornja međa skupa S

2) $a \leq b$ za svaku gornju među b skupa S

Uočimo sljedeće: ako su a_1 i a_2 supremumi skupa S, onda je $a_1 = a_2$. Naime, vrijedi $a_1 \leq a_2$ jer je a_1 supremum skupa S, a a_2 gornja međa skupa S. Isto tako vrijedi $a_2 \leq a_1$ pa je $a_1 = a_2$.

Supremum skupa S, ako postoji, označavamo sa $\sup S$.

Definicija 1.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in S$. Za a kažemo da je maksimum skupa S ako je a gornja međa skupa S.*

Pretpostavimo da je a maksimum skupa S. Tada je a očito gornja međa skupa S te za svaku gornju među b skupa S vrijedi $a \leq b$ jer je $a \in S$.

Dakle, a je supremum skupa S.

Primjer 1.2.4. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a supremum skupa $\langle -\infty, a \rangle$.*

Naime, očito je a gornja međa ovog skupa. S druge strane ako je b gornja međa skupa $\langle -\infty, a \rangle$, onda je $a \leq b$ jer bi u suprotnom vrijedilo $b < a$ pa bi postojao $x \in \mathbb{R}$ takav da je $b < x < a$ što bi povlačilo da je x element skupa $\langle -\infty, a \rangle$ veći od gornje međe ovog skupa, a to je nemoguće.

Uočimo da skup $\langle -\infty, a\rangle$ nema maksimum (jer kada bi postojao maksimum c ovog skupa onda bi on ujedno bio i supremum ovog skupa pa bi vrijedilo $c = a$, no to je nemoguće jer a očito nije maksimum skupa $\langle -\infty, a\rangle$).

Uočimo sljedeće: ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup koji ima supremum, onda je S odozgo omeđen skup.

Uočimo da takav skup mora biti neprazan. (Naime, svaki realan broj je gornja međa praznog skupa pa je jasno da on nema supremum.)

Aksiom potpunosti. *Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je T skup svih gornjih međa skupa S. Tada za sve $x \in S$ i $y \in T$ vrijedi $x \leq y$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Budući da je $x \leq z$ za svaki $x \in S$ imamo da je z gornja međa skupa S.

Nadalje, ako je y gornja međa skupa S, onda je $y \in T$ pa je $z \leq y$.

Prema tome z je supremum skupa S. □

Definicija 1.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a donja međa skupa S ako je $a \leq x$ za svaki $x \in S$. Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako postoji bar jedna donja međa skupa S.*

Definicija 1.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je infimum skupa S ako je a najveća donja međa skupa S, to jest ako vrijedi sljedeće:*

1) a je donja međa skupa S

2) $a \geq b$ za svaku donju među b skupa S

Lako zaključujemo da je (ako postoji) infimum skupa S jedinstven.

Infimum skupa S, ako postoji, označavamo sa $\inf S$.

Definicija 1.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za element skupa S koji je donja međa skupa S kažemo da je minimum skupa S.*

Uočimo: ako je a minimum skupa S, onda je a i infimum skupa S.

Primjer 1.2.9. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a infimum skupa $\langle a, +\infty\rangle$.*

Očito je a donja međa ovog skupa.

Nadalje, ako je b donja međa ovog skupa onda mora vrijediti $a \geq b$ jer bi u suprotnom imali $a < b$ pa bi postojao $x \in \mathbb{R}$ takav da je $a < x < b$, a to bi značilo da postoji element skupa $\langle a, +\infty \rangle$ manji od donje međe tog skupa.

Dakle, a je infimum skupa $\langle a, +\infty \rangle$. Uočimo da ovaj skup nema minimum.

Ako je S skup koji ima infimum, onda je S očito odozdo omeđen neprazan skup.

Propozicija 1.2.10. *Neka je S odozdo omeđen neprazan skup. Tada S ima infimum.*

Dokaz. Neka je T skup svih donjih međa skupa S. Tada za sve $x \in S$ i $y \in T$ vrijedi $x \geq y$.

Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \geq z \geq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Budući da je $x \geq z$ za svaki $x \in S$ imamo da je z donja međa skupa S.

S druge strane, ako je y neka druga donja međa skupa S onda je $y \in T$, pa je $z \geq y$.

Prema tome z je infimum skupa S. □

Lema 1.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $c \in S$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki c.*

1) Pretpostavimo da je $f(c) > 0$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in S \cap \langle c - r, c + r \rangle$.

2) Pretpostavimo da je $f(c) < 0$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $f(x) < 0$ za svaki $x \in S \cap \langle c - r, c + r \rangle$

Dokaz. 1) Neka je $\epsilon = f(c)$. Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je} x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle, \text{onda je} f(x) \in \langle f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon \rangle.$$

No, $\langle f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon \rangle = \langle 0, 2\epsilon \rangle$.

Prema tome, za svaki $x \in S \cap \langle c - \delta, c + \delta \rangle$ vrijedi $f(x) = \langle 0, 2\epsilon \rangle$, to jest $f(x) > 0$.

2) Tvrdnju (2) dokazujemo analogno. (Uzmemo $\epsilon = -f(c) > 0$.) □

Teorem 1.2.12. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \leq 0\}$. Skup S je neprazan jer je $a \in S$.

Nadalje, b je gornja međa skupa S (jer je $S \subseteq [a, b]$). Dakle, S je odozgo omeđen.

Prema propoziciji 1.2.5 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa S. Vrijedi $a \leq c$ jer je $a \in S$. Također imamo $c \leq b$ jer je b gornja međa skupa S, a c je supremum skupa S.

Prema tome $a \leq c \leq b$, odnosno $c \in [a, b]$.

Pretpostavimo da je $f(c) > 0$. Prema lemi 1.2.11 postoji $r > 0$ takav da

$$\text{za svaki } x \in [a, b] \cap \langle c - r, c + r \rangle \text{ vrijedi} f(x) > 0. \tag{1.8}$$

Broj $c - r$ nije gornja međa skupa S (jer bi u suprotnom supremum skupa S bio manji ili jednak od $c - r$, to jest $c \leq c - r$ što je nemoguće). Tada postoji $x \in S$ takav da je $c - r < x$. Vrijedi $x \leq c$ pa je $x \in \langle c - r, c + r \rangle$. Imamo $x \in [a, b]$ jer je $x \in S$. Iz (1.8) slijedi da je $f(x) > 0$. S druge strane iz $x \in S$ slijedi $f(x) \leq 0$.

Kontradikcija.

Pretpostavimo da je $f(c) < 0$. Prema lemi 1.2.11 postoji $r > 0$ takav da

$$\text{za svaki } x \in [a, b] \cap \langle c - r, c + r \rangle \text{ vrijedi} f(x) < 0. \tag{1.9}$$

Znamo da je $c \leq b$. No, $c \neq b$ jer je $f(c) < 0$ i $f(b) > 0$. Stoga je $c < b$. Slijedi da je $c < \min\{b, c + r\}$.

Odaberimo sada $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c < x < \min\{b, c + r\}$. Tada je $c < x < b$ i $c < x < c + r$. Slijedi $x \in [a, b]$ i $x \in \langle c - r, c + r \rangle$. Iz (1.9) slijedi da je $f(x) < 0$. Stoga je $x \in S$. Iz ovoga slijedi da je $x \leq c$. Ovo je u kontradikciji sa $c < x$.

Vidimo da pretpostavke $f(c) > 0$ i $f(c) < 0$ vode na kontradiciju.

Stoga je $f(c) = 0$. □

Korolar 1.2.13. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $d \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) < d < f(b)$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = d$.*

Dokaz. Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana pravilom $g(x) = f(x) - d$ za svaki $x \in [a, b]$.

Funkcija g je neprekidna kao zbroj neprekidnih funkcija.

Naime, neka je $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija dana sa $h(x) = -d$.

Prema primjeru 1.1.5 funkcija h je neprekidna pa iz $g(x) = f(x) + h(x)$ za svaki $x \in [a, b]$ i korolara 1.1.9 slijedi da je g neprekidna.

Vrijedi: $g(a) = f(a) - d < 0$ i $g(b) = f(b) - d > 0$ pa iz teorema 1.2.12 slijedi da postoji $c \in [a, b]$ takav da je $g(c) = 0$, to jest $f(c) - d = 0$.

Stoga je $f(c) = d$. □

Korolar 1.2.14. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $d \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) > d > f(b)$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = d$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pravilom $g(x) = -f(x)$.

Neka je $h : [a, b] \to \mathbb{R}, h(x) = -1$ za svaki $x \in [a, b]$.

Funkcija h je neprekidna, a vrijedi $g(x) = h(x) \cdot f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$ pa iz korolara 1.1.9 slijedi da je g neprekidna funkcija.

Iz $f(a) > d > f(b)$ slijedi $-f(a) < -d < -f(b)$, to jest $g(a) < -d < g(b)$ pa prema korolaru 1.2.13 postoji $c \in [a, b]$ takav da je $g(c) = -d$.

Dakle, $-f(c) = -d$ pa je $f(c) = d$. □

Propozicija 1.2.15. *Neka su $S, S' \subseteq \mathbb{R}$, neka je $x_0 \in S$ te neka je $f : S \to S'$ funkcija neprekidna u točki x_0. Pretpostavimo da je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Tada je funkcija $f|_T : T \to S'$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.10}$$

Budući da je $T \subseteq S$, očito je da za svaki $x \in T$ vrijedi (1.10), to jest vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta \text{ onda je } |f|_T(x) - f|_T(x_0)| < \epsilon.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.2.16. *Neka su $S, S' \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : S \to S'$ neprekidna funkcija te neka je T neprazan podskup od S. Tada je $f|_T : T \to S'$ neprekidna funkcija.*

Teorem 1.2.17. *Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$ te neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}, x > 0$ takav da je $x^n = a$.*

Dokaz. Ako su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \leq x \leq y$, onda za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^m < y^m$. To lako dobivamo indukcijom.

Pretpostavimo da postoje pozitivni realni brojevi x i y takvi da je $x^n = a$, $y^n = a$ i $x \neq y$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x < y$. Tada je $x^n < y^n$, to jest $a < a$ što je nemoguće.

Zaključak: postoji najviše jedan pozitivan realan broj x takav da je $x^n = a$.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x^n$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema primjeru 1.1.11 funkcija f je neprekidna.

Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je $a < z$ i $1 < z$. Tada je $z \leq z^n$.

Naime, ovo je očito ako je $n = 1$, a ako je $n > 1$ onda je $n - 1 \in \mathbb{N}$ pa je $1^{n-1} < z^{n-1}$, to jest $1 < z^{n-1}$ pa množenjem sa z dobivamo $z < z^n$. Slijedi $a < z^n$. Prema tome imamo

$$f(0) < a < f(z). \tag{1.11}$$

Prema korolaru 1.2.16 funkcija $f\big|_{[0,z]} : [0, z] \to \mathbb{R}$ je neprekidna pa iz (1.11) i korolara 1.2.13 slijedi da postoji $x \in [0, z]$ takav da je $f(x) = a$.

Dakle, $x^n = a$. Iz ovoga i $x \geq 0$ slijedi $x > 0$. □

1.3 Cjelobrojni eksponenti

Propozicija 1.3.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.*

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ da je

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \tag{1.12}$$

Za $n = 1$ (1.12) vrijedi jer je $a^{m+1} = a^m \cdot a$ po definiciji 1.1.10.

Pretpostavimo da (1.12) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m \cdot (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n+1},$$

to jest

$$a^{m+(n+1)} = a^m \cdot a^{n+1}.$$

Dakle, (1.12) vrijedi za $n+1$. Prema tome (1.12) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 1.3.2. *Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Definiramo $a^0 = 1$. Na taj način imamo definirano a^n za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.*

Uočimo da iz definicije 1.3.2 i propozicije 1.3.1 slijedi da za svaki $a > 0$ i sve $m, n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

Definicija 1.3.3. *Neka je $a > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Na ovaj način imamo definirano a^m za svaki $m \in \mathbb{Z}$.*

Neka je $a > 0$. Indukcijom lako dobivamo da je $a^n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Stoga je $a^m > 0$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $a > 0$. Za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n. \tag{1.13}$$

Dokaz. Neka su $m, n \in \mathbb{Z}$. Ako je $m = 0$ ili $n = 0$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je $m \neq 0$ i $n \neq 0$.

Imamo nekoliko slučajeva:

1. slučaj

$m, n > 0$. Tada (1.13) vrijedi prema propoziciji 1.3.1.

2. slučaj

$m, n < 0$. Tada je $m + n < 0$ pa je $a^{m+n} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n$.

Dakle, (1.13) vrijedi.

3. slučaj $m > 0, n < 0$. Neka je $k = m + n$.

Imamo tri mogućnosti:

1) $k > 0$. Iz $k = m + n$ slijedi $m = k + (-n)$ pa je prema propoziciji 1.3.1 $a^m = a^{k+(-n)} = a^k \cdot a^{-n}$, to jest $a^m = a^k \cdot a^{-n}$ iz čega slijedi $a^k = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}}$, to jest $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

2) $k = 0$. Tada je $m = -n$ pa je $a^m = a^{-n}$ iz čega slijedi $a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = 1 = a^0 = a^k$, to jest $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

3) $k < 0$. Iz $k = m + n$ slijedi $-n = m + (-k)$. Imamo $-n, m, -k \in \mathbb{N}$ pa iz propozicije 1.3.1 slijedi $a^{-n} = a^m \cdot a^{-k}$. Stoga je $\frac{1}{a^{-k}} = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}}$. Dakle, $a^k = a^m \cdot a^n$. Prema tome (1.13) vrijedi.

4. slučaj
$n > 0$ i $m < 0$. Analogno kao u slučaju 3 dobivamo da vrijedi (1.13). □

Definicija 1.3.5. *Neka je $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 1.2.17 postoji jedinstven pozitivan broj x takav da je $x^n = a$. Za broj x kažemo da je n-ti korijen iz a i označavamo ga sa $\sqrt[n]{a}$.*

Propozicija 1.3.6. *Neka je $a > 0$. Za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n} \tag{1.14}$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom da (1.14) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$.
Za $m = 1$ (1.14) očito vrijedi.
Pretpostavimo da (1.14) vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$.
Imamo: $(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n = a^{m \cdot n} \cdot a^n = a^{m \cdot n + n} = a^{(m+1) \cdot n}$.
Dakle, $(a^n)^{m+1} = a^{(m+1) \cdot n}$. Prema tome (1.14) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka su $a, b > 0$. Tada se lako indukcijom dobiva da vrijedi $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je $a > 0$. Za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n} \tag{1.15}$$

Dokaz. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja je jasna ako je $m = 0$ ili $n = 0$.
Pretpostavimo stoga da je $m \neq 0$ i $n \neq 0$. Imamo nekoliko slučajeva.
1. slučaj
$n, m > 0$. Tada (1.15) vrijedi prema propoziciji 1.3.6.
2. slučaj
$n, m < 0$. Tada je $(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{(\frac{1}{a^{-n}})^{-m}} = \frac{1}{\frac{(1)^{-m}}{(a^{-n})^{-m}}} = (a^{-n})^{-m} = a^{(-m) \cdot (-n)} = a^{m \cdot n}$. Prema tome (1.15) vrijedi.
3. slučaj
$m < 0$ i $n > 0$. Tada je $m \cdot n < 0$ te je $(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{a^{n \cdot (-m)}} = \frac{1}{a^{-(n \cdot m)}} = a^{n \cdot m}$.
Dakle, (1.15) vrijedi.
4. slučaj
$m > 0$ i $n < 0$. Tada je $m \cdot n < 0$ te je $(a^n)^m = (\frac{1}{a^{-n}})^m = \frac{1^m}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{a^{(-n) \cdot m}} = \frac{1}{a^{-(m \cdot n)}} = a^{n \cdot m}$.
Dakle, (1.15) vrijedi. □

Lema 1.3.8. *Neka je $a > 0$, neka su $k, n \in \mathbb{N}$ te neka je $m \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi: $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n\cdot k]{a})^{k\cdot m}$*

Dokaz. Neka je: $x = (\sqrt[n]{a})^m$ te $y = (\sqrt[n\cdot k]{a})^{k\cdot m}$. Imamo:

$$x^{k\cdot n} = \left[(\sqrt[n]{a})^m\right]^{k\cdot n} = (\sqrt[n]{a})^{m\cdot k\cdot n} = \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^{m\cdot k} = a^{m\cdot k}$$

te

$$y^{k\cdot n} = \left[(\sqrt[n\cdot k]{a})^{k\cdot m}\right]^{k\cdot n} = (\sqrt[n\cdot k]{a})^{k\cdot m\cdot k\cdot n} = \left[(\sqrt[n\cdot k]{a})^{n\cdot k}\right]^{m\cdot k} = a^{m\cdot k}.$$

Dakle, $x^{k\cdot n} = a^{m\cdot k}$ i $y^{k\cdot n} = a^{m\cdot k}$ pa je $x^{k\cdot n} = y^{k\cdot n}$.

Iz teorema 1.2.17 slijedi $x = y$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

1.4 Racionalni eksponenti

Definicija 1.4.1. *Neka je $a > 0$. Za $r \in \mathbb{Q}$ definiramo a^r na sljedeći način. Imamo $r = \frac{m}{n}$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$, a $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $a^r = (\sqrt[n]{a})^m$.*

Treba vidjeti da ova definicija ne ovisi o izboru brojeva m i n. Pretpostavimo da su $m' \in \mathbb{Z}$ i $n' \in \mathbb{N}$ takvi da je $r = \frac{m'}{n'}$. Tada iz $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ slijedi $m \cdot n' = n \cdot m'$. Koristeći lemu 1.3.8 dobivamo:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n\cdot n']{a})^{m\cdot n'} = (\sqrt[n\cdot n']{a})^{n\cdot m'} = (\sqrt[n']{a})^{m'}$$

Dakle, $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n']{a})^{m'}$ pa vidimo da definicija broja a^r ne ovisi o izboru brojeva m i n.

Uočimo također da je $a^r > 0$.

Primjetimo da se ova definicija broja a^r podudara s definicijom 1.3.3 kada je $r \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $a > 0$. Tada za sve $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ vrijedi:*

$$a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Dokaz. Neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Tada postoje m_1 i $m_2 \in \mathbb{Z}$ te $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $r_1 = \frac{m_1}{n}$ i $r_2 = \frac{m_2}{n}$.

Imamo:

$$a^{r_1+r_2} = a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = (\sqrt[n]{a})^{m_1+m_2} = (\sqrt[n]{a})^{m_1} \cdot (\sqrt[n]{a})^{m_2} = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Dakle, $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$. □

Lema 1.4.3. *Neka je $a > 0$ te neka su $m \in \mathbb{Z}$ te $q, n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

1) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

2) $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[q\cdot n]{a}$

Dokaz. 1) Neka je $(\sqrt[n]{a})^m = b$. Očito je $b > 0$. Tvrdimo da je $\sqrt[n]{a^m} = b$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $b^n = a^m$. Vrijedi:

$$b^n = \left[(\sqrt[n]{a})^m\right]^n = (\sqrt[n]{a})^{m\cdot n} = (\sqrt[n]{a})^{n\cdot m} = \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^m = a^m.$$

Time je tvrdnja 1) dokazana.

2) Neka je $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = b$. Očito je $b > 0$. Tvrdimo da je $\sqrt[q\cdot n]{a} = b$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $b^{q\cdot n} = a$. Vrijedi:

$$b^{q\cdot n} = \left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^{q\cdot n} = \left[\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^q\right]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Time je tvrdnja 2) dokazana.

□

Propozicija 1.4.4. *Neka je $a > 0$ te neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Tada je*

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1\cdot r_2}.$$

Dokaz. Imamo $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ i $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, gdje su $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$(a^{r_1})^{r_2} = (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{(\sqrt[n_1]{a^{m_1}})^{m_2}} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{(a^{m_1})^{m_2}}} = \sqrt[n_2\cdot n_1]{a^{m_1\cdot m_2}} = a^{\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}} = a^{r_1\cdot r_2}.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 1.4.5. *Neka je $a > 0$ te neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ takvi da je $r_1 < r_2$.*

1) Ako je $a > 1$ onda je $a^{r_1} < a^{r_2}$.

2) Ako je $0 < a < 1$ onda je $a^{r_1} > a^{r_2}$.

Dokaz. 1) Lako indukcijom dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a^k > 1$. Isto tako zaključujemo da za svaki $b \in \langle 0, 1]$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $b^k \in \langle 0, 1]$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tvrdimo $\sqrt[k]{a} > 1$. U suprotnom bi vrijedilo $\sqrt[k]{a} \in \langle 0, 1]$ što bi povlačilo da je $(\sqrt[k]{a})^k \in \langle 0, 1]$ to jest $a \in \langle 0, 1]$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da je $a > 1$.

Iz ovoga je sada lako zaključiti da je $a^r > 1$ za svaki $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r > 0$.

Naime ako je $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, onda je $r = \frac{m}{n}$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$.

Imamo:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Prema dokazanome vrijedi $a^m > 1$ te također $\sqrt[n]{a^m} > 1$.

Dakle, $a^r > 1$.

Neka je $r = r_2 - r_1$. Tada je $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ i $r_2 = r_1 + r$.

Imamo $a^{r_2} = a^{r_1+r} = a^{r_1} \cdot a^r > a^{r_1}$ jer je $a^r > 1$.

Dakle, $a^{r_1} < a^{r_2}$.

2) Iz $0 < a < 1$ slijedi $1 < \frac{1}{a}$, to jest $1 < a^{-1}$.

Prema tvrdnji 1) vrijedi:

$$(a^{-1})^{r_1} < (a^{-1})^{r_2}$$

Općenito za $r \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$(a^{-1})^r = a^{(-1)\cdot r} = (a^r)^{-1} = \frac{1}{a^r}.$$

Stoga je: $\frac{1}{a^{r_1}} < \frac{1}{a^{r_2}}$, pa je $a^{r_1} > a^{r_2}$.

□

1.5 Eksponencijalna funkcija

Definicija 1.5.1. *Neka je* $a > 1$ *te neka je* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Definiramo*

$$a^x = \sup \{a^r \,|r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Uočimo da je ova definicija dobra, naime skup $\{a^r \,|r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ ima supremum jer je neprazan i odozgo omeđen:

ako odaberemo $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q$, onda za svaki $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$ vrijedi $r < q$ pa je $a^r < a^q$, što znači da je a^q gornja međa promatranog skupa.

Lema 1.5.2. *Neka je* $a > 1$.

1) Neka su $r \in \mathbb{Q}$ *i* $x \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $r < x$. *Tada je* $a^r \leq a^x$.

2) Neka su $s \in \mathbb{Q}$ *i* $x \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $x < s$. *Tada je* $a^x \leq a^s$.

Dokaz. 1) Tvrdnja je jasna ako je $x \in \mathbb{Q}$, a ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onda tvrdnja slijedi direktno iz definicije broja a^x.

2) Ako je $x \in \mathbb{Q}$ tvrdnja je jasna, a ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onda za svaki $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$ vrijedi $r < s$ pa je $a^r < a^s$, što znači da je broj a^s gornja međa skupa $\{a^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ pa slijedi da je $a^x \leq a^s$.

□

Propozicija 1.5.3. *Neka je $a > 1$ te neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Tada je $a^x < a^y$.*

Dokaz. Odaberimo $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < r < y$.

Nadalje, odaberimo $s \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < s < r$. Imamo $x < s < r < y$.

Iz leme 1.5.2 i propozicije 1.4.5 slijedi $a^x \leq a^s < a^r \leq a^y$ pa je $a^x < a^y$. □

Definicija 1.5.4. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$.*

Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je rastuća ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ vrijedi $f(x) \leq f(y)$.

Za funkciju f kažemo da je strogo rastuća ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x < y$ vrijedi $f(x) < f(y)$.

Lema 1.5.5. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to T$ rastuća funkcija te neka je $x_0 \in S$. Pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoje $u, v \in S$ takvi da je $u < x_0 < v$ i $f(v) - f(u) < \epsilon$. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Prema pretpostavci postoje $u, v \in S$ takvi da je $u < x_0 < v$ i $f(v) - f(u) < \epsilon$.

Neka je $\delta = \min\{x_0 - u, v - x_0\}$. Očito je $\delta > 0$.

Imamo $\delta \leq x_0 - u$ i $\delta \leq v - x_0$ pa je $u \leq x_0 - \delta$ i $x_0 + \delta \leq v$ iz čega slijedi

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \subseteq \langle u, v \rangle . \tag{1.16}$$

Budući da je f rastuća vrijedi $f(u) \leq f(x_0) \leq f(v)$.

Tvrdimo da je $f(x_0) - \epsilon < f(u)$. Pretpostavimo suprotno.

Tada je $f(u) \leq f(x_0) - \epsilon < f(x_0) \leq f(v)$.

Općenito ako su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b \leq c \leq d$, onda je $c - b \leq d - a$.

Stoga je $f(x_0) - (f(x_0) - \epsilon) \leq f(v) - f(u)$, to jest $\epsilon \leq f(v) - f(u)$.

Ovo je u kontradikciji s činjenicom $f(v) - f(u) < \epsilon$.

Dakle, $f(x_0) - \epsilon < f(u)$.

Analogno dobivamo da je $f(v) < f(x_0) + \epsilon$.

Prema tome $f(x_0) - \epsilon < f(u) \leq f(v) < f(x_0) + \epsilon$ pa je

$$[f(u), f(v)] \subseteq \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle \tag{1.17}$$

Neka je $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Tada prema (1.16) $x \in \langle u, v \rangle$ pa, budući da je f rastuća vrijedi $f(x) \in [f(u), f(v)]$, što zajedno sa (1.17) daje $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$.

Time smo dokazali da sa svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:

ako je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, onda je $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon \rangle$.

Prema tome funkcija f je neprekidna u x_0. □

Napomena 1.5.6. *Neka je $a > 1$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^x > 0$.*

Naime, ako je $x \in \mathbb{R}$ onda uzmemo $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r < x$ pa je $a^r < a^x$, a znamo da je $a^r > 0$.

Tada je $a^x > 0$.

Definicija 1.5.7. *Neka je $a > 1$ te neka je $exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ funkcija definirana sa $exp_a(x) = a^x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Za exp_a kažemo da je eksponencijalna funkcija s bazom a.

Poglavlje 2

Svojstva eksponencijalne funkcije

2.1 Neomeđenost eksponencijalne funkcije

Lema 2.1.1. *Neka je $\epsilon > 0$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(1 + \epsilon)^n \geq 1 + n \cdot \epsilon$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.

Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(1 + \epsilon)^n \geq 1 + n \cdot \epsilon$

Imamo:

$$(1+\epsilon)^{n+1} = (1+\epsilon)^n \cdot (1+\epsilon) \geq (1+n\cdot\epsilon)(1+\epsilon) = 1+\epsilon+n\cdot\epsilon+n\cdot\epsilon^2 = 1+(n+1)\epsilon+n\cdot\epsilon^2 \geq 1+(n+1)\cdot\epsilon$$

Dakle, $(1 + \epsilon)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot \epsilon$.

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.1.2. *Neka je $a > 1$. Tada skup $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije odozgo omeđen.*

Dokaz. Neka je $\epsilon = a - 1$. Tada je $\epsilon > 0$ te je $a = 1 + \epsilon$.

Neka je $M > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > \frac{M}{\epsilon}$. Tada je $n \cdot \epsilon > M$ pa koristeći lemu 2.1.1 dobivamo

$$a^n = (1 + \epsilon)^n \geq 1 + n \cdot \epsilon > n \cdot \epsilon > M.$$

Dakle, $a^n > M$.

Ovime smo pokazali da niti jedan pozitivan realan broj nije gornja međa skupa $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Podsjetimo se da je niz u nekom skupu S funkcija sa $\mathbb{N}$ u S. Ako je x niz u S, to jest $x : \mathbb{N} \to S$, onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo i x_n. Za funkciju x koristimo i oznake $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te (x_n).

Za niz u $\mathbb{R}$ kažemo da je niz realnih brojeva.

Definicija 2.1.3. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a i pišemo $x_n \to a$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.*

Primjer 2.1.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$. Tada $x_n \to 0$.*

Naime, neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{\epsilon} < n_0$.

Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{\epsilon} < n$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$, to jest $x_n < \epsilon$ pa je $x_n \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle$.

Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle 0 - \epsilon, 0 + \epsilon \rangle$.

Definicija 2.1.5. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je rastući ako je $x_n \leq x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je padajući ako je $x_n \geq x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.1.6. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva.*

1) Pretpostavimo da je niz (x_n) rastući te da je $a = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.

2) Pretpostavimo da je niz (x_n) padajući te da je $a = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.

Dokaz. 2) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po $m \geq n$ da je $x_m \leq x_n$.

Za $m = n$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da za neki $m \geq n$ vrijedi $x_m \leq x_n$.

Iz $x_{m+1} \leq x_m$ slijedi $x_{m+1} \leq x_n$.

Time smo dokazali da je $x_m \leq x_n$ za svaki $m \geq n$.

Neka je $\epsilon > 0$.

Broj a je najveća donja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a $a + \epsilon > a$ pa $a + \epsilon$ nije donja međa ovog skupa.

Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_0} < a + \epsilon$.

Neka je $n \geq n_0$. Tada je $x_n \leq x_{n_0}$ pa je $x_n < a + \epsilon$.

S druge strane očito je $a - \epsilon < a \leq x_n$, to jest $a - \epsilon < x_n$ pa je $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.

Dakle, $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ za svaki $n \geq n_0$.

Time smo dokazali da $x_n \to a$.

1) Tvrdnja 1) se dokazuje analogno.

□

2.2 Neprekidnost eksponencijalne funkcije

Propozicija 2.2.1. *Neka je $a > 1$. Tada niz $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ teži broju* 1.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ pa iz propozicije 1.4.5 slijedi da je $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$, to jest $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$.

Prema tome niz $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući.

Nadalje, očito je $1 < \sqrt[n]{a}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je 1 donja međa skupa $\left\{\sqrt[n]{a} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Neka je $l = \inf\left\{\sqrt[n]{a} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Vrijedi $1 \leq l$.

Pretpostavimo da je $1 < l$. Imamo $l \leq \sqrt[n]{a}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je $l^n \leq a$. Ovo znači da je skup $\{l^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen no to je u kontradikciji s propozicijom 2.1.2.

Prema tome $l = 1$.

Iz propozicije 2.1.6 slijedi da niz $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema l.

Dakle, niz teži u 1. Time je propozicija dokazana. □

Teorem 2.2.2. *Neka je $a > 1$. Funkcija $exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je neprekidna.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je funkcija $\exp_a$ neprekidna u točki x_0.

U tu svrhu dovoljno je provjeriti da vrijede pretpostavke od leme 1.5.5.

Neka je $\epsilon > 0$.

Iz propozicije 2.2.1 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sqrt[n]{a} \in \left\langle 1 - \frac{\epsilon}{a^{x_0}}, 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}} \right\rangle. \tag{2.1}$$

Odaberimo bilo koji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$.

Iz (2.1) slijedi da je $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$ pa je $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$ što povlači $a^{x_0} \cdot (\sqrt[n]{a} - 1) < \epsilon$.

Očito je $x_0 - \frac{1}{n} < x_0$ pa postoji $u \in \mathbb{Q}$ takav da je $x_0 - \frac{1}{n} < u < x_0$. Slijedi $x_0 < u + \frac{1}{n}$. Definirajmo $v = u + \frac{1}{n}$.

Dakle, $u < x_0 < v$. Vrijedi

$$exp_a(v) - exp_a(u) = a^v - a^u = a^{u+\frac{1}{n}} - a^u = a^u \cdot a^{\frac{1}{n}} - a^u = a^u(a^{\frac{1}{n}} - 1) = a^u(\sqrt[n]{a} - 1) \leq a^{x_0}(\sqrt[n]{a} - 1) < \epsilon.$$

Dakle, $\exp_a(v) - \exp_a(u) < \epsilon$.

Iz leme 1.5.5 slijedi da je funkcija $\exp_a$ neprekidna u točki x_0.

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 2.2.3. *Neka je $a > 1$. Funkcija $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ je bijekcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Tada je $x < y$ ili $y < x$ pa je prema propoziciji 1.5.3 $a^x < a^y$ ili $a^y < a^x$. U svakom slučaju je $a^x \neq a^y$, to jest $\exp_a(x) \neq \exp_a(y)$. Prema tome funkcija $\exp_a$ je injekcija.

Dokažimo sada da je $\exp_a$ surjekcija.

Neka je $y \in \langle 0, +\infty \rangle$. Iz propozicije 2.1.2 zaključujemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $y < a^n$ (jer bi u suprotnome y bio gornja međa skupa $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Iz istog razloga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{y} < a^m$ iz čega slijedi $a^{-m} < y$.

Neka je $u = -m$ i $v = n$. Imamo $u < v$ i $a^u < y < a^v$.

Funkcija $\exp_a \big|_{[u,v]} : [u, v] \to \langle 0, +\infty \rangle$ je neprekidna prema teoremu 2.2.2 i korolaru 1.2.16.

Stoga je funkcija $f : [u, v] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ neprekidna.

Vrijedi $f(u) = a^u < y < a^v = f(v)$.

Prema korolaru 1.2.13 postoji $x \in [u, v]$ takav da je $f(x) = y$.

Dakle, $a^x = y$, to jest $\exp_a(x) = y$. Prema tome funkcija $\exp_a$ je surjekcija pa je time tvrdnja teorema dokazana. □

Lema 2.2.4. *Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Tada je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $h(x_0) \neq 0$.

1) $h(x_0) > 0$. Prema lemi 1.2.11 postoji $r > 0$ takav da za svaki $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$ vrijedi $h(x) > 0$. Znamo da postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, a za njega vrijedi $h(x) = 0$ prema pretpostavci leme. To je kontradikcija s činjenicom da je $h(x) > 0$.

2) $h(x_0) < 0$ Analogno, koristeći lemu 1.2.11 dobivamo kontradikciju.

Budući da smo u oba slučaja došli do kontradikcije zaključujemo da je $h(x_0) = 0$. □

Propozicija 2.2.5. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Tada je $f = g$.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $h(x) = f(x) - g(x)$.

Funkcija h je neprekidna prema korolaru 1.1.9, naime $h = f + (-g)$.

Očito je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Prema lemi 2.2.4 vrijedi da je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Slijedi $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 2.2.6. *Neka su S, T, V podskupovi od $\mathbb{R}$ te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije. Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ broj takav da je f neprekidna u x_0 te g neprekidna u $f(x_0)$.*

Tada je funkcija $g \circ f : S \to V$ neprekidna u x_0.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je g neprekidna u $f(x_0)$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $y \in T$ vrijedi:

$$\text{ako je } y \in \langle f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta \rangle \text{ , onda je } g(y) \in \langle g(f(x_0)) - \epsilon, g(f(x_0)) + \epsilon \rangle \tag{2.2}$$

Nadalje, budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta' > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta', x_0 + \delta' \rangle \text{ , onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta \rangle \tag{2.3}$$

Iz (2.2) i (2.3) zaključujemo da za svaki $x \in S$ vrijedi:

ako je $x \in \langle x_0 - \delta', x_0 + \delta \rangle$, onda je $g(f(x)) \in \langle g(f(x_0)) - \epsilon, g(f(x_0)) + \epsilon \rangle$.

Zaključujemo da je funkcija $g \circ f$ neprekidna u točki x_0. □

Korolar 2.2.7. *Neka su $S, T, V \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ neprekidne funkcije. Tada je funkcija $g \circ f : S \to V$ neprekidna.*

Propozicija 2.2.8. *Neka je $a > 1$. Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.*

Dokaz. Fiksirajmo $y \in \mathbb{Q}$. Definirajmo $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{x+y}$, $g(x) = a^x \cdot a^y$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x + y$. Funkcija h je zbroj funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ i $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y$ koje su neprekidne prema primjeru 1.1.4 i primjeru 1.1.5. Prema korolaru 1.1.9 funkcija h je neprekidna.

Prema propoziciji 2.2.6 funkcija $f' : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$, $f' = \exp_a \circ h$ je neprekidna.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f'(x) = \exp_a(h(x)) = a^{x+y} = f(x)$, to jest $f'(x) = f(x)$.

Stoga je i f neprekidna funkcija.

Funkcija g je neprekidna kao produkt neprekidnih funkcija. Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Koristeći propoziciju 1.4.2 dobivamo:

$$f(x) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = g(x).$$

Dakle, $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Prema propoziciji 2.2.5 vrijedi $f = g$. Stoga je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, to jest $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $y \in \mathbb{Q}$.

Fiksiramo $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) = a^{x+y}$, $g(y) = a^x \cdot a^y$, za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Kao i maloprije zaključujemo da su f i g neprekidne funkcije.

Neka je $y \in \mathbb{Q}$. Prema dokazanom vrijedi $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, to jest $f(y) = g(y)$. Iz propozicije 2.2.5 slijedi $f = g$ pa je $f(y) = g(y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to jest $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ za svaki $y \in \mathbb{R}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Neka je $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Prema propoziciji 1.4.4 za svaki $r \in \mathbb{Q}$ vrijedi:

$$a^r = a^{(-1)\cdot(-r)} = (a^{-1})^{-r}.$$

Uočimo da je $a^{-1} > 1$. Za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definiramo $a^x = (a^{-1})^{-x}$.

Na taj način imamo definiran a^x za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za $a \in \langle 0, 1 \rangle$ definiramo funkciju $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$, $\exp_a(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.2.9. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$.*

Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je padajuća ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ vrijedi $f(x) \geq f(x)$.

Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je strogo padajuća ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x < y$ vrijedi $f(x) > f(x)$.

Teorem 2.2.10. *Neka je $a \in \langle 0, 1 \rangle$.*

1) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

2) Funkcija $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ je neprekidna, strogo padajuća bijekcija.

Dokaz. 1) Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Koristeći propoziciju 2.2.8 dobivamo:

$$a^{x+y} = (a^{-1})^{-(x+y)} = (a^{-1})^{-x+(-y)} = (a^{-1})^{-x} \cdot (a^{-1})^{-y} = a^x \cdot a^y.$$

Dakle, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

2) Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema korolaru 1.1.9 funkcija h je neprekidna.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\exp_a(x) = a^x = (a^{-1})^{-x} = \exp_{a^{-1}}(-x) = \exp_{a^{-1}}(h(x))$$

Prema tome: $\exp_a = \exp_{a^{-1}} \circ h$.

Iz teorema 2.2.2 i korolara 2.2.7 slijedi da je $\exp_a$ neprekidna funkcija.

- Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Tada je $-y < -x$ pa iz propozicije 1.5.3 slijedi $(a^{-1})^{-y} < (a^{-1})^{-x}$, to jest $a^x > a^y$.
  Time smo dokazali da je $\exp_a$ strogo padajuća funkcija.

- Neka je $y \in \langle 0, +\infty \rangle$. Budući da je funkcija $\exp_{a^{-1}} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ surjekcija (teorem 2.2.3) postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $(a^{-1})^z = y$.
  Neka je $x = -z$. Tada je $y = (a^{-1})^{-x} = a^x$, to jest $y = \exp_a(x)$. Prema tome $\exp_a$ je surjekcija.

Iz činjenice da je $\exp_a$ strogo padajuća funkcija slijedi da je $\exp_a$ injekcija.

Dakle, $\exp_a$ je bijekcija.

□

2.3 Logaritamska funkcija

Lema 2.3.1. *Neka je* $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *bijekcija.*

Pretpostavimo da je f *strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija. Tada je* f *neprekidna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f strogo rastuća. Neka je $x_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Neka je $\epsilon > 0$.

Budući da je f surjekcija postoje $u, v \in \langle 0, +\infty\rangle$ takvi da je

$f(u) = f(x_0) - \frac{\epsilon}{4}$ i $f(v) = f(x_0) + \frac{\epsilon}{4}$.

Tvrdimo da je $u < x_0$. Pretpostavimo suprotno.

Tada je $x_0 \leq u$ pa je $f(x_0) \leq f(u)$, to jest $f(x_0) \leq f(x_0) - \frac{\epsilon}{4}$, a to je očito nemoguće.

Prema tome $u < x_0$.

Analogno dobivamo da je $x_0 < v$. Vrijedi:

$$f(v) - f(u) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ postoje $u, v \in \langle 0, +\infty\rangle$ takvi da je $u < x_0 < v$ i $f(v) - f(u) < \epsilon$.

Iz leme 1.5.5 slijedi da je funkcija f neprekidna u x_0. Prema tome f je neprekidna.

Pretpostavimo sada da je funkcija f strogo padajuća.

Tada je funkcija $-f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ strogo rastuća pa je i injekcija.

Neka je $y \in \mathbb{R}$. Tada postoji $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je $f(x) = -y$ iz čega slijedi $-f(x) = y$, to jest $(-f)(x) = y$. Prema tome funkcija $-f$ je bijekcija.

Iz dokazanog slijedi da je funkcija $-f$ neprekidna.

Prema korolaru 1.1.9 funkcija $-(-f)$ je neprekidna.

Dakle, f je neprekidna. □

Definicija 2.3.2. *Neka je* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *i* $a \neq 1$.

Znamo da je funkcija $\exp_a : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ *bijekcija. Inverznu funkciju od* exp_a *nazivamo logaritamska funkcija s bazom a i označavamo* $\log_a$.

Dakle, $log_a : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ i $\exp_a \circ \log_a = \mathrm{id}_{\langle 0,+\infty\rangle}$, $\log_a \circ \exp_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Slijedi da za svaki $y \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $(\exp_a \circ \log_a)(y) = y$, to jest $\exp_a(\log_a y) = y$.

Dakle, $a^{\log_a y} = y$ za svaki $y \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(\log_a \circ \exp_a)(x) = x$, to jest $\log_a(\exp_a x) = x$.

Dakle, $\log_a a^x = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Propozicija 2.3.3. *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$.*

1) Ako je $a > 1$ onda je $\log_a$ strogo rastuća funkcija.

2) Ako je $a \in \langle 0, 1\rangle$ onda je $\log_a$ strogo padajuća funkcija.

3) Funkcija $\log_a$ je neprekidna.

4) Neka su $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$. Tada je

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \tag{2.4}$$

Dokaz. 1) Neka su $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$ takvi da je $x < y$. Pretpostavimo da je $\log_a y \leq \log_a x$.

Budući da je funkcija $\exp_a$ strogo rastuća vrijedi

$$\exp_a(\log_a y) \leq \exp_a(\log_a x),$$

to jest $y \leq x$. Kontradikcija.

Prema tome $\log_a x < \log_a y$.

Stoga je $\log_a$ strogo rastuća funkcija.

2) Neka su $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$ takvi da je $x < y$. Pretpostavimo da je $\log_a x \leq \log_a y$.

Budući da je funkcija $\exp_a$ strogo padajuća vrijedi:

$$\exp_a(\log_a y) \leq \exp_a(\log_a x),$$

to jest $y \leq x$. Kontradikcija.

Prema tome $\log_a x > \log_a y$.

Stoga je $\log_a$ strogo padajuća funkcija.

3) Očito je $\log_a$ bijekcija. Iz tvrdnji 1) i 2) i leme 2.3.1 slijedi da je funkcija $\log_a$ neprekidna.

4) Neka je $u = \log_a(x \cdot y)$ te $v = \log_a x + \log_a y$. Želimo dokazati da je $u = v$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $\exp_a u = \exp_a v$ (jer je $\exp_a$ injekcija). Imamo:

$$\exp_a u = \exp_a(\log_a(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

S druge strane

$$\exp_a v = a^v = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$

Prema tome $\exp_a u = \exp_a v$. Dakle, $u = v$, to jest vrijedi (2.4).

□

Definicija 2.3.4. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ definiramo $1^x = 1$.*

Propozicija 2.3.5. *Neka je $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je*

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \tag{2.5}$$

za sve $x, y \in \langle 0, +\infty\rangle$.

Tada za svaki $a > 0$ i svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(a^x) = x \cdot f(a). \tag{2.6}$$

Dokaz. Neka je $a > 0$.

Dokažimo prvo indukcijom da (2.6) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$. Za $x = 1$ (2.6) očito vrijedi.

Pretpostavimo da (2.6) vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$. Imamo

$$f(a^{x+1}) = f(a^x \cdot a) = f(a^x) + f(a) = x \cdot f(a) + f(a) = (x+1) \cdot f(a).$$

Dakle, $f(a^{x+1}) = (x+1) \cdot f(a)$.

Prema tome (2.6) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$.

Iz (2.5) za $x = y = 1$ dobivamo:

$$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1),$$

to jest $f(1) = f(1) + f(1)$ pa je $f(1) = 0$.

Iz ovoga slijedi da (2.6) vrijedi i za $x = 0$ jer je

$$f(a^0) = f(1) = 0 = 0 \cdot f(a).$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je

$$f(a^{-n}) = (-n) \cdot f(a) \tag{2.7}$$

Imamo:

$$0 = f(1) = f(a^{-n} \cdot a^n) = f(a^{-n}) + f(a^n),$$

dakle $0 = f(a^{-n}) + n \cdot f(a)$ iz čega odmah slijedi (2.7).

Zaključujemo da (2.6) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$ i za svaki $a > 0$.

Neka su $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$.

Imamo $a^{\frac{1}{n}} > 0$ pa koristeći (2.6) dobivamo:

$$f(a) = f\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = n \cdot f\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$$

iz čega slijedi $f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot f(a)$.

Neka je $m \in \mathbb{Z}$. Vrijedi:

$$f\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m \cdot f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot f(a)\right) = \frac{m}{n} \cdot f(a).$$

Dakle, $f\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} \cdot f(a)$.

Prema tome (2.6) vrijedi za svaki $a > 0$ i svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Iz $f(1) = 0$ slijedi da (2.6) vrijedi za $a = 1$ i svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Definirajmo funkcije $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = f(a^x)$, $v(x) = x \cdot f(a)$.

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$u(x) = f(a^x) = f(\exp_a x) = (f \circ \exp_a)(x)$$

pa je $u = f \circ \exp_a$. Iz korolara 2.2.7 slijedi da je u neprekidna.

Funkcija v je neprekidna kao produkt dviju neprekidnih funkcija.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Imamo $u(x) = f(a^x) = x \cdot f(a) = v(x)$. Dakle, $u(x) = v(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Iz propozicije 2.2.5 slijedi $u = v$, to jest $u(x) = v(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dakle, $f(a^x) = x \cdot f(a)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ □

Korolar 2.3.6. *Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Tada za svaki $b > 0$ i svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi :*

$$\log_a b^x = x \cdot \log_a b.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 2.3.3 (tvrdnje 3) i 4)) i propozicije 2.3.5. □

Propozicija 2.3.7. *Neka je $a > 0$ te $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.*

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi ako je $a = 1$. Pretpostavimo da je $a \neq 1$.

Neka je $u = (a^x)^y$, $v = a^{x \cdot y}$. Očito su $u, v > 0$.

Dokažimo da je $\log_a u = \log_a v$.

Iz ovoga i činjenice da je $\log_a$ injekcija će slijediti da je $u = v$.

Koristeći korolar 2.3.6 dobivamo:

$$\log_a u = \log_a (a^x)^y = y \cdot \log_a a^x = y \cdot x,$$

$$\log_a v = \log_a a^{x \cdot y} = x \cdot y.$$

Dakle, $\log_a u = \log_a v$ pa je $u = v$, to jest $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$. □

Propozicija 2.3.8. *Neka su $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$. Tada je*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b. \tag{2.8}$$

Općenito, za $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi da je $u = v$ ako i samo ako je $c^u = c^v$ (zbog injektivnosti funkcije $\exp_c$).

Stoga je (2.8) ekvivalentno sa

$$c^{\log_a b \cdot \log_c a} = c^{\log_c b}.$$

Imamo, koristeći propoziciju 2.3.7

$$c^{\log_a b \cdot \log_c a} = c^{\log_c b} \Leftrightarrow (c^{\log_c a})^{\log_a b} = b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b \Leftrightarrow b = b.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

2.4 Jedinstvenost eksponencijalne funkcije

Definicija 2.4.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Za I kažemo da je otvoreni interval ako je*
$I = \langle a, b\rangle$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
ili $I = \langle a, +\infty\rangle$, za $a \in \mathbb{R}$
ili $I = \langle -\infty, a\rangle$, za $a \in \mathbb{R}$
ili $I = \mathbb{R}$.

Lema 2.4.2. *Neka je I otvoreni interval, $x_0 \in I$ i $\epsilon > 0$.*
Tada postoji $\tau \in \langle 0, \epsilon\rangle$ takav da je $x_0 - \tau \in I$ i $x_0 + \tau \in I$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $I = \langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Iz $x_0 \in I$ slijedi $a < x_0 < b$. Stoga je $x_0 - a > 0$ i $b - x_0 > 0$.
Neka je $\tau = \min\left\{\frac{x_0 - a}{2}, \frac{b - x_0}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$.
Očito je $\tau > 0$. Nadalje, imamo $\tau \leq \frac{x_0 - a}{2} < x_0 - a$, dakle $\tau < x_0 - a$.
Isto tako vrijedi $\tau < b - x_0$ i $\tau < \epsilon$.
Iz $\tau < x_0 - a$ slijedi $a < x_0 - \tau$ pa je $a < x_0 - \tau < x_0 < b$, to jest $x_0 - \tau \in I$.
Iz $\tau < b - x_0$ slijedi $x_0 + \tau < b$ pa je $a < x_0 < x_0 + \tau < b$, to jest $x_0 + \tau \in I$.
Očito je $\tau \in \langle 0, \epsilon\rangle$.
Pretpostavimo sada da je $I = \langle a, +\infty\rangle$, gdje je $a \in \mathbb{R}$.
Iz $x_0 \in I$ slijedi $a < x_0$ pa je $x_0 - a > 0$.
Definirajmo $\tau = \min\left\{\frac{x_0 - a}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$.
Očito je $\tau \in \langle 0, \epsilon\rangle$ i $\tau < x_0 - a$, što povlači $a < x_0 - \tau$ pa je $x_0 - \tau \in I$.
Nadalje, $a < x_0 < x_0 + \tau$ pa je $x_0 + \tau \in I$.
Na isti način postupamo za $I = \langle -\infty, a\rangle$, za $a \in \mathbb{R}$.
U slučaju $I = \mathbb{R}$ možemo uzeti $\tau = \frac{\epsilon}{2}$.
Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.4.3. *Neka su I i J otvoreni intervali te neka je $f : I \to J$ bijekcija. Pretpostavimo da je f strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f strogo rastuća. Neka je $x_0 \in I$. Neka je $\epsilon > 0$. Imamo $f(x_0) \in J$ pa prema lemi 2.4.2 postoji $\tau \in \left\langle 0, \frac{\epsilon}{4} \right\rangle$ takav da je $f(x_0) - \tau \in J$ i $f(x_0) + \tau \in J$.

Budući da je f surjekcija postoje $u, v \in I$ takvi da je $f(u) = f(x_0) - \tau$ i $f(v) = f(x_0) + \tau$.

Vrijedi $u < x_0$ jer bi u suprotnom iz $x_0 \leq u$ slijedilo $f(x_0) \leq f(u)$, to jest $f(x_0) \leq f(x_0) - \tau$ što je nemoguće.

Isto tako je $x_0 < v$.

Vrijedi $f(v) - f(u) = 2\tau < 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ postoje $u, v \in I$ takvi da je $u < x_0 < v$ i $f(v) - f(u) < \epsilon$.

Iz leme 1.5.5 slijedi da je funkcija f neprekidna u x_0.

Zaključak: f je neprekidna.

Pretpostavimo sada da je f strogo padajuća funkcija.

Neka je $J' = \{-x \mid x \in J\}$.

Tvrdimo da je J' otvoreni interval.

Uočimo da je $x \in J' \Leftrightarrow -x \in J$.

- Pretpostavimo da je $J = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

  Vrijedi:

  $$x \in J' \Leftrightarrow -x \in J \Leftrightarrow a < -x < b \Leftrightarrow -b < x < -a \Leftrightarrow x \in \langle -b, -a \rangle .$$

  Dakle, $J' = \langle -b, -a \rangle$ pa je J' otvoreni interval.

- Pretpostavimo da je $J = \langle a, +\infty \rangle$, $a \in \mathbb{R}$.

  Tada posve analogno kao maloprije dobivamo da je $J' = \langle -\infty, -a \rangle$, dakle J' je otvoreni interval.

- Ako je $J = \langle -\infty, b \rangle$, $b \in \mathbb{R}$, onda je $J' = \langle -b, +\infty \rangle$, a ako je $J = \mathbb{R}$ onda je $J' = \mathbb{R}$.

Definirajmo funkciju $h : J \longrightarrow J'$ sa $h(x) = -x$.

Tvrdimo da je h neprekidna.

U tu svrhu je dovoljno dokazati da je funkcija $\bar{h} : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{h}(x) = -x$ neprekidna.

Neka je $l : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $l(x) = x$. Funkcija l je neprekidna prema primjeru 1.1.4 pa iz činjenice da je $\bar{h} = -l$ i korolara 1.1.9 slijedi da je funkcija $\bar{h}$ neprekidna.

Dakle, h je neprekidna.

Nadalje, neka je $h' : J' \longrightarrow J$ funkcija definirana sa $h'(x) = -x$.

Funkcija h' je bijekcija. Analogno kao u slučaju funkcije h zaključujemo da je funkcija h' neprekidna.

Uočimo da je $h' \circ h = \mathrm{id}_J$.

Definirajmo $g : I \longrightarrow J'$, $g = h \circ f$.

Funkcija g je bijekcija kao kompozicija dviju bijekcija.

Neka su $x, y \in I$ takvi da je $x < y$. Tada je $f(x) > f(y)$ (jer je f strogo padajuća) pa je $-f(x) < -f(y)$, to jest $h(f(x)) < h(f(y))$.

Dakle, $g(x) < g(y)$. Prema tome funkcija g je strogo rastuća. Prema dokazanom funkcija g je neprekidna.

Iz $g = h \circ f$ slijedi $h' \circ g = h' \circ (h \circ f)$, to jest $h' \circ g = (h' \circ h) \circ f$ pa zbog $h' \circ h = \mathrm{id}_J$ imamo $h' \circ g = f$ pa je f neprekidna kao kompozicija dviju neprekidnih funkcija. □

Lema 2.4.4. *Neka je $a > 0$ te neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(1) = a$ i*

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \tag{2.9}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi:

$$f(x) = a^x. \tag{2.10}$$

Dokaz. Dokažimo prvo indukcijom da (2.10) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$.

Za $x = 1$ jednakost (2.10) očito vrijedi.

Pretpostavimo da (2.10) vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$.

Imamo $f(x + 1) = f(x) \cdot f(1) = a^x \cdot a = a^{x+1}$, dakle (2.10) vrijedi za $x + 1$.

Time smo dokazali da (2.10) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$. Kada u (2.9) uvrstimo $x = 0$ i $y = 1$ dobivamo:

$$f(1) = f(0) \cdot f(1),$$

to jest $a = f(0) \cdot a$ pa je $f(0) = 1$.

Prema tome (2.10) vrijedi i za $x = 0$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kada u (2.9) uvrstimo $x = n$ i $y = -n$ dobivamo:

$$f(0) = f(n) \cdot f(-n),$$

to jest $1 = a^n \cdot f(-n)$ pa je $f(-n) = a^{-n}$.

Zaključujemo da je $f(x) = a^x$, za svaki $x \in \mathbb{Z}$.

Tvrdimo da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Imamo:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

pa je očito $f(x) \geq 0$.

Pretpostavimo da je $f(x) = 0$. Imamo:

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) = 0 \cdot f(-x) = 0,$$

to jest $1 = 0$, kontradikcija.

Prema tome $f(x) > 0$.

Neka je $y \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$f(my) = (f(y))^m . \tag{2.11}$$

Očito (2.11) vrijedi za $m = 1$.

Pretpostavimo da (2.11) vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je :

$$f((m+1)y) = f(my+y) = f(my) \cdot f(y) = (f(y))^m \cdot f(y) = (f(y))^{m+1} .$$

Dakle, (2.11) vrijedi za $m + 1$. Zaključujemo da (2.11) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Očito (2.11) vrijedi i za $m = 0$.

Ako je $m \in \mathbb{N}$ onda je

$$1 = f(0) = f(my + (-m)y) = f(my) \cdot f((-m)y) = (f(y))^m \cdot f((-m)y)$$

iz čega zaključujemo da je:

$$f((-m)y) = f(y)^{-m}.$$

Prema tome (2.11) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{Z}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći (2.11) dobivamo:

$$a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n .$$

Dakle, $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = a$ pa zbog $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ zaključujemo da je $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$, to jest $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = \frac{m}{n}$. Imamo:

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^x.$$

Prema tome $f(x) = a^x$, za svaki $x \in \mathbb{Q}$. □

Teorem 2.4.5. *Neka je $a > 0$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je $a \neq 1$, onda je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp_a(x)$ neprekidna (teorem 2.2.2 i teorem 2.2.10). Očito je $f(1) = a$ te za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Za $a = 1$ funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ očito zadovoljava tražene uvjete.

Time smo dokazali egzistenciju tražene funkcije.

Dokažimo sada da je funkcija f s traženim svojstvima jedinstvena.

Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokažimo da je $f(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Ako to dokažemo gotovi smo, to jest imat ćemo da funkcija iz iskaza teorema mora biti jedinstvena.

Prema lemi 2.4.4 vrijedi $f(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Funkcija g je neprekidna (teorem 2.2.2), a za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi $f(x) = g(x)$. Iz propozicije 2.2.5 slijedi da je $f = g$.

Dakle, $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, to jest $f(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Lema 2.4.6. *Neka su $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije takve da je f neprekidna te da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Pretpostavimo da je g rastuća ili padajuća funkcija. Tada je $f = g$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je g rastuća. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $\epsilon > 0$.

Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\text{ako je} x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{, onda je} f(x) \in \left\langle f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right\rangle.$$

Odaberimo $u, v \in \mathbb{Q}$ takve da je $x_0 - \delta < u < x_0 < v < x_0 + \delta$.

Imamo $f(u), f(v) \in \left\langle f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right\rangle$ i $f(u) \leq f(v)$ (jer je $f(u) = g(u)$, $f(v) = g(v)$ i g je rastuća).

Općenito sko su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b \leq c < d$, onda je $c - b < d - a$. Stoga je

$$f(v) - f(u) < \left(f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \right) - \left(f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} \right) = \epsilon.$$

Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ postoje $u, v \in \mathbb{R}$ takvi da je $u < x_0 < v$ i $g(v) - g(u) < \epsilon$.

Iz leme1.5.5 slijedi da je g neprekidna u x_0.

Prema tome g je neprekidna funkcija.

Iz propozicije 2.2.5 slijedi $f = g$.

Pretpostavimo sada da je g padajuća funkcija.

Tada je $-g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rastuća funkcija, funkcija $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna (korolar 1.1.9) i za svaki $x \in \mathbb{Q}$ očito vrijedi $(-f)(x) = (-g)(x)$. Prema dokazanom vrijedi $-f = -g$.

Prema tome $f = g$. $\square$

Teorem 2.4.7. *Neka je $a > 0$.*

> *1) Ako je $a > 1$ onda postoji jedinstvena rastuća funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.*

2) Ako je $0 < a < 1$ *onda postoji jedinstvena padajuća funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *takva da je* $f(1) = a$ *i* $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$*, za sve* $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \exp_a(x)$.

Tada je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Nadalje, f je rastuća ako je $a > 1$, odnosno padajuća ako je $0 < a < 1$.

1) Pretpostavimo da je $a > 1$ te da je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rastuća funkcija takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neka je $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je $f = g$. Naime, prema lemi 2.4.4 za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi $f(x) = a^x$, to jest $f(x) = g(x)$. Funkcija g je očito neprekidna pa iz leme 2.4.6 slijedi $f = g$. Time je tvrdnja 1) dokazana.

2) Analogno kao pod 1) zaključujemo da za $0 < a < 1$ postoji jedinstvena padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(1) = a$ i $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

□

Bibliografija

1. S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
2. S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
3. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

Ovaj diplomski rad je podijeljen na dva poglavlja.

U prvom poglavlju se proučavaju neprekidne funkcije i neka njihova svojstva te se definira eksponencijalna funkcija.

U drugom poglavlju se dokazuju razna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije.

Na kraju se dokazuju neki rezultati vezani uz jedinstvenost eksponencijalne funkcije.

Summary

This diploma thesis is divided into two chapters.

In the first chapter, we have studied continuous functions and their properties and we have defined an exponential function.

In the second chapter we have proved various properties of exponential and logarithmic functions.

At the and we have proved same results concerning the uniqueness of exponential function.

Životopis

Rođena sam 9. ožujka 1991. godine u Mostaru kao drugo dijete, od četvero, roditelja Stojanke i Željka. Osnovnu školu Ruđera Boškovića sam pohađala u Grudama. Nakon završetka osnovne škole, 2006. upisala sam se u opću gimnaziju Antuna Branka Šimića također u Grudama.

Srednjoškolsko obrazovanje sam završila 2010. godine, a iste te godine sam upisala studij Matematike; smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2014. stekla sam titulu prvostupnice edukacijske matematike.