Neki stari japanski teoremi o elipsama

Marinov, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Marinov

NEKI STARI JAPANSKI TEOREMI O ELIPSAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U povijesti matematike jedno po mnogo čemu iznimno i specifično poglavlje pripada japanskoj tradiciji zadataka, većinom geometrijskih, ispisanih i oslikanih na drvenim pločicama, takozvanim *sangaku*, izloženima u Shinto svetištima i budističkim hramovima diljem Japana. Počeci ove tradicije u kojoj su matematički problemi spojeni s religijskim i umjetničkim aspektima zabilježeni su još u 17. stoljeću u doba dinastije Edo, a do procvata *sangaku* matematike došlo je u razdoblju gotovo posvemašnje izolacije Japana od europskih utjecaja, dakle od sredine 17. do sredine 19. stoljeća.

Neki od najvažnijih sangakua pojavili su se u periodu od 1868.-1912. godine, a rade se sve do danas. Autori bi napisali zadatak ili teorem, rjeđe i rješenje ili dokaz, posvećujući ih bogovima kao znak zahvalnosti, a ujedno i kao izazov promatraču da sam riješi zadani problem. Najviše su bili zastupljeni geometrijski problemi, uglavnom apstraktni, ali ponekad i praktične prirode. Osobito su popularni bili problemi o složenim konfiguracijama sastavljenima od krugova, elipsi, kvadrata i drugih pravilnih likova, s izraženom umjetničkom komponentom. Neki od sangaku problema ostali su do danas neriješeni, pripadajući tako *idai* tradiciji prenošenja neriješenih zadataka sljedećim naraštajima. Posebnost *sangakua* je i u tome što ih nisu pisali samo vrsni matematičari već su u tome sudjelovali pripadnici različitih društvenih slojeva i zanimanja, no naročite zasluge za njihovo širenje i u najzabačenijim područjima imali su samuraji, kao društvena i intelektualna elita.

U zapadnom svijetu zanimanje za ovu japansku matematičku tradiciju pojačano je u posljednjih tridesetak godina, zahvaljujući engleskim prijevodima zbirki *sangaku* problema nastalih dugogodišnjim radom japanskih entuzijasta koji su još od prve polovice 19. stoljeća putovali zemljom u potrazi za matematičkim dragocjenostima ove vrste. *Sangaku* tradicija danas je zanimljiva povjesničarima matematike kao primjer razvoja matematike u izolaciji, a također kao oblik izražavanja matematičkih ideja kroz umjetnost i religiju. U nekim školama učitelji primjenjuju sangaku zadatke kako bi učenicima približili geometriju na taj posebno slikovit način.

Iz *sangakua* je proizašla i tema ovog diplomskog rada u kojem ćemo izložiti neke složenije teoreme vezane uz elipsu, naime za neke posebne položaje elipse u odnosu međusobnog diranja s drugim konikama i njihovim zajedničkim tangentama. Sami problemi su lako razumljivi, ali rješenja nisu nimalo jednostavna. U radu većim dijelom slijedimo članak J. Marshalla Ungera u kojem su povezani, poopćeni, odnosno na novi i sažetiji način dokazani neki rezultati japanskih matematičara iz 18. i 19. stoljeća.

Prvo poglavlje je pripremno te u njemu iznosimo poznate činjenice o krivuljama 2. reda (konikama) koje će se koristiti u glavnim rezultatima. Posebno, potrebne su nam invarijante pomoću kojih se prepoznaje tip konike iz opće jednadžbe. To je dio standardnog gradiva Analitičke geometrije. Dodatno, navodimo i dokazujemo teorem o tzv. ortooptičkoj kružnici, kao geometrijskom mjestu točaka ravnine iz kojih su parovi tangenti na zadanu elipsu međusobno okomiti.

Dva glavna rezultata koji su izloženi u radu ukratko ćemo, radi jednostavnosti, nazivati *Teraov teorem* i *Shiraishijeva formula*, a to su ujedno i naslovi drugog i trećeg poglavlja. Povijest ovih rezultata donekle je zapletena utoliko što primarni autori nisu uvijek objavljivali dokaze, a kasniji dokazi ponekad su vrlo komplicirani ili se nalaze u izvorima teže dostupnima izvan područja japanskog jezika. Sažeto formulirano, J. Marshall Unger uočio je kako se dio Teraovog dokaza prvog razmatranog teorema može primijeniti za bitno pojednostavljenje dokaza jedne propozicije iz koje lako slijedi Shiraishijeva formula. Dodatne pojedinosti navest ćemo u uvodu dotičnih poglavlja.

U zadnjem, četvrtom poglavlju, koje nije izravno povezano s prethodnima, to jest s Ungerovim člankom, ukratko ćemo prikazati jedan iznimno težak problem postavljen 1821. godine, koji je djelomično riješen i algebarski protumačen tek nedavno.

Poglavlje 1

Neki rezultati o krivuljama drugog reda

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama x i y

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

gdje su $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata A, B, C nije 0. Skup

$$\mathscr{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\right\}$$

nazivamo krivuljom drugog reda.
Posebni primjeri krivulja drugog reda su kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.
Degenerirana konika je konika koja nije ireducibilna krivulja. To znači da se jednadžba krivulje ne može faktorizirati u skupu kompleksnih brojeva kao produkt dvaju linearnih polinoma.
Želimo pokazati da je skup $\mathscr{K}$ uvijek jedna od tih poznatih krivulja uključujući i različite degenerirane konike. Pritom, bitno je odrediti invarijante krivulje, to jest takve funkcije koeficijenata jednadžbe krivulje čija se vrijednost ne mijenja promjenom koordinatnog sustava, tako da već iz opće jednadžbe možemo izračunavanjem tih vrijednosti odrediti tip krivulje. To ćemo napraviti tako da uvedemo novi Kartezijev koordinatni sustav u kojem će promatrani skup biti opisan već poznatim jednadžbama.
U prvom koraku, rotacijom koordinatnog sustava za pogodni kut možemo postići da nestane član koji sadrži produkt xy. U drugom koraku, prikladnom translacijom koordinatnog sustava uklonit ćemo iz jednadžbe članove 1. stupnja, dakle one koji sadrže samo x i y.
Rotacija pravokutnog koordinatnog sustava za kut φ u pozitivnom smjeru zadana je jednadžbama oblika

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned}$$

Primjenom te rotacije dobivamo oblik

$$f(x',y') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F'$$

u kojoj

$$B' = (C - A)\cos\varphi\sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\varphi + B\cos\varphi$$

Kut rotacije izabrat ćemo tako da B' bude jednako 0, odnosno:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{A - C}{2B}.$$

Sada polinom f glasi:

$$f(x', y') = A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F'$$

Nadalje, translacijom $x' = x'' + v, y' = y'' + w$ dobiva se oblik:

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= A'(x'' + v)^2 + C'(y'' + w)^2 + 2D'(x'' + v) + 2E'(y'' + w) + F' \\ &= A''x''^2 + C''y''^2 + sD''c'' + 2E''y'' + F''. \end{aligned}$$

Promotrimo sada neke posebne slučajeve. Ako su oba A' i C' različiti od 0, tj. $A'C' \neq 0$, tada iz uvjeta $D'' = 0, E'' = 0$ možemo jednoznačno odrediti v i w

$$v = -\frac{D'}{A'}, w = -\frac{E'}{C'}, \tag{1.1}$$

pa dobivamo da polinom f ima oblik:

$$f(x'', y'') = A'x'^2 + C'y'^2 + F''$$

Analizirajmo sada jednadžbu $f(x'', y'') = 0$.
Ako je $F'' = 0$ tada jednadžba (1.1) postaje

$$A'x'^2 + C'y'^2 = 0,$$

a to nam predstavlja
(i) točku $(0, 0)$; ukoliko su A', C' istog predznaka,
(ii) par ukrštenih pravaca; ukoliko su A', C' različitih predznaka. Jednadžbe tih pravaca su:

$$y'' = \pm\sqrt{-\frac{A'}{C'}}x''.$$

Ako je $F'' \neq 0$ (i kao otprije $A'C' \neq 0$) imamo:
(i) Ako su oba A', C' istog predznaka, ali suprotnog od f'' dobivamo

$$\frac{x''^2}{-\frac{F''}{A'}} + \frac{y''^2}{-\frac{F''}{C'}} = 1,$$

a to predstavlja **elipsu**.
(ii) Ako su A', C' različitih predznaka, npr. $A' > 0, C' < 0$ i neka je npr. $f'' < 0$ dobivamo:

$$\frac{x''^2}{-\frac{F''}{A'}} - \frac{y''^2}{-\frac{F''}{C'}} = 1,$$

a to predstavlja **hiperbolu**.
(iii) Ako su A', C', F'' istog predznaka, za skup $\mathscr{K}$ dobivamo prazan skup $\emptyset$, odnosno nema točke iz $\mathbb{R}^2$ koja zadovoljava jednadžbu $f(x'', y'') = 0$.
Pretpostavimo da vrijedi $A'C' \neq 0$. Pokaže se da

$$A'C' = AC - B^2$$

gdje su A, B, C koeficijenti početnog polinoma f. Ako polinomu $f(x, y)$ pridružimo determinantu

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

a polinomu $f(x', y')$ determinantu

$$\begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = A'C' = AC - B^2$$

vidimo da su te determinante jednake. Slično se provjeri i da je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & F'' \end{vmatrix}.$$

Definirajmo još jednu veličinu $S = A + C$,

$$S = tr \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

koju nazivamo trag matrice. Možemo provjeriti da vrijedi $S = A' + C'$.
Ispišimo dobiveno u tablicu:

<table>
<tr><td rowspan="5">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="3">$\delta>0$</td><td>$\Delta \neq 0, S\Delta<0$ elipsa</td></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0, S\Delta>0$ prazan skup</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ točka</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta<0$</td><td>$\Delta \neq 0$ hiperbola</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ par ukrštenih pravaca</td></tr>
</table>

Promotrimo situaciju kad je $\delta = A'C' = AC - B^2 = 0$, odnosno kad je jedan od A', C' jednak 0. Vidimo da, ukoliko je $\delta = 0$, a $\Delta \neq 0$ dobivamo **parabolu**. Ako je $\Delta = 0$, $T := D^2 + E^2 - (A + C)F$, ovisno o T imamo:
(i) $T > 0$ dva paralelna pravca;
(ii) $T = 0$ jedan (dvostruki) pravac;
(iii) $T < 0$ prazan skup.
Krivulje za koje je $\delta \neq 0$ zovu se centralne. To su krivulje koje imaju samo jedan centar ili središte, točku s obzirom na koju su centralnosimetrične. U nedegeneriranom slučaju, to su elipsa i hiperbola. Primijetimo također da su nedegenerirane krivulje opisane sa $\Delta \neq 0$.
Uočimo još jednu relaciju za slučaj elipse, koja će nam kasnije biti korisna.
Iz reducirane jednadžbe elipse vidimo da za poluosi vrijedi:

$$a^2 = -\frac{F''}{A'}, b^2 = -\frac{F''}{C'}$$

pa je

$$a^2 b^2 = \frac{(F'')^2}{A'C'}.$$

Budući da je $\delta = A'C'$, a $\Delta = A'C'F''$, lako dobijemo

$$a^2 b^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}.$$

Teorem 1.1. *Ako je jednadžbom $f(x, y) = 0$ zadana centralnosimetrična konika $\mathscr{C}$, onda se njezino središte nalazi u sjecištu pravaca zadanih jednadžbama $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.*

Dokaz. Neka je jednadžba konike $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Ako konika ima centar, njegove koordinate su (g, h), pa onda svakoj točki konike (x, y) odgovara simetrična točka (x', y'), pri čemu je $g = \frac{x+x'}{2}$, $h = \frac{y+y'}{2}$ središte te ujedno polovište tetive koja spaja te dvije točke. iz toga slijedi $x = 2g - x'$, $y = 2h - y'$.
Uvrstimo u jednadžbu konike:

$$A(2g - x')^2 + 2B(2g - x')(2h - y') + C(2h - y')^2 + 2D(2g - x') + 2E(2h - y') + F = 0$$
$$A(4g^2 - 4gx' + x'^2) + 2B(4gh - 2gy' - 2hx' + x'y') + C(4h^2 - 4hy' + y'^2) + 4Dg-$$
$$-2Dx' + 4Eh - 2Ey' + F = 0$$
$$4Ag^2 - 4Agx' + Ax'^2 + 8Bgh - 4Bgy' - 4Bhx' + 2Bx'y' + 4Ch^2 - 4Chy' + Cy'^2 + 4Dg-$$
$$-2Dx' + 4Eh - 2Ey' + F = 0$$

Faktor uz x' je: $-4Ag - 4Bh - 2D$, a to mora biti jednako $2Dx'$, pa je

$$-4Ag - 4Bh - 2D = 2D$$
$$Ag + Bh + D = 0$$

Iz člana sa y' dobivamo $Bg + Ch + E = 0$.
Dakle, (g, h) je rješenje ovog sustava, a provjerom vidimo da se i ostali članovi jednadžbe napisani u x', y' podudaraju sa odgovarajućim članovima jednadžbe u x, y kada su ispunjene te dvije jednadžbe (sustav ima jednoznačno rješenje jer je $AC - B^2 \neq 0$, odnosno sustav je Cramerov.) Iste jednadžbe za g i h dobiju se parcijalnim deriviranjem jednadžbe po x, odnosno po y. □

Teorem 1.2. *Neka je konika $\mathscr{C}$ elipsa s poluosima duljine a i b. Tada se svi parovi međusobno okomitih tangenti na elipsu $\mathscr{C}$ sijeku u točkama kružnice K čije se središte podudara sa središtem elipse, a radijus te kružnice je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Obrnuto, svakom točkom kružnice K prolaze dvije međusobno okomite tangente na elipsu $\mathscr{C}$. Tu kružnicu nazivamo ortooptička ili Fermat - Apolonijeva kružnica.*

Dokaz. Uočimo da je kružnica K opisana pravokutniku opisanom elipsi, kojem su stranice paralelne i jednake osima te elipse. Dijagonale tog pravokutnika su dva promjera kružnice K. Iz vrhova tog pravokutnika tangente na elipsu su upravo pravci na kojima leže stranice pravokutnika.
Ako dokažemo to svojstvo za elipsu sa središtem u ishodištu i osima elipse na koordinatnim osima pravokutnog koordinatnog sustava, svojstvo će vrijediti i za elipsu u bilo kojem položaju u koordinatnom sustavu jer se neće promijeniti primjenom rotacije i translacije.
Dakle, možemo uzeti elipsu s jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Jednadžba kružnice K tada glasi $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
Treba pokazati da se parovi međusobno okomitih tangenti na elipsu sijeku u točkama ove kružnice. Sad prelazimo na dokaz teorema, koji provodimo za elipsu s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2}$$

Neka je (x_0, y_0) bilo koja točka izvan elipse, dakle točka kojom prolaze dvije tangente. Postavimo opću jednadžbu pravca tom točkom,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1.3}$$

i odredimo uvjet da taj pravac dira elipsu, a dobit ćemo dva rješenja za odgovarajuće koeficijente smjera k, recimo k_1 i k_2. Nama treba samo uvjet da su te tangente okomite, dakle $k_1 k_2 = -1$, a pojedine k_1 i k_2 ne treba računati. Umnožak nije jednak -1 kada imamo horizontalne i vertikalne tangente, ali to su tangente kroz vrhove pravokutnika i za njih već znamo da leže na kružnici K.

Uvrštavajući $y = k(x - x_0) + y_0$ u (1.2) dobivamo:

$$b^2x^2 + [k(x - x_0) + y_0]\, a^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 + a^2\left[k^2(x - x_0)^2 + 2ky_0(x - x_0) + y_0^2\right] = a^2b^2$$
$$b^2x^2 + a^2k^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + 2a^2ky_0x - 2a^2kx_0y_0 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 - 2a^2k^2x_0x + a^2k^2x_0^2 + 2a^2ky_0x - 2a^2kx_0y_0 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$
$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + (-2a^2k^2x_0 + 2a^2ky_0)x + a^2k^2x_0^2 - 2a^2kx_0y_0 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Da bi pravac bio tangenta na elipsu, diskriminanta mora biti jednaka 0, pa onda dobivamo:

$$\frac{(-2a^2k^2x_0 + 2a^2ky_0)^2}{4} - (a^2k^2 + b^2)(a^2k^2x_0^2 - 2a^2kx_0y_0 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0$$
$$a^4k^4x_0^2 - 2a^4k^3x_0y_0 + a^4k^2y_0^2 - (a^4k^4x_0^2 - 2a^4k^3x_0y_0 + a^4k^2y_0^2 - a^4k^2b^2 + k^2x_0^2a^2b^2 - 2ky_0x_0a^2b^2 +$$
$$+ y_0^2a^2b^2 - a^2b^4) = 0$$
$$a^4k^4x_0^2 - 2a^4k^3x_0y_0 + a^4k^2y_0^2 - a^4k^4x_0^2 + 2a^4k^3x_0y_0 - a^4k^2y_0^2 + a^4k^2b^2 - k^2x_0^2a^2b^2 -$$
$$+ 2ky_0x_0a^2b^2 - y_0^2a^2b^2 + a^2b^4 = 0$$
$$a^2b^2(-k^2a^2 + k^2x_0^2 - 2kx_0y_0 + y_0^2 - b^2) = 0$$
$$(x_0^2 - a^2)k^2 + 2x_0y_0k + y_0^2 - b^2 = 0$$

Po Viéteovim formulama znamo da je umnožak rješenja te jednadžbe $\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$, mi želimo da vrijedi:

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1$$

Dobivamo:

$$y_0^2 - b^2 = -(x_0^2 - a^2)$$

i to je upravo

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

što je i trebalo dokazati. □

Napomena 1.3. *Navedena kružnica kod hiperbole ima radijus $\sqrt{a^2 - b^2}$, pa je moguće da ne postoji u Euklidskoj ravnini, ali jest kružnica sa radijusom kao imaginarnim brojem u kompleksnoj ravnini.*

Prisjetimo se također pojma homotetija.

Definicija 1.4. *Neka je O točka ravnine i $k \neq 0$ realan broj. Homotetija je preslikavanje h skupa točaka ravnine, koje svakoj točki T pridružuje točku $T' = h(T)$ tako da vrijedi:*

(i) točke O, T, T' leže na istom pravcu;
(ii) ako je $k > 0$ onda T' leži na polupravcu OT, a ako je $k < 0$, onda T' ne leži na polupravcu OT;
(iii) $|OT'| = |k|\,|OT|$.

Ako je u ravnini zadan koordinatni sustav s ishodištem O, čije osi nisu nužno okomiti pravci homotetija sa središtem O i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$ je preslikavanje koje točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (kx, ky)$.
Uočimo da se primjenom homotetije krivulja drugog reda preslikava u krivulju drugog reda istog tipa.

Poglavlje 2

Teraov teorem

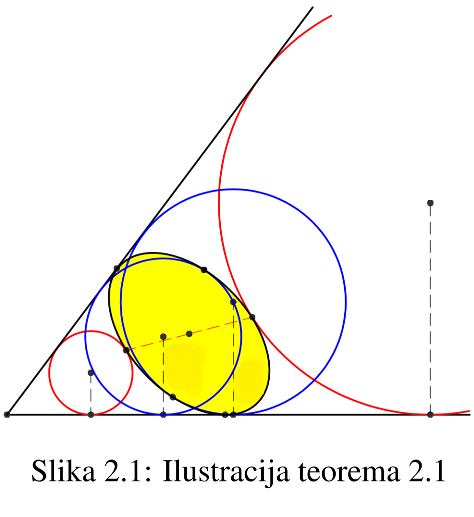
Prvi rezultat kojim ćemo se baviti glasi ovako:

Teorem 2.1. *Neka je zadana elipsa ili hiperbola te dvije njezine tangente koje se sijeku. Promotrimo elipse ili hiperbole koje su međusobno homotetične, a diraju prvu koniku i obje zadane tangente, Ako konike koje diraju prvu koniku izvana imaju velike osi duljina* a_1 *i* a_4*, a konike koje diraju prvu koniku iznutra imaju velike osi duljina* a_2 *i* a_3*, onda vrijedi*

$$a_1 : a_2 = a_3 : a_4.$$

Analogno, za male osi tih konika vrijedi

$$b_1 : b_2 = b_3 : b_4.$$



Slika 2.1: Ilustracija teorema 2.1

Ovaj teorem nadalje ćemo nazivati Teraov teorem, jer ga je u svom članku iz 1885. godine dokazao Terao Hisashi (1855.-1923.), inače osnivač moderne astronomije u Japanu. No, taj teorem predstavlja poopćenje izvorne verzije rezultata koji se odnosi na elipsu i parove kružnica koje diraju tu elipsu, izvana i iznutra, a imaju i zajednički par tangenti s elipsom. U tom slučaju riječ je, dakako, o omjerima dijametara odgovarajućih kružnica - $d_1 : d_2 = d_3 : d_4$, odnosno jednakosti umnožaka $d_1 d_4 = d_2 d_3$.
Na slici 2.1 vidimo ilustraciju tog slučaja, pri čemu su dijametri "crvenih" kružnica d_1 i d_4, a "plavih" d_2 i d_3. Rezultat je prvi objavio Senpei "Kosan" Iwata 1877. godine, ali bez dokaza, navodeći kako ga je otkrio 1866. i da ima dokaz, u opsegu od čak 52 stranice. Teorem je izazvao zanimanje drugih matematičara pa se uskoro pojavilo nekoliko dokaza i poopćenja, među njima i navedeni Teraov teorem. (Ove rezultate prikazao je na engleskom jeziku Y. Mikami, koji ih je time učinio dostupnima znatno širem krugu matematičara). Za dokaz Teraovog teorema bit će potrebno izvesti pogodan oblik jednadžbe konike u koordinatnom sustavu čije osi su tangente konike i sijeku se u ishodištu.

Propozicija 2.2. *Neka je zadan koordinatni sustav s ishodištem O čije osi nisu nužno okomiti pravci i neka su te osi tangente konike $\mathscr{C}$ u točkama na udaljenosti a, odnosno b od ishodišta. Tada se jednadžba konike $\mathscr{C}$ može napisati u obliku*

$$k^2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2-4xy=0 \tag{2.1}$$

za neki $k > 0$.

Dokaz. Imamo opću jednadžbu konike:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{2.2}$$

Uočimo da jednadžba konike ima ovakav oblik bez obzira na to je li koordinatni sustav pravokutni ili nije. Pretpostavimo da je konika nedegenerirana pa se taj polinom ne može faktorizirati. Koordinatne osi su tangente na koniku, a točke dirališta su $(a, 0)$ i $(0, b)$. Ako je $y = 0$, tada je $(a, 0)$ dvostruka točka zajednička s konikom, a ako je $x = 0$ tada je $(0, b)$ dvostruka točka zajednička s konikom. Uočimo da je $F \neq 0$ jer bi u suprotnom ishodište pripadalo konici, a to je nemoguće jer bi u tom slučaju obje koordinatne osi imale tri točke na konici, pa bi se konika sastojala od ta dva pravca. Uvrštavajući u (2.2) $y = 0$ dobivamo:

$$Ax^2+2Dx+F=0.$$

Znamo da ta jednadžba mora imati $x = a$ kao dvostruko rješenje, pa je diskriminanta te kvadratne jednadžbe jednaka 0. Uvrstimo u diskriminantu i imamo:

$$4D^2-4AF=0,$$

odnosno,

$$D^2 = AF.$$

Iz Viéteovih formula znamo da je

$$a = -\frac{D}{A}.$$

Analogno za $x = 0$ dobivamo:

$$E^2 = CF$$

te također imamo:

$$b = -\frac{E}{C}.$$

Znamo da $D = -aA$ i $D^2 = AF$ pa dobivamo

$$A = \frac{F}{a^2}$$

te da $E = -bC$ i $E^2 = CF$ pa dobivamo

$$C = \frac{F}{b^2}.$$

Sada vidimo da je

$$D = -aA = -a \cdot \frac{F}{a^2} = -\frac{F}{a}$$

i

$$E = -bC = -b \cdot \frac{F}{b^2} = -\frac{F}{b}.$$

Uvrštavanjem u (2.2) dobivamo:

$$\frac{F}{a^2}x^2 + 2Bxy + \frac{F}{b^2}y^2 - \frac{2F}{a}x - \frac{2F}{b}y + F = 0.$$

Čitavu jednadžbu sada podijelimo sa F, pri čemu $F \neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2B}{F}xy + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2}{a}x - \frac{2}{b}y + 1 = 0.$$

Prepoznajemo da lako možemo nadopuniti do kvadrata:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} + 2B\frac{xy}{F} = 0,$$

odnosno,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{B}{F} - \frac{1}{ab}\right)xy = 0.$$

Budući da pretpostavljamo da je konika nedegenerirana, a $xy > 0$ jer točke konike su u I. i III. kvadrantu, mora biti

$$\frac{B}{F} - \frac{1}{ab} < 0.$$

Možemo izabrati $k > 0$ tako da bude

$$\frac{B}{F} - \frac{1}{ab} = -\frac{2}{k^2},$$

pa onda jednadžba konike poprima oblik

$$k^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 4xy = 0.$$

□

Napomena 2.3. *Iz jednadžbe* (2.1) *možemo zaključiti da je konika* $\mathscr{C}$ *elipsa, odnosno hiperbola, ovisno o tome je li vrijednost* $k^2 - ab$ *pozitivna ili negativna. Naime, izračunavanjem vrijednosti* δ, Δ *i* S *(v. 1. poglavlje) za koniku s jednadžbom* (2.1) *dobivamo:*

$$\delta = \frac{4(k^2 - ab}{ab}, \Delta = -4k^2, S = k^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Vidimo da je konika $\mathscr{C}$ *elipsa za* $k^2 - ab > 0$*, odnosno hiperbola za* $k^2 - ab < 0$*.*

U sljedećem koraku izvest ćemo jednadžbe zajedničkih sekanti dviju konika s jednadžbom oblika (2.1). Pomoću tih jednadžbi odredit ćemo uvjete međusobnog dodira dviju konika, kao granični slučaj zajedničkih sekanti. Neka su:

$$Q \equiv k^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 4xy = 0 \tag{2.3}$$

i

$$P \equiv k'^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right)^2 - 4xy = 0 \tag{2.4}$$

dvije konike u promatranom položaju, to jest da su koordinatne osi njihove zajedničke tangente. Pomoću tih jednadžbi odredit ćemo uvjete međusobnog dodira dviju konika tako što ćemo postojanje zajedničke tangente izraziti kao granični slučaj sekante, kad zajednička tetiva prelazi u diralište. Jednadžbu takve zajedničke sekante dobivamo jednostavno kao

$$Q - P \equiv k^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - k'^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right)^2 = 0.$$

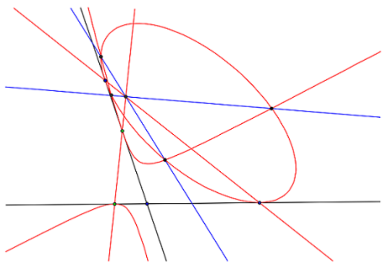
Naime, za sjecište tih konika vrijedi $Q(x, y) = P(x, y)$, odnosno $Q(x, y) - P(x, y) = 0$, a jednadžba $Q - P$ faktorizira se u produkt dviju linearnih jednadžbi. To su jednadžbe zajedničkih sekantu dviju konika i to onih sekanti koje prolaze sjecištem pravaca

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1 = 0$$

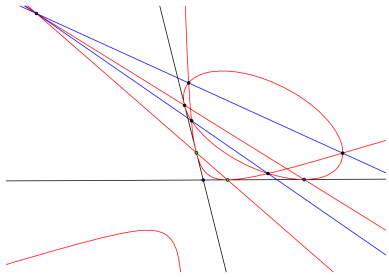
i

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} - 1 = 0,$$

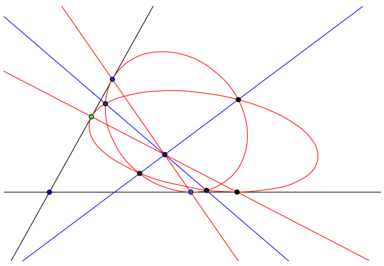
na kojima se nalaze dirališta konika sa zajedničkom tangentom.



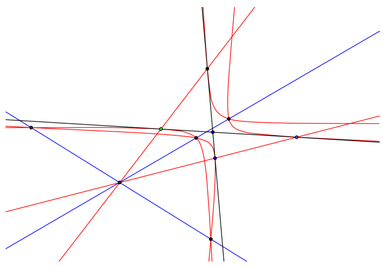
Slika 2.2: Položaj 1



Slika 2.3: Položaj 2



Slika 2.4: Položaj 3



Slika 2.5: Položaj 4

Njihove jednadžbe su:

$$k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = \pm k'\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right) = 0,$$

tj. jedna tetiva je:

$$\left(\frac{k}{a} + \frac{k'}{a'}\right)x + \left(\frac{k}{b} + \frac{k'}{b'}\right)y = k + k',$$

a druga je:

$$\left(\frac{k}{a}-\frac{k'}{a'}\right)x+\left(\frac{k}{b}-\frac{k'}{b'}\right)y=k-k'.$$

Propozicija 2.4. *Pretpostavimo da se konike Q i P s jednadžbama* (2.3) *i* (2.4) *međusobno diraju. Tada vrijedi jedna od jednakosti:*

$$E\equiv k^2k'^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)-(k+k')^2=0$$

ili

$$I\equiv k^2k'^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)-(k-k')^2=0.$$

Dokaz. Uzmemo da je konika Q čvrsta, to jest da su vrijednosti a, b, k čvrste, a da konika P varira na taj način da se krajnje točke zajedničke tetive dovedu do podudaranja. To znači da ćemo iz jednadžbe zajedničkih sekanti izvesti uvjet za a', b', k' kako bi dva sjecišta pala u istu točku. Počevši od prve zajedničke sekante i pretpostavljajući da je $\frac{k}{a}+\frac{k'}{a'}\neq 0$, koristimo jednadžbu sekante da izrazimo y, tj.

$$y=\frac{k+k'-\left(\frac{k}{a}+\frac{k'}{a'}\right)x}{\frac{k}{b}+\frac{k'}{b'}}.$$

Imamo:

$$\left(\frac{k}{a}+\frac{k'}{a'}\right)x+\left(\frac{k}{b}+\frac{k'}{b'}\right)y=k+k',$$

$$Q\equiv k^2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2-4xy=0.$$

Treba dobiti:

$$E\equiv k^2k'^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)-(k+k')^2=0$$

$$\Leftrightarrow k^2k'^2\left(a'-a\right)\left(b'-b\right)=aa'bb'\left(k+k'\right)^2.$$

y možemo zapisati kao:

$$y=-\frac{\frac{k}{a}+\frac{k'}{a'}}{\frac{k}{b}+\frac{k'}{b'}}+\frac{k+k'}{\frac{k}{b}+\frac{k'}{b'}}.$$

Stavimo da je:

$$c=\frac{\frac{k}{a}+\frac{k'}{a'}}{\frac{k}{b}+\frac{k'}{b'}}=\frac{(ak'+a'k)\,bb'}{(bk'+b'k)\,aa'}$$

i

$$d = \frac{(k + k')\, bb'}{kb' + bk'},$$

tako da $y = -cx + d$.
Tako izražen y uvrstit ćemo u Q, dobiti kvadratnu jednadžbu u varijabli x te postaviti uvjet da joj diskriminanta bude 0. Odatle treba dobiti E.
Računamo Q (prvo smo podijelili $Q = 0$ s k^2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2}{ab}x(-cx + d) - \frac{2}{a}x - \frac{2}{b}(-cx + d) + 1 - \frac{4}{k^2}x(-cx + d) = 0.$$

Sredimo članove uz x^2, x i slobodni član:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{ab} + \frac{4c}{k^2}\right)x^2 + 2\left(-\frac{cd}{b^2} + \frac{d}{ab} - \frac{1}{a} + \frac{c}{b} - \frac{2d}{k^2}\right)x + \left(\frac{d^2}{b^2} - \frac{2d}{b} + 1\right) = 0.$$

Sada vidimo da je slobodni član:

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{2d}{b} + 1 = \frac{d^2 - 2bd + b^2}{b^2} = \left(\frac{b - d}{b}\right)^2.$$

Uz x^2 je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{ab} + \frac{4c}{k^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{c}{b}\right)^2 + \frac{4c}{k^2},$$

a uz x se nalazi

$$\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right) - \frac{b}{d}\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right) - \frac{2d}{k^2} = \left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{d}\right) - \frac{2d}{k^2}.$$

Dakle:

$$\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{c}{b}\right)^2 + \frac{4c}{k^2}\right]x^2 + 2\left[\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{d}\right) - \frac{2d}{k^2}\right]x + \left(1 - \frac{b}{d}\right)^2.$$

Označimo li diskriminantu ovog polinoma stupnja 2 s D_0, onda je

$$\frac{D_0}{4} = \left[\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)^2\left(1 - \frac{d}{b}\right)^2 + \frac{4d^2}{k^4} - \frac{4d}{k^2}\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{d}{b}\right)\right] - \left(\frac{1}{a} - \frac{c}{b}\right)^2\left(1 - \frac{d}{b}\right)^2 - \frac{4c}{k^2}\left(1 - \frac{d}{b}\right)^2.$$

Ostaje:

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{4}{k^2}\left[\frac{d^2}{k^2} - d\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{d}{b}\right) - c\left(1 - \frac{d}{b}\right)^2\right].$$

Vidimo da je $\Delta = 0$ ako i samo ako

$$\frac{d^2}{k^2} - d\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{d}{b}\right) - c\left(1 - \frac{d}{b}\right)^2 = 0$$

ili

$$\frac{d^2}{k^2} = \left(1 - \frac{d}{b}\right)\left[d\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{a}\right) + c\left(1 - \frac{d}{b}\right)\right]$$

$$\frac{d^2}{k^2} = \left(1 - \frac{d}{b}\right)\left(c - \frac{d}{a}\right)$$

$$\frac{d^2}{k^2} = \frac{(b-d)(ac-d)}{ab}.$$

Izračunajmo sada:

$$b - d = b - \frac{bb'(k+k')}{bk' + b'k} = \frac{bk'(b-b')}{bk' + b'k},$$

$$ac - d = \frac{abb'(ak' + a'k)}{(bk' + b'k)aa'} - \frac{(k+k')bb'}{bk' + b'k} = \frac{bb'k'(a-a')}{(bk' + b'k)a'}.$$

Tada je:

$$\frac{(b-d)(ac-d)}{ab} = \frac{bb'k'^2(b-b')(a-a')}{aa'(bk' + b'k)^2}$$

$$\frac{d^2}{k^2} = \frac{(k+k')^2 b^2 b'^2}{k^2(kb' + bk')^2}.$$

Izjednačavanjem:

$$(k+k')^2 b^2 b'^2 = k^2 \frac{bb'k'^2(b-b')(a-a')}{aa'(bk' + b'k)^2}$$

$$(k+k')^2 = k^2 k'^2 \frac{(a-a')(b-b')}{aa'bb'}$$

$$(k+k')^2 = (kk')^2\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$$

ili

$$k^2 k'^2\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right) - (k+k')^2 = 0$$

što je jednadžba E.
Ako je $\frac{k}{b} + \frac{k'}{b'} = 0$ i $\frac{k}{a} + \frac{k'}{a'} \neq 0$ izrazimo x iz jedne od jednadžbi sekanti:

$$x = \frac{k + k' - \left(\frac{k}{b} + \frac{k'}{b'}\right)y}{\frac{k}{a} + \frac{k'}{a'}},$$

uvrstimo u jednadžbu sekante Q i dobivamo kvadratnu jednadžbu po y, koja nam je ista kao i prethodna.
Analogno, uzmemo li drugu sekantu, ako $\frac{k}{b} - \frac{k'}{b'} = 0$ i $\frac{k}{a} - \frac{k'}{a'} \neq 0$ dobivamo

$$I \equiv k^2 k'^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) - (k - k')^2 = 0.$$

□

Kako uzimamo da je Q fiksan, možemo reći da P pripada tipu E ili tipu I, ovisno o tome koju tetivu uzimamo. Ako $\frac{k}{b} + \frac{k'}{b'} = 0$ i $\frac{k}{a} + \frac{k'}{a'} = 0$ tada ne postoji konika tipa E koja dodiruje Q, a ako $\frac{k}{b} - \frac{k'}{b'} = 0$ i $\frac{k}{a} - \frac{k'}{a'} = 0$, ne postoji konika tipa I koja dodiruje Q. To se događa kad su Q i P homotetične.
Dvije elipse ili dvije hiperbole (ili elipsa i hiperbola) koje dodiruju obje osi i međusobno se dodiruju, izvana se dodiruju ako i samo ako njihova središta leže na suprotnim stranama (ili istim stranama) zajedničke tangente. Dodir koji nije vanjski je unutarnji. Sada dokazujemo da je dodir krivulja P i Q uvijek vanjski za P tipa E.
Pretpostavimo da je zajednička tangenta od P i Q pravac $t(x, y) = 0$. Ako su središta od Q i P (g, h) i (g', h'), tada $t(g, h) \neq 0$ i $t(g', h') \neq 0$ jer središta sigurno ne leže na tangenti. Predznaci od $t(g, h)$ i $t(g', h')$ su jednaki ako i samo ako (g, h) i (g', h') leže u istoj poluravnini. Predznak od $\frac{t(g,h)}{t(g',h')}$ je pozitivan kada leže u istoj poluravnini.
Pošto je konika Q simetrična, pravci $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ sijeku se u njenom središtu, pa rješavamo jednadžbe $\frac{k^2}{a}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1) - 2y = 0$ i $\frac{k^2}{b}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1) - 2x = 0$ istovremeno da nađemo njegove koordinate. Za Q dobivamo

$$g = \frac{k^2 a}{2(k^2 - ab)}, h = \frac{k^2 b}{2(k^2 - ab)}.$$

Isto tako, za P,

$$g' = \frac{k'^2 a'}{2(k'^2 - a'b')}, h' = \frac{k'^2 b'}{2(k'^2 - a'b')}.$$

Ako započnemo sa prvom zajedničkom sekantom, tada Q pripada tipu E i

$$t(x, y) = (\frac{k}{a} + \frac{k'}{a'})x + ((\frac{k}{b} + \frac{k'}{b'}) - (k + k').$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
t(g,h) &= \frac{k^2}{k^2-ab} + \frac{k^2k'}{2(k^2-ab)}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right) - (k+k') \\
&= \frac{(k+k')ab - k^2k'}{k^2-ab} + \frac{k^2k'}{2(k^2-ab)}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right) \\
&= \frac{(k+k')ab}{k^2-ab} - \frac{k^2k'}{k^2-ab}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right)\right) \\
&= -\frac{ab}{k^2-ab}\left(\frac{kk'^2}{ab}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right)\right) - (k+k')\right).
\end{aligned}$$

Isto tako,

$$t(g',h') = -\frac{a'b'}{k'^2-a'b'}\left(\frac{kk'^2}{a'b'}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)\right) - (k+k')\right).$$

Onda imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{-k'(k^2-ab)}{ab}t(g,h) &= \frac{k^2k'^2}{ab}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right)\right) - k'(k+k'), \\
\frac{-k(k'^2-a'b')}{a'b'}t(g',h') &= \frac{k^2k'^2}{a'b'}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)\right) - k(k+k').
\end{aligned}$$

E možemo zapisati kao:

$$\frac{k^2k'^2}{ab}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}\right)\right) - k'(k+k') + \frac{k^2k'^2}{a'b'}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)\right) - k(k+k') = 0.$$

Dakle, $\frac{-k'(k^2-ab)}{ab}t(g,h) + \frac{-k(k'^2-a'b')}{a'b'}t(g',h') = 0$ i

$$\frac{t(g,h)}{t(g',h')} = \frac{-k'(k^2-ab)}{ab}\cdot\frac{a'b'}{k(k'^2-a'b')}.$$

Pošto su a, b, k, a', b', k' su svi pozitivni, predznak od $\frac{t(g,h)}{t(g',h'}$ ovisi u potpunosti o predznaku od k^2-ab i $k'^2-a'b'$. Kao što smo primijetili prije, to je pozitivno za elipsu, a negativno za hiperbolu. Predznak od $\frac{t(g,h)}{t(g',h')}$ je dakle negativan kada su Q i P obje elipse ili obje hiperbole, a pozitivan kada je jedna elipsa, a druga hiperbola. Tada središta leže na suprotnim stranama u prvom slučaju, a u drugom na istoj strani. Za P tipa E dodir je uvijek vanjski. Možemo dokazati da se krivulje P tipa I dodiruju iznutra na isti način ponavljajući prethodni postupak počevši od jednadžbe druge zajedničke sekante umjesto prve.
Sad, ako izaberemo član od Q sa jednadžbom

$$P_0 = k_0^2\left(\frac{x}{a_0}+\frac{y}{b_0}-1\right)^2 - 4xy = 0,$$

tada za svaku koniku homotetičnu sa P_0 postoji konstanta λ takva da $a' = \lambda a_0, b' = \lambda b_0$ i $k' = \lambda k_0$. Sada je P oblika:

$$P \equiv k_0^2 \left(\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} - \lambda \right)^2 - 4xy = 0,$$

za neki $\lambda > 0$. Jednadžbe velikih i malih osi konika određenih sa P su linearne i homogene jer su osi paralelne sa odgovarajućim osima od P_0. Ako su m, M duljine male i velike osi konike P_0, a m_0, M_0 duljine male i velike osi konike P, tada vrijedi $M = \lambda M_0$ i $m = \lambda m_0$.
Iz istog razloga, uvjet dodira E i I možemo preoblikovati u:

$$k^2 k_0^2 \left(\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a_0} \right) \left(\frac{\lambda}{b_0} - \frac{1}{b_0} \right) - (\lambda k_0 \pm k)^2 = 0,$$

gdje se podrazumijeva da biramo znak plus ako želimo dobiti jednadžbu od E, a znak minus ako želimo dobiti jednadžbu od I. Izražena kao kvadratna u λ, jednadžba glasi:

$$k_0^2 \left(\frac{k^2}{ab} - 1 \right) \lambda^2 - kk_0 \left(\frac{1}{ab_0} + \frac{1}{a_0 b} \pm 2 \right) \lambda + k^2 \left(\frac{k_0^2}{a_0 b_0} - 1 \right)^2 = 0.$$

Njezinim rješavanjem dobivamo dvije vrijednosti λ za E i dvije za I.
Umnožak oba para rješenja je jednak jer su vodeći koeficijenti i slobodni članovi u obje jednadžbe jednaki. Zapišemo produkt kao $\lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3$, pa dobivamo $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}$ i

$$\frac{m_1}{\lambda_1} = \frac{m_2}{\lambda_2} = \frac{m_3}{\lambda_3} = \frac{m_4}{\lambda_4} = m_0,$$

tako da se jednaki omjeri odnose i na odgovarajuće osi konika koje dodiruju Q i njezine dvije tangente.
Ovim smo dokazali Teraov teorem, od kojeg je Iwatin poseban slučaj kada Q predstavlja elipsu, a P kružnicu.

Poglavlje 3

Shiraishijeva formula

U japanskoj zbirci matematičkih problema *Sanpo Jojutsu* iz 1841. godine navodi se sljedeća tvrdnja, kao Propozicija 98:
Neka je elipsa s velikom osi p i malom osi q upisana u pravokutnik sa stranicama duljine m i n. Ako kružnica promjera d dodiruje elipsu izvana, a dvije susjedne stranice pravokutnika iznutra, tada vrijedi:

$$mn + \sqrt{m^2n^2 - p^2q^2} - 2\left(m + n + \sqrt{mn - \sqrt{m^2n^2 - p^2q^2}}\right)d + d^2 = 0.$$

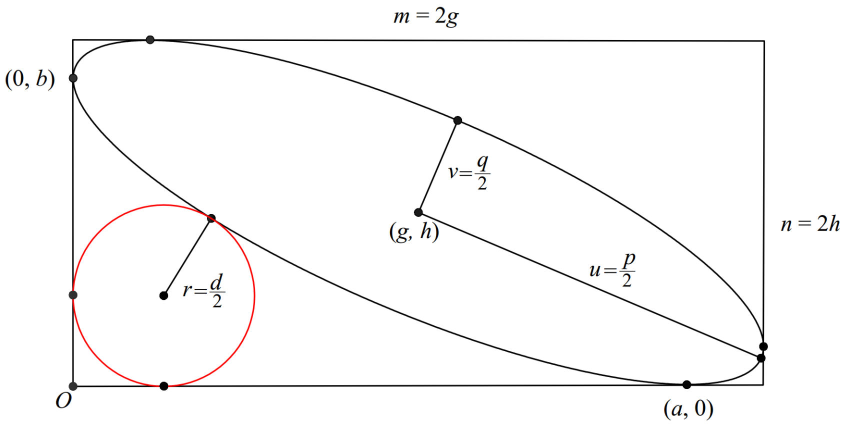
U japanskoj literaturi postoje različiti dugački i teški dokazi ove propozicije.
S druge strane, u radu N. Shiraishija *Shamei Sanpu* iz 1827. godine navodi se, bez dokaza, ali s numeričkim primjerom formula koja se odnosi na vrlo sličnu konfiguraciju:
Ako su u i v duljine velike i male poluosi elipse koja dira dvije susjedne stranice kvadrata, a R i r su radijusi dviju kružnica koje dodiruju i elipsu i iste stranice kvadrata kao elipsa, onda vrijedi :

$$v = \frac{(R - r)\sqrt{Rr + u^2} - u(R + r)}{2\sqrt{Rr}}$$

U ovom poglavlju izložit ćemo Ungerov dokaz prve navedene tvrdnje, a zatim i kako Shiraishijeva formula slijedi iz nje. Za taj dokaz važna je primjena jednadžbe (2.1) iz početnog dijela dokaza Teraovog teorema. Najprije ćemo glavnu tvrdnju preformulirati u sljedećem, preciznijem obliku, pri čemu će umjesto duljina stranica pravokutnika m i n biti (ekvivalentno) istaknute udaljenosti g i h središta elipse od stranica pravokutnika.

Propozicija 3.1. *Dana je elipsa s velikom poluosi u i malom poluosi v koja je upisana u pravokutnik. Jedan od vrhova pravokutnika izaberemo za ishodište koordinatnog sustava, a dvije stranice iz tog vrha neka određuju pozitivne dijelove x i y osi. Postoje dvije kružnice koje diraju elipsu izvana i obje osi. Ako je središte elipse (g, h), tada su polumjeri ovih* *kružnica rješenja jednadžbe:*

$$gh + \sqrt{g^2h^2 - u^2v^2} - 2\left(g + h + \sqrt{gh - \sqrt{g^2h^2 - u^2v^2}}\right)\rho + \rho^2 = 0.$$



Slika 3.1: Ilustracija propozicije 3.1

Krenimo ponovo od oblika (2.1)

$$Q \equiv k^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 4xy = 0$$

jednadžbe koja određuje elipsu. U homogenim koordinatama, Q odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{ab} - \frac{2}{k^2} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{ab} - \frac{2}{k^2} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

odnosno $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}^T = 0$. Primijenimo ponovno oznake iz 1. poglavlja: Δ =det A, a δ je vrijednost minore u presjeku prva dva retka i prva dva stupca matrice A. Iz 1. poglavlja znamo da za elipsu vrijedi $\delta > 0$ i da je umnožak $S\Delta < 0$, a kako je $S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 0$ mora biti $\Delta < 0$.
Također, otprije znamo da za poluosi elipse vrijedi relacija:

$$u^2v^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}.$$

Ako je sada $P \equiv k'^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right)^2 - 4xy = 0$ konika koja dodiruje osi na udaljenostima a', b' od ishodišta O, znamo da P izvana dodiruje Q ako i samo ako

$$k^2k'^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) - (k + k')^2 = 0.$$

Ako je $k'^2 > a'b'$ i $a' = b' = \rho$ krivulja P postaje kružnica radijusa ρ sa središtem (ρ, ρ) to jest

$$(x-\rho)^2 + (y-\rho)^2 = \rho^2$$

ako i samo ako $k' = \rho\sqrt{2}$. Provjerimo tu tvrdnju:

$$k'^2\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{\rho} - 1\right)^2 - 4xy = 0$$

$$k'^2\frac{x+y-\rho)^2}{\rho^2} = 4xy$$

Iz jednadžbe kružnice znamo:

$$x^2 + y^2 - 2\rho(x+y) + \rho^2 = 0$$

Sada je:

$$\begin{aligned}(x+y-\rho)^2 &= x^2 + y^2 - 2\rho(x+y) + 2xy + \rho^2 \\ &= \left(x^2 + y^2 - 2\rho(x+y) + \rho^2\right) + 2xy\end{aligned}$$

Zbog jednadžbe kružnice znamo da je izraz u zagradi jednak 0 pa dobivamo:

$$\begin{aligned}(x+y-\rho)^2 &= 2xy \\ k'^2\frac{2xy}{\rho^2} &= 4xy \\ k'^2 &= 2\rho^2 \\ k' &= \rho\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Potom dobivamo da je uvjet dodira oblika $2k^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\rho}\right) - (k + \rho\sqrt{2})^2$, ili, napisano u obliku kvadratne jednadžbe u ρ

$$k^2 - 2\left(\sqrt{2}k + \frac{k^2}{a} + \frac{k^2}{b}\right)\rho + 2\left(\frac{k^2 - ab}{ab}\right)\rho^2 = 0.$$

Svakom od rješenja, $R > r$, odgovara jedna od dvije paralelne tangente na elipsu. Sjecišta svake od tangenata s x-osi i y-osi, zajedno s ishodištem vrhovi su pravokutnog trokuta. Upisana kružnica manjeg trokuta je kružnica sa središtem (r, r) i polumjerom r, a opisana kružnica ima središte (R, R) i polumjer R. Svaka kružnica dodiruje elipsu u istoj točki u kojoj dodiruje njihovu zajedničku tangentu. Dakle, posljednja jednadžba je nužan i dovoljan uvjet za konstrukciju kružnice u problemu za točno danu elipsu i pravokutnik.

Po Viéteovim formulama vidimo da je $Rr = \frac{k^2ab}{2(k^2-ab)}$. Kao što znamo od prije, koordinate središta su $g = \frac{k^2a}{2(k^2-ab)}$, $h = \frac{k^2b}{2(k^2-ab)}$. Dakle, $Rr = bg = ah$. Sada možemo supstituirati $\frac{Rr}{h}$, $\frac{Rr}{g}$ za a, b bilo u jednadžbi za g ili jednadžbi za h. Koju god da odaberemo, dobivamo

$$k = \frac{Rr\sqrt{2}}{\sqrt{2gh - Rr}}.$$

Zapišimo sada jednadžbu konike Q i vanjski uvjet dodira preko g, h, R, r.
Imamo:

$$\left(\frac{x}{\frac{Rr}{h}} + \frac{y}{\frac{Rr}{g}} - 1\right)^2 - 4\frac{xy}{\left(\frac{Rr\sqrt{2}}{\sqrt{2gh-Rr}}\right)^2} = 0$$

$$\frac{(hx + gy - Rr)^2}{R^2r^2} - \frac{2(2gh - Rr)xy}{R^2r^2} = 0$$

$$(hx + gy - Rr)^2 - xy(4gh + 2Rr) = 0$$

$$h^2x^2 + g^2y^2 + R^2r^2 + xy(-2ghxy - 2Rr) - 2Rrhx - 2Rrgy = 0$$

Matrica za novi oblik Q je

$$A = \begin{pmatrix} h^2 & Rr - gh & -hRr \\ Rr - gh & g^2 & -gRr \\ -hRr & -gRr & R^2r^2 \end{pmatrix}.$$

Promotrimo sada uvjet dodira, uvrštavajući dobivamo:

$$Rr - 2(g + h + \sqrt{2gh - Rr})\rho + \rho^2 = 0$$

Primjetimo da $\det A = \Delta = -R^2r^2(2gh - RR)^2$ i $\delta = Rr(2gh - Rr)$. Dakle, iz $u^2v^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}$,

$$u^2v^2 = Rr(2Gh - Rr)$$

$$g^2h^2 - u^2v^2 = (gh - Rr)^2$$

$$\sqrt{g^2h^2 - u^2v^2} = \pm(gh - Rr).$$

Uočimo da je elipsa smještena u koordinatnom sustavu tako da je $g \leq a < 2g$ (dirалište s osi x nalazi se ”desno” od središta), $h \leq b < 2h$ (diralište s osi y se nalazi ”iznad” središta), a središte je (g, h).
Imamo da je $\frac{Rr}{g} = b < 2h$ pa je $Rr < 2gh$, ili $\frac{Rr}{h} = a < 2g$ pa je opet $Rr < 2gh$.
Znamo da je $2gh - Rr > 0$.
Kad je elipsa tako smještena, zbog $(Rr)^2 = bgah > hggh = (gh)^2$, imamo $Rr > gh$. Elipsa

bi inače mogla biti smještena i tako da njezina velika os ima nagib bliži drugoj dijagonali istog pravokutnika pa bi onda bilo $a \leq g$ i $b \leq h$, ali ovdje se razmatra situacija kao na slici. Ako odaberemo negativan predznak zdesna, odmah vidimo da je vanjski uvjet dodira ekvivalentan s uvjetom

$$gh + \sqrt{g^2h^2 - u^2v^2} - 2\left(g + h + \sqrt{gh - \sqrt{g^2h^2 - u^2v^2}}\right)\rho + \rho^2 = 0.$$

Sad se vratimo na Shiraishijevu formulu:

$$v = \frac{(R-r)\sqrt{Rr + u^2} - u(R+r)}{2\sqrt{Rr}}.$$

Autorov numerički primjer daje cjelobrojne vrijednosti $R = 36, 2r = 2, 2u = 16, 2v = 9$. Pokažimo kako formula slijedi iz dokaza Propozicije 3.1.
U tom dokazu imamo $u^2v^2 = Rr(2gh - Rr)$. Rješavamo po gh i dobivamo

$$gh = \frac{R^2r^2 + u^2v^2}{2Rr}.$$

Iz teorema 1.2 znamo da je $g^2 + h^2 = u^2 + v^2$ pa imamo $(g + h)^2 = 2gh + u^2 + v^2$. Sada gh i $g + h$ u uvjetu dodira možemo zapisati:

$$Rr - 2(g + h + \sqrt{2gh - Rr})\rho + \rho^2 = 0$$

preko u, v, R, r, ρ. Nakon toga, supstituiramo r za ρ i dobivamo:

$$r^2 + Rr - 2r\left(\sqrt{\frac{R^2r^2 + u^2v^2}{Rr} - Rr} + \sqrt{\frac{R^2r^2 + u^2v^2}{Rr} + u^2 + v^2}\right) = 0.$$

Supstitucijom R za ρ dobijemo:

$$R^2 + Rr - 2R\left(\sqrt{\frac{R^2r^2 + u^2v^2}{Rr} - Rr} + \sqrt{\frac{R^2r^2 + u^2v^2}{Rr} + u^2 + v^2}\right) = 0.$$

Odredimo v iz bilo koje od ovih jednadžbi i dobivamo:

$$v = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{Rr^3 - 2R^2r^2 + rR^3 + 2(R^2 + r^2)u^2 - 2(R^2 - r^2)u\sqrt{Rr + u^2}}}{\sqrt{Rr}}.$$

Izraz pod korijenom u brojniku jednak je

$$\left[(R-r)\sqrt{Rr + u^2} - u(R+r)\right]^2$$

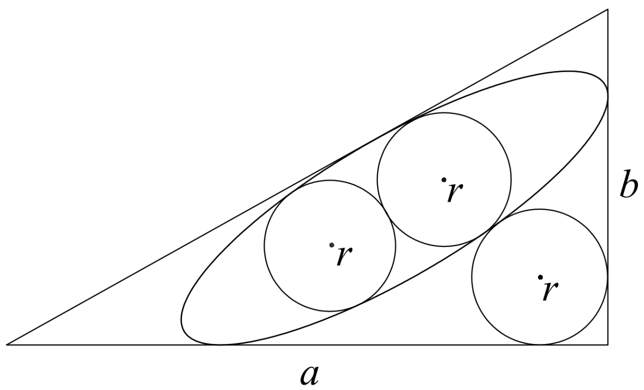
pa je očito da smo dobili Shiraishijevu formulu.

Poglavlje 4

Masayoshijev problem

Vrlo zanimljiv primjer "sangaku problema" koji se već gotovo dva stoljeća navodi kao iznimno težak i još neriješen postavio je Sawa Masayoshi 1821. godine. Tek 2011. godine J. A. Lobo ([1]) objavio je opsežan rad u kojem je riješio poseban slučaj problema i izložio algebarsku interpretaciju tog geometrijskog zadatka. Glavna je poteškoća što je riječ o rješivosti jednadžbe 6. stupnja.

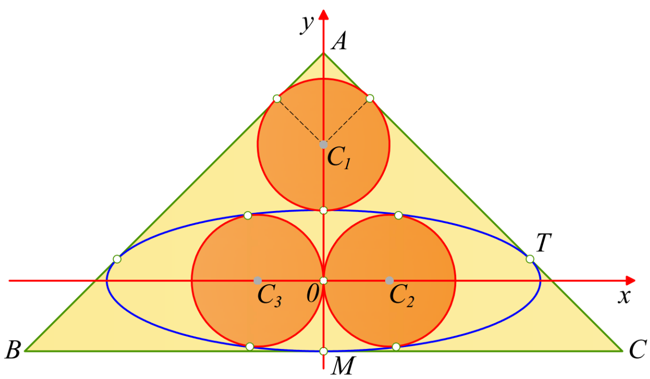
Evo kako glasi Masayoshijev problem, naveden kao Problem 12 u 7. poglavlju knjige [2, str. 259]:
Elipsa je upisana u pravokutni trokut tako da je njezina velika os paralelna hipotenuzi. U elipsu su upisane dvije kružnice radijusa r tako da obje diraju elipsu i diraju se međusobno u središtu elipse. Treća kružnica polumjera r dodiruje elipsu i obje katete trokuta. Ako su duljine kateta a i b, izraziti r pomoću a i b.



Slika 4.1: Masayoshijev problem

U uvodu [1], rada duljine 47 stranica, Lobo navodi kako će dati eksplicitno i algebarski egzaktno rješenje posebnog slučaja Masayoshijevog problema, kad je pravokutni trokut jednakokračan. Taj slučaj on naziva simetričnim, a napominjemo da Lobo duljine stranica pravokutnog trokuta označava na manje uobičajeni način: a je duljina hipotenuze, b i c duljine kateta, tako da je u simetričnom slučaju $b = c$.
Nadalje, Lobo piše kako posebno razmatranje simetričnog slučaja nije nužno, ali da složenost rješenja tog slučaja daje naslutiti kako u općem slučaju nije ni moguće dati eksplicitno rješenje, to jest eksplicitnu relaciju između b, c i r. Ipak, tvrdi da će dati dokaz postojanja i jednoznačnosti rješenja te dokazati da mogućnost formuliranja tražene relacije, barem u implicitnom obliku, ovisi o rješivosti stanovite algebarske jednadžbe 6. stupnja. Također će pokazati kako se može iterativno doći do približnog rješenja problema, a navest će i konkretan numerički primjer s preciznošću na četiri decimale. Pri kraju rada Lobo detaljno raspravlja pitanje rješivosti algebarskih jednadžbi do kojih dovodi Masayoshijev problem, a razmatra i neke drugačije pristupe rješavanju.

Skicirajmo najprije kako je problem postavljen za simetrični slučaj. Pravokutni trokut smješten je u koordinatni sustav tako da se visina na hipotenuzu nalazi na y-osi, tj. vrh A pravog kuta ima koordinate $(0, y_A)$, a središte elipse E nalazi se u ishodištu. Velika i mala poluos elipse označene su s α i β, tako da tjemena elipse imaju koordinate $(\alpha, 0)$ i $(-\alpha, 0)$, odnosno $(0, \beta)$ i $(0, -\beta)$. Ova posljednja točka ujedno je i polovište hipotenuze trokuta. Tjeme $(0, \beta)$ je diralište elipse s kružnicom C_1, radijusa r, čije se središte nalazi u točki $(0, \beta + r)$, a dira obje katete. Kružnice C_2 i C_3, također radijusa r, imaju središta u točkama $(r, 0)$ i $(-r, 0)$, a obje diraju elipsu E u parovima točaka koje su simetrične s obzirom na y-os.



Slika 4.2: Simetrični slučaj Masayoshijeva problema

Korisno je poslužiti se parametrom ε koji predstavlja ekscentricitet elipse:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}.$$

Iz uvjeta da elipsa s jednadžbom $E \equiv \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ima tangentu $t \equiv y = -x + y_A$ (to je pravac na kojem leži kateta trokuta) nije teško odrediti položaj vrha A:

$$y_A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

odnosno

$$y_A = \left(1 + \sqrt{2}\right) r + \beta.$$

Uočimo da nam je podatak $y_A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ zapravo već poznat, iz Teorema 1.2., budući da točka A pripada ortooptičkoj kružnici te je udaljenost od ishodišta do A polumjer te kružnice.
Iz uvjeta dodira kružnice C_2 i elipse E dobiva se zatim

$$\varepsilon^2 x^2 - 2rx + \beta^2 = 0,$$

$$r = \beta\varepsilon$$

i

$$r(\varepsilon) = \alpha\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Kombiniranjem prethodnih relacija dobiva se jednadžba četvrtog stupnja za ε, u kojoj je $p = \sqrt{2} - 1$:

$$\varepsilon^4 + 2p\varepsilon^3 - \varepsilon^2 - 2p\varepsilon + p^2 = 0.$$

Slijedi složeni postupak transformacije ove jednadžbe, koja se uz neke netrivijalne dosjetke i korištenje eksplicitnih formula za rješenje kubne jednadžbe reducira na par kvadratnih jednadžbi. Za ε se dobivaju dva realna i dva kompleksno konjugirana rješenja (koja ovdje nemaju smisla), a diskusija pokazuje da u obzir dolazi samo jedno realno rješenje. Ono se može izraziti eksplicitno, a kako je izraz dosta kompliciran navodimo samo približnu vrijednost:

$$\varepsilon \approx 0.9476620415.$$

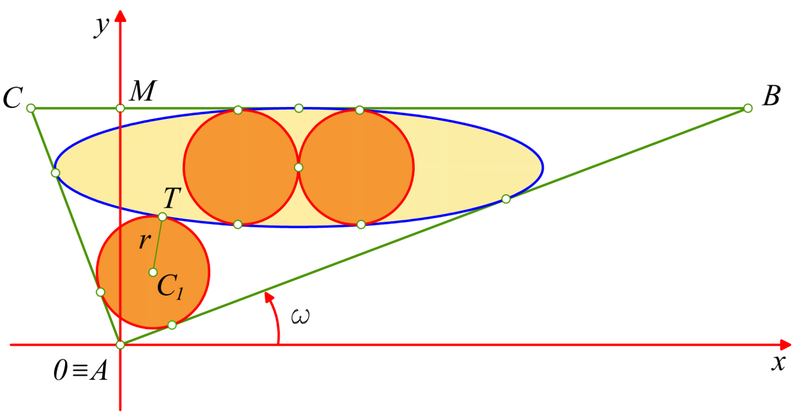
Omjer $\frac{b}{r}$ lako je izraziti pomoću ε, zbog relacije $r = \beta\varepsilon$ te se dobiva

$$\frac{b}{r} = 2 + \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)\sqrt{2}.$$

Kako je prethodno dobiven eksplicitni izraz za ε, ovim je problem riješen za simetrični slučaj. Približna vrijednost $\frac{b}{r}$ iznosi 6.3988504908. (Lobo navodi približnu vrijednost na 3000 decimala).

Asimetrični slučaj

Prelazimo sad na razmatranje slučaja raznostraničnog pravokutnog trokuta. Uzmimo da je elipsa E smještena u koordinatnom sustavu kao i prije, a da vrh A pripada ortooptičkoj kružnici elipse. Neka spojnica OA zatvara kut φ s pozitivnim smjerom x-osi. U simetričnom slučaju $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Pustimo li da vrijednost φ pada prema 0, ekscentricitet ε elipse E će se povećavati, a radijus kružnice C_1 smanjivati. Može postojati samo jedna vrijednost ekscentriciteta za koju sve tri kružnice C_1, C_2 i C_3 imaju jednaki radijus.



Slika 4.3: Asimetrični slučaj Masayoshijeva problema

Uočimo nadalje da relacija $r = \beta\varepsilon$ vrijedi i u asimetričnom slučaju, budući da proizlazi iz uvjeta diranja kružnica C_2 i C_3 s elipsom E te ne ovisi o trokutu ABC.

Uvjet da kružnica C_1 tangira katete trokuta izražava se tako da središte te kružnice pripada simetrali kuta iz vrha A (pravog kuta). Uvjet diranja elipse E i obje katete postavlja se tako da elipsa ima dvostruka sjecišta s pravcima na kojima leže katete. Napokon, da bi se C_1 i E dirale u nekoj (nepoznatoj) točki T, njihove tangente u toj točki moraju se podudarati, a to znači da derivacije poprimaju jednaku vrijednost u nekoj točki. Preostaje iskoristiti uvjet da udaljenost točke T od središta kružnice C_1 iznosi r. U načelu je to izvedivo, no pokazuje se da je jednadžba koja povezuje r i ε tada 6. stupnja u varijabli ε. Ta jednadžba nije rješiva pomoću radikala ako nema nekog dodatnog uvjeta simetričnosti.

Za asimetrični slučaj povoljnije je postaviti koordinatni sustav na drukčiji način. Izbor u simetričnom slučaju bio je takav kako bi elipsa imala najjednostavniju jednadžbu, no izračunavanje ostalih potrebnih elemenata postalo bi uz takav izbor u asimetričnom slučaju previše komplicirano. (Napomenimo da se u jednom od dodataka na kraju rada [1] razrađuje i ta varijanta).

Sad postavimo ishodište u vrh A pravog kuta, a hipotenuzu paralelno s x-osi, tako da se BC nalazi na pravcu s jednadžbom $y = h = \frac{bc}{a}$ (naravno, h je duljina visine trokuta iz vrha A). Lako se izračuna jednadžba simetrale pravog kuta trokuta:

$$y = \frac{1+m}{1-m}x,$$

a zatim i koordinate središta kružnice C_1 koje se nalazi na toj simetrali.

Sljedeći je korak određivanje koordinata (x_0, y_0) središta elipse E, iz uvjeta da stranice AB i AC tangiraju elipsu, kao i činjenice da vrh A pripada ortooptičkoj kružnici elipse pa vrijedi $\alpha^2 + \beta^2 = x_0^2 + y_0^2$. Taj račun dovodi do rezultata:

$$\begin{cases} x_0 = k\left(1 - \frac{r}{h\varepsilon - r}\right) \\ y_0 = h - \frac{r}{\varepsilon}. \end{cases}$$

pri čemu je ε ekscentricitet elipse, a $k = \frac{c^2-b^2}{2a}$. Usput se dobiva zanimljiva geometrijska činjenica da se središta svih elipsi upisanih u pravokutni trokut na opisani način (velika os usporedna s hipotenuzom), uz navedeni izbor koordinatnog sustava, nalaze na hiperboli s jednadžbom

$$\begin{cases} x_0 = k\left[1 - \left(\frac{h}{\beta} - 1\right)^{-1}\right] \\ y_0 = h - \beta. \end{cases}$$

Međutim, slijedi daleko najteži dio računa u kojem treba odrediti koordinate točke T kao dirališta elipse i kružnice C_1. Glavna je ideja da se za apscisu točke T izvedu tri međusobno nezavisne jednadžbe četvrtog stupnja (kvartike), koje su same po sebi iznimno dugačke i zamršene, ali se zatim primijeni tehnika tzv. Teorije preklapajućih polinoma (TOP - Theory of overlapping polynomials). To su polinomi koji imaju zajedničku nultočku određene kratnosti i njihovim se kombiniranjem uspijeva dobiti polinom nižeg stupnja koji posjeduje istu tu nultočku. U ovom slučaju, po dvije kvartike dovode do kubika, a dvije kubike do jedne kvadratne jednadžbe. Ova etapa daje svaku od koordinata točke T izraženu (barem načelno, budući da je riječ o izuzetno složenim izrazima) pomoću a, b, c, r i ε.

Te koordinate ulaze u jednadžbu koja izražava uvjet da udaljenost od T do središta kružnice C_1 iznosi r:

$$(x_T - x_1)^2 + (y_T - y_1)^2 = r^2.$$

S druge strane, kombiniranjem ostalih prethodno dobivenih relacija izvodi se sljedeća jednakost:

$$\frac{r^2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2}+\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2=k^2\left(1-\frac{r}{h\varepsilon-r}\right)^2+\left(h-\frac{r}{\varepsilon}\right)^2.$$

Ta relacija transformira se u jednadžbu 6. reda za ε, pri čemu su uvedene prikrate $Q=\frac{r}{a}$ i $R=\frac{r}{h}$:

$$\varepsilon^6-4R\varepsilon^5+\left\{4\left[Q^2+R^2\right]-1\right\}\varepsilon^4+4R\left[1-2Q^2\right]\varepsilon^3-4R^2\varepsilon^2+4Q^2R^2=0.$$

Ako bi bilo moguće riješiti ovu jednadžbu po ε, dakle izraziti ε eksplicitno pomoću a, b, c i r, onda bi se to moglo učiniti i za koordinate točke T pa bi se dobila implicitna relacija između r i a, b, c:

$$[x_T(r)-x_1(r)]^2+[y_T(r)-y_1(r)]^2=r^2.$$

Autor u [1] argumentira zašto smatra da vjerojatno ne postoji eksplicitna relacija koja povezuje varijable a, b, c i r, a u kojoj se ne bi pojavljivao još i neki od parametara α, β ili ε. Uz diskusiju još nekih varijanti, primjerice eksplicitnog rješenja jednadžbe četvrtog stupnja u r, ali s koeficijentima koji su funkcije od a, b, c i ε, tamo je dan i ovaj numerički primjer, s preciznošću na četiri decimale. Za zadane duljine stranica trokuta ABC $a=2.8939431, b=1.0591663, c=2.6931530$ dobiva se:

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=0.2431\end{array}\right\}\varepsilon=0.9700\\ r=0.2358\\ x_0=0.7125\\ y_0=0.7425\\ x_1=0.1331\\ y_1=0.3057\\ x_T=0.1698\\ y_T=0.5386.\end{cases}$$

Bibliografija

[1] J. Alvarez Lobo, *Geometry Beyond Algebra. The Theorem of Overlapped Polynomials (TOP) and its Application to the Sawa Masayoshi's Sangaku Problem. The Adventure of Solving a Mathematical Challenge Stated in 1821*, ArXiv e-prints (2011), `https://arxiv.org/abs/1110.1299`.

[2] H. Fukagawa i T. Rothman, *Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry*, Princeton, 2008.

[3] Ž. Milin Šipuš i M. Bombardelli, *Analitička geometrija*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf`, Skripta iz kolegija Analitička geometrija, 2016.

[4] J. Marshall Unger, *Solutions of Two Japanese Ellipse Problems*, Forum Geometricorum **16** (2016), 85–94.

Sažetak

Japanska tradicija postavljanja matematičkih problema na drvenim pločicama zvanima *sangaku*, koje su izlagane u svetištima i hramovima, naročito se razvijala u razdoblju od 17. do 19. stoljeća. Iz tih izvora proizašli su mnogi zanimljivi i katkad vrlo teški problemi, većinom geometrijski, koji se pritom odlikuju specifičnim stilom.

U ovom radu prikazani su suvremeni dokazi nekih rezultata objavljenih u Japanu u 19. stoljeću, koji govore o posebnim međusobnim položajima elipsi i drugih konika te još nekih geometrijskih likova. Dokazi određenih teorema (Terao) i izvodi formula (Shiraishi) pritom su povezani te izloženi sažeto i precizno, primjenom linearne algebre, analitičke geometrije, kao i prikladnih geometrijskih i algebarskih transformacija.

Na kraju je prikazan Masayoshijev problem iz 1821. godine koji je djelomično riješen i algebarski protumačen tek nedavno.

Summary

Japanese tradition of putting mathematical problems on wooden tiles called *sangaku*, exhibited in shrines and temples, developed especially in the period from the 17th to the 19th century. From these sources many interesting and sometimes very difficult problems emerged, mostly geometrical, mostly geometrical, and also characterized by their specific style.

This paper presents a contemporary treatment of some results and problems that were published in Japan in the nineteenth century, dealing with some particular arrangements of ellipses and other conics and geometric figures. The proofs of certain theorems (Therao) and derivation of some formulas (Shiraishi) are shown to be related and then given in a more concise and precise form, using linear algebra and analytic geometry, as well as some suitable geometric and algebraic transformations.

Finally, Masayoshi's problem from 1821. is presented, which has only recently been partly solved and given a complete algebraic interpretation.

Životopis

Rođen sam 06. ožujka 1991. godine u Šibeniku.

Svoje obrazovanje započeo sam u Osnovnoj školi Jurja Dalmatinca u Šibeniku. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, 2005. godine upisao sam prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2009. godine, upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2011. godine prebacujem se na Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički te sam u srpnju 2013. godine stekao diplomu prvostupnika edukacije matematike. Nakon toga, 2015. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički, kojeg upravo završavam.