Egzistencija realnih brojeva

Levanić, Vedran

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vedran Levanić

EGZISTENCIJA REALNIH BROJEVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Za ugodno mentorstvo, uloženo vrijeme, volju te željom za pomoći u izradi ovog diplomskog rada zahvaljujem svojem mentoru prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću. Iskreno hvala roditeljima, majci Željki i ocu Josipu, prijateljima i ostaloj rodbini na podršci, ljubavi i financijskoj potpori tijekom cijelog fakultetskog obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu opisat ćemo izgradnju skupa realnih brojeva, odnosno konstrukciju jednog potpuno uređenog polja. Na početku ćemo definirati osnovne pojmove potrebne za njegovo razumijevanje. To će biti pojmovi binarnih operacija i binarnih relacija na nepraznom skupu i njihova svojstva te koncepti različitih algebarskih struktura.

Konstrukciju ćemo započeti aksiomima skupa prirodnih brojeva, definiranjem operacija zbrajanja i množenja te uređaja na spomenutom skupu. Kroz nekoliko koraka uslijedit će izgradnja sve složenijih struktura definiranih kao kvocijentni skupovi pri određenim relacijama ekvivalencije. Naposljetku, do potpuno uređenog polja, odnosno skupa realnih brojeva doći ćemo kroz koncept Cauchyjevih nizova i konvergencije tih nizova.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Definicija 1.0.1. *Neka je S neprazan skup. Za funkciju $\circ : S \times S \to S$ kažemo da je binarna operacija na S. Ako je $\circ$ binarna operacija na S, onda za $x, y \in S$ umjesto $\circ(x, y)$ obično pišemo $x \circ y$.*

Definicija 1.0.2. *Za binarnu operaciju na skupu S kažemo da je asocijativna ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.*

Definicija 1.0.3. *Neka je $\circ$ binarna operacija na skupu S te neka je $e \in S$. Kažemo da je e neutralni element za operaciju $\circ$ ako za $\forall x \in S$ vrijedi da je $x \circ e = x$ i $e \circ x = x$.*

Propozicija 1.0.4. *Neka je $\circ$ binarna operacija na skupu S. Pretpostavimo da su $e, f \in S$ neutralni elementi za operaciju $\circ$. Tada je $e = f$.*

Dokaz. Budući da je e neutralni element za $\circ$, za svaki $x \in S$ vrijedi $x \circ e = x$.
Posebno, za $x = f$ dobivamo

$$f \circ e = f. \tag{1.1}$$

Budući da je f neutralni element za $\circ$, za svaki $x \in S$ vrijedi $f \circ x = x$.
Posebno, za $x = e$ dobivamo

$$f \circ e = e. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi $e = f$ čime je tvrdnja dokazana. □

Definicija 1.0.5. *Neka je $\circ$ binarna operacija na skupu S koja je asocijativna i za koju postoji neutralni element. Tada za uređeni par $(S, \circ)$ kažemo da je monoid.*

Definicija 1.0.6. *Neka je $(S, \circ)$ monoid te neka je e neutralni element za $\circ$. Tada za e kažemo da je neutralni element u monoidu $(S, \circ)$.*

Definicija 1.0.7. *Neka je* $(S, \circ)$ *monoid te neka je* e *neutralni element u tome monoidu. Neka su* $x, y \in S$ *takvi da je* $x \circ y = e$ *i* $y \circ x = e$. *Tada za* y *kažemo da je inverzni element od* x *u monoidu* $(S, \circ)$.

Propozicija 1.0.8. *Neka je* $(S, \circ)$ *monoid te* $x \in S$. *Pretpostavimo da su* $y, z \in S$ *inverzni elementi od* x *u* $(S, \circ)$. *Tada je* $y = z$.

Dokaz. Neka je e neutralni element u monoidu $(S, \circ)$.
Budući da je y inverzni element od x, vrijedi $x \circ y = e$. Iz ovoga slijedi $z \circ (x \circ y) = z \circ e$. Budući da je binarna operacija $\circ$ asocijativna te da je e neutralni element za tu operaciju, vrijedi $(z \circ x) \circ y = z$. No, jer je z inverzni element od x vrijedi $z \circ x = e$ pa iz toga slijedi $e \circ y = z$, odnosno $y = z$. Time je tvrdnja dokazana. □

Definicija 1.0.9. *Neka je* $(S, \circ)$ *monoid takav da svaki* $x \in S$ *ima inverzni element u* $(S, \circ)$. *Tada za* $(S, \circ)$ *kažemo da je grupa.*

Definicija 1.0.10. *Za binarnu operaciju* $\circ$ *na skupu* S *kažemo da je komutativna ako za sve* $x, y \in S$ *vrijedi* $x \circ y = y \circ x$.

Definicija 1.0.11. *Za grupu* $(S, \circ)$ *kažemo da je komutativna ili Abelova ako je* $\circ$ *komutativna binarna operacija.*

Definicija 1.0.12. *Neka je* P *skup te neka su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije na* P *takve da vrijedi sljedeće:*

(1) $(P, +)$ *je Abelova grupa.*

(2) Binarna operacija $\cdot$ *je asocijativna.*

(3) Za sve $x, y, z \in P$ *vrijedi* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *i* $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Tada za uređenu trojku $(P, +, \cdot)$ *kažemo da je prsten.*

Napomena 1.0.13. *Ako je* $(P, +, \cdot)$ *prsten, onda s* 0 *označavamo neutralni element u grupi* $(P, +)$.

Definicija 1.0.14. *Za prsten* $(P, +, \cdot)$ *kažemo da je prsten s jedinicom ako postoji neutralni element za binarnu operaciju* $\cdot$.

Napomena 1.0.15. *Ako je* $(P, +, \cdot)$ *prsten s jedinicom, onda s* 1 *označavamo neutralni element za operaciju* $\cdot$.

Definicija 1.0.16. *Za prsten* $(P, +, \cdot)$ *kažemo da je komutativni prsten ako je binarna operacija* $\cdot$ *komutativna.*

Lema 1.0.17. *Neka je* $(S, \circ)$ *grupa te* $x \in S$ *takav da je* $x \circ x = x$*. Tada je* $x = e$*, gdje je* e *neutralni element u grupi* $(S, \circ)$*.*

Dokaz. Neka je y inverzni element od x.
Tada iz $x \circ x = x$ slijedi $(x \circ x) \circ y = x \circ y$, odnosno $x \circ (x \circ y) = e$. Kako iz navedenog slijedi $x \circ e = e$, zaključujemo da je $x = e$ čime je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 1.0.18. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten. Tada za svaki* $x \in P$ *vrijedi* $0 \cdot x = 0$ *i* $x \cdot 0 = 0$*.*

Dokaz. Neka je $x \in P$. Prema tvrdnji *(3)* iz definicije 1.0.12 vrijedi:

$$(0 + 0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x).$$

Budući da je 0 neutralni element za binarnu operaciju +, vrijedi $0 + 0 = 0$. Dakle, imamo

$$0 \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x).$$

Iz leme 1.0.17 slijedi da je $0 \cdot x = 0$. Analogno dobivamo $x \cdot 0 = 0$. □

Definicija 1.0.19. *Za prsten* $(P, +, \cdot)$ *kažemo da je netrivijalan ako skup* P *ima barem dva elementa.*

Napomena 1.0.20. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *prsten s jedinicom. Tada je* $(P, +, \cdot)$ *netrivijalni prsten ako i samo ako je* $0 \neq 1$*.*

Naime, ako je $0 \neq 1$, onda je prsten $(P, +, \cdot)$ očito netrivijalni. Obratno, ako je $0 = 1$, onda za svaki $x \in P$ vrijedi

$$x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

tj. $x = 0$ pa je prsten $(P, +, \cdot)$ trivijalan.

Definicija 1.0.21. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *netrivijalan komutativni prsten s jedinicom takav da za svaki* $x \in P$ *za koji je* $x \neq 0$ *postoji* $y \in P$ *takav da je* $x \cdot y = 1$ *i* $y \cdot x = 1$*. Tada za* $(P, +, \cdot)$ *kažemo da je polje.*

Definicija 1.0.22. *Neka je* S *skup te neka je* $\rho \subseteq S \times S$*. Tada za* ρ *kažemo da je binarna relacija na skupu* S*. Za* $x, y \in S$ *umjesto* $(x, y) \in \rho$ *pišemo i* $x\rho y$*.*

Definicija 1.0.23. *Neka je* ρ *binarna relacija na skupu* S*.*
Za ρ *kažemo da refleksivna na* S *ako za svaki* $x \in S$ *vrijedi* $x\rho x$*.*
Za ρ *kažemo da simetrična na* S *ako za sve* $x, y \in S$ *iz* $x\rho y$ *slijedi* $y\rho x$*.*
Za ρ *kažemo da antisimetrična na* S *ako za sve* $x, y \in S$ *iz* $x\rho y$ *i* $y\rho x$ *slijedi* $x = y$*.*
Za ρ *kažemo da tranzitivna na* S *ako za sve* $x, y, z \in S$ *iz* $x\rho y$ *i* $y\rho z$ *slijedi* $x\rho z$*.*

Definicija 1.0.24. *Neka je ρ binarna relacija na skupu S. Ako je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna na skupu S, onda za ρ kažemo da je relacija ekvivalencije na skupu S.*

Definicija 1.0.25. *Neka je ρ binarna relacija na skupu S. Ako je ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna na skupu S, onda za ρ kažemo da je parcijalni uređaj na skupu S.*

Definicija 1.0.26. *Neka je ρ parcijalni uređaj na skupu S takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi $x\rho y$ ili $y\rho x$.Tada za ρ kažemo da je uređaj na skupu S.*

Definicija 1.0.27. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $\leq$ uređaj na skupu P takav da za sve $x, y, z \in P$ vrijede sljedeće implikacije:*

(1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(2) $0 \leq x$ *i* $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$

Tada za uređenu četvorku $(P, +, \cdot, \leq)$ kažemo da je uređeni prsten.

Definicija 1.0.28. *Za uređeni prsten $(P, +, \cdot, \leq\ )$ takav da je $(P, +, \cdot)$ polje kažemo da je uređeno polje.*

Definicija 1.0.29. *Neka je $\leq$ uređaj na skupu S. Tada za uređeni par $(S, \leq)$ kažemo da je uređeni skup.*

Definicija 1.0.30. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*
Ako su A i B neprazni podskupovi od S takvi da je $a \leq b$ za svaki $a \in A$ i $b \in B$, onda postoji $c \in S$ takav da je $a \leq c$ za svaki $a \in A$ i $c \leq b$ za svaki $b \in B$.
Tada za $(S, \leq)$ kažemo da je potpuno uređen skup.

Definicija 1.0.31. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq\ )$ uređeno polje takvo da je $(P, \leq\ )$ potpuno uređen skup. Tada za $(P, +, \cdot, \leq\ )$ kažemo da je potpuno uređeno polje ili polje realnih brojeva.*

Definicija 1.0.32. *Pretpostavimo da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ jedno zadano polje realnih brojeva. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S induktivan skup ako je $1 \in S$ te ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x + 1 \in S$. Uočimo da je $\mathbb{R}$ induktivan skup.*

Definicija 1.0.33. *Definiramo skup $\mathbb{N}$ kao presjek svih induktivnih skupova u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Dakle, $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in S$ za svaki induktivan skup $S\}$. Za $\mathbb{N}$ kažemo da je skup prirodnih brojeva.*

Napomena 1.0.34. $\mathbb{N}$ *induktivan skup.*

Naime, $1 \in \mathbb{N}$ jer je $1 \in S$ za svaki induktivan skup S. Ako je $x \in \mathbb{N}$, onda je $x \in S$ za svaki induktivan skup S pa je $x + 1 \in S$ za svaki induktivan skup S. Dakle, $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.0.35. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi sljedeće:*

(1) $1 \in S$

(2) Ako je $x \in S$, onda je $x + 1 \in S$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Dokaz. Skup S je induktivan zbog svojstava *(1)* i *(2)*. Iz definicije skupa $\mathbb{N}$ slijedi da je $\mathbb{N} \subseteq S$, a uz $S \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi da je $S = \mathbb{N}$ čime je tvrdnja dokazana. □

Napomena 1.0.36. *Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten, onda za $x \in P$ sa $-x$ označavamo inverzni element od x u grupi $(P, +)$. Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom te ako s ima inverzni element u monoidu $(P, \cdot)$, onda ga označavamo sa x^{-1}.*

Propozicija 1.0.37. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka su $x, y \in P$. Tada vrijedi:*

(i) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

(ii) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Dokaz. *(i)* Uočimo da iz činjenice da je $(P, +, \cdot)$ prsten slijedi:

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Dakle, $(-x) \cdot y + x \cdot y = 0$. Dodavanjem izraza $-(x \cdot y)$ objema stranama jednakosti te primjenom svojstva asocijativnosti, postojanja neutrala i inverza u $(P, +)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
[(-x) \cdot y + x \cdot y] + [-(x \cdot y)] &= 0 + [-(x \cdot y)] \\
(-x) \cdot y + \{x \cdot y + [-(x \cdot y)]\} &= -(x \cdot y) \\
(-x) \cdot y + 0 &= -(x \cdot y) \\
(-x) \cdot y &= -(x \cdot y).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju *(i)*. Tvrdnju *(ii)* dokazujemo analogno kao i tvrdnju *(i)*.

(iii) Uočimo da općenito vrijedi sljedeće: ako je $(S, \circ)$ monoid te ako su $a, b \in S$ takvi da je b inverzni element od a, onda je a inverzni element od b. Stoga, za svaki $z \in P$ vrijedi da je z inverzni element od $-z$, tj. $-(-z) = z$.
Koristeći tvrdnje *(i)* i *(ii)* te opisanu činjenicu, dobivamo

$$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y,$$

odnosno $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, čime je tvrdnja *(iii)* dokazana. □

Propozicija 1.0.38. *U uređenoj četvorci* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *vrijedi* $0 \leq 1$.

Dokaz. Budući da je $\leq$ uređaj na $\mathbb{R}$, vrijedi $0 \leq 1$ ili $1 \leq 0$. Pretpostavimo da je $1 \leq 0$. Tada je $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$ primjenom tvrdnje *(1)* definicije uređenog prstena, tj. $0 \leq -1$. Također, iz iste definicije, primjenom tvrdnje *(2)* imamo $0 \leq (-1) \cdot (-1)$. No, kako je $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$ po tvrdnji (iii) propozicije 1.0.37, imamo $0 \leq 1$ što zajedno s pretpostavkom $1 \leq 0$ daje $0 = 1$. To je nemoguće jer je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ netrivijalan prsten. Dakle, $0 \leq 1$. □

Propozicija 1.0.39. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $1 \leq n$.

Dokaz. Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n\}$. Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$. Nadalje, vrijedi $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada je $n \in \mathbb{N}$ i $1 \leq n$. Prema propoziciji 1.0.38 vrijedi $0 \leq 1$, pa je $n + 0 \leq n + 1$, tj. $n \leq n + 1$. Primjenom svojstva tranzitivnosti relacije $\leq$ iz $1 \leq n$ i $n \leq n + 1$ slijedi da je $1 \leq n + 1$.
Budući da je $n \in \mathbb{N}$ te da je $\mathbb{N}$ induktivan skup, vrijedi da je $n + 1 \in \mathbb{N}$. Prema tome, $n + 1 \in S$ te prema propoziciji 1.0.35 slijedi da je $S = \mathbb{N}$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \in S$, tj. $1 \leq n$. □

Napomena 1.0.40. *Uočimo da iz prethodne propozicije slijedi da* $0 \notin \mathbb{N}$. *Naime, u suprotnom bi vrijedilo* $1 \leq 0$*, što bi zajedno s propozicijom 1.0.38 povlačilo da je* $0 = 1$ *što je nemoguće.*

Definicija 1.0.41. *Neka je* $\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Za* $\mathbb{Z}$ *kažemo da je skup cijelih brojeva u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Definicija 1.0.42. *Neka je* $\mathbb{Q} = \left\{m \cdot n^{-1} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. *Za* $\mathbb{Q}$ *kažemo da je skup racionalnih brojeva u* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Poglavlje 2

Skup prirodnih brojeva

Želimo dokazati da postoji jedno potpuno uređeno polje, tj. polje realnih brojeva. Pri tome ćemo pretpostaviti da postoje "*prirodni brojevi*", tj. da postoje skup $\mathbb{N}$, funkcija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $1 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi sljedeće:

1) π je injekcija

2) $\pi(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \backslash \{1\}$

3) Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $1 \in S$ te da za svaki $x \in S$ vrijedi $\pi(x) \in S$, onda je $S = \mathbb{N}$.

Ako su S i T skupovi, onda je funkcija sa S u T zapravo relacija $f \subseteq S \times T$ između skupova S i T koja ima svojstvo da za svaki $x \in S$ postoji jedinstveni $y \in T$ takav da je $(x, y) \in f$. Naravno, pišemo $f : S \to T$, a za $x \in S$ sa $f(x)$ označavamo $y \in T$ takav da je $(x, y) \in f$.

Teorem 2.0.1. *Neka je A skup, $g : A \to A$ funkcija te $a \in A$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{N} \to A$ takva da je $f(1) = a$ i $f(\pi(x)) = g(f(x))$ za svaki $x \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je Ω skup svih $\rho \subseteq \mathbb{N} \times A$ takvih da je $(1, a) \in \rho$ te da ako je $(x, y) \in \rho$, onda je $(\pi(x), g(y)) \in \rho$. Primijetimo da je $\mathbb{N} \times A \in \Omega$. Neka je

$$f = \bigcap_{\rho \in \omega} \rho.$$

Tvrdimo da je $f \in \Omega$.

Očito vrijedi $f \subseteq \mathbb{N} \times A$ i $(1, a) \in f$. Pretpostavimo da je $(x, y) \in f$. Tada je $(x, y) \in \rho$ za svaki $\rho \in \Omega$ pa je stoga i $(\pi(x), g(y)) \in \rho$ za svaki $\rho \in \Omega$. Prema tome $(\pi(x), g(y)) \in f$. Dakle, $f \in \Omega$.

Dokažimo da je f funkcija između $\mathbb{N}$ i A. Neka je $\rho = \{(1, a)\} \cup ((\mathbb{N}\backslash\{1\}) \times A)$. Očito vrijedi $\rho \subseteq \mathbb{N} \times A$ i $(1, a) \in \rho$. Pretpostavimo da je $(x, y) \in \rho$. Vrijedi $\pi(x) \neq 1$ pa je $\pi(x) \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ iz čega slijedi da je $(\pi(x), g(y)) \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \times A$, a to povlači da je $(\pi(x), g(y)) \in \rho$. Dakle, $\rho \in \Omega$.

Iz defincije funkcije f slijedi $f \subseteq \rho$. Pretpostavimo da je $y \in A$ takav da je $(1, y) \in f$. Slijedi $(1, y) \in \rho$, pa je $(1, y) = (1, a)$, tj. $y = a$. Prema tome postoji jedinstveni $y \in A$ takav da je $(1, y) \in f$.

Neka je

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists!\, y \in A \textit{ takav da } (x, y) \in f\}.$$

Dokazali smo da je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Želimo dokazati da je $\pi(x) \in S$. Budući da je $x \in S$, postoji jedinstveni $y \in A$ takav da je $(x, y) \in f$. Znamo da je $f \in \Omega$ pa slijedi $(\pi(x), g(y)) \in f$. Ostaje još dokazati da ne postoji $b \in A$ takav da je $b \neq g(y)$ i $(\pi(x), b) \in f$. U tu svrhu definiramo:

$$\rho = (\{(\pi(x), g(y))\} \cup (\mathbb{N}\backslash\{\pi(x)\} \times A)) \cap f$$

Očito, $\rho \subseteq \mathbb{N} \times A$ i $(1, a) \in \rho$. Pretpostavimo da je $(x', y') \in \rho$. Tada je $(x', y') \in f$ pa je $(\pi(x'), g(y')) \in f$. Pretpostavimo da je $x' \neq x$. Tada je $\pi(x') \neq \pi(x)$ (jer je π injekcija) pa je $(\pi(x'), g(y')) \in \rho$. Ako je $x' = x$, onda je $(x, y') \in f$ i $(x, y) \in f$ pa je $y' = y$. Slijedi $(\pi(x'), g(y')) = (\pi(x), g(y)) \in \rho$. U svakom slučaju, $(\pi(x'), g(y')) \in \rho$. Time smo dokazali da je $\rho \in \Omega$. Slijedi $f \subseteq \rho$ pa je

$$f \subseteq \{(\pi(x), g(y))\} \cup (\mathbb{N}\backslash\{\pi(x)\} \times A). \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da je $b \in A$ takav da je $(\pi(x), b) \in f$. Iz (2.1) slijedi da je $b = g(y)$. Dakle, postoji jedinstveni $b \in A$ takav da je $(\pi(x), b) \in f$. To znači da je $\pi(x) \in S$. Prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$. To povlači da za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $y \in A$ takav da je $(x, y) \in f$. Prema tome f je funkcija sa $\mathbb{N}$ u A. Iz $(1, a) \in f$ slijedi $f(1) = a$. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Neka je $y = f(x)$. Tada je $(x, y) \in f$ pa je $(\pi(x), g(y)) \in f$ (jer je $f \in \Omega$). Dakle, $f(\pi(x)) = g(y)$, tj. $f(\pi(x)) = g(f(x))$. Time je tvrdnja teorema dokazana.

□

2.1 Zbrajanje na skupu prirodnih brojeva

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jedinstvena funkcija sa sljedećim svojstvima:

$$s_n(1) = \pi(n) \tag{2.2}$$

$$s_n(\pi(x)) = \pi(s_n(x)). \tag{2.3}$$

Prema teoremu 2.0.1 takva funkcija uistinu postoji (za $A = \mathbb{N}$, $g = \pi$ i $a = \pi(n)$).

Definiramo funkciju $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $+(x, y) = s_x(y)$. Umjesto $+(x, y)$ pišemo $x + y$. Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$x + 1 = s_x(1) = \pi(x)$$

$$x + \pi(y) = s_x(\pi(y)) = \pi(s_x(y)) = \pi(x + y),$$

odnosno

$$x + 1 = \pi(x) \tag{2.4}$$

$$x + \pi(y) = \pi(x + y). \tag{2.5}$$

Propozicija 2.1.1. *Binarna operacija + je asocijativna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{z \in \mathbb{N} \mid (x + y) + z = x + (y + z)\}$.
Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Imamo

$$(x + y) + 1 = \pi(x + y) = x + \pi(y) = x + (y + 1).$$

Dakle, $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$.Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}(x + y) + \pi(z) &= \pi((x + y) + z) \\ &= \pi(x + (y + z)) \\ &= x + \pi(y + z) \\ &= x + (y + \pi(z)).\end{aligned}$$

Prema tome, $\pi(z) \in S$ pa prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 2.1.2. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x + 1 = 1 + x$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 1 + x\}$. Očito je $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\pi(x) + 1 &= (x + 1) + 1 \\ &= (1 + x) + 1 \\ &= 1 + (x + 1) \\ &= 1 + \pi(x),\end{aligned}$$

pa je $\pi(x) \in S$. Prema principu indukcije zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.1.3. *Binarna operacija + je komutativna.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y = y + x\}$. Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Prema lemi 2.1.2 vrijedi $1 \in S$. Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} x + \pi(y) &= \pi(x + y) = \pi(y + x) = y + \pi(x) \\ &= y + (x + 1) = y + (1 + x) = (y + 1) + x = \pi(y) + x. \end{aligned}$$

Dakle, $\pi(y) \in S$ pa prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Napomena 2.1.4. *Neka je $*$ asocijativna i komutativna binarna operacija na skupu G. Neka su $a, b, c, d \in G$. Tada je*

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d). \tag{2.6}$$

Naime,vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} (a * b) * (c * d) &= a * (b * (c * d)) \\ &= a * ((b * c) * d) \\ &= a * ((c * b) * d) \\ &= a * (c * (b * d)) \\ &= (a * c) * (b * d). \end{aligned}$$

Posebno, za sve $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d). \tag{2.7}$$

2.2 Množenje na skupu prirodnih brojeva

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g_n(u) = u + n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema principu definicije indukcijom postoji jedinstvena funkcija $p_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $p_n(1) = n$ i $p_n(\pi(x)) = g_n(p_n(x))$.

Definiramo funkciju $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $\cdot(x, y) = p_x(y)$. Umjesto $\cdot(x, y)$ pišemo $x \cdot y$. Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$x \cdot 1 = p_x(1) = x$$

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot \pi(y) = p_x(\pi(y)) = g_x(p_x(y)) = g_x(x \cdot y) = x \cdot y + x,$$

odnosno

$$x \cdot 1 = x \tag{2.8}$$

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x. \tag{2.9}$$

Napomena 2.2.1. *U buduće ćemo smatrati da operacija $\cdot$ ima "veći prioritet" od operacije $+$, tj. ako su $a, b, c \in \mathbb{N}$, onda ćemo pod izrazom $a + b \cdot c$ podrazumijevati $a + (b \cdot c)$ te pod izrazom $a \cdot b + c$ podrazumijevati $(a \cdot b) + c$. Tako će npr. za $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ izraz $x \cdot y + z \cdot w$ značiti $(x \cdot y) + (z \cdot w)$.*

Propozicija 2.2.2. *Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{z \in \mathbb{N} \mid x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\}$.
Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Vrijedi

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x = x \cdot y + x \cdot 1$$

pa je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$. Tada je

$$\begin{aligned} x \cdot (y + (z + 1)) &= x \cdot ((y + z) + 1) \\ &= x \cdot (y + z) + x \\ &= (x \cdot y + x \cdot z) + x \\ &= x \cdot y + (x \cdot z + x) \\ &= x \cdot y + x \cdot (z + 1). \end{aligned}$$

Dakle, $x \cdot (y + (z + 1)) = x \cdot y + x \cdot (z + 1)$, pa je $z + 1 \in S$.
Prema principu indukcije slijedi da je $S = \mathbb{N}$ čime je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Propozicija 2.2.3. *Binarna operacija $\cdot$ je asocijativna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{z \in \mathbb{N} \mid (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\}$.
Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Budući da je

$$(x \cdot y) \cdot 1 = x \cdot y = x \cdot (y \cdot 1),$$

vrijedi $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$. Tada imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot (z + 1) &= (x \cdot y) \cdot z + (x \cdot y) \\ &= x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y \\ &= x \cdot (y \cdot z + y) \\ &= x \cdot (y \cdot (z + 1)). \end{aligned}$$

Dakle, $(x \cdot y) \cdot (z + 1) = x \cdot (y \cdot (z + 1))$, pa je $z + 1 \in S$.
Prema principu indukcije slijedi da je $S = \mathbb{N}$ pa je time tvrdnja ove propozicije dokazana.
□

Propozicija 2.2.4. *Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.*

Dokaz. Neka su $y, z \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x\}$.
Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Budući da je

$$(y + z) \cdot 1 = y + z = y \cdot 1 + z \cdot 1,$$

vrijedi $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}(y + z) \cdot (x + 1) &= (y + z) \cdot x + (y + z)\\ &= (y \cdot x + z \cdot x) + (y + z)\\ &= (y \cdot x + y) + (z \cdot x + z)\\ &= y \cdot (x + 1) + z \cdot (x + 1).\end{aligned}$$

Dakle, $(y + z) \cdot (x + 1) = y \cdot (x + 1) + z \cdot (x + 1)$, pa je $x + 1 \in S$.
Prema principu indukcije slijedi da je $S = \mathbb{N}$ i time je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Lema 2.2.5. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \cdot x = x$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot x = x\}$. Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$.
Očito je $1 \in S$ jer je $1 \cdot 1 = 1$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je

$$1 \cdot (x + 1) = 1 \cdot x + 1 = x + 1.$$

Dakle, $1 \cdot (x + 1) = x + 1$, pa je $x + 1 \in S$.
Prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$ pa je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.2.6. *Binarna operacija $\cdot$ je komutativna.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y = y \cdot x\}$.
Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Vrijedi $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ pa je $1 \in S$.
Pretpostavimo da je $y \in S$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}x \cdot (y + 1) &= x \cdot y + x\\ &= y \cdot x + x\\ &= y \cdot x + 1 \cdot x\\ &= (y + 1) \cdot x.\end{aligned}$$

Dakle, $x \cdot (y + 1) = (y + 1) \cdot x$ pa je $x + 1 \in S$.
Prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

2.3 Uređaj na skupu prirodnih brojeva

Definirajmo binarnu relaciju $<$ na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$x < y \text{ ako postoji } k \in \mathbb{N} \text{ takav da vrijedi } y = x + k.$$

Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x < x+1$. Ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da ne vrijedi $x < y$, onda pišemo $x \not< y$.

Propozicija 2.3.1. *Binarna relacija $<$ je tranzitivna na $\mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$ i $y < z$. Prema pretpostavci, postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $y = x + k$ i $z = y + l$. Iz toga slijedi da je

$$z = (x + k) + l = x + (k + l)$$

pa je $x < z$. Time smo dokazali tvrdnju ove propozicije. □

Propozicija 2.3.2. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x < y$. Tada je $x + z < y + z$.*

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x + k$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} y + z &= (x + k) + z \\ &= x + (k + z) \\ &= x + (z + k) \\ &= (x + z) + k. \end{aligned}$$

Dakle, $y + z = (x + z) + k$ pa je $x + z < y + z$.
Time je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Lema 2.3.3. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \neq 1$ vrijedi $1 < x$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \text{ ili } 1 < x\}$. Želimo $S = \mathbb{N}$.
Očito je da vrijedi $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je $x = 1$ ili $1 < x$.
Znamo da je $x < x + 1$. Ako je $x = 1$, onda je očito $1 < x + 1$, a ako je $1 < x$, onda iz propozicije 2.3.1 slijedi da je $1 < x+1$. U svakom slučaju vrijedi $1 < x+1$ pa je $x+1 \in S$.
Dakle, vrijedi $S = \mathbb{N}$ prema principu indukcije. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.3.4. *Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da je $x \neq y$ vrijedi $x < y$ ili $y < x$.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{Za svaki } y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } y \neq x \text{ vrijedi } y < x \text{ ili } x < y\}$.
Prema lemi 2.3.3 vrijedi $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}$. Želimo dokazati da je $x+1 \in S$.
Neka je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y \neq x + 1$.

Promotrimo prvo slučaj kada je $y = x$. Zbog $x < x + 1$ vrijedi $y < x + 1$.

Pretpostavimo sada slučaj kada je $y \neq x$. Zbog $x \in S$ tada vrijedi $y < x$ ili $x < y$. Ako je $y < x$, onda zbog propozicije 2.3.1 vrijedi $y < x + 1$. Ako je $x < y$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x + k$. Uočimo da, zbog pretpostavke $y \neq x + 1$, vrijedi da je $k \neq 1$. Iz leme 2.3.3 slijedi $1 < k$. Također, iz propozicije 2.3.2 slijedi $x + 1 < x + k$, tj. $x + 1 < y$. Iz ovoga zaključujemo da je $x + 1 \in S$. Stoga, prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$ i time je propozicija dokazana. $\square$

Propozicija 2.3.5. *Za sve $x, k \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \neq x + k$.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x + k\}$.

Tvrdimo da je $1 \in S$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $1 = 1+k$. No $1+k = k+1 = \pi(k)$, pa je $1 = \pi(k)$. To je nemoguće jer je $\pi(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus 1$. Prema tome $1 \in S$.

Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je $x \neq x + k$. Budući da je π injekcija, vrijedi $\pi(x) \neq \pi(x + k)$, tj. $x+1 \neq (x + k) + 1$. No, $(x+k)+1 = (x+1)+k$ pa je $x+1 \neq (x + 1) + k$. Prema tome, imamo $x + 1 \in S$ te prema principu indukcije vrijedi da je $S = \mathbb{N}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Korolar 2.3.6. *Neka je $x \in \mathbb{N}$. Tada ne vrijedi $x < x$.*

Definirajmo binarnu relaciju $\leq$ na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$x \leq y \text{ ako je } x < y \text{ ili } x = y.$$

Ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da ne vrijedi $x \leq y$, onda pišemo $x \nleq y$.

Propozicija 2.3.7. *Binarna relacija $\leq$ je uređaj na $\mathbb{N}$.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $x \leq x$. Prema tome relacija $\leq$ je refleksivna na $\mathbb{N}$.

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$. Tvrdimo da je $x = y$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x \neq y$. Tada vrijedi $x < y$ i $y < x$ pa prema propoziciji 2.3.1 slijedi $x < x$. No, prema korolaru 2.3.6 to je nemoguće. Dakle, $x = y$. Time smo dokazali da je binarna relacija $\leq$ antisimetrična na $\mathbb{N}$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$. Želimo dokazati $x \leq z$. Možemo pretpostaviti da je $x \neq y$ i $y \neq z$ (ako je $x = y$ ili $y = z$ onda je očito $x \leq z$). Tada je $x < y$ i $y < z$ pa prema propoziciji 2.3.1 vrijedi $x < z$. Iz toga slijedi da je $x \leq z$. Time smo dokazali da je binarna relacija $\leq$ tranzitivna pa je i parcijalni uređaj na $\mathbb{N}$.

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$x \leq y \text{ ili } y \leq x. \tag{2.10}$$

Ako je $x = y$, onda (2.10) očito vrijedi. Ako je $x \neq y$, onda prema propoziciji 2.3.4 vrijedi $x < y$ ili $y < x$ pa zbog toga vrijedi i (2.10). Time smo dokazali da je $\leq$ uređaj na $\mathbb{N}$. □

Napomena 2.3.8. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da $x \nleq y$. Tada je $y < x$.*

Iz $x \nleq y$ slijedi $x \nless y$ i $x \neq y$. Prema propoziciji 2.3.4 slijedi da je $x < y$ ili $y < x$. Stoga je $y < x$. Obratno, pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $y < x$. Tada je $x \nless y$ i $x \neq y$ jer bi u protivnome iz propozicije 2.3.1 slijedilo $x < x$ što je nemoguće. Prema tome, vrijedi $x \nleq y$.

Iz propozicije 2.3.2 direktno dobivamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.3.9. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$. Tada za svaki $z \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$x + z \leq y + z.$$

Propozicija 2.3.10. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$.*

(1) Pretpostavimo da je $x + z < y + z$. Tada je $x < y$.

(2) Pretpostavimo da je $x + z \leq y + z$. Tada je $x \leq y$.

Dokaz. *(1)* Pretpostavimo da $x \nless y$. Tada iz napomene 2.3.8 slijedi da je $y \leq x$, a nadalje primjenom propozicije 2.3.9 dobivamo $x + z \leq y + z$ što je u kontradikciji s pretpostavkom te tvrdnje. Dakle, $x < y$.

(2) Pretpostavimo suprotno. Tada je, prema napomeni 2.3.8, $y < x$. Nadalje, prema propoziciji 2.3.2 slijedi da je $y + z < x + z$ što je kontradikciji s pretpostavkom propozicije. Time je ova tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.3.11. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x + z = y + z$. Tada je $x = y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \neq y$. Tada je prema propoziciji 2.3.4 $x < y$ ili $y < x$.
Ako je $x < y$, onda je prema propoziciji 2.3.2 $x + z < y + z$. No, to je nemoguće jer vrijedi $x + z = y + z$. Ako je $y < x$, onda je $y + z < x + z$ što je također nemoguće. Dakle, $x = y$. □

Propozicija 2.3.12. *Neka su $x, y, u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $u \leq v$. Tada je $x + u \leq y + v$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.3.9 imamo $x + u \leq y + u$. Također vrijedi i $y + u \leq y + v$.
Zbog tranzitivnosti uređaja $\leq$ na skupu $\mathbb{N}$ slijedi $x + u \leq y + v$. Time je tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 3

Skup cijelih brojeva

3.1 Definicija skupa cijelih brojeva

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Za $x \in S$ definiramo

$$[x] = \{y \in S \mid y \sim x\}.$$

Za $[x]$ kažemo da je klasa ekvivalencije elementa x pri relaciji $\sim$.

Uočimo da je $x \in [x]$ za svaki $x \in S$. Nadalje, ako su $x, y \in S$, onda

$$x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y].$$

Naime, ako je $[x] = [y]$, onda zbog $y \in [y]$ imamo $y \in [x]$ pa je $y \sim x$. Obratno, pretpostavimo da je $x \sim y$. Neka je $z \in [x]$. Tada je $z \sim x$ što zajedno s $x \sim y$ daje $z \sim y$, tj. $z \in [y]$. Prema tome, imamo $[x] \subseteq [y]$. Analogno dobivamo $[y] \subseteq [x]$ pa zaključujemo da je $[x] = [y]$. Dakle, vrijedi $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$.

Pretpostavimo da su $x, y \in S$ takvi da $x \nsim y$. Tada je $[x] \cap [y] = \emptyset$. U suprotnome, postojao bi z takav da je $z \in [x]$ i $z \in [y]$ pa bi vrijedilo $z \sim x$ i $z \sim y$, tj. $x \sim z$ i $z \sim y$ pa bismo imali $x \sim y$.

Skup svih klasa ekvivalencije pri relaciji $\sim$ na skupu S nazivamo kvocijentni skup pri relaciji $\sim$ i označavamo ga sa $S/_{\sim}$. Dakle,

$$S/_{\sim} = \{\, [x] \mid x \in S\}.$$

Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirajmo binarnu relaciju $\sim$ na sljedeći način:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ako je } a + d = c + b.$$

Tvrdimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Relacija $\sim$ očito je refleksivna i simetrična na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ takvi da je $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$. Tada je

$$a + d = c + b \quad \text{i} \quad c + f = e + d.$$

Zbog komutativnosti operacije $+$ vrijedi $d + a = b + c$, što zajedno sa $c + f = e + d$ daje

$$(d + a) + (c + f) = (b + c) + (e + d).$$

Prema napomeni 2.1.4 vrijedi $(d + c) + (a + f) = (b + e) + (c + d)$, tj.

$$(a + f) + (c + d) = (e + b) + (c + d).$$

Prema propoziciji 2.3.11 vrijedi $a + f = e + b$. Time smo pokazali da je relacija $\sim$ tranzitivna. Zaključujemo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Kvocijentni skup pri relaciji $\sim$ označavamo sa $\mathbb{Z}$. Dakle,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}.$$

Ako su $x, y \in \mathbb{N}$, onda ćemo sa $[(x, y)]$ označavati klasu elementa (x, y) pri relaciji $\sim$. Dakle,

$$\mathbb{Z} = \{ [(x, y)] \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

3.2 Zbrajanje na skupu cijelih brojeva

Na $\mathbb{Z}$ definiramo operaciju $+$ na sljedeći način:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)], \text{ za sve } a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo prvo da je ova operacija dobro definirana. Neka su $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{N}$ takvi da je $(a, b) \sim (a', b')$ i $(c, d) \sim (c', d')$. Želimo pokazati da je

$$[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')], \text{ tj.}$$

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d').$$

Imamo $a + b' = a' + b$ i $c + d' = c' + d$ pa je

$$(a + b') + (c + d') = (a' + b) + (c' + d).$$

Iz napomene 2.1.4 slijedi $(a+c, b+d) \sim (a'+c', b'+d')$, tj. vrijedi

$$[(a+c, b+d)] = \left[(a'+c', b'+d')\right].$$

Dakle, operacija + je dobro definirana.

Propozicija 3.2.1. *Uređeni par* $(\mathbb{Z}, +)$ *je Abelova grupa.*

Dokaz. *i*) Dokažimo da je operacija + asocijativna. Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\begin{aligned}([(a,b)] + [(c,d)]) + \left[(e,f)\right] &= [(a+c, b+d)] + \left[(e,f)\right] \\ &= \left[((a+c)+e, (b+d)+f)\right].\end{aligned}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned}[(a,b)] + ([(c,d)] + \left[(e,f)\right]) &= [(a,b)] + \left[(c+e, d+f)\right] \\ &= \left[(a+(c+e), b+(d+f))\right].\end{aligned}$$

pa iz činjenice da je operacija + asocijativna na $\mathbb{N}$ slijedi

$$([(a,b)] + [(c,d)]) + \left[(e,f)\right] = [(a,b)] + ([(c,d)] + \left[(e,f)\right]).$$

Time smo dokazali da je operacija + na $\mathbb{Z}$ asocijativna.

ii) Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Tada je:

$$\begin{aligned}[(a,b)] + [(c,d)] &= [(a+c, b+d)] \\ &= [(c+a, d+b)] \\ &= [(c,d)] + [(a,b)].\end{aligned}$$

Budući da je $[(a,b)] + [(c,d)] = [(c,d)] + [(a,b)]$, operacija + je komutativna na $\mathbb{Z}$.

iii) Označimo $0 = [(1,1)]$. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\left[(x,y)\right] + 0 = \left[(x,y)\right] + [(1,1)] = \left[(x+1, y+1)\right] = \left[(x,y)\right]$$

jer je $(x+1, y+1) \sim (x,y)$. Dakle, vrijedi $a + 0 = a$ za svaki $a \in \mathbb{Z}$. Budući da je operacija + komutativna, vrijedi i $0+a = a$. Prema tome, 0 je neutralni element za operaciju +.

iv) Neka je $a \in \mathbb{Z}$. Tada je $a = \left[(x,y)\right]$ za neke $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $b = \left[(y,x)\right]$. Vrijedi

$$a + b = \left[(x,y)\right] + \left[(y,x)\right] = \left[(x+y, y+x)\right] = \left[(x+y, x+y)\right] = [(1,1)]$$

jer je očito $(x+y, x+y) \sim (1,1)$. Prema tome $a + b = 0$ i $b + a = 0$.
Time smo dokazali da je $(\mathbb{Z}, +)$ grupa. $\square$

3.3 Množenje na skupu cijelih brojeva

Na $\mathbb{Z}$ definiramo binarnu operaciju $\cdot$ na sljedeći način:

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]\,, \text{ za sve } a,b,c,d \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Dokažimo da je operacija $\cdot$ dobro definirana. Neka su $a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{N}$ takvi da je $(a,b) \sim (a',b')$ i $(c,d) \sim (c',d')$. Želimo pokazati da je

$$[(ac+bd, ad+bc)] = \left[(a'c'+b'd', a'd'+b'c')\right],$$

odnosno, da je

$$(ac+bd, ad+bc) \sim (a'c'+b'd', a'd'+b'c'). \tag{3.2}$$

Dokažimo da je

$$(ac+bd, ad+bc) \sim (a'c+b'd, a'd+b'c). \tag{3.3}$$

i

$$(a'c+b'd, a'd+b'c) \sim (a'c'+b'd', a'd'+b'c'). \tag{3.4}$$

Tada će zbog tranzitivnosti relacije $\sim$ iz (3.3) i (3.4) slijediti (3.2).

Tvrdnja (3.3) ekvivalentna je s

$$(ac+bd)+(a'd+b'c) = (ad+bc)+(a'c+b'd),$$

a ovo je ekvivalentno sa

$$(a+b')c+(b+a')d = (a+b')d+(b+a')c.$$

Ova jednakost očito vrijedi jer je $a+b' = a'+b$. Dakle, (3.3) vrijedi.

Tvrdnja (3.4) ekvivalentna je s

$$(a'c+b'd)+(a'd'+b'c') = (a'c'+b'd')+(a'd+b'c),$$

a to je ekvivalentno sa

$$a'(c+d')+b'(d+c') = a'(c'+d)+b'(d'+c).$$

Ova jednakost očito vrijedi jer je $c+d' = c'+d$. Dakle, (3.4) vrijedi.
Time smo dokazali da je operacija $\cdot$ dobro definirana.

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada po definiciji binarne operacije $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ vrijedi

$$[(c, d)] \cdot [(a, b)] = [(ca + db, cb + da)]$$

pa iz (3.1) slijedi da je

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(c, d)] \cdot [(a, b)]\,.$$

Prema tome, binarna operacija $\cdot$ na skupu $\mathbb{Z}$ je komutativna.

Napomena 3.3.1. *Neka je $\star$ binarna operacija na skupu G. Ako su $x, y, z \in G$, onda ćemo pod $x \star y \star z$ podrazumijevati $(x \star y) \star z$. Uočimo da ako je $\star$ asocijativna binarna operacija vrijedi*

$$x \star y \star z = x \star (y \star z).$$

Nadalje, ako su $x, y, z, w \in G$, onda ćemo pod $x \star y \star z \star w$ podrazumijevati $(x \star y \star z) \star w$. Uočimo da ako je $\star$ asocijativna, onda vrijedi

$$x \star y \star z \star w = (x \star y) \star (z \star w).$$

Propozicija 3.3.2. *Binarna operacija $\cdot$ na skupu $\mathbb{Z}$ je asocijativna.*

Dokaz. Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
([(a, b)] \cdot [(c, d)]) \cdot [(e, f)] &= [(ac + bd, ad + bc)] \cdot [(e, f)] \\
&= [((ac + bd) \cdot e + (ad + bc) \cdot f, (ac + bd) \cdot f + (ad + bc) \cdot e)] \\
&= [(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)]\,.
\end{aligned}$$

S druge strane vrijedi da je

$$\begin{aligned}
[(a, b)] \cdot ([(c, d)] \cdot [(e, f)]) &= [(a, b)] \cdot [(ce + df, cf + de)] \\
&= [(a \cdot (ce + df) + b \cdot (cf + de), a \cdot (cf + de) + b \cdot (ce + df))] \\
&= [(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)]\,.
\end{aligned}$$

Očito je da vrijedi

$$([(a, b)] \cdot [(c, d)]) \cdot [(e, f)] = [(a, b)] \cdot ([(c, d)] \cdot [(e, f)]).$$

Time je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Ako su $x, y, k \in \mathbb{N}$, tada vrijedi

$$[(x, y)] = [(x + k, y + k)]\,.$$

Naime, trivijalno je provjeriti da je $(x, y) \sim (x + k, y + k)$. Neka je $2 = 1 + 1$. Zbog distributivnosti množenja i zbrajanja u skupu $\mathbb{N}$ vrijedi $2x = x + x$ za svaki $x \in \mathbb{N}$.

Propozicija 3.3.3. *Binarna operacija $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ ima neutralan element.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}[(2,1)] \cdot [(a,b)] &= [(2a+b, 2b+a)] \\ &= [(a+(a+b), b+(a+b))] \\ &= [(a,b)]\,.\end{aligned}$$

Također, vrijedi $[(a,b)] \cdot [(2,1)] = [(a,b)]$. Dakle, $[(2,1)]$ je neutralan element za operaciju $\cdot$ na skupu $\mathbb{Z}$. □

Propozicija 3.3.4. *Za sve $x, y, z \in \mathbb{Z}$ vrijedi $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

Dokaz. Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}[(a,b)] \cdot ([(c,d)] + [(e,f)]) &= [(a,b)] \cdot [(c+e, d+f)] \\ &= [(a \cdot (c+e) + b \cdot (d+f), a \cdot (d+f) + b \cdot (c+e))] \\ &= [((ac+ae)+(bd+bf), (ad+af)+(bc+be))] \\ &= [((ac+bd)+(ae+bf), (ad+bc)+(af+be))] \\ &= [(ac+bd, ad+bc)] + [(ae+bf, af+be)] \\ &= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)]\,.\end{aligned}$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Budući da je operacija $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ komutativna, iz propozicije 3.3.4 slijedi da za sve $x, y, z \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Iz prethodnih tvrdnji zaključujemo da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom.

3.4 Uređaj na skupu cijelih brojeva

Na skupu $\mathbb{Z}$ definiramo binarnu relaciju $\leq$ na sljedeći način:

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \text{ ako je } a+d \leq c+b, \text{ za sve } a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da je ova binarna relacija dobro definirana, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika klasa. Pretpostavimo da su $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{N}$ takvi da je $(a,b) \sim (a',b')$ i $(c,d) \sim (c',d')$. Pretpostavimo da je $a+d \leq c+b$. Tada prema propoziciji 2.3.9 vrijedi

$$(a+d)+b' \leq (c+b)+b',$$

odnosno

$$(a + b') + d \leq (c + b') + b.$$

Zbog $a+b' = a'+b$ imamo $(a'+b)+d \leq (c + b') + b$. Primjenom propozicije 2.3.10 slijedi $a' + d \leq c + b'$. Ponovnom primjenom propozicije 2.3.9 dobivamo

$$(a' + d) + d' \leq (c + b') + d',$$

odnosno

$$(a' + d) + d' \leq (c + d') + b'.$$

Zbog $c+d' = c'+d$ imamo $(a'+d)+d' \leq (c' + d) + b'$, odnosno $(a'+d')+d \leq (c' + b') + d$. Koristeći propoziciju 2.3.10 slijedi

$$a' + d' \leq c' + b'.$$

Dakle, $a + d \leq c + b$ povlači $a' + d' \leq c' + b'$. Analogno vrijedi da $a' + d' \leq c' + b'$ povlači $a + d \leq c + b$. Dakle, vrijedi:

$$a + d \leq c + b \Leftrightarrow a' + d' \leq c' + b'.$$

Time smo pokazali da binarna operacija $\leq$ na skupu $\mathbb{Z}$ ne ovisi o izboru predstavnika klasa.

Propozicija 3.4.1. *Binarna relacija $\leq$ je uređaj na skupu $\mathbb{Z}$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{Z}$. Tada je $x = [(a, b)]$ za $a, b \in \mathbb{N}$. Očito je da vrijedi $a + b \leq a + b$. Stoga je $x \leq x$. Dakle, relacija $\leq$ je refleksivna na $\mathbb{Z}$.

Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$. Imamo $x = [(a, b)]$ i $y = [(c, d)]$ za $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada je $a + d \leq c + b$ i $c + b \leq a + d$. Budući da je $\leq$ antisimetrična relacija na $\mathbb{N}$ vrijedi $a + d = c + b$. Dakle, $(a, b) \sim (c, d)$ pa je $x = y$. Time smo dokazali da je $\leq$ antisimetrična relacija na $\mathbb{Z}$.

Pretpostavimo da su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$. Imamo $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$ i $z = [(e, f)]$ za $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Tada je $a + d \leq c + b$ i $c + f \leq e + d$. Iz propozicije 2.3.12 slijedi da je $(a+d)+(c+f) \leq (c + b) + (e + d)$. Koristeći napomenu 2.1.4 i svojstvo komutativnosti operacije $+$ u skupu $\mathbb{N}$ dobivamo:

$$(a + d) + (f + c) \leq (b + c) + (e + d) \Leftrightarrow (a + f) + (d + c) \leq (b + e) + (c + d),$$

odnosno $(a + f) + (c + d) \leq (e + b) + (c + d)$. Primjenom propozicije 2.3.10 dobivamo $a + f \leq e + b$. Dakle, $x \leq z$. Stoga, relacija $\leq$ je tranzitivna na skupu $\mathbb{Z}$.

Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$. Imamo $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$. Budući da je $\leq$ uređaj na skupu $\mathbb{N}$, vrijedi $a + d \leq c + b$ ili $c + b \leq a + d$. U prvom slučaju imamo $x \leq y$, a u drugom $y \leq x$. Time smo dokazali da je $\leq$ uređaj na skupu $\mathbb{Z}$. □

Propozicija 3.4.2. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x \leq y$. Tada je $x + z \leq y + z$.*

Dokaz. Neka su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$, $z = [(e, f)]$.Tada je

$$x + z = [(a, b)] + [(e, f)] = [(a + e, b + f)]$$

i

$$y + z = [(c, d)] + [(e, f)] = [(c + e, d + f)]\,.$$

Vrijedi da je $a + d \leq c + b$. Zbog propozicije 2.3.9 vrijedi

$$(a + d) + (e + f) \leq (c + b) + (e + f),$$

odnosno, koristeći napomenu 2.1.4 dobivamo

$$(a + e) + (d + f) \leq (c + e) + (b + f).$$

Ovo znači da je $x + z \leq y + z$ čime je tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Za $x, y \in \mathbb{Z}$ definiramo $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada je

$$[(a, b)] < [(c, d)] \Leftrightarrow a + d < c + b.$$

Naime, ako je $[(a, b)] < [(c, d)]$, onda je $[(a, b)] \leq [(c, d)]$ i $[(a, b)] \neq [(c, d)]$. Tada je $a + d \leq c + b$ i $a + d \neq c + b$, tj. $a + d < c + b$. Analogno se pokaže da vrijedi obratan smjer.

Lema 3.4.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada je*

(L1) $0 \leq [(a, b)] \Leftrightarrow b \leq a$

(L2) $0 < [(a, b)] \Leftrightarrow b < a$.

Dokaz. Primjenom tvrdnje *(2)* propozicije 2.3.10 i propozicije 2.3.9 slijedi tvrdnja *(L1)*:

$$\begin{aligned} 0 \leq [(a, b)] &\Leftrightarrow [(1, 1)] \leq [(a, b)] \\ &\Leftrightarrow 1 + b \leq a + 1 \\ &\Leftrightarrow b + 1 \leq a + 1 \\ &\Leftrightarrow b \leq a. \end{aligned}$$

Također, primjenom tvrdnje *(1)* propozicije 2.3.10 i propozicije 2.3.2 slijedi tvrdnja *(L2)*:

$$\begin{aligned} 0 < [(a, b)] &\Leftrightarrow [(1, 1)] < [(a, b)] \\ &\Leftrightarrow 1 + b < a + 1 \\ &\Leftrightarrow b + 1 < a + 1 \\ &\Leftrightarrow b < a. \end{aligned}$$

Time je ova lema dokazana. □

Propozicija 3.4.4. *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $0 < x$ i $0 < y$. Tada je $0 < x \cdot y$.*

Dokaz. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = [(a, b)]$ i $y = [(c, d)]$. Iz $0 < x$ i leme 3.4.3 slijedi $b < a$. Isto tako iz $0 < y$ i iste leme slijedi $d < c$. Imamo

$$x \cdot y = [(ac + bd, ad + bc)] .$$

Želimo dokazati $0 < x \cdot y$, a to je prema lemi 3.4.3 ekvivalentno s

$$ad + bc < ac + bd. \tag{3.5}$$

Iz $b < a$ slijedi da je $a = b + k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Sada je nejednakost (3.5) ekvivalentna s

$$(b + k)d + bc < (b + k)c + bd,$$

odnosno s

$$(bd + kd) + bc < (bc + kc) + bd.$$

Koristeći komutativnost i asocijativnost operacije $+$ u skupu $\mathbb{N}$ te tvrdnju *(1)* propozicije 2.3.10 dobivamo da je posljednja nejednakost ekvivalentna s $kd < kc$. Nadalje, iz $d < c$ slijedi da je $c = d + l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Tada je

$$kd < kc \Leftrightarrow kd < k(d + l) \Leftrightarrow kd < kd + kl.$$

Posljednja nejednakost vrijedi prema definiciji relacije $<$ u skupu $\mathbb{N}$ pa je time tvrdnja ove propozicije dokazana. □

Korolar 3.4.5. *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $0 \leq x$ i $0 \leq y$. Tada je $0 \leq x \cdot y$.*

Dokaz. Ako je $0 < x$ i $0 < y$, onda tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 3.4.4. Inače, imamo $0 = x$ ili $0 = y$ pa je $0 = x \cdot y$ prema propoziciji 1.0.18 (jer je 0 neutralan element u grupi $(\mathbb{Z}, +)$). Stoga je očito $0 \leq x \cdot y$. □

Na temelju svega dosad dokazanog (činjenice da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ prsten, propozicija 3.4.1 i 3.4.2 te korolara 3.4.5), slijedi da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten.

Napomena 3.4.6. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten. Za $a, b \in P$ pišemo $a < b$ ako je $a \leq b$ i $a \neq b$.*

Pretpostavimo da su $x, y, z \in P$ takvi da je $x < y$. Tada je $x + z < y + z$. Naime, iz $x \leq y$ slijedi $x + z \leq y + z$.
Pretpostavimo da je $x + z = y + z$. Dodavanjem $-z$ na lijevu i desnu stranu jednakosti dobivamo $x = y$ što je očito u kontradikciji s $x < y$. Prema tome, $x + z \neq y + z$, pa je $x + z < y + z$.

Propozicija 3.4.7. *Neka su* $x, y, z \in \mathbb{Z}$*.*

(1) Ako je $x \leq y$ *i* $0 \leq z$*, onda je* $x \cdot z \leq y \cdot z$

(2) Ako je $0 < z$ *i* $x \cdot z \leq y \cdot z$*, onda je* $x \leq y$*.*

Dokaz. Iz $x \leq y$ prema propoziciji 3.4.2 slijedi $0 \leq y + (-x)$ pa prema korolaru 3.4.5 imamo da je $0 \leq (y + (-x)) \cdot z$. Nadalje, primjenom distributivnosti množenja prema zbrajanju u skupu $\mathbb{Z}$ te propozicije 1.0.37 dobivamo $0 \leq yz + (-xz)$. Stoga iz ponovne primjene propozicije 3.4.2 slijedi $x \cdot z \leq y \cdot z$ čime je tvrdnja *(1)* dokazana.

Pretpostavimo da $x \nleq y$. Tada je očito $y \neq x$, a iz propozicije 3.4.1 zaključujemo da je $y \leq x$. Stoga je $y < x$. Prema napomeni 3.4.6 slijedi $0 < x + (-y)$, a primjenom propozicije 3.4.4 dobivamo $0 < (x + (-y)) \cdot z$. Slično kao i u tvrdnji (1) zaključujemo da je $yz < xz$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $xz \leq yz$. Prema tome, $x \leq y$. Time je tvrdnja *(2)* dokazana. □

Propozicija 3.4.8. *Neka su* $x, y \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $x \neq 0$ *i* $y \neq 0$*. Tada je* $x \cdot y \neq 0$*.*

Dokaz. Iz $x \neq 0$ slijedi da je $x < 0$ ili $0 < x$, a iz $y \neq 0$ slijedi da je $y < 0$ ili $0 < y$. Imamo sljedeća četiri slučaja:
1. $0 < x$ i $0 < y$
2. $0 < x$ i $y < 0$
3. $x < 0$ i $0 < y$
4. $x < 0$ i $y < 0$.

U prvom slučaju, prema propoziciji 3.4.4 imamo $0 < x \cdot y$ pa je $x \cdot y \neq 0$.

U drugom slučaju, iz $y < 0$ i napomene 3.4.6 slijedi $0 < -y$ što zajedno s $0 < x$ i propozicijom 3.4.4 daje $0 < x \cdot (-y)$. Iz tvrdnje *(ii)* propozicije 1.0.37 slijedi $0 < -(x \cdot y)$, pa ponovnom primjenom napomene 3.4.6 dobivamo $x \cdot y < 0$. Stoga je $x \cdot y \neq 0$.

I u preostala dva slučaja analogno zaključujemo da je $x \cdot y \neq 0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Za prsten $(P, +, \cdot)$ kažemo da je integralna domena ako za sve $x, y \in P$ takve da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ vrijedi $x \cdot y \neq 0$. Prema propoziciji 3.4.8 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je integralna domena.

Propozicija 3.4.9. *Neka je* $(P, +, \cdot)$ *integralna domena te neka su* $x, y, z \in P$ *takvi da je* $z \neq 0$*. Ako je* $xz = yz$*, onda je* $x = y$*. Nadalje, ako je* $zx = zy$*, onda je* $x = y$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $xz = yz$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} xz = yz &\Leftrightarrow xz - yz = 0 \\ &\Leftrightarrow xz + (-(yz)) = 0 \\ &\Leftrightarrow xz + (-y) \cdot z = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + (-y)) \cdot z = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y) \cdot z = 0. \end{aligned}$$

Iz činjenice da je $(P, +, \cdot)$ integralna domena i $z \neq 0$ slijedi da je $x - y = 0$, odnosno $x = y$. Analogno dobivamo da $zx = zy$ povlači $x = y$. □

Poglavlje 4

Skup racionalnih brojeva

4.1 Definicija skupa racionalnih brojeva

Označimo $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x\}$. Definirajmo relaciju $\approx$ na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ sa:

$$(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b.$$

Propozicija 4.1.1. *Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.*

Dokaz. Očito je relacija $\approx$ refleksivna i simetrična. Pretpostavimo da su $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ takvi da je $(a, b) \approx (c, d)$ i $(c, d) \approx (e, f)$. Tada je

$$a \cdot d = c \cdot b \tag{4.1}$$

$$c \cdot f = e \cdot d. \tag{4.2}$$

Množenjem navedenih jednakosti dobivamo $(a \cdot d) \cdot (c \cdot f) = (c \cdot b) \cdot (e \cdot d)$, odnosno

$$(a \cdot f) \cdot (c \cdot d) = (e \cdot b) \cdot (c \cdot d). \tag{4.3}$$

Pretpostavimo da je $c = 0$. Tada iz (4.1) i (4.2) slijedi da je $a \cdot d = 0$ i $e \cdot d = 0$, a s obzirom da je $d \neq 0$ vrijedi $a = e = 0$. Stoga je $a \cdot f = e \cdot b$, tj. vrijedi $(a, b) \approx (e, f)$.

Pretpostavimo sada da je $c \neq 0$. Tada je $c \cdot d \neq 0$, pa iz (4.3) i propozicije 3.4.9 dobivamo da je $a \cdot f = e \cdot b$, tj. $(a, b) \approx (e, f)$.

U svakom slučaju, vrijedi $(a, b) \approx (e, f)$ pa zaključujemo da je $\approx$ tranzitivna relacija. Time smo dokazali da je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$. □

Kvocijentni skup pri relaciji $\approx$ označavamo s $\mathbb{Q}$. Dakle,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ /_{\approx}.$$

Ako je $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, onda ćemo klasu $[(a, b)]$ od (a, b) pri relaciji $\approx$ označavati i s $\frac{a}{b}$. Uočimo da za $a, c \in \mathbb{Z}$ i $b, d \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = cb.$$

4.2 Zbrajanje, množenje i uređaj na skupu racionalnih brojeva

Na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo binarnu operaciju $+$ na sljedeći način:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Dokažimo da ova operacija ne ovisi o izboru predstavnika klasa.

Pretpostavimo da su $a, a', c, c' \in \mathbb{Z}$ i $b, b', d, d' \in \mathbb{Z}_+$ takvi da vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ i $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Želimo dokazati da je $\frac{ad + cb}{bd} = \frac{a'd' + c'b'}{b'd'}$. U tu svrhu je dovoljno dokazati da je

$$(ad + cb) \cdot (b'd') = (a'd' + c'b') \cdot (bd),$$

odnosno, da je

$$adb'd' + cbb'd' = a'd'bd + c'b'bd. \tag{4.4}$$

Iz $ab' = a'b$ slijedi $adb'd' = a'd'bd$ te iz $cd' = c'd$ slijedi $cbb'd' = c'b'bd$ pa je očito da vrijedi (4.4). Prema tome, operacija $+$ je dobro definirana.

Također, uočimo da za $b, d \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi $bd \in \mathbb{Z}_+$ prema propoziciji 3.4.4.

Na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo binarnu operaciju $\cdot$ na sljedeći način:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Dokažimo da operacija $\cdot$ ne ovisi o izboru predstavnika klasa.

Pretpostavimo da su $a, a', c, c' \in \mathbb{Z}$ i $b, b', d, d' \in \mathbb{Z}_+$ takvi da vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ i $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Tada je $ab' = a'b$ i $cd' = c'd$ pa je $acb'd' = a'c'bd$. Stoga je $\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$.
Dakle, operacija $\cdot$ je dobro definirana.

Na $\mathbb{Q}$ definiramo binarnu relaciju $\leq$ na sljedeći način:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq cb.$$

Dokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru predstavnika klasa. Pretpostavimo da su $a, a', c, c' \in \mathbb{Z}$ i $b, b', d, d' \in \mathbb{Z}_+$ takvi da vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ i $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ te da je $ad \leq cb$.
Želimo pokazati da je $a'd' \leq c'b'$. Prema tvrdnji *(1)* propozicije 3.4.7 dobivamo

$$adb'd' \leq cbb'd',$$

tj.

$$ab'dd' \leq cd'bb'.$$

Koristeći $ab' = a'b$ i $cd' = c'd$ zaključujemo da je $a'bdd' \leq c'dbb'$, odnosno

$$a'd'bd \leq c'b'bd.$$

Pema tvrdnji *(2)* propozicije 3.4.7 dobivamo $a'd' \leq c'b'$ što je i trebalo pokazati. Dakle, relacija $\leq$ je dobro definirana.

Neka su $a \in \mathbb{Z}$ te $b, k \in \mathbb{Z}_+$. Tada je

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b},$$

što vrijedi po definiciji klase u $\mathbb{Q}$ jer je uistinu $a \cdot kb = b \cdot ka$.
Ako su $x, y, z \in \mathbb{Q}$, onda postoje $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$ i $z = \frac{c}{d}$.
Naime, imamo $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$ i $z = \frac{z_1}{z_2}$ pri čemu su $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$ i $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}_+$ pa je $x = \frac{x_1(y_2z_2)}{x_2(y_2z_2)}$, $y = \frac{y_1(x_2z_2)}{y_2(x_2z_2)}$ i $z = \frac{z_1(x_2y_2)}{z_2(x_2y_2)}$ iz čega slijedi da brojevi a, b, c, d s traženim svojstvom postoje.

Neka je $1_\mathbb{Z}$ neutralni element za operaciju $\cdot$ u $\mathbb{Z}$. U dokazu propozicije 3.3.3 vidjeli smo da je $1_\mathbb{Z} = [(2, 1)]$. Uočimo da je $0 < 1_\mathbb{Z}$.

Definiramo $0_\mathbb{Q} = \frac{0}{1_\mathbb{Z}}$ i $1_\mathbb{Q} = \frac{1_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}$. Neka su $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}_+$. Tada je

$$\frac{a}{b} = 1_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow a = b$$

i

$$\frac{a}{b} = 0_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow a = 0.$$

Također, vrijedi $0_{\mathbb{Q}} \leq \frac{a}{b} \Leftrightarrow 0 \leq a$.

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $c \in \mathbb{Z}_+$. Tada je

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

jer je $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + bc}{c \cdot c} = \frac{(a+b) \cdot c}{c \cdot c}$.

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $c \in \mathbb{Z}_+$. Tada je

$$\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c} \Leftrightarrow a \leq b.$$

Naime, ako je $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$, onda je $ac \leq bc$ pa prema tvrdnji *(2)* propozicije 3.4.7 imamo $a \leq b$. Obratno, ako je $a \leq b$, onda prema tvrdnji *(1)* iste propozicije imamo $ac \leq bc$ pa je $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Propozicija 4.2.1. *Za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ takve da je $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$ i $y \neq 0_{\mathbb{Q}}$ vrijedi $x \cdot y \neq 0_{\mathbb{Q}}$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$ i $y \neq 0_{\mathbb{Q}}$. Imamo $x = \frac{m_1}{n_1}$ i $y = \frac{m_2}{n_2}$, gdje su $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ i $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$. Iz $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$ i $y \neq 0_{\mathbb{Q}}$ slijedi $m_1 \neq 0_{\mathbb{Z}}$ i $m_2 \neq 0_{\mathbb{Z}}$. Budući da je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ integralna domena, vrijedi $m_1 \cdot m_2 \neq 0_{\mathbb{Z}}$. Imamo

$$x \cdot y = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$$

pa je $x \cdot y \neq 0_{\mathbb{Q}}$. Prema tome, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je integralna domena. □

Napomena 4.2.2. *Skup $\mathbb{Q}$ ima barem dva elementa.*

Naime, jer je $1_{\mathbb{Z}} \neq 0$ vrijedi $1_{\mathbb{Q}} \neq 0_{\mathbb{Q}}$.

Teorem 4.2.3. *Uređena četvorka $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno polje.*

Dokaz. Binarna operacija + na skupu $\mathbb{Q}$ je očito komutativna.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $x = \dfrac{a}{d}$, $y = \dfrac{b}{d}$ i $z = \dfrac{c}{d}$. Imamo:

$$(x + y) + z = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{(a+b)+c}{d}.$$

S druge strane, imamo:

$$x + (y + z) = \frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{d} + \frac{b+c}{d} = \frac{a+(b+c)}{d}.$$

Jasno je da zbog asocijativnosti operacije + na skupu $\mathbb{Z}$ vrijedi $(x + y) + z = x + (y + z)$ pa je operacija + na skupu $\mathbb{Q}$ asocijativna.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Tada je $x = \dfrac{a}{b}$, gdje je $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}_+$. Vrijedi:

$$x + 0_{\mathbb{Q}} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1_{\mathbb{Z}}} = \frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b} = x.$$

Dakle, vrijedi $x + 0_{\mathbb{Q}} = x$, a zbog komutativnosti operacije + na $\mathbb{Q}$ vrijedi i $0_{\mathbb{Q}} + x = x$. Time zaključujemo da je $0_{\mathbb{Q}}$ neutralni element za operaciju + na skupu $\mathbb{Q}$.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$. Tada je $x = \dfrac{a}{b}$, gdje je $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}_+$. Definirajmo $y = \dfrac{-a}{b}$. Imamo:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a+(-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0_{\mathbb{Q}}.$$

Dakle, $x + y = 0_{\mathbb{Q}}$ te je također $y + x = 0_{\mathbb{Q}}$. Time smo dokazali da je $(\mathbb{Q}, +)$ Abelova grupa.

Iz činjenice da je binarna operacija $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ komutativna i asocijativna slijedi i da je operacija $\cdot$ na skupu $\mathbb{Q}$ komutativna i asocijativna.

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi $x \cdot 1_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}} \cdot x = x$, tj. $1_{\mathbb{Q}}$ neutralni je element za operaciju $\cdot$ na skupu $\mathbb{Q}$.

Neka je $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$. Imamo $x = \dfrac{a}{b}$, gdje je $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}_+$. Iz $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$ slijedi $a \neq 0$. Tada je $a < 0$ ili $0 < a$. Ako je $0 < a$, onda definiramo $y = \dfrac{b}{a}$ te vrijedi:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{ab}{ab} = 1_{\mathbb{Q}}.$$

Ako je $a < 0$, onda imamo $0 < -a$, tj. $-a \in \mathbb{Z}_+$. Definirajmo $y = \dfrac{-b}{-a}$. Vrijedi

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{-b}{-a} = \frac{a \cdot (-b)}{b \cdot (-a)} = \frac{-(ab)}{-(ba)} = \frac{-(ab)}{-(ab)} = 1_{\mathbb{Q}}.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x \neq 0_{\mathbb{Q}}$ postoji $y \in \mathbb{Q}$ tako da vrijedi $x \cdot y = y \cdot x = 1_{\mathbb{Q}}$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $x = \dfrac{a}{d}$, $y = \dfrac{b}{d}$ i $z = \dfrac{c}{d}$. Imamo:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= \frac{a}{d} \cdot \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{d} \cdot \frac{b + c}{d} = \frac{a \cdot (b + c)}{d \cdot d} \\ &= \frac{ab + ac}{dd} = \frac{ab}{dd} + \frac{ac}{dd} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} + \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{d} \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

Dakle, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Time smo dokazali da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ polje.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $x = \dfrac{a}{d}$, $y = \dfrac{b}{d}$ i $z = \dfrac{c}{d}$. Iz $\dfrac{a}{d} \leq \dfrac{b}{d}$ slijedi $a \leq b$ pa je $a + c \leq b + c$. Stoga je $\dfrac{a + c}{d} \leq \dfrac{b + c}{d}$ iz čega nadalje dobivamo da je

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} \leq \frac{b}{d} + \frac{c}{d},$$

odnosno $x + z \leq y + z$. Dakle, za sve $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takve da je $x \leq y$ vrijedi $x + z \leq y + z$.

Neka su $x, y \in \mathbb{Q}$ takvi da je $0_{\mathbb{Q}} \leq x$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq y$. Imamo $x = \dfrac{a}{b}$ i $y = \dfrac{c}{d}$, gdje su $a, c \in \mathbb{Z}$ i $b, d \in \mathbb{Z}_+$ te vrijedi $0 \leq a$ i $0 \leq c$. Prema korolaru 3.4.5 slijedi $0 \leq a \cdot c$. Stoga je $0_{\mathbb{Q}} \leq \dfrac{ac}{bd}$, tj. $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot y$. Dakle, za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ takve da je $0_{\mathbb{Q}} \leq x$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq y$ vrijedi $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot y$.
Time smo dokazali da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ uređeno polje. □

Propozicija 4.2.4. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.*

(1) Pretpostavimo da je $0_{\mathbb{Q}} \leq a \leq b$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq c \leq d$. Tada je $ac \leq bd$.

(2) Pretpostavimo da je $0_{\mathbb{Q}} \leq a < b$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq c < d$. Tada je $ac < bd$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju *(1)*. Analogno kao u dokazu propozicije 3.4.7 dobivamo da za sve $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takve da je $x \leq y$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq z$ vrijedi $x \cdot z \leq y \cdot z$. Koristeći ovo dobivamo da je $ac \leq bc$ i $bc \leq bd$. Stoga je $ac \leq bd$ čime je tvrdnja *(1)* dokazana.

Dokažimo sada tvrdnju *(2)*. Ako su $x, y, z \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x < y$ i $0_{\mathbb{Q}} < z$, onda je $xz < yz$. Naime, sigurno je $xz \leq yz$. Pretpostavimo da je $xz = yz$. Množeći ovu jednakost s z^{-1} dobivamo $x = y$ što je u kontradikciji s $x < y$. Dakle, $xz < yz$. Koristeći ovo, zaključujemo da je $bc < bd$ što zajedno s $ac \leq bc$ daje $ac < bd$. Time je tvrdnja *(2)* dokazana. □

Napomena 4.2.5. *Neka je* $(S, \leq)$ *uređeni skup. Za* $x, y \in S$ *pišemo:*

(1) $x < y$ *ako je* $x \leq y$ *i* $x \neq y$

(2) $x \geq y$ *ako je* $y \leq x$

(3) $x > y$ *ako je* $y < x$.

Napomena 4.2.6. *Neka je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten te neka su* $x, y, u, v \in P$ *takvi da je* $x \leq y$ *i* $u \leq v$*. Tada je* $x + u \leq y + v$.

Ova tvrdnja se dokazuje slično kao i propozicija 2.3.12.

Napomena 4.2.7. *Ako je* $(P, +, \cdot, \leq)$ *uređeni prsten, onda za sve* $x, y, u, v \in P$ *takve da je* $x < y$ *i* $u \leq v$ *vrijedi* $x + u < y + v$.

To se lako dokaže koristeći napomenu 4.2.6.

4.3 Apsolutna vrijednost racionalnog broja

Za $x \in \mathbb{Q}$ definiramo

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0_{\mathbb{Q}}, \\ -x \ , \ x < 0_{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x \leq 0_{\mathbb{Q}}$ vrijedi $|x| = -x$.
Za $|x|$ kažemo da je apsolutna vrijednost od x.

Propozicija 4.3.1. *Neka su* $x, y \in \mathbb{Q}$*. Tada vrijedi:*

(1) $|x| \geq 0_{\mathbb{Q}}$

(2) $|x| = 0_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{Q}}$

(3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dokaz. Ako je $x \geq 0_{\mathbb{Q}}$, onda je $|x| = x$ pa je $|x| \geq 0_{\mathbb{Q}}$. Ako je $x < 0_{\mathbb{Q}}$, onda je $0_{\mathbb{Q}} < -x$. No, kako je tada $|x| = -x$, imamo $|x| > 0_{\mathbb{Q}}$. Time smo dokazali svojstvo *(1)*.

Ako je $x = 0_{\mathbb{Q}}$, očito je da vrijedi $|x| = 0_{\mathbb{Q}}$. Obratno, pretpostavimo da je $|x| = 0_{\mathbb{Q}}$. Ako je $x > 0_{\mathbb{Q}}$, onda je $|x| > 0_{\mathbb{Q}}$, a ako je $x < 0_{\mathbb{Q}}$, onda je također $|x| > 0_{\mathbb{Q}}$. Stoga, $x = 0_{\mathbb{Q}}$. Time je dokazano svojstvo *(2)*.

Dokažimo sada svojstvo *(3)*. Imamo nekoliko slučajeva:
1.slučaj: $0_{\mathbb{Q}} \leq x$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq y$
Tada je $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot y$ te iz toga slijedi $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

2.slučaj: $0_{\mathbb{Q}} \leq x$ i $y \leq 0_{\mathbb{Q}}$
Tada je $0_{\mathbb{Q}} \leq -y$ pa je $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot (-y)$ iz čega slijedi $0_{\mathbb{Q}} \leq -(x \cdot y)$, a ovo povlači $x \cdot y \leq 0_{\mathbb{Q}}$. Stoga je $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

3.slučaj: $x \leq 0_{\mathbb{Q}}$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq y$
Analogno kao i u prethodnom slučaju dobivamo $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

4.slučaj: $x \leq 0_{\mathbb{Q}}$ i $y \leq 0_{\mathbb{Q}}$
Tada je $0_{\mathbb{Q}} \leq -x$ i $0_{\mathbb{Q}} \leq -y$ pa je $0_{\mathbb{Q}} \leq (-x) \cdot (-y)$, odnosno $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot y$.
Stoga je $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
Time je dokazano svojstvo *(3)*.

Ako je $a \in \mathbb{Q}$, onda je $a \leq |a|$. Naime, ovo je jasno ako je $a \geq 0_{\mathbb{Q}}$, a ako je $a < 0_{\mathbb{Q}}$, onda koristeći svojstvo *(1)* dobivamo $a < 0_{\mathbb{Q}} \leq |a|$, pa je $a \leq |a|$.

Nadalje, za svaki $a \in \mathbb{Q}$ vrijedi $|-a| = |a|$. Naime, ako je $0_{\mathbb{Q}} \leq a$, onda je $-a \leq 0_{\mathbb{Q}}$ pa je $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Ako je $a \leq 0_{\mathbb{Q}}$, onda je $0_{\mathbb{Q}} \leq -a$ pa je $|-a| = -a = |a|$.

Dokažimo sada svojstvo *(4)*. Imamo $x \leq |x|$ i $y \leq |y|$ pa prema napomeni 4.2.6 vrijedi

$$x + y \leq |x| + |y|. \tag{4.5}$$

S druge strane, imamo $-x \leq |-x| = |x|$, tj.$-x \leq |x|$. Analogno imamo i $-y \leq |y|$ pa napomena 4.2.6 povlači da je $(-x) + (-y) \leq |x| + |y|$. Lako zaključujemo da je

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) = 0_{\mathbb{Q}},$$

pa je $-x + (-y) = -(x + y)$. Prema tome,

$$-(x + y) \leq |x| + |y|. \tag{4.6}$$

Iz definicije apsolutne vrijednosti slijedi da je $|x + y| = x + y$ ili $|x + y| = -(x + y)$, pa iz (4.5) i (4.6) slijedi da je

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Time su sve tvrdnje ove propozicije dokazane. $\square$

Poglavlje 5

Skup realnih brojeva

5.1 Cauchyjevi nizovi u $\mathbb{Q}$

Definicija 5.1.1. *Neka je S skup. Za svaku funkciju sa skupa $\mathbb{N}$ u skup S kažemo da je niz u skupu S. Ako je x niz u skupu S, tj. $x : \mathbb{N} \to S$, onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo x_n, a funkciju x označavamo kao $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).*

Definicija 5.1.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$ te $a \in \mathbb{Q}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a i pišemo $x_n \to a$, ako za svaki $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, za koji je $n \geq n_0$, vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Propozicija 5.1.3. *(1) Neka je $a \in \mathbb{Q}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$ definiran sa $x_n = a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to a$.*

(2) Pretpostavimo da je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$ te $a \in \mathbb{Q}$ tako da $x_n \to a$. Tada niz $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $-a$.

(3) Pretpostavimo da su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbb{Q}$ te da su $a, b \in \mathbb{Q}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada niz $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a + b$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $|x_n - a| = 0_{\mathbb{Q}}$ pa tvrdnja *(1)* očito vrijedi.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |-x_n - (-a)| &= |(-1) \cdot x_n + (-1) \cdot (-a)| \\ &= |(-1) \cdot (x_n + (-a))| \\ &= |-1| \cdot |x_n - a| \\ &= |x_n - a|. \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, za koji je $n \geq n_0$, vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$, za koji je $n \geq n_0$, vrijedi $|-x_n - (-a)| < \varepsilon$. Time je tvrdnja *(2)* dokazana.

Neka je $\tau \in \mathbb{Q}$ takav da je $\tau = \dfrac{1_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}}$. Imamo

$$\tau + \tau = \frac{1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}} = 1_{\mathbb{Q}}.$$

Očito je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$. Neka je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada je $\tau \cdot \varepsilon \geq 0_{\mathbb{Q}}$, no jer je $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ integralna domena prema propoziciji 4.2.1 imamo $\tau \cdot \varepsilon \neq 0_{\mathbb{Q}}$ pa slijedi da je $\tau \cdot \varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$.

Budući da $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \tau \cdot \varepsilon$. Budući da $y_n \to b$, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji je $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - b| < \tau \cdot \varepsilon$. Neka je

$$k_0 = \begin{cases} n_0, \text{ ako } n_0 \geq m_0. \\ m_0 \text{ , inače.} \end{cases}$$

Tada je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq k_0$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$. Koristeći svojstvo *(4)* propozicije 4.3.1 i napomenu 4.2.7 dobivamo:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |x_n + y_n + (-a) + (-b)| \\ &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon \\ &= (\tau + \tau) \cdot \varepsilon \\ &= 1_{\mathbb{Q}} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq k_0$. Time je dokazana tvrdnja *(3)* te je dokaz ove propozicije završen. □

Definicija 5.1.4. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$. Za (x_n) kažemo da je Cauchyjev niz ako za svaki $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq n_0$ i $m \geq n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

Definicija 5.1.5. *Za niz (x_n) u $\mathbb{Q}$ kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbb{Q}$ takav da $x_n \to a$.*

Propozicija 5.1.6. *Neka je (x_n) konvergentan niz. Tada je (x_n) Cauchyjev niz.*

Dokaz. Znamo da postoji $a \in \mathbb{Q}$ takav da $x_n \to a$. U dokazu tvrdnje *(3)* propozicije 5.1.3 vidjeli smo da postoji $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Uočimo da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|.$$

Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} -(\beta - \alpha) &= -(\beta + (-\alpha)) \\ &= -\beta + (-(-\alpha)) \\ &= -\beta + \alpha \\ &= \alpha - \beta, \end{aligned}$$

pa je $|\alpha - \beta| = | - (\beta - \alpha)| = |\beta - \alpha|$.

Neka je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \tau \cdot \varepsilon$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m \geq n_0$ i $n \geq n_0$. Imamo:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - a + a - x_n| \\ &= |(x_m - a) + (a - x_n)| \\ &\leq |x_m - a| + |a - x_n| \\ &= |x_m - a| + |x_n - a| \\ &< \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon \\ &= (\tau + \tau) \cdot \varepsilon \\ &= 1_{\mathbb{Q}} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m \geq n_0$ i $n \geq n_0$. Dakle, niz (x_n) je Cauchyjev. □

5.2 Definicija skupa realnih brojeva

Neka je $\mathscr{C}$ skup svih Cauchyjevih nizova u $\mathbb{Q}$. Na $\mathscr{C}$ definiramo binarnu relaciju $\sim$ na sljedeći način:

$$(x_n) \sim (y_n), \text{ ako niz } (x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ teži prema } 0_{\mathbb{Q}}.$$

Dokažimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathscr{C}$.

Za svaki $(x_n) \in \mathscr{C}$ vrijedi $(x_n) \sim (x_n)$ jer je $(x_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan niz s vrijednošću $0_\mathbb{Q}$ koji prema tvrdnji *(1)* propozicije 5.1.3 teži prema $0_\mathbb{Q}$. Dakle, relacija $\sim$ je refleksivna na $\mathscr{C}$.

Neka su $(x_n), (y_n) \in \mathscr{C}$ takvi da je $(x_n) \sim (y_n)$. Tada $x_n - y_n \to 0_\mathbb{Q}$. Iz tvrdnje *(2)* propozicije 5.1.3 slijedi $-(x_n - y_n) \to -0_\mathbb{Q}$, odnosno $y_n - x_n \to 0_\mathbb{Q}$. Prema tome, $(y_n) \sim (x_n)$ pa je relacija $\sim$ simetrična na $\mathscr{C}$.

Neka su $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathscr{C}$ takvi da je $(x_n) \sim (y_n)$ i $(y_n) \sim (z_n)$. Tada $x_n - y_n \to 0_\mathbb{Q}$ i $y_n - z_n \to 0_\mathbb{Q}$. Prema tvrdnji *(3)* propozicije 5.1.3 vrijedi $(x_n - y_n) + (y_n - z_n) \to 0_\mathbb{Q} + 0_\mathbb{Q}$, tj. $x_n - z_n \to 0_\mathbb{Q}$. Dakle, vrijedi $(x_n) \sim (z_n)$ pa zaključujemo da je $\sim$ tranzitivna relacija na $\mathscr{C}$ čime smo dokazali da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathscr{C}$.

Definiramo $\mathbb{R} = \mathscr{C}/_\sim$. Dakle,

$$\mathbb{R} = \{\, [(x_n)] \mid (x_n) \in \mathscr{C}\}.$$

5.3 Omeđeni nizovi u $\mathbb{Q}$

Lema 5.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada ne postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $n < x < n + 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da takav x postoji. Tada je $x = n + k$ i $n + 1 = x + l$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$. Imamo

$$n + 1 = x + l = (n + k) + l = n + (k + l),$$

tj. $n + 1 = n + (k + l)$ pa iz toga slijedi da je $1 = k + l$. S druge strane, imamo

$$1 < 1 + 1 \leq 1 + l \leq k + l,$$

tj. $1 < k + l$. Dobili smo kontradikciju pa je time tvrdnja ove leme dokazana. □

Lema 5.3.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $M \in \mathbb{Q}$ takav da je $|x_i| \leq M$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n$.*

Dokaz. Neka je S skup svih $n \in \mathbb{N}$ za koje postoji $M \in \mathbb{Q}$ takav da je $|x_i| \leq M$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada postoji $M \in \mathbb{Q}$ takav da je $|x_i| \leq M$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n$. Definirajmo:

$$N = \begin{cases} M, \text{ ako } |x_{n+1}| \leq M \\ |x_{n+1}|, \text{ inače.} \end{cases}$$

Tada je $M \leq N$ i $|x_{n+1}| \leq N$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n + 1$. Imamo 2 slučaja:

$$i \leq n \text{ ili } n < i.$$

Ako je $i \leq n$, onda je $|x_i| \leq M$ pa zbog $M \leq N$ imamo $|x_i| \leq N$.
Ako je $n < i$, onda je $i = n + 1$. Naime, u suprotnom bi vrijedilo $i < n + 1$, pa bismo zajedno s $n < i$ imali kontradikciju s lemom 5.3.1. Dakle, $|x_i| \leq N$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n + 1$. Time smo pokazali da je $n + 1 \in S$. Prema principu indukcije vrijedi $S = \mathbb{N}$, što znači da je tvrdnja ove leme time dokazana. □

Definicija 5.3.3. *Za niz (x_n) u $\mathbb{Q}$ kažemo da je omeđen ako postoji $M \in \mathbb{Q}$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 5.3.4. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz. Tada je (x_n) omeđen niz.*

Dokaz. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m, n \geq n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < 1_{\mathbb{Q}}$. Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - x_{n_0}| < 1_{\mathbb{Q}}$. Uzmimo neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Imamo:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \\ &\leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \\ &< 1_{\mathbb{Q}} + |x_{n_0}|. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n| < 1_{\mathbb{Q}} + |x_{n_0}|. \tag{5.1}$$

Prema lemi 5.3.2 postoji $M \in \mathbb{Q}$ takav da za $n \in \mathbb{N}$, za koji je $n \leq n_0$, vrijedi

$$|x_n| \leq M. \tag{5.2}$$

Odaberimo $N \in \mathbb{Q}$ takav da je $1_{\mathbb{Q}} + |x_{n_0}| \leq N$ i $M \leq N$ (takav N sigurno postoji što se može vidjeti iz dokaza leme 5.3.2). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $n \leq n_0$ ili $n \geq n_0$ pa vrijedi (5.1) ili (5.2). U svakom slučaju slijedi $|x_n| \leq N$. Dakle, niz (x_n) je omeđen. □

5.4 Zbrajanje i množenje na skupu realnih brojeva

Lema 5.4.1. *Neka je $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $x > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada je $x^{-1} > 0_{\mathbb{Q}}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $x^{-1} \leq 0_{\mathbb{Q}}$, pa je $0_{\mathbb{Q}} \leq -x^{-1}$. Iz ovoga i $0_{\mathbb{Q}} \leq x$ slijedi $0_{\mathbb{Q}} \leq x \cdot (-x^{-1})$, tj. $0_{\mathbb{Q}} \leq -(x \cdot x^{-1})$. Dakle, $0_{\mathbb{Q}} \leq -1_{\mathbb{Q}}$ pa slijedi $1_{\mathbb{Q}} \leq 0_{\mathbb{Q}}$ što je nemoguće. Time zaključujemo da tvrdnja ove leme uistinu vrijedi. □

Propozicija 5.4.2. *Neka su (x_n) i (y_n) Cauchyjevi nizovi. Tada su $(x_n + y_n)$ i $(x_n \cdot y_n)$ Cauchyjevi nizovi.*

Dokaz. Neka je $\tau \in \mathbb{Q}$ takav da je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ i $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Neka je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$.
Budući da je (x_n) Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da su $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_m - x_n| < \tau \cdot \varepsilon.$$

Budući da je (y_n) Cauchyjev niz, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da su $m, n \geq m_0$ vrijedi

$$|y_m - y_n| < \tau \cdot \varepsilon.$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da su $m, n \geq k_0$. Tada je $m, n \geq n_0$ i $m, n \geq m_0$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\
&\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\
&= |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\
&< \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon \\
&= (\tau + \tau) \cdot \varepsilon \\
&= 1_{\mathbb{Q}} \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \varepsilon$ za sve $m, n \geq k_0$. Prema tome, niz $(x_n + y_n)$ je Cauchyjev.

S obzirom na propoziciju 5.3.4 nizovi (x_n) i (y_n) su omeđeni. Stoga, postoje $M, N \in \mathbb{Q}$ takvi da je $|x_n| \leq M$ i $|y_n| \leq N$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odaberimo $K \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$K \geq M + 1_{\mathbb{Q}} \quad \text{i} \quad K \geq N + 1_{\mathbb{Q}}.$$

Očito je $0_{\mathbb{Q}} \leq M$ te $M < M + 1$ pa iz toga slijedi $0_{\mathbb{Q}} < K$. Nadalje, imamo $M < K$ i $N < K$ pa je $|x_n| < K$ i $|y_n| < K$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz leme 5.4.1 slijedi da je $0_{\mathbb{Q}} < K^{-1}$ pa je $K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon) > 0_{\mathbb{Q}}$. Iz činjenice da su (x_n) i (y_n) Cauchyjevi nizovi zaključujemo da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da su $m, n \geq k_0$ vrijedi

$$|x_m - x_n| < K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon) \quad \text{i} \quad |y_m - y_n| < K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon).$$

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da su $m, n \geq k_0$.

Koristeći propoziciju 4.2.4 te tvrdnju *(3)* propozicije 4.3.1 imamo:

$$\begin{aligned}
|(x_n \cdot y_n) - (x_m \cdot y_m)| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m + x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| \\
&= |x_n \cdot (y_n - y_m) + y_m \cdot (x_n - x_m)| \\
&\leq |x_n \cdot (y_n - y_m)| + |y_m \cdot (x_n - x_m)| \\
&= |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m| \\
&< K \cdot (K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)) + K \cdot (K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)) \\
&= (K \cdot K^{-1}) \cdot \tau\varepsilon + (K \cdot K^{-1}) \cdot \tau\varepsilon \\
&= 1_{\mathbb{Q}} \cdot \tau\varepsilon + 1_{\mathbb{Q}} \cdot \tau\varepsilon \\
&= \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon \\
&= (\tau + \tau) \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(x_n \cdot y_n) - (x_m \cdot y_m)| < \varepsilon$ za sve $m, n \geq k_0$. Prema tome, niz $(x_n \cdot y_n)$ je Cauchyjev. □

Propozicija 5.4.3. *Neka su (x_n), (x_n'), (y_n) i (y_n') Cauchyjevi nizovi u $\mathbb{Q}$ takvi da je $(x_n) \sim (x_n')$ i $(y_n) \sim (y_n')$. Tada je*

$$(x_n + y_n) \sim (x_n' + y_n') \quad i \quad (x_n \cdot y_n) \sim (x_n' \cdot y_n').$$

Dokaz. Iz $x_n \sim x_n'$ i $y_n \sim y_n'$ slijedi $x_n - x_n' \to 0_{\mathbb{Q}}$ i $y_n - y_n' \to 0_{\mathbb{Q}}$ pa prema tvrdnji *(3)* propozicije 5.1.3 vrijedi $(x_n - x_n') + (y_n - y_n') \to 0_{\mathbb{Q}}$, tj.

$$(x_n + y_n) - (x_n' + y_n') \to 0_{\mathbb{Q}}.$$

Stoga je $(x_n + y_n) \sim (x_n' + y_n')$.

Nizovi (x_n') i (y_n) su prema propoziciji 5.3.4 omeđeni pa kao u dokazu prethodne propozicije 5.4.2 zaključujemo da postoji $K > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x_n'| < K \text{ i } |y_n| < K.$$

Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Neka je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Budući da $x_n - x_n' \to 0_{\mathbb{Q}}$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|(x_n - x_n') - 0_{\mathbb{Q}}| < K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)$, tj. $|x_n - x_n'| < K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)$. Isto tako, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - y_n'| < K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)$. Odaberimo

$k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq k_0$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|(x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n) - 0_{\mathbb{Q}}| &= |x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| \\
&= |x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y_n + x'_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| \\
&= |(x_n - x'_n) \cdot y_n + x'_n \cdot (y_n - y'_n)| \\
&\leq |(x_n - x'_n) \cdot y_n| + |x'_n \cdot (y_n - y'_n)| \\
&= |x_n - x'_n| \cdot |y_n| + |x'_n| \cdot |y_n - y'_n| \\
&< (K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)) \cdot K + K \cdot (K^{-1} \cdot (\tau\varepsilon)) \\
&= \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon \\
&= (\tau + \tau) \cdot \varepsilon \\
&= 1_{\mathbb{Q}} \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n) - 0_{\mathbb{Q}}| < \varepsilon$ za svaki $n \geq k_0$. Prema tome, $x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n \to 0_{\mathbb{Q}}$, tj. $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$. Time je propozicija dokazana. □

Definirajmo binarne operacije $+$ i $\cdot$ na $\mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)] \quad \text{i} \quad [(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n \cdot y_n)].$$

Da su ove operacije dobro definirane slijedi iz propozicija 5.4.2 i 5.4.3.

Neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$ definiran s $x_n = 0_{\mathbb{Q}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tvrdnji *(1)* propozicije 5.1.3 niz (x_n) je konvergentan pa time i Cauchyjev prema propoziciji 5.1.6.
Označimo $0_{\mathbb{R}} = [(x_n)]$, tj. $0_{\mathbb{R}} = [(0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, ...)]$. Slično definiramo $1_{\mathbb{R}}$ kao klasu konstantnog niza u $\mathbb{Q}$ s vrijednošću $1_{\mathbb{Q}}$, tj. $1_{\mathbb{R}} = [(1_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, ...)]$.

Lema 5.4.4. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz. Tada je $(-x_n)$ Cauchyjev niz.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$|a - b| = |-(a - b)| = |-(a + (-b))| = |-a - (-b)|.$$

Dakle,

$$|a - b| = |-a - (-b)|. \tag{5.3}$$

Neka je $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$, za koje su $m, n \geq n_0$, vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Prema (5.3) vrijedi $|x_m - x_n| = |-x_m - (-x_n)|$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Stoga je $|-x_m - (-x_n)| < \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da su $m, n \geq n_0$. Dakle, niz $(-x_n)$ je Cauchyjev. □

Lema 5.4.5. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz koji ne teži u $0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\delta \in \mathbb{Q}$ takvi da je $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ i $|x_n| \geq \delta$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\tau \in \mathbb{Q}$ takav da je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ i $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$ te neka je $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ takav da je $\varepsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$, za koje su $m, n \geq n_0$, vrijedi $|x_m - x_n| < \tau \cdot \varepsilon$. Također, tada postoji $N \geq n_0$ takav da je $|x_N| < \tau \cdot \varepsilon$. U suprotnome bi za svaki $N \geq n_0$ vrijedilo $|x_N| \geq \delta$, gdje je $\delta = \tau \cdot \varepsilon$, a pretpostavili smo da ne postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ s takvim svojstvima. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Imamo:

$$|x_n - 0_{\mathbb{Q}}| = |x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < \tau \cdot \varepsilon + \tau \cdot \varepsilon = (\tau + \tau) \cdot \varepsilon = 1_{\mathbb{Q}} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle, $|x_n - 0_{\mathbb{Q}}| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome, niz (x_n) teži u $0_{\mathbb{Q}}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Time smo dokazali da tvrdnja leme uistinu vrijedi. □

Teorem 5.4.6. *Uređena trojka $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje. Pri tome je $0_{\mathbb{R}}$ neutralni element za operaciju $+$, a $1_{\mathbb{R}}$ neutralni element za operaciju $\cdot$.*

Dokaz. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a = [(x_n)]$, $b = [(y_n)]$ i $c = [(z_n)]$, gdje su $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathscr{C}$. Imamo:

$$\begin{aligned}
(a + b) + c &= ([(x_n)] + [(y_n)]) + [(z_n)] \\
&= [(x_n + y_n)] + [(z_n)] \\
&= [((x_n + y_n) + z_n)] \\
&= [(x_n + (y_n + z_n))] \\
&= [(x_n)] + [(y_n + z_n)] \\
&= [(x_n)] + ([(y_n)] + [(z_n)]) \\
&= a + (b + c).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $(a + b) + c = a + (b + c)$ pa je operacija $+$ asocijativna na $\mathbb{R}$.

Nadalje, imamo:

$$a + b = [(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)] = [(y_n + x_n)] = [(y_n)] + [(x_n)] = b + a.$$

Dakle, vrijedi $a + b = b + a$ pa je operacija $+$ komutativna na $\mathbb{R}$.

Kako vrijedi da je

$$a + 0_{\mathbb{R}} = [(x_n)] + [(0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, ...)] = [(x_n + 0_{\mathbb{Q}})] = [(x_n)] = a,$$

zaključujemo da je $0_{\mathbb{R}}$ neutralni element za operaciju $+$ na $\mathbb{R}$.

Prema lemi 5.4.4 niz $(-x_n)$ je Cauchyjev. Definirajmo $a' = [(-x_n)]$. Tada je

$$a + a' = [(x_n)] + [(-x_n)] = [(x_n + (-x_n))] = [(0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, ...)] = 0_{\mathbb{R}}.$$

Dakle, $a + a' = 0_{\mathbb{R}}$ pa je a' inverzni element od a u monoidu $(\mathbb{R}, +)$.

Analogno se pokazuje da je operacija $\cdot$ asocijativna i komutativna na $\mathbb{R}$ te da je $1_{\mathbb{R}}$ neutralni element za tu operaciju na $\mathbb{R}$.

Imamo:

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot c &= ([(x_n)] + [(y_n)]) \cdot [(z_n)] \\
&= [(x_n + y_n)] \cdot [(z_n)] \\
&= [((x_n + y_n) \cdot z_n)] \\
&= [(x_n \cdot z_n + y_n \cdot z_n)] \\
&= [(x_n \cdot z_n)] + [(y_n \cdot z_n)] \\
&= [(x_n)] \cdot [(z_n)] + [(y_n)] \cdot [(z_n)] \\
&= a \cdot c + b \cdot c.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ pa zaključujemo da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom.

Neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da je $a \neq 0_{\mathbb{R}}$. Dokažimo da postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $a \cdot b = 1_{\mathbb{R}}$. Imamo $a = [(x_n)]$, gdje je $(x_n) \in \mathscr{C}$. Iz $[(x_n)] \neq [(0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, ...)]$ slijedi da $(x_n) \nsim (0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}})$ pa zaključujemo da da niz (x_n) ne teži u $0_{\mathbb{Q}}$. Prema lemi 5.4.5 postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ takvi da je $|x_n| \geq \delta$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Uočimo da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \neq 0_{\mathbb{Q}}$.

Definirajmo niz (y_n) u $\mathbb{Q}$ sa

$$y_n = \begin{cases} 0_{\mathbb{Q}}, \text{ ako } n < n_0 \\ x_n^{-1}, \text{ ako } n \geq n_0 \end{cases}.$$

Općenito, za $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $r \neq 0_{\mathbb{Q}}$ vrijedi

$$|r^{-1}| = |r|^{-1}.$$

Naime, vrijedi $|r^{-1}| \cdot |r| = |r^{-1} \cdot r| = |1_{\mathbb{Q}}|$. Dakle, $|r^{-1}| \cdot |r| = 1_{\mathbb{Q}}$ pa množeći posljednju jednakost s $|r|^{-1}$ dobivamo $|r^{-1}| = |r|^{-1}$.

Neka je $n \geq n_0$. Iz $|x_n| \geq \delta$ i $\delta^{-1} > 0$ (što slijedi iz leme 5.4.1) primjenom tvrdnje *(1)* propozicije 4.2.4 dobivamo $|x_n| \cdot \delta^{-1} \geq 1_{\mathbb{Q}}$. Na isti način, množeći posljednju nejednakost s

$|x_n|^{-1}$ dobivamo $\delta^{-1} \geq |x_n|^{-1}$ što vrijedi za svaki $n \geq n_0$.

Dokažimo sada da je (y_n) Cauchyjev niz. Neka je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz, postoji m_0 takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$, za koje je $m, n \geq m_0$, vrijedi $|x_m - x_n| < (\delta \cdot \delta) \cdot \epsilon$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka su $m, n \geq k_0$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= |x_m^{-1} - x_n^{-1}| \\ &= |(x_m^{-1} \cdot x_n^{-1}) \cdot (x_n - x_m)| \\ &= (|x_m^{-1}| \cdot |x_n^{-1}|) \cdot |x_n - x_m| \\ &\leq (\delta^{-1} \cdot \delta^{-1}) \cdot |x_m - x_n| \\ &< (\delta^{-1} \cdot \delta^{-1}) \cdot ((\delta \cdot \delta) \cdot \epsilon) \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili tvrdnju iz dokaza propozicije 4.2.4 da je $ac < bc$ ako su $a, b, c \in \mathbb{Q}$ takvi da je $a < b$ i $c > 0_{\mathbb{Q}}$. Dakle, $|y_m - y_n| < \epsilon$ za sve $m, n \geq k_0$ pa je prema tome (y_n) Cauchyjev niz.

Neka je $n \geq n_0$. Imamo $x_n \cdot y_n = x_n \cdot x_n^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$. Prema tome, $x_n \cdot y_n - 1_{\mathbb{Q}} = 0_{\mathbb{Q}}$ za svaki $n \geq n_0$. Iz ovoga zaključujemo da niz $(x_n \cdot y_n - 1_{\mathbb{Q}})_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema $0_{\mathbb{Q}}$. Stoga je $(x_n \cdot y_n) \sim (1_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, ...)$ pa je $[(x_n \cdot y_n)] = 1_{\mathbb{R}}$.

Definirajmo $b = [(y_n)]$. Imamo:

$$a \cdot b = [(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n \cdot y_n)] = 1_{\mathbb{R}},$$

odnosno $a \cdot b = 1_{\mathbb{R}}$. Time smo dokazali da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ polje. □

5.5 Uređaj na skupu realnih brojeva

Na $\mathbb{R}$ definiramo binarnu relaciju $<$ na sljedeći način:

$a < b$ ako postoje Caucyjevi nizovi (x_n) i (y_n) te $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ takvi da je $a = [(x_n)]$, $b = [(y_n)]$ i $x_n + \epsilon \leq y_n$ za svaki $n \geq n_0$.

Propozicija 5.5.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada za sve Cauchyjeve nizove (x_n) i (y_n) takve da je $a = [(x_n)]$ i $b = [(y_n)]$ postoje $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_n + \epsilon \leq y_n$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Iz $a < b$ slijedi da postoje Cauchyjevi nizovi (α_n) i (β_n) te $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $a = [(\alpha_n)]$, $b = [(\beta_n)]$ i

$$\alpha_n + \epsilon \leq \beta_n, \text{ za svaki } n \geq n_0. \tag{5.4}$$

Neka su (x_n) i (y_n) Cauchyjevi nizovi takvi da je $a = [(x_n)]$ i $b = [(y_n)]$. Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Imamo $[(x_n)] = [(\alpha_n)]$ pa je $(x_n) \sim (\alpha_n)$ što nadalje povlači da $x_n - \alpha_n \to 0_{\mathbb{Q}}$. Prema tome, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$|x_n - \alpha_n| < \tau \cdot (\tau\epsilon).$$

Analogno zaključujemo da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi

$$|y_n - \beta_n| < \tau \cdot (\tau\epsilon).$$

Odaberimo $l_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $l_0 \geq n_0$, $l_0 \geq m_0$ i $l_0 \geq k_0$. Neka je $n \geq l_0$.
Iz $|x_n - \alpha_n| < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ slijedi $x_n - \alpha_n < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ pa je

$$x_n < \alpha_n + \tau \cdot (\tau\epsilon). \tag{5.5}$$

Iz $|\beta_n - y_n| = |y_n - \beta_n| < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ slijedi $\beta_n - y_n < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ pa je

$$\beta_n < y_n + \tau \cdot (\tau\epsilon). \tag{5.6}$$

Iz (5.4), (5.5) i (5.6) slijedi

$$\begin{aligned}
x_n + \tau \cdot (\tau\epsilon) + \tau\epsilon &< (\alpha_n + \tau \cdot (\tau\epsilon)) + \tau \cdot (\tau\epsilon) + \tau\epsilon \\
&= \alpha_n + (\tau + \tau) \cdot \tau\epsilon + \tau\epsilon \\
&= \alpha_n + \tau\epsilon + \tau\epsilon \\
&= \alpha_n + (\tau + \tau) \cdot \epsilon \\
&= \alpha_n + \epsilon \\
&\leq \beta_n \\
&< y_n + \tau \cdot (\tau\epsilon).
\end{aligned}$$

Dakle, $x_n + \tau \cdot (\tau\epsilon) + \tau\epsilon < y_n + \tau \cdot (\tau\epsilon)$. Dodavanjem $-\tau(\cdot\tau\epsilon)$ lijevoj i desnoj strani posljednje nejednakosti dobivamo $x_n + \tau\epsilon < y_n$. Dakle, za svaki $n \geq l_0$ vrijedi $x_n + \epsilon' < y_n$, gdje je $\epsilon' = \tau\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 5.5.2. *(i) Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada $a \nless a$.*

(ii) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ i $b < c$. Tada je $a < c$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $a < a$. Odaberimo $(x_n) \in \mathscr{C}$ takav da je $a = [(x_n)]$. Iz propozicije 5.5.1 slijedi da postoje $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n + \epsilon \leq x_n$. Odaberimo neki $n \geq n_0$. Iz $x_n + \epsilon \leq x_n$, dodavanjem $-x_n$ lijevoj i desnoj strani nejednakosti, slijedi da je $\epsilon \leq 0_{\mathbb{Q}}$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$.

(ii) Neka su $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathscr{C}$ takvi da je $a = [(x_n)]$, $b = [(y_n)]$ i $c = [(z_n)]$. Iz propozicije 5.5.1 i $a < b$ slijedi da postoje $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n + \epsilon \leq y_n. \tag{5.7}$$

Analogno zaključujemo da postoje $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ i $m_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$y_n + \delta \leq z_n. \tag{5.8}$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka je $n \geq k_0$. Primjenom (5.7) i (5.8) imamo

$$x_n + \epsilon \leq y_n < y_n + \delta \leq z_n,$$

odnosno $x_n + \epsilon \leq z_n$ iz čega zaključujemo da je $a < c$ što smo i trebali dokazati. □

Na $\mathbb{R}$ definiramo relaciju $\leq$ na sljedeći način:

$$a \leq b \text{ ako je } a < b \text{ ili } a = b.$$

Propozicija 5.5.3. *Relacija $\leq$ je parcijalni uređaj na skupu $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Očito je $a = a$ za svaki $a \in \mathbb{R}$. Prema tome, $\leq$ je refleksivna relacija na $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq a$. Tvrdimo da je $a = b$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a \neq b$. Tada je $a < b$ i $b < a$ pa iz tvrdnje *(ii)* propozicije 5.5.2 slijedi $a < a$, a to je u kontradikciji s tvrdnjom *(i)* iste propozicije. Prema tome, $a = b$ pa je $\leq$ antisimetrična relacija na $\mathbb{R}$.

Pretpostavimo da su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq c$. Tvrdimo da je $a \leq c$. Ovo je očito ako je $a = b$ ili $b = c$. Pretpostavimo stoga da je $a \neq b$ i $b \neq c$. Tada je $a < b$ i $b < c$ pa prema tvrdnji (ii) propozicije 5.5.2 slijedi $a < c$. Stoga je $a \leq c$. Zaključujemo da je $\leq$ tranzitivna relacija na $\mathbb{R}$.

Dakle, $\leq$ je parcijalni uređaj na skupu $\mathbb{R}$. □

Lema 5.5.4. *Neka je (z_n) Cauchyjev niz takav da za svaki $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoje $m, n \geq N$ takvi da je $z_n < \epsilon$ i $z_m > -\epsilon$. Tada $z_n \to 0_{\mathbb{Q}}$.*

Dokaz. Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Uočimo da je $\tau < 1_{\mathbb{Q}}$. Naime, u suprotnome bi vrijedilo da je $1_{\mathbb{Q}} \leq \tau$ pa bi slijedilo $1_{\mathbb{Q}} + 1_{\mathbb{Q}} \leq \tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$, tj. $1_{\mathbb{Q}} + 1_{\mathbb{Q}} \leq 1_{\mathbb{Q}}$, a što bi povlačilo $1_{\mathbb{Q}} \leq 0_{\mathbb{Q}}$ što je nemoguće.

Neka je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$, za koje je $m, n \geq n_0$, vrijedi

$$|z_m - z_n| < \tau \cdot (\tau\epsilon). \tag{5.9}$$

S druge strane, prema pretpostavci ove leme, postoje $m, n \geq n_0$ takvi da je

$$z_n < \tau \cdot (\tau\epsilon) \tag{5.10}$$

i $z_m > -\tau \cdot (\tau\epsilon)$. Iz (5.9) slijedi da je $z_m - z_n < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ pa je $z_m < z_n + \tau \cdot (\tau\epsilon)$. Iz (5.10) slijedi da je $z_n + \tau \cdot (\tau\epsilon) < \tau \cdot (\tau\epsilon) + \tau \cdot (\tau\epsilon) = \tau\epsilon$. Stoga je

$$z_m < \tau\epsilon. \tag{5.11}$$

Nadalje, iz $\tau < 1_{\mathbb{Q}}$ i $\tau\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ slijedi $\tau \cdot (\tau\epsilon) < \tau\epsilon$. Iz $-\tau \cdot (\tau\epsilon) < z_m$ slijedi $-z_m < \tau \cdot (\tau\epsilon)$ pa je

$$-z_m < \tau\epsilon. \tag{5.12}$$

Iz (5.11) i (5.12) zaključujemo da je

$$|z_m| < \tau\epsilon. \tag{5.13}$$

Neka je $k \geq n_0$. Koristeći (5.9) i (5.13) dobivamo

$$\begin{aligned}
|z_k - 0_{\mathbb{Q}}| &= |z_k| \\
&= |z_k - z_m + z_m| \\
&\leq |z_k - z_m| + |z_m| \\
&< \tau \cdot (\tau\epsilon) + \tau\epsilon \\
&< \tau\epsilon + \tau\epsilon \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $|z_k - 0_{\mathbb{Q}}| < \epsilon$ za svaki $k \geq n_0$. Zaključujemo da $z_k \to 0_{\mathbb{Q}}$. □

Propozicija 5.5.5. *Relacija $\leq$ je uređaj na skupu $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 5.5.3 relacija $\leq$ je parcijalni uređaj na $\mathbb{R}$.

Ostaje još dokazati da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $a \leq b$ ili $b \leq a$. U tu svrhu dovoljno je dokazati sljedeće:

ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a \nless b$ i $b \nless a$, onda je $a = b$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a \nless b$ i $b \nless a$. Odaberimo Cauchyjeve nizove (x_n) i (y_n) takve da je $a = [(x_n)]$ i $b = [(y_n)]$. Iz $a \nless b$ slijedi da za svaki $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq n_0$ takav da je $x_n + \epsilon > y_n$, odnosno $\epsilon > y_n - x_n$. Isto tako, iz $b \nless a$ slijedi da za svaki $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji $m \geq n_0$ takav da je $y_m + \epsilon > x_m$, odnosno $y_m - x_m > -\epsilon$.

Neka je (z_n) niz u $\mathbb{Q}$ definiran sa $z_n = y_n - x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Niz (z_n) je Cauchyjev, a prema navedenome, za svaki $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoje $m, n \geq n_0$ takvi da je $z_n < \epsilon$ i $z_n > -\epsilon$. Iz prethodne leme 5.5.4 slijedi da $z_n \to 0_{\mathbb{Q}}$. Dakle, $y_n - x_n \to 0_{\mathbb{Q}}$ pa zaključujemo da je $(x_n) \sim (y_n)$. Prema tome, $[(x_n)] = [(y_n)]$, tj. $a = b$. Time je ova propozicija dokazana. □

Propozicija 5.5.6. *Uređena četvorka* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *je uređeno polje.*

Dokaz. Znamo da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ polje prema teoremu 5.4.6 i da je $\leq$ uređaj na $\mathbb{R}$ prema propoziciji 5.5.5.

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b$. Tvrdimo da je $a + c \leq b + c$. To je jasno ako je $a = b$ (jer je tada $a + c = b + c$).
Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada je $a < b$. Odaberimo $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathscr{C}$ takve da je $a = [(x_n)]$, $b = [(y_n)]$ i $c = [(z_n)]$. Iz $a < b$ slijedi da postoje $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n + \epsilon \leq y_n$. Slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $(x_n + \epsilon) + z_n \leq y_n + z_n$, tj.

$$(x_n + z_n) + \epsilon \leq y_n + z_n.$$

Budući da je $a + c = [(x_n + z_n)]$ i $b + c = [(y_n + z_n)]$ vidimo da je $a + c < b + c$, pa posebno i $a + c \leq b + c$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da su $0_{\mathbb{R}} \leq a$ i $0_{\mathbb{R}} \leq b$. Tvrdimo da je $0_{\mathbb{R}} \leq a \cdot b$. To je jasno u slučaju $a = 0_{\mathbb{R}}$ ili $b = 0_{\mathbb{R}}$. Naime, prema propoziciji 1.0.18 tada vrijedi $a \cdot b = 0_{\mathbb{R}}$.
Pretpostavimo da je $a \neq 0_{\mathbb{R}}$ i $b \neq 0_{\mathbb{R}}$. Tada je $0_{\mathbb{R}} < a$ i $0_{\mathbb{R}} < b$. Odaberimo $(x_n), (y_n) \in \mathscr{C}$ takve da je $a = [(x_n)]$ i $b = [(y_n)]$. Znamo da je $0_{\mathbb{R}} = [(0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, ...)]$. Iz $0_{\mathbb{R}} < a$ slijedi da postoje $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $0_{\mathbb{Q}} + \epsilon \leq x_n$, tj.

$$\epsilon \leq x_n.$$

Iz $0_{\mathbb{R}} < b$ slijedi da postoje $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ i $m_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $0_{\mathbb{Q}} + \delta \leq y_n$, tj.

$$\delta \leq y_n.$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka je $n \geq k_0$. Tada je $\epsilon \leq x_n$ i $\delta \leq y_n$. Iz propozicije 4.2.4 slijedi da je $\epsilon \cdot \delta \leq x_n \cdot y_n$. Dakle, $0_{\mathbb{Q}} + \epsilon \cdot \delta \leq x_n \cdot y_n$ za svaki $n \geq k_0$.

Budući da je $0_{\mathbb{Q}} < \epsilon \cdot \delta$ i $a \cdot b = [(x_n \cdot y_n)]$, vrijedi $0_{\mathbb{R}} < a \cdot b$.
Zaključak: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno polje. □

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ako } x \geq 0_{\mathbb{R}} \\ -x, \text{ ako } x < 0_{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Za $|x|$ kažemo da je apsolutna vrijednost realnog broja x.

Sljedeću propoziciju dokazujemo posve analogno kao propoziciju 4.3.1.

Propozicija 5.5.7. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(1) $|x| \geq 0_{\mathbb{R}}$

(2) $|x| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}}$

(3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(5) $x \leq |x|$

(6) $|-x| = |x|$

5.6 Cauchyjevi nizovi u $\mathbb{R}$

Definicija 5.6.1. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a u $\mathbb{R}$ i pišemo $x_n \to a$, ako za svaki $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$.*

Definicija 5.6.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$. Kažemo da je (x_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m, n \geq n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < \epsilon$.*

Definicija 5.6.3. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$. Kažemo da je (x_n) konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

Za $r \in \mathbb{Q}$ definirajmo

$$\overline{r} = [(r, r, ...)]\,.$$

Dakle, $\overline{r} \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $\overline{0_{\mathbb{Q}}} = 0_{\mathbb{R}}$ te da je $\overline{1_{\mathbb{Q}}} = 1_{\mathbb{R}}$.

Propozicija 5.6.4. *Neka su $r, s \in \mathbb{Q}$. Tada vrijedi:*

(1) $\overline{r+s} = \overline{r} + \overline{s}$

(2) $\overline{r} = \overline{s} \Leftrightarrow r = s$

(3) $\overline{-r} = -\overline{r}$

(4) $r < s \Leftrightarrow \overline{r} < \overline{s}$

(5) $r \leq s \Leftrightarrow \overline{r} \leq \overline{s}$

(6) $|\overline{r} - \overline{s}| = \overline{|r-s|}$

(7) $\overline{r \cdot s} = \overline{r} \cdot \overline{s}$

(8) *Ako je* $r \neq 0_{\mathbb{Q}}$, *onda je* $\overline{r^{-1}} = (\overline{r})^{-1}$.

Dokaz. *(1)* Imamo:

$$\overline{r+s} = [(r+s, r+s, ...)] = [(r, r, ...)] + [(s, s, ...)] = \overline{r} + \overline{s},$$

odnosno navedena tvrdnja uistinu vrijedi.

(2) Ako je $r = s$, onda je očito da vrijedi $\overline{r} = \overline{s}$. Obratno, pretpostavimo da je $\overline{r} = \overline{s}$. Dakle, $[(r, r, ...)] = [(s, s, ...)]$ pa je $(r, r, ...) \sim (s, s, ...)$ što povlači da niz $r - s, r - s, ...$ teži prema $0_{\mathbb{Q}}$. Iz ovoga slijedi da je $r = s$. Naime, u suprotnome bi vrijedilo $r - s \neq 0_{\mathbb{Q}}$, tj. $|r-s| > 0_{\mathbb{Q}}$ te bi tada za $\epsilon = |r-s|$ vrijedilo $|(r-s)-0_{\mathbb{Q}}| < \epsilon$, tj. $|r-s| < |r-s|$ što je nemoguće.

(3) Prema *(1)* vrijedi

$$\overline{r} + \overline{-r} = \overline{r + (-r)} = \overline{0_{\mathbb{Q}}} = 0_{\mathbb{R}},$$

pa je $\overline{-r} = -\overline{r}$ čime je tvrdnja dokazana.

(4) Neka je $r < s$. Definirajmo $\epsilon = s - r$. Očito je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Vrijedi $r + \epsilon = s$, posebno $r + \epsilon \leq s$, pa zaključujemo da je $[(r, r, ...)] < [(s, s, ...)]$, odnosno $\overline{r} < \overline{s}$. Obratno, pretpostavimo da postoji $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $r + \epsilon \leq s$. Iz $0_{\mathbb{Q}} < \epsilon$ slijedi da je $r < r + \epsilon$ pa iz toga slijedi da je $r < s$.

(5) Ova tvrdnja slijedi iz tvrdnji *(2)* i *(4)*.

(6) Promotrimo slučaj kada je $r - s \geq 0_{\mathbb{Q}}$. Tada je

$$\overline{|r-s|} = \overline{r-s} = \overline{r + (-s)} = \overline{r} + \overline{-s} = \overline{r} - \overline{s} = |\overline{r} - \overline{s}|$$

jer je (prema *(5)*) $\overline{r} - \overline{s} = \overline{r-s} \geq \overline{0_{\mathbb{Q}}} = 0_{\mathbb{R}}$.
Promotrimo sada slučaj kada je $r - s < 0_{\mathbb{Q}}$. Tada je

$$\overline{|r-s|} = \overline{s-r} = \overline{s} - \overline{r} = |\overline{r} - \overline{s}|$$

jer je $\overline{r} - \overline{s} < \overline{0_{\mathbb{Q}}} = 0_{\mathbb{R}}$.

(7) Imamo:

$$\overline{r \cdot s} = [(r \cdot s, r \cdot s, ...)] = [(r, r, ...)] \cdot [(s, s, ...)] = \overline{r} \cdot \overline{s}$$

čime smo pokazali da navedena tvrdnja uistinu vrijedi.

(8) Prema *(7)* vrijedi

$$\overline{r} \cdot \overline{r^{-1}} = \overline{r \cdot r^{-1}} = \overline{1_{\mathbb{Q}}} = 1_{\mathbb{R}},$$

pa je $\overline{r^{-1}} = (\overline{r})^{-1}$. □

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$n^* = \frac{[(n+1, 1)]}{1_{\mathbb{Z}}}.$$

Dakle, $n^* \in \mathbb{Q}$. Uočimo da je $1^* = 1_{\mathbb{Q}}$. Također, nije teško provjeriti da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(n+m)^* = n^* + m^*$.

Lema 5.6.5. *Neka je $q \in \mathbb{Q}$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $q < n^*$.*

Dokaz. Ako je $q \leq 0_{\mathbb{Q}}$, onda možemo uzeti $n = 1$. Pretpostavimo da je $0_{\mathbb{Q}} < q$. Tada je $q = \frac{a}{b}$, gdje su $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Iz leme 3.4.3 slijedi da je $a = [(a_1, a_2)]$ i $b = [(b_1, b_2)]$, gdje su $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $a_2 < a_1$ i $b_2 < b_1$. Iz posljednje nejednakosti slijedi da je $1 + b_2 \leq b_1$ pa je $2 + b_2 \leq b_1 + 1$ što povlači da je $[(2, 1)] \leq [(b_1, b_2)]$, tj. $1_{\mathbb{Z}} \leq b$. Iz propozicije 3.4.7 slijedi $a \cdot 1_{\mathbb{Z}} \leq a \cdot b$ pa je

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{1_{\mathbb{Z}}}. \tag{5.14}$$

Vrijedi $[(a_1, a_2)] < [(a_1 + 1, 1)]$ jer je $a_1 + 1 < (a_1 + 1) + a_2$. Stoga je $\frac{a}{1_{\mathbb{Z}}} < \frac{[(a_1 + 1, 1)]}{1_{\mathbb{Z}}}$, tj. za $n = a_1 + 1$ imamo

$$\frac{a}{1_{\mathbb{Z}}} < n^*. \tag{5.15}$$

Iz (5.14) i (5.15) slijedi $\frac{a}{b} < n^*$, tj. $q < n^*$ što je i trebalo dokazati. □

Propozicija 5.6.6. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $a < \overline{r}$.*

Dokaz. Imamo $a = [(x_n)]$, gdje je $(x_n) \in \mathscr{C}$. Neka je $\epsilon = 1_{\mathbb{Q}}$. Tada je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m, n \geq n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < \epsilon$. Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - x_{n_0}| < \epsilon$.

Neka je $n \geq n_0$. Slijedi $x_n - x_{n_0} < \epsilon$ pa je $x_n < x_{n_0} + \epsilon$. Nadalje, $x_n + \epsilon < (x_{n_0} + \epsilon) + \epsilon$. Definirajmo $r = x_{n_0} + \epsilon + \epsilon$. Dakle, $r \in \mathbb{Q}$ i $x_n + \epsilon < r$ za svaki $n \geq n_0$. Stoga je $[(x_n)] < [(r, r, ...)]$, tj. $a < \overline{r}$ što je i trebalo dokazati. □

Napomena 5.6.7. *Iz dokaza propozicije 1.0.38 je jasno da u svakom uređenom polju $(P, +, \cdot, \leq)$ vrijedi $0 \leq 1$, tj. $0 < 1$. Nadalje, vidimo da tvrdnje propozicije 4.2.4 i leme 5.4.1 vrijede u bilo kojem uređenom polju.*

Lema 5.6.8. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{Q}$ takav da je $(\overline{x_n})$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Tada je $(\overline{x_n})$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0_{\mathbb{Q}}$. Tada je $\overline{\epsilon} > 0_{\mathbb{R}}$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $|\overline{x_m} - \overline{x_n}| < \overline{\epsilon}$. Neka su $m, n \geq n_0$. Imamo $|\overline{x_m} - \overline{x_n}| = \overline{|x_m - x_n|}$ pa je $\overline{|x_m - x_n|} < \overline{\epsilon}$ što povlači $|x_m - x_n| < \epsilon$. Time zaključujemo da je (x_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{Q}$.

Neka je $a = [(x_k)]$. Tvrdimo da niz $(\overline{x_n})$ teži prema a u $\mathbb{R}$. Neka je $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$. Tada je $\epsilon^{-1} > 0_{\mathbb{R}}$ prema napomeni 5.6.7. Prema propoziciji 5.6.6 slijedi $\epsilon^{-1} < \overline{r}$ za neki $r \in \mathbb{Q}$. Stoga je $0_{\mathbb{R}} < \overline{r}$ pa zaključujemo da je $r > 0_{\mathbb{Q}}$. Iz $\epsilon^{-1} < \overline{r}$ i napomene 5.6.7 slijedi $\overline{r}^{-1} < \epsilon$, tj. $\overline{r^{-1}} < \epsilon$. Definirajmo $\delta = r^{-1}$. Tada je $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ i $\overline{\delta} < \epsilon$. Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Budući da je $(x_n) \in \mathscr{C}$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_m - x_n| < \tau \cdot \delta. \tag{5.16}$$

Neka je $n \geq n_0$. Tvrdimo da je $|\overline{x_n} - a| < \epsilon$.

Prvi slučaj: $\overline{x_n} - a \geq 0_{\mathbb{R}}$. Tada je $|\overline{x_n} - a| = \overline{x_n} - a$. Imamo:

$$\overline{x_n} - a = [(x_n, x_n, ...)] - [(x_1, x_2, ..., x_k, ...)] = [(x_n - x_1, x_n - x_2, ..., x_n - x_k, ...)] .$$

Neka je $k \geq n_0$. Koristeći (5.16) dobivamo da je $x_n - x_k \leq |x_n - x_k| < \tau \cdot \delta$, tj. $x_n - x_k < \tau \cdot \delta$ pa je $(x_n - x_k) + \tau \cdot \delta < \delta$. Dakle, posljednja nejednakost vrijedi za svaki $k \geq n_0$, a očito je $\tau \cdot \delta > 0_{\mathbb{Q}}$. Iz definicije relacije $<$ na $\mathbb{R}$ zaključujemo da je

$$[(x_n - x_1, x_n - x_2, ..., x_n - x_k, ...)] < [(\delta, \delta, ..., \delta, ...)] .$$

Dakle, $\overline{x_n} - a < \overline{\delta}$ pa slijedi $\overline{x_n} - a < \epsilon$, tj. $|\overline{x_n} - a| < \epsilon$.

Drugi slučaj: $\overline{x_n} - a < 0_{\mathbb{R}}$. Tada je $|\overline{x_n} - a| = a - \overline{x_n}$. Posve analogno kao u prvom slučaju dobivamo $a - \overline{x_n} < \epsilon$, tj. $|\overline{x_n} - a| < \epsilon$.

Dakle, $|\overline{x_n} - a| < \epsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome, niz $(\overline{x_n})$ je konvergentan u $\mathbb{R}$. □

Lema 5.6.9. *Neka su $a \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$. Tada postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $|a - \overline{r}| < \epsilon$.*

Dokaz. Imamo $a = [(x_n)]$, gdje je $(x_n) \in \mathscr{C}$. Kao u dokazu leme 5.6.8 vidimo da postoji $\delta > 0_{\mathbb{R}}$ takav da je $\overline{\delta} < \epsilon$.

Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Budući da je (x_n) Cauchyjev niz, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $|x_m - x_n| < \tau \cdot \delta$. Neka je $r = x_{n_0}$. Imamo:

$$a - \overline{r} = [(x_1, x_2, ..., x_n, ...)] - [(x_{n_0}, x_{n_0}, ..., x_{n_0}, ...)] = [(x_1 - x_{n_0}, x_2 - x_{n_0}, ..., x_n - x_{n_0}, ...)] .$$

Neka je $n \geq n_0$. Imamo $x_n - x_{n_0} \leq |x_n - x_{n_0}| < \tau \cdot \delta$. Dakle, $x_n - x_{n_0} < \tau \cdot \delta$ pa je $(x_n - x_{n_0}) + \tau \cdot \delta < \delta$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključujemo da je $a - \overline{r} < \overline{\delta}$. Stoga je $a - \overline{r} < \epsilon$. Analogno dobivamo da je $\overline{r} - a < \overline{\delta}$, odnosno $\overline{r} - a < \epsilon$. Iz svega toga slijedi da je $|a - \overline{r}| < \epsilon$. □

Lema 5.6.10. *Neka su $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Tada je $||a - b| - |a' - b'|| \leq |a - a'| + |b - b'|$.*

Dokaz. Imamo:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - a' + a' - b| \\ &\leq |a - a'| + |a' - b| \\ &= |a - a'| + |a' - b' + b' - b| \\ &\leq |a - a'| + |a' - b'| + |b' - b| \\ &= |a - a'| + |a' - b'| + |b - b'|. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$|a - b| - |a' - b'| \leq |a - a'| + |b - b'|. \tag{5.17}$$

S druge strane, imamo:

$$\begin{aligned} |a' - b'| &= |a' - a + a - b'| \\ &\leq |a' - a| + |a - b'| \\ &= |a - a'| + |a - b + b - b'| \\ &\leq |a - a'| + |a - b| + |b - b'|. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$|a' - b'| - |a - b| \leq |a - a'| + |b - b'|. \tag{5.18}$$

Uočimo da iz (5.17) i (5.18) slijedi da je $||a - b| - |a' - b'|| \leq |a - a'| + |b - b'|$ čime je tvrdnja ove leme dokazana. □

Teorem 5.6.11. *Svaki Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.*

Dokaz. Neka je (a_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $0_\mathbb{Q} < n^*$ pa je $0_\mathbb{R} < \overline{n^*}$. Prema napomeni 5.6.7 tada je $0_\mathbb{R} < (\overline{n^*})^{-1}$. Prema lemi 5.6.9 postoji $x_n \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$|a_n - \overline{x_n}| < (\overline{n^*})^{-1}. \tag{5.19}$$

Dokažimo da je $\overline{x_n}$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Neka je $\tau > 0_\mathbb{Q}$ takav da je $\tau + \tau = 1_\mathbb{Q}$. Neka je $\epsilon > 0_\mathbb{R}$. Tada postoji $\delta > 0_\mathbb{Q}$ takav da je $\overline{\delta} < \epsilon$. Budući da je (a_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_m - a_n| < \overline{\tau \cdot \delta}. \tag{5.20}$$

Prema lemi 5.6.5 postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(\tau \cdot (\tau\delta))^{-1} < m_0^*$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq m_0$ i $k_0 \geq n_0$. Neka su $m, n \geq k_0$. Tada je $m_0 \leq m$ pa je $m_0^* \leq m^*$ što nadalje povlači da je $(\tau \cdot (\tau\delta))^{-1} < m^*$. Iz toga slijedi da je $(m^*)^{-1} < \tau \cdot (\tau\delta)$ pa je $\overline{(m^*)^{-1}} < \overline{\tau \cdot (\tau\delta)}$ što naposljetku povlači da je

$$(\overline{m^*})^{-1} < \overline{\tau \cdot (\tau\delta)}. \tag{5.21}$$

Analogno dobivamo da je

$$(\overline{n^*})^{-1} < \overline{\tau \cdot (\tau\delta)}. \tag{5.22}$$

Koristeći lemu 5.6.10 i nejednakosti (5.19), (5.21) i (5.22) dobivamo

$$\begin{aligned}
|\overline{x_m} - \overline{x_n}| - |a_m - a_n| &\leq ||\overline{x_m} - \overline{x_n}| - |a_m - a_n|| \\
&\leq |\overline{x_m} - a_m| + |\overline{x_n} - a_n| \\
&= |a_m - \overline{x_m}| + |a_n - \overline{x_n}| \\
&< (\overline{m^*})^{-1} + (\overline{n^*})^{-1} \\
&< \overline{\tau \cdot (\tau\delta)} + \overline{\tau \cdot (\tau\delta)} \\
&= \overline{\tau \cdot (\tau\delta) + \tau \cdot (\tau\delta)} \\
&= \overline{\tau \cdot \delta},
\end{aligned}$$

odnosno $|\overline{x_m} - \overline{x_n}| - |a_m - a_n| < \overline{\tau \cdot \delta}$. Iz ovoga i nejednakosti (5.20) nadalje dobivamo:

$$\begin{aligned}
|\overline{x_m} - \overline{x_n}| &< \overline{\tau \cdot \delta} + |a_m - a_n| \\
&< \overline{\tau \cdot \delta} + \overline{\tau \cdot \delta} \\
&= \overline{\tau \cdot \delta + \tau \cdot \delta} \\
&= \overline{\delta} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za sve $m, n \geq k_0$ vrijedi $|\overline{x_m} - \overline{x_n}| < \epsilon$ pa je prema tome $(\overline{x_n})$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$.

Prema lemi 5.6.8 taj niz je tada konvergentan u $\mathbb{R}$. Dakle, postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da $\overline{x_n} \to b$. Tvrdimo da $a_n \to b$.
Neka je $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$. Odaberimo $\delta > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\overline{\delta} < \epsilon$. Iz $\overline{x_n} \to b$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|\overline{x_n} - b| < \overline{\tau \cdot \delta}. \tag{5.23}$$

Prema lemi 5.6.5 postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(\tau \cdot \delta)^{-1} < m_0^*$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq m_0$ i $k_0 \geq n_0$. Neka je $n \geq k_0$. Tada je $m_0 \leq n$ pa je $m_0^* \leq n^*$ što nadalje povlači da je $(\tau \cdot \delta)^{-1} < n^*$. Iz ovoga, kao i prethodno u dokazu, slijedi da je

$$(\overline{n^*})^{-1} < \overline{\tau \cdot \delta}. \tag{5.24}$$

Iz $n \geq n_0$, nejednakosti (5.19), (5.23) i (5.24) slijedi:

$$\begin{aligned}
|a_n - b| &= |a_n - \overline{x_n} + \overline{x_n} - b| \\
&\leq |a_n - \overline{x_n}| + |\overline{x_n} - b| \\
&< (\overline{n^*})^{-1} + \overline{\tau \cdot \delta} \\
&< \overline{\tau \cdot \delta} + \overline{\tau \cdot \delta} \\
&= \overline{\tau \cdot \delta + \tau \cdot \delta} \\
&= \overline{\delta} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $n \geq k_0$ vrijedi $|a_n - b| < \epsilon$ pa prema tome $a_n \to b$, tj. niz (a_n) je konvergentan u $\mathbb{R}$. Time je ovaj teorem dokazan. □

5.7 Potpunost

Definicija 5.7.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ te neka je $a \in S$. Kažemo da je a minimum (najmanji element) skupa S ako za svaki $s \in S$ vrijedi $a \leq s$.*

Lema 5.7.2. *Neka su $x, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < n + 1$. Tada je $x \leq n$.*

Dokaz. Iz $x < n + 1$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n + 1 = x + k$.
Ako je $k = 1$, onda je $n + 1 = x + 1$, pa je $x = n$, a posebno $x \leq n$.
Ako je $k \neq 1$, onda je $k = l + 1$ za neki $l \in \mathbb{N}$ pa je $n + 1 = x + (l + 1)$, tj. $n + 1 = (x + l) + 1$, pa je $n = x + l$. Dakle, $x < n$. Time je ova lema dokazana. □

Teorem 5.7.3. *Svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ ima minimum.*

Dokaz. Neka je

$\Sigma = \{ n \in \mathbb{N} \mid$ svaki podskup S od $\mathbb{N}$ za kojeg postoji $x \leq n$ takav da je $x \in S$ ima minimum$\}$.

Dokažimo indukcijom da je $\Sigma = \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}$ te da postoji $x \leq 1$ takav da je $x \in S$. Iz leme 2.3.3 slijedi da je $x = 1$. Dakle, $1 \in S$ pa iz iste leme zaključujemo da je 1 minimum od S. Prema tome, $1 \in \Sigma$.

Pretpostavimo da je $n \in \Sigma$. Dokažimo da je $n + 1 \in \Sigma$. Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}$ te da postoji $x \leq n + 1$ takav da je $x \in S$. Promotrimo sljedeća dva slučaja.

1.slučaj: Postoji $y \in S$ takav da je $y < n + 1$.
Prema lemi 5.7.2 vrijedi $y \leq n$. Iz $n \in \Sigma$ slijedi da S ima minimum.

2.slučaj: Za svaki $y \in S$ ne vrijedi $y < n + 1$, tj. $y \not< n + 1$.
Iz napomene 2.3.8 slijedi da za svaki $y \in S$ vrijedi $n + 1 \leq y$. Posebno, $n + 1 \leq x$ što zajedno s $x \leq n + 1$ daje $x = n + 1$. Dakle, $n + 1 \in S$. Stoga je $n + 1$ minimum od S.

Zaključak: $n + 1 \in \Sigma$. Prema tome, $\Sigma = \mathbb{N}$.

Neka je S neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Odaberimo $n \in S$. Za $x = n$ vrijedi $x \leq n$ i $x \in S$ pa iz $n \in \Sigma$ slijedi da S ima minimum. Time je ovaj teorem dokazan. □

Definicija 5.7.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq a$.*

Lema 5.7.5. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b \leq c$. Tada je $|b - a| \leq c - a$.*

Dokaz. Imamo $0_{\mathbb{R}} \leq b - a$ pa je $|b - a| = b - a$. Iz $b \leq c$ i suglasnosti $\leq$ te operacije $+$ slijedi $b - a \leq c - a$. Prema tome, $|b - a| \leq c - a$. □

Teorem 5.7.6. *Uređena četvorka $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je potpuno uređeno polje.*

Dokaz. Pretpostavimo da su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$. Želimo dokazati da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$.

Odaberimo $x_0 \in S$. Ako je x_0 gornja međa skupa S, onda smo gotovi (jer možemo uzeti $z = x_0$). Pretpostavimo da x_0 nije gornja međa skupa S. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$\delta_n = (\overline{n^*})^{-1}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_0 + \overline{k^*} \cdot \delta_n$ gornja međa od S. Odaberimo $y_0 \in T$. Iz leme 5.6.5 i propozicije 5.6.6 slijedi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $y_0 - x_0 < \overline{m^*}$. Neka je $k = m \cdot n$. Imamo

$$\overline{k^*} \cdot \delta_n = \overline{(m \cdot n)^*} \cdot (\overline{n^*})^{-1} = \overline{m^* \cdot n^*} \cdot \overline{(n^*)^{-1}} = \overline{m^* \cdot n^* \cdot (n^*)^{-1}} = \overline{m^*},$$

pa je $y_0 - x_0 < \overline{k^*} \cdot \delta_n$. Stoga je $y_0 < x_0 + \overline{k^*} \cdot \delta_n$. Prema pretpostavci teorema svaki element skupa T je gornja međa skupa S, posebno i y_0, pa je $x_0 + \overline{k^*} \cdot \delta_n$ gornja međa od S. Prema tome, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_0 + \overline{k^*} \cdot \delta_n$ gornja međa od S.

Neka je $A = \{ k \in \mathbb{N} \mid x_0 + \overline{k^*} \cdot \delta_n \text{ gornja međa od } S \}$. Imamo $A \neq \emptyset$ pa prema teoremu 5.7.3 A ima minimum. Označimo ga s k_{min}. Dakle, $k_{min} \in A$ pa je $x_0 + \overline{k^*_{min}} \cdot \delta_n$ gornja međa od S. Definirajmo a_n na ovaj način:

$$a_n = (x_0 + \overline{k^*_{min}} \cdot \delta_n) - \delta_n.$$

Tvrdimo da a_n nije gornja međa od S. Ako je $k_{min} = 1$, onda je $a_n = x_0$ pa je jasno da a_n nije gornja međa od skupa S. Pretpostavimo da je $k_{min} \neq 1$. Tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $k_{min} = l + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned}
a_n &= (x_0 + \overline{(l+1)^*} \cdot \delta_n) - \delta_n \\
&= (x_0 + \overline{l^* + 1^*} \cdot \delta_n) - \delta_n \\
&= (x_0 + (\overline{l^*} + \overline{1^*}) \cdot \delta_n) - \delta_n \\
&= x_0 + \overline{l^*} \cdot \delta_n + 1_{\mathbb{R}} \cdot \delta_n - \delta_n \\
&= x_0 + \overline{l^*} \cdot \delta_n + \delta_n - \delta_n \\
&= x_0 + \overline{l^*} \cdot \delta_n.
\end{aligned}$$

Dakle, $a_n = x_0 + \overline{l^*} \cdot \delta_n$. Uočimo da je $l < k_{min}$, pa stoga $l \notin A$. Prema tome, $x_0 + \overline{l^*} \cdot \delta_n$ nije gornja međa od S, tj. a_n nije gornja međa od S.
Zaključak: Imamo niz (a_n) u $\mathbb{R}$ takav da je $a_n + \delta_n$ gornja međa od S za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali a_n nije gornja međa od S.

Tvrdimo da je (a_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Budući da a_n nije gornja međa od S, postoji $s_1 \in S$ takav da je $a_n < s_1$. Isto tako, postoji $s_2 \in S$ takav da je $a_m < s_2$. Neka je

$$s = \begin{cases} s_1, \text{ ako } s_1 > s_2 \\ s_2, \text{ inače.} \end{cases}$$

Tada je $s \in S$ i $s_1 \leq s$, $s_2 \leq s$. Slijedi $a_n < s$ i $a_m < s$. Budući da je $a_n + \delta_n$ gornja međa od S, vrijedi $s \leq a_n + \delta_n$. Dakle, $a_n < s \leq a_n + \delta_n$ pa iz leme 5.7.5 slijedi da je tada

$|s - a_n| \leq \delta_n$. Isto tako vrijedi $|s - a_m| \leq \delta_m$. Stoga je

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - s + s - a_n| \\
&\leq |a_m - s| + |s - a_n| \\
&= |s - a_m| + |s - a_n| \\
&\leq \delta_m + \delta_n.
\end{aligned}$$

Dakle, za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|a_m - a_n| \leq \delta_m + \delta_n. \tag{5.25}$$

Neka je $\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$. Kao u dokazu leme 5.6.8 dobivamo da postoji $\rho > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\overline{\rho} < \varepsilon$. Neka je $\tau > 0_{\mathbb{Q}}$ takav da je $\tau + \tau = 1_{\mathbb{Q}}$. Prema lemi 5.6.5 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(\tau \cdot \rho)^{-1} < n_0^*$. Slijedi $(n_0^*)^{-1} < \tau \cdot \rho$ pa je

$$(\overline{n_0^*})^{-1} < \overline{\tau \cdot \rho}. \tag{5.26}$$

Neka su $m, n \geq n_0$. Tada je $n_0^* \leq n^*$ pa je $(n^*)^{-1} \leq (n_0^*)^{-1}$ što nadalje povlači $\overline{(n^*)^{-1}} \leq \overline{(n_0^*)^{-1}}$, tj. $(\overline{n^*})^{-1} \leq (\overline{n_0^*})^{-1}$. Isto tako vrijedi $(\overline{m^*})^{-1} \leq (\overline{n_0^*})^{-1}$. Dakle, $\delta_n, \delta_m \leq (\overline{n_0^*})^{-1}$. Sada, iz (5.25) i (5.26) slijedi:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq \delta_m + \delta_n \\
&\leq (\overline{n_0^*})^{-1} + (\overline{n_0^*})^{-1} \\
&< \overline{\tau \cdot \rho} + \overline{\tau \cdot \rho} \\
&= \overline{\tau \cdot \rho + \tau \cdot \rho} \\
&= \overline{\rho} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pa zaključujemo da je (a_n) Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$.

Prema teoremu 5.6.11 niz (a_n) je konvergentan pa postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $a_n \to z$. Tvrdimo da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$. Neka je $x \in S$. Pretpostavimo da je $z < x$. Tada je $x - z > 0_{\mathbb{R}}$ pa je $\overline{\tau} \cdot (x - z) > 0_{\mathbb{R}}$. Iz $a_n \to z$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - z| < \overline{\tau} \cdot (x - z)$. Kao i maloprije, zaključujemo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(\overline{m^*})^{-1} < \overline{\tau} \cdot (x - z)$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \geq n_0$ i $k \geq m$. Tada je $(\overline{k^*})^{-1} \leq (\overline{m^*})^{-1}$ pa je $(\overline{k^*})^{-1} < \overline{\tau} \cdot (x - z)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|(a_k + \delta_k) - z| &= |(a_k - z) + \delta_k| \\
&\leq |a_k - z| + |\delta_k| \\
&= |a_k - z| + (\overline{k^*})^{-1} \\
&< \overline{\tau} \cdot (x - z) + \overline{\tau} \cdot (x - z) \\
&= (\overline{\tau} + \overline{\tau}) \cdot (x - z) \\
&= (\overline{\tau + \tau}) \cdot (x - z) \\
&= x - z.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(a_k + \delta_k) - z| < x - z$ pa posebno $(a_k + \delta_k) - z < x - z$. Slijedi $a_k + \delta_k < x$, no ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $a_k + \delta_k$ gornja međa skupa S. Dakle, ne vrijedi $z < x$ pa prema tome imamo $x \leq z$.

Neka je $y \in T$. Pretpostavimo da je $y < z$. Tada je $z - y > 0_{\mathbb{R}}$ pa zbog $a_n \to z$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - z| < z - y$ za svaki $n \geq m_0$. Odaberimo $n \geq m_0$. Imamo:

$$z - a_n \leq |z - a_n| = |a_n - z| < z - y.$$

Dakle, vrijedi $z - a_n < z - y$ iz čega slijedi $y < a_n$. Budući da je y gornja međa od S (jer je $y \in T$), imamo da je a_n gonja međa od S. No to je u kontradikciji s definicijom niza (a_n). Prema tome, $z \leq y$.

Dakle, imamo $x \leq z$ i $z \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$. Time smo dokazali da je $(\mathbb{R}, \leq)$ potpuno uređen skup. Prema tome, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je potpuno uređeno polje. $\square$

Literatura

1. Kurepa, S.: *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
2. Mardešić, S.: *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
3. Pavković, B., Veljan, D.: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijeljen je na pet većih tematskih poglavlja kroz koje se provodi konstrukcija skupa realnih brojeva, odnosno jednog potpuno uređneog polja.

Prvo poglavlje sadrži definicije osnovnih pojmova. To su pojmovi binarnih operacija i binarnih relacija na nepraznom skupu i njihova svojstva te pojmovi različitih algebarskih struktura.

U drugom poglavlju opisani su aksiomi prirodnih brojeva, definirane operacije zbrajanja i množenja na skupu prirodnih brojeva uz njihova svojstva te konstruiran uređaj na istom skupu.

Skup cijelih brojeva, operacije zbrajanja i množenja te uređaj na njemu definirani su u trećem poglavlju.

Četvrto poglavlje sadrži konstrukciju skupa racionalnih brojeva te već spomenute pojmove uz dodatnu izgradnju koncepta apsolutne vrijednosti apsolutnog broja.

Peto poglavlje započinje pojmom niza i njegove konvergencije. Uz definiciju Cauchyjeva niza u skupu racionalnih brojeva i relacije ekvivalencije na skupu Cauchyjevih nizova dolazi se do definicije skupa realnih brojeva. Nakon toga, uz izgradnju operacija zbrajanja i množenja te uređaja na skupu realnih brojeva, preko Cauchyjevih nizova na tom skupu i dokaza da su oni konvergentni dolazi se do konačnog koncepta potpuno uređenog polja.

Summary

This graduate thesis is divided into five major thematic chapters through which the construction of a set of real numbers, that is, a completely ordered field, is shown.

The first chapter contains the definitions of basic notions. These are the notions of binary operations and binary relations on a nonempty set and their properties, as well as the concepts of various algebraic structures.

In the second chapter we give the axioms of natural numbers, we define addition and multiplication on the set of natural numbers, we prove their properties and construct an order on the same set.

The set of integers, addition, multiplication and the order on it are defined in the third chapter.

The fourth chapter contains the construction of the set of rational numbers and the aforementioned concepts with the additional concept of the absolute value of a rational number.

The fifth chapter begins with the concept of a sequence and its convergence. With the definition of Cauchy sequence in the set of rational numbers and the relation of equivalence at the Cauchy sequence, a definition of a set of real numbers comes up. Thereafter, along with the construction of the addition, multiplication and the order on the set of real numbers, through Cauchy sequences in that set and the proof that they are convergent, comes the ultimate concept of a completely ordered field.

Životopis

Vedran Levanić rođen je 11.2.1991. u Varaždinu. Svoje školovanje započinje pohađanjem osnovne škole Ivana Kukuljevića Sakcinskog u Ivancu. 2010. godine završava program opće gimnazije u Srednjoj školi Ivanec te se iste godine upisuje na preddiplomski studij matematike (nastavnički smjer) Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Usavršavanje svoga obrazovanja nastavlja 2014. godine na diplomskom studiju matematike (nastavnički smjer) na istom fakultetu, a uspješno ga završava u rujnu 2017. godine.