SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jurica Krklec

WIGNEROV TEOREM ZA SLUČAJNE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija slučajnih matrica je moderna grana matematike koja se aktivno razvija. Početak teorije nalazimo u radovima škotskog matematičara Johna Wisharta [10], koji ju je primjenjivao u statistici. Jači razvoj počinje zahvaljujući mađarskom fizičaru Eugeneu Wigneru, koji je primjenu pronašao u nuklearnoj fizici. Jedan od prvih i najjednostavnijih rezultata Wignerovog rada [9], Wignerov teorem za slučaje matrice, glavna je tema ovog diplomskog rada.

Prvo poglavlje rada započinje kratkim pregledom osnovnih definicija i rezultata koji će se koristiti u glavnom dijelu rada. Prvo se daje kratak uvod u Catalanove brojeve te nekoliko ekvivalentnih formula za njih. Dokazi navedenih formula preuzeti su iz [8]. Zatim se definira polukružna razdioba (poznata i kao Wignerova polukružna razdioba). U radu će se koristiti isključivo standardna (tj. normalizirana) polukružna razdioba. Također ćemo uvesti i pojam Diracove slučajne mjere, koja će se koristiti kasnije u radu. Osim toga, dajemo iskaz i dokaz Weierstrassovog teorema aproksimacije. Izneseni dokaz je varijanta dokaza iz [4]. Na kraju poglavlja dajemo iskaz i dokaz Hoffman-Wielandtovog teorema, slično kao u [1].

Glavni dio rada čini drugo poglavlje i ono počinje definicijom slučajne matrice, točnije definicijom Wignerove slučajne matrice i njenim osnovnim svojstvima. U teoriji slučajnih matrica posebno se razmatraju svojstvene vrijednosti takvih matrica. Wignerov teorem za slučajne matrice upravo opisuje jedno svojstvo tih svojstvenih vrijednosti. U ovom radu dokaz teorema odvija se u nekoliko koraka te će se uglavnom koristiti kombinatorne tehnike. Glavna literatura koja se koristi za dokaz teorema su disertacija [3] i knjiga [1]. Ovakav dokaz teorema veoma je sličan originalnom Wignerovom dokazu, koji se može pronaći u [9]. Za alternativne dokaze upućujemo čitatelja na preostale dokaze u [3] i [1], kao i [6]. Nakon toga smanjujemo pretpostavke Wignerovog teorema, ali i jačamo tvrdnju teorema. Na kraju dajemo i jednu jednostavnu posljedicu Wignerovog teorema za slučajne matrice, koja govori o broju svojstvenih vrijednosti koje upadaju u dani interval realnih brojeva.

U posljednjem poglavlju dan je kratak računalni program koji simulira gore navedenu posljedicu Wignerovog teorema. Kao rezultat programa dane su slike s histogramima svojstvenih vrijednosti jedne realizacije Wignerovih slučajnih matrica zajedno s grafom funkcije gustoće polukružne razdiobe. One prikazuju distribucije svojstvenih vrijednosti Wignerovih slučajnih matrica redova 100, 250, 500, 750, 1000, 2500, 5000, 7500, 10000.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

1.1 Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi tvore niz prirodnih brojeva koji se javljaju u mnogim kombinatornim problemima. Niz Catalanovih brojeva definiramo tako da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ stavimo:

$$\begin{aligned} C_n &:= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Lema 1.1.1. *Niz brojeva $(B_i)_{i=0}^{\infty}$ zadan rekurzivnom relacijom:*

$$B_0 := 1, \quad B_k := \sum_{m=1}^{k} B_{m-1}B_{k-m} \quad \text{za } k \geq 1$$

je niz Catalanovih brojeva.

Dokaz. Neka je dana cjelobrojna mreža veličine $n \times n$. Promotrimo najkraće puteve na takvoj mreži od donjeg lijevog kuta u gornji desni kut, tj. puteve koji se kreću samo gore i desno, takve da nikada ne prelaze iznad dijagonale u mreži. Primijetimo da takvi putevi uvijek kao prvi korak imaju desno, a posljednji gore. Takve dopustive puteve možemo prebrojiti na dva načina.

Neka je B_n broj dopustivih puteva u cjelobrojnoj mreži veličine $n \times n$. Neka je dan dopustivi put za koji je $j \in \{1, 2, ..., n\}$ visina prvog dodira puta s dijagonalom nakon početka puta. Primijetimo kako se put do tada sastoji od j koraka desno i j koraka gore, dakle do gornjeg desnog kuta preostalo je $n - j$ koraka desno i $n - j$ koraka gore. Sada možemo cjelobrojnu mrežu podijeliti na dva dijela – cjelobrojne mreže veličine $j \times j$ i $(n - j) \times (n - j)$.

Gore spomenuti dopustivi put podijelimo na dva puta obzirom na prvi dodir s dijagonalom, takvi novi putevi su dopustivi u novim mrežama. U cjelobrojnoj mreži veličine $j \times j$ put dira dijagonalu samo u prvoj i posljednjoj točki puta, tu mrežu možemo smanjiti za točke na dijagonali i tako dobijemo mrežu veličine $(j-1) \times (j-1)$ na kojoj je novi put dopustiv. Takvih novih dopustivih puteva na cjelobrojnoj mreži veličine $j-1 \times j-1$ ima B_{j-1}, a na cjelobrojnoj mreži veličine $n-j \times n-j$ ih ima B_{n-j}. Jasno je da za cjelobrojnu mrežu veličine 0 (dakle mreža koja se sastoji od samo jedne točke) imamo samo jedan put između krajnjih točaka i taj je dopustiv. Time smo pokazali da broj dopustivih puteva u cjelobrojnoj mreži veličine $n \times n$ zadovoljava rekurziju iz iskaza leme.

S druge strane, broj dopustivih puteva možemo prebrojati i tako da prebrojimo sve najkraće puteve na mreži i od tog broja oduzmemo broj nedopustivih najkraćih puteva, tj. broj najkraćih puteva koji prelaze dijagonalu na mreži. Jasno je da svaki najkraći put u cjelobrojnoj mreži veličine $n \times n$ ima n koraka gore i n koraka desno. Dakle, broj svih najkraćih puteva je $\binom{2n}{n}$. Prebrojimo sada najkraće puteve koji prelaze dijagonalu. Promotrimo prvu točku koja se nalazi na nedozvoljenom putu(putu koji sječe dijagonalu) s krive strane dijagonale. Nakon te točke preslikavamo put tako da svaki pomak desno zamijenimo pomakom prema gore i obrnuto. Budući da smo došli jedno polje iznad dijagonale, dosad smo učinili k pomaka prema desno i $k+1$ prema gore. Preostalo nam je $n-k$ pomaka desno i $n-k-1$ pomaka gore da bismo došli do krajnje točke. Reflektiranjem puta zamjenjuju se brojevi preostalih pomaka pa će takav modificirani put imati $k+(n-k-1) = n-1$ pomaka desno i $(k+1)+(n-k) = n+1$ prema gore, dakle doći ćemo do točke $(n-1, n+1)$. Svaki nedozvoljeni put možemo tako modificirati na jedinstven način. Uočimo i da svaki najkraći put u cjelobrojnoj mreži od početne točke do $(n-1, n+1)$ možemo preslikati u točno jedan nedozvoljen put od početne točke do krajnje točke, reflektirajući ga na isti način čim prijeđe originalnu dijagonalu. Time smo uspostavili bijekciju između skupa svih najkraćih putova koji sijeku dijagonalu skupa svih najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži do točke $(n-1, n+1)$, kojih ima $\binom{2n}{n+1}$. Dakle, broj dopustivih puteva je:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

Lema 1.1.2. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $C_k \leq 4^k$.*

Dokaz. Relacija vrijedi za slučaj $k = 1$:

$$C_k = 1 \leq 4 = 4^k.$$

Pretpostavimo da relacija vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Računamo:

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+2)!} \\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \\ &= 4\frac{2k+2}{2k+2}\frac{2k+1}{2k+4} C_k. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke da relacija vrijedi za C_k te zbog $\frac{2k+1}{2k+4} < 1$ slijedi:

$$C_{k+1} \leq 4 \cdot 4^k = 4^{k+1}.$$

□

1.2 Polukružna razdioba

Definicija 1.2.1. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da slučajna varijabla X ima polukružnu razdiobu ako joj je funkcija gustoće $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s*

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & za\ |x| \leq 2, \\ 0 & za\ |x| > 2. \end{cases}$$

Propozicija 1.2.2. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s polukružnom razdiobom. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} C_{\frac{k}{2}} & za\ k\ paran, \\ 0 & za\ k\ neparan. \end{cases}$$

gdje je C_k k-ti Catalanov broj.

Dokaz. Primijetimo da je funkcija gustoće od X parna funkcija. Dakle, podintegralna funkcija u donjoj formuli za neparne k je neparna funkcija, tj. integral na simetričnom intervalu $[-2, 2]$ je jednak 0. Dakle, $\mathbb{E}[X^k] = 0$.

Neka je sada k paran, tj. $k = 2l$ za neki $l \in \mathbb{N}$. Supstitucijom $x = 2\sin t$ računamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^{2l}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} f_X(x)dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi} x^{2l}\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \frac{2 \cdot 2^{2l}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Definiramo:

$$I_{2l} := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t \cos^2 t dt$$

Parcijalnom integracijom dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned}
I_{2l} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t \cos^2 t dt \\
&= \begin{cases} u = \sin^{2l} t \cos t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \\
&= \sin^{2l+1} t \cos t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t \cos^2 t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l+2} t dt \\
&= 0 - 2l I_{2l} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l+2} t dt,
\end{aligned}$$

tj. dobili smo izraz:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l+2} t dt = (2l+1) I_{2l}. \tag{1.1}$$

Primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dobijemo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l+2} t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t dt - I_{2l}.$$

Sada kombiniranjem s (1.1)

$$I_{2l} = \frac{1}{2l+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t dt. \tag{1.2}$$

Uzastopnom primjenom formula (1.1) i (1.2), dobijemo:

$$I_{2l} = \frac{2l-1}{2l+2} \frac{2l-3}{2l} \frac{2l-5}{2l-2} \cdots \frac{3}{6} \frac{1}{4} I_0.$$

Nadalje, iz poznatog tabličnog integrala:

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

te proširivanjem svakog razlomka iz prethodnog izraza redom s $2l$, $2l-2$, ... imamo:

$$I_{2l} = \frac{(2l)!}{4^l (l+1)! l!} \frac{\pi}{2},$$

iz čega konačno dobijemo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^{2l}] &= \frac{2 \cdot 2^{2l}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l} t \cos^2 t dt \\
&= \frac{2 \cdot 2^{2l}}{\pi} \frac{(2l)!}{4^l (l+1)! l!} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2l)!}{(l+1)! l!} \\
&= C_l.
\end{aligned}$$

□

1.3 Slučajne mjere

U ovom odjeljku pretpostavljamo da je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.3.1. *Na izmjerivom prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *i za danu točku* $x \in \mathbb{R}$ *definiramo mjeru* $\delta_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *pomoću relacije*

$$\delta_x(E) := \begin{cases} 0 & za\ x \notin E, \\ 1 & za\ x \in E, \end{cases}$$

za svaki $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Ovako definiranu mjeru zovemo* Diracova mjera koncentrirana u točki *x.*

Kako integriramo u odnosu na Diracovu mjeru δ_x? Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna neprekidna ograničena funkcija. Tada vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_x = f(x).$$

Definicija 1.3.2. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla. Funkciju* δ_X *koja svakom elementarnom događaju* $\omega \in \Omega$ *pridružuje Diracovu mjeru* $\delta_{X(\omega)}$ *zovemo* slučajna Diracova mjera.

Što je sada integral u odnosu na δ_X? Svakom $\omega \in \Omega$ pridružujemo realni broj $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_{X(\omega)}$. Dakle, $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_X$ je realna funkcija definirana na Ω.

Lema 1.3.3. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna ograničena funkcija. Tada je* $\int_{\mathbb{R}} f d\delta_X$ *slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*

Dokaz. Neka je B proizvoljan Borelov skup. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}} f d\delta_X\Big)^{-1}(B) &= \Big\{\omega \in \Omega : \int_{\mathbb{R}} f d\delta_{X(\omega)} \in B\Big\} \\ &= \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in B\} \\ &= (f \circ X)^{-1}(B).\end{aligned}$$

Kako je f neprekidna, ona je i izmjeriva, pa je i $f \circ X$ izmjeriva. Drugim riječima, $(\int_{\mathbb{R}} f d\delta_X)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. □

Primijetimo da smo u gornjem dokazu također pokazali

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_X = f(X).$$

U ovom će se radu promatrati konačne linearne kombinacije slučajnih Diracovih mjera, koje ćemo nazivati slučajne mjere. Izostavljamo općenitu definiciju slučajne mjere, koju se može pronaći u literaturi, jer će nam biti dovoljan prethodno spomenuti posebni slučaj.

1.4 Weierstrassov teorem aproksimacije

Teorem 1.4.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena neprekidna funkcija, neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji polinom P na $[a, b]$ takav da vrijedi:*

$$\Big|f(x) - P(x)\Big| < \epsilon$$

za svaki $x \in [a, b]$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $0 < a < b < 1$. Naime, svaki segment $[a, b]$ možemo linearnom transformacijom svesti na segment sadržan u $[0, 1]$. U tom slučaju, funkcija f će i nakon te linearne transformacije ostati ograničena i neprekidna, a polinom P će i dalje ostati polinom istog reda.

Definirajmo novu funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{a} f(a) & \text{za } x \in (0, a), \\ f(x) & \text{za } x \in [a, b], \\ \dfrac{1-x}{1-b} f(b) & \text{za } x \in (b, 1), \\ 0 & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

Pošto za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $\tilde{f}(x) = f(x)$, slijedi da je dovoljno pokazati

$$\left|\tilde{f}(x) - P(x)\right| < \epsilon$$

za svaki $x \in [a, b]$. Također, ovako definirana funkcija $\tilde{f}$ je ograničena i neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$.

Uvedimo sljedeću oznaku:

$$J_n := \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^n du.$$

Definirajmo sljedeći polinom $P(x)$ stupnja $2n$:

$$P_n(x) := \frac{1}{J_n} \int_0^1 \tilde{f}(t)\Big(1 - (t - x)^2\Big)^n dt.$$

Neka je $x \in [0, 1]$, iz čega slijedi $[0, 1] \subseteq [-1 + x, 1 + x]$. Definirali smo da za svaki $x \in [-1 + x, 1 + x] \setminus [0, 1]$ vrijedi $\tilde{f}(x) = 0$, iz čega dobijemo:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{J_n} \int_0^1 \tilde{f}(t)\Big(1 - (t - x)^2\Big)^n dt \\ &= \frac{1}{J_n} \int_{-1+x}^{1+x} \tilde{f}(t)\Big(1 - (t - x)^2\Big)^n dt. \end{aligned}$$

Supstitucijom $u = t - x$ dobijemo:

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(u + x)(1 - u^2)^n du. \tag{1.3}$$

Iz $\frac{1}{J_n} \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^n du = 1$, množenjem obje strane s $\tilde{f}(x)$, imamo:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)(1 - u^2)^n du. \tag{1.4}$$

Sada iz (1.3) i (1.4) dobivamo:

$$\left|\tilde{f}(x) - P_n(x)\right| = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^{1} \left|\tilde{f}(u + x) - \tilde{f}(x)\right|(1 - u^2)^n du. \tag{1.5}$$

Kako je $\tilde{f}$ neprekidna na $\mathbb{R}$, slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\left|\tilde{f}(u + x) - \tilde{f}(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.6}$$

za $|u| < \delta$. S druge strane, kako je $\tilde{f}$ ograničena, slijedi da postoji $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x)\right|$, odakle imamo:

$$\left|\tilde{f}(u+x) - \tilde{f}(x)\right| \leq 2M$$

za svaki u. Posebno, za $|u| \geq \delta$ imamo $1 \leq \frac{u^2}{\delta^2}$, iz čega dobijemo:

$$\left|\tilde{f}(u+x) - \tilde{f}(x)\right| \leq 2M\frac{u^2}{\delta^2} \tag{1.7}$$

za $|u| \geq \delta$. Dakle, iz (1.6) i (1.7) slijedi:

$$\left|\tilde{f}(u+x) - \tilde{f}(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} + 2M\frac{u^2}{\delta^2}$$

za svaki u. Uvrstimo u (1.5) i dobijemo:

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f}(x) - P_n(x)\right| &< \frac{1}{J_n}\int_{-1}^{1}\frac{\epsilon}{2}(1-u^2)^n du + \frac{1}{J_n}\int_{-1}^{1}\frac{2Mu^2}{\delta^2}(1-u^2)^n du \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{J_n\delta^2}\int_{-1}^{1}u^2(1-u^2)^n du. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n &:= \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n dt \\
&= \text{parcijalna integracija } u = t, dv = t(1-t)^n dt \\
&= -\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)} \\
&= 0 + \frac{1}{2(n+1)}J_{n+1} \\
&< \frac{1}{2(n+1)}J_n,
\end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi jer $1 - u^2 < 1$ za $u \in [-1,1]$, tj. $J_{n+1} < J_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prebacimo li J_n na lijevu stranu, dobijemo:

$$\frac{\tilde{J}_n}{J_n} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

Uvrštavanjem u (1.8) imamo:

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f}(x) - P_n(x)\right| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\frac{\tilde{J}_n}{J_n} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Kako drugi sumand $\frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, postoji n_0 takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$\left|\tilde{f}(x) - P_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Kako smo pretpostavili da je $x \in [0,1]$, zbog $[a,b] \subseteq [0,1]$ slijedi tvrdnja teorema. □

1.5 Hoffman-Wielandtov teorem

Definicija 1.5.1. *Neka je $M_N(\mathbb{R})$ prostor kvadratnih realnih matrica reda N. Funkciju $\|\cdot\|_F : M_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiranu s:*

$$\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{tr}(AA^\tau)}$$

zovemo Frobeniusova norma za kvadratne realne matrice. *Pritom, A^τ označava matricu dobivenu transponiranjem matrice A.*

Teorem 1.5.2. *Neka su A, B realne simetrične matrice reda N, sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1^A \leq \lambda_2^A \leq \cdots \leq \lambda_N^A$ i $\lambda_1^B \leq \lambda_2^B \leq \cdots \leq \lambda_N^B$. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{N} \left|\lambda_i^A - \lambda_i^B\right|^2 \leq \|A - B\|_F^2.$$

Dokaz. Iz linearne algebre znamo da se svaka simetrična matrica može dijagonalizirati, drugim riječima, postoje ortogonalne (pa posebno i regularne) matrice X_A i X_B te dijagonalne matrice D_A i D_B takve da vrijedi $A = X_A^{-1} D_A X_A$ te $B = X_B^{-1} D_B X_B$. Također, matrica D_A, odnosno matrica D_B, na dijagonali imaju svojstvene vrijednosti matrice A, odnosno matrice B. Odavde slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^2) &= \mathrm{tr}(X_A^{-1} D_A^2 X_A) \\
&= \mathrm{tr}(D_A^2 X_A X_A^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(D_A^2) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^A)^2.
\end{aligned}$$

Analogno, imamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(B^2) &= \mathrm{tr}(X_B^{-1} D_B^2 X_B) \\
&= \mathrm{tr}(D_B^2 X_B X_B^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(D_B^2) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^B)^2.
\end{aligned}$$

Prisjetimo se da su matrice X_A i X_B ortogonalne. Nadalje, produkt ortogonalnih matrica je opet ortogonalna matrica. Neka je $U = X_A X_B^{-1} = [u_{ij}]$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(X_A^{-1} D_A X_A X_B^{-1} D_B X_B)\\ &= \operatorname{tr}(D_A X_A X_B^{-1} D_B X_B X_A^{-1})\\ &= \operatorname{tr}(D_A U D_B U^{-1})\\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i^A \lambda_j^B u_{ij}^2,\end{aligned}$$

pritom smo koristili ortogonalnost u obliku $U^{-1} = U^\tau$, tj. $[u_{ij}]^{-1} = [u_{ji}]$. Kako je matrica U ortogonalna, tj. $U^\tau U = U U^\tau = I$, vrijede i sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}\sum_j u_{ij}^2 &= 1\\ \sum_i u_{ij}^2 &= 1.\end{aligned}$$

Dalje, imamo sljedeće:

$$\operatorname{tr}(AB) \leq \sup_{\substack{v_{ij}\geq 0\\ \sum_j v_{ij}=1\\ \sum_i v_{ij}=1}} \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_i^A \lambda_j^B v_{ij},$$

pri čemu smo označili $v_{ij} = u_{ij}^2$. Sumu s desne strane možemo interpretirati kao linearni funkcional dvostruko stohastičke matrice $V = [v_{ij}]$. Iz Birkoff-von Neumannovog teorema za dvostruko stohastičke matrice (vidjeti [2]), slijedi da postoje $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0, 1]$ i matrice permutacija $P_1, \ldots, P_k$ takve da je $V = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_k P_k$. Sada, zbog uređenosti svojstvenih vrijednosti $\lambda_1^A \leq \lambda_2^A \leq \cdots \leq \lambda_N^A$ i $\lambda_1^B \leq \lambda_2^B \leq \cdots \leq \lambda_N^B$, slijedi da se supremum u gornjoj nejednakosti poprima za $V = I$, tj. vrijedi:

$$\operatorname{tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^A \lambda_i^B.$$

Konačno imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A - B)^2 &= \operatorname{tr}(A^2 - AB - BA + B^2)\\ &= \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2) - 2\operatorname{tr}(AB)\\ &\geq \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^A)^2 + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^B)^2 - 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^A \lambda_i^B\\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i^A - \lambda_i^B\right)^2.\end{aligned}$$

□

Primijetimo kako smo zapravo dokazali:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i^A - \lambda_i^B\right)^2} \leq \|A - B\|_F.$$

Specijalno, za svaki $i = 1, \ldots, N$ vrijedi:

$$\left|\lambda_i^A - \lambda_i^B\right| \leq \|A - B\|_F.$$

Sada vidimo da je preslikavanje $A \mapsto \lambda_i(A)$ koje svakoj realnoj simetričnoj matrici A pridružuje i-tu svojstvenu vrijednost $\lambda_i(A)$ Lipschitzova funkcija, pa je stoga i neprekidna.

Poglavlje 2

Wignerov teorem za slučajne matrice

2.1 Wignerove matrice

Definicija 2.1.1. *Neka su* $\{Z_{i,j}\}_{1 \le i < j}$ *i* $\{Y_i\}_{1 \le i}$ *dvije međusobno nezavisne familije nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takve da vrijedi*

$$\mathbb{E}[Z_{1,2}] = \mathbb{E}[Y_1] = 0$$
$$\mathbb{E}[Z_{1,2}^2] = 1$$

te neka za svaki $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$r_k = \max\left(\mathbb{E}|Z_{1,2}|^k, \mathbb{E}|Y_1|^k\right) < \infty.$$

Neka je X_N *N-dimenzionalna simetrična matrica s vrijednostima*

$$X_N(j,i) = X_N(i,j) := \begin{cases} \dfrac{Z_{i,j}}{\sqrt{N}}, & za\ i < j, \\[2ex] \dfrac{Y_i}{\sqrt{N}}, & za\ i = j. \end{cases}$$

Ovakvu matricu zovemo Wignerova matrica. *Ukoliko su* $Z_{i,j}$ *i* Y_i *normalne slučajne varijable, tada za* X_N *kažemo da je* Gaussovska Wignerova matrica.

Vidimo da su Wignerove slučajne matrice $X_N : \Omega \to \mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ funkcije definirane na Ω koje svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ pridružuju realnu, simetričnu matricu. Za svaki $\omega \in \Omega$ neka su $\lambda_\omega^1 \le \cdots \le \lambda_\omega^N$ (realne) svojstvene vrijednosti matrice $X_N(\omega)$, islistane onoliko puta kolika im je kratnost.

Lema 2.1.2. *Neka je X_N Wignerova matrica. Tada su funkcije $\lambda_1, \dots, \lambda_N : \Omega \to \mathbb{R}$ definirane s $\lambda_i(\omega) := \lambda^i_\omega$ za svaki $\omega \in \Omega$ i za svaki $i = 1, \dots, N$ slučajne varijable na Ω. Ovako definirane slučajne varijable zovemo* svojstvene vrijednosti Wignerove matrice.

Dokaz. Iz činjenice da su svojstvene vrijednosti simetrične realne matrice neprekidne funkcije njezinih elemenata, kao što je pokazano u poglavlju 1.5, slijedi da su $\lambda_i : \Omega \to \mathbb{R}$ Borel-izmjerive funkcije, tj. slučajne varijable na Ω. □

2.2 Wignerov teorem

U narednim odjeljcima pretpostavljamo da je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te X_N Wignerova slučajna matrica na tom vjerojatnosnom prostoru.

Nadalje, neka je L_N slučajna mjera na Ω definirana s:

$$L_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i},$$

gdje su $\lambda_1, ..., \lambda_N$ svojstvene vrijednosti slučajne matrice X_N.

Iz leme 1.3.3 slijedi da je integral u odnosu na L_N slučajna varijabla; to je naprosto linearna kombinacija slučajnih varijabli dobivenih kao integrali obzirom na slučajne Diracove mjere. Preciznije, za proizvoljnu neprekidnu, ograničenu funkciju f je $\int_{\mathbb{R}} f dL_N$ slučajna varijabla. Štoviše, za nju vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} f dL_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i).$$

Sljedeći teorem je centralni dio ovog rada. Radi se o jednom klasičnom rezultatu iz područja teorije slučajnih matrica. Ime je dobio po mađarskom fizičaru i matematičaru Eugeneu Wigneru, jednom od začetnika teorije slučajnih matrica. Wigner je, kao i brojni fizičari iz njegovog vremena poput Alberta Einsteina i Richarda Feynmana, radio na projektu Manhattan (razvoj atomske bombe). On je pomoću teorije slučajnih matrica razvijao modele jezgara teških atoma.

Dalje ćemo s $C_b(\mathbb{R})$ označavati prostor ograničenih neprekidnih funcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.2.1. *(Wignerov teorem za slučajne matrice) Neka je (X_N) niz Wignerovih slučajnih matrica i (L_N) niz pripadnih slučajnih mjera definiranih s $L_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$. Tada (L_N) konvergira slabo po vjerojatnosti prema polukružnoj razdiobi. Drugim riječima:*

$$(\forall f \in C_b(\mathbb{R}))(\forall \epsilon > 0) \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \right| > \epsilon \right) = 0,$$

gdje je σ polukružna razdioba, kao vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, čija je funkcija gustoće dana u 1.2.1.

Dokaz teorema provest će se kombinatornim tehnikama, u nekoliko koraka. Sam Wigner je dokazao teorem na sličan način u radu [9], a mi ćemo dokaz prilagoditi prema [1] i [3]. Nešto manje elementarne (ali kraće) dokaze čitatelj može naći u knjizi [6].

2.3 Dokaz Wignerovog teorema

U prvom dijelu dokaza, uspostavit ćemo vezu između integrala potencija (tj. polinoma) u odnosu na L_N i integrala u odnosu na σ.

Propozicija 2.3.1. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big] = \int_{\mathbb{R}} x^k d\sigma(x).$$

Dokaz. Primijetimo prvo da iz propozicije 1.2.2 slijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } k \text{ neparan,} \\ C_{\frac{k}{2}} & \text{za } k \text{ paran.} \end{cases}$$

S druge strane, imamo:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\lambda_i)^k.$$

Također, iz linearne algebre se u teoriju slučajnih matrica prenosi da je trag simetrične matrice jednak zbroju njenih svojstvenih vrijednosti. Osim toga, znamo da za svaku simetričnu matricu S postoji njoj slična matrica koja je dijagonalna, tj. postoje regularna matrica X i dijagonalna matrica A takve da vrijedi $S = X^{-1}AX$. Nadalje, matrica A na dijagonali ima svojstvene vrijednosti matrice S. Sada vidimo da se potenciranjem matrice $S^k = X^{-1}A^kX$ njen trag dobije kao suma potencija njenih svojstvenih vrijednosti:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(S^k) &= \mathrm{tr}(X^{-1}A^kX) \\ &= \mathrm{tr}(A^kXX^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(A^k). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi sljedeća relacija:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) = \frac{1}{N}\mathrm{tr}X_N^k,$$

iz koje slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big] &= \frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathrm{tr}X_N^k] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \mathbb{E}[X_N(i_1,i_2)X_N(i_2,i_3)\cdots X_N(i_{k-1},i_k)X_N(i_k,i_1)], \qquad (2.1)\end{aligned}$$

gdje $X_N^k(i,j)$ označava (i,j)-ti element matrice X_N^k.

Primijetimo da će sumandi $\mathbb{E}[X_N(i_1,i_2)\cdots X_N(i_k,i_1)]$ biti jednaki 0, osim ukoliko se svaki od parova indeksa pojavljuje barem dva puta. Naime, pretpostavili smo da su elementi matrice X_N nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0. Dakle, ako se neka slučajna varijabla $X_N(i,j)$, za neke $i,j \in \{1,...,N\}$, u sumandu pojavljuje samo jedanput, ukupno očekivanje sumanda bit će jednako 0.

Dalje razmatramo samo sumande koji su različiti od 0. Vidimo da svaki takav sumand ima najviše $\frac{k}{2}$ različitih parova indeksa. Zbog simetričnosti matrice X_N, smatramo da su parovi indeksa (i,j) i (j,i) jednaki jer nam daju iste elemente matrice X_N. U slučaju kada je k neparan, imamo najviše $\frac{k-1}{2}$ različitih parova indeksa.

Promotrimo nizove indeksa $i = i_1 i_2 \cdots i_k i_1$ duljine $k+1$ za $i_j \in \{1,...,n\}$. Postoji bijektivna korespondencija između ovakvih nizova indeksa i sumanada u gornjem izrazu (2.1). Ovakve nizove možemo shvatiti i kao zatvorene puteve na skupu vrhova $\{i_1,...,i_k\}$, gdje bridove predstavljaju parovi indeksa $i_j i_{j+1}$.

U slučaju da je k paran za $\frac{k}{2}$ različitih bridova imamo najviše $\frac{k}{2}+1$ različitih vrhova $i_1,...,i_k$, odnosno u slučaju kada je k neparan za $\frac{k-1}{2}$ različitih bridova imamo najviše $\frac{k-1}{2}+1$ različitih vrhova. Ako za neki niz imamo manje bridova nego je najviše moguće, imamo i manje različitih vrhova nego je to najviše moguće. Definiramo težinu t niza i kao broj različitih vrhova $i_1,...,i_k$. Za dva niza i i i' kažemo da su ekvivalentni ako postoji bijekcija na skupu $\{1,2,...,N\}$ takva da svaki i_j preslikava u i'_j, te takvi nizovi imaju jednake težine.

Pokažimo sada da sumandi u (2.1), za koje pripadni nizovi imaju težine $t < \frac{k}{2}+1$, teže prema 0 kada $N \to \infty$. Neka je $i = i_1 i_2 \cdots i_k i_1$ niz indeksa težine $t < \frac{k}{2}+1$. On ima $N(N-1)\cdots(N-t+1) \leq N^t$ ekvivalentnih nizova. Nizovi ove klase ekvivalencije će u (2.1) sudjelovati s $O(\frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{N^k}})$, zbog Hölderove nejednakosti i pretpostavke da su svi k-ti momenti elemenata matrice X_N konačni. Dakle, svi sumandi za koje su pripadni nizovi težine $t < \frac{k}{2}+1$ ukupno sudjeluju u izrazu (2.1) s $O(N^{t-\frac{k}{2}-1}) \to 0$ za $N \to \infty$.

Dosad je pokazano da će u izrazu (2.1), kada pustimo limes $N \to \infty$, ostati samo sumandi za koje pripadni niz indeksa ima težinu $t = \frac{k}{2}+1$. Štoviše, pokazano je da će, u slučaju da je k neparan, sumandi težiti u 0 kada $N \to \infty$. Time je zapravo dokazano:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N\Big] = 0$$

za sve neparne $k \in \mathbb{N}$.

Za parne $k \in \mathbb{N}$ kada pustimo $N \to \infty$, ostat će nam samo sumandi za koje pripadni niz indeksa $i = i_1 i_2 \cdots i_k i_1$ ima $\frac{k}{2}$ različitih bridova i $\frac{k}{2} + 1$ različitih vrhova. Takve nizove možemo promatrati i kao zatvorene puteve na stablu s vrhovima iz $\{i_1, ..., i_k\}$. Preciznije, ti putevi prolaze svakim bridom točno dvaput, po jednom u svakom smjeru. Napomenimo odmah da zbog uvjeta da imamo $\frac{k}{2}$ različitih bridova i $\frac{k}{2}+1$ različitih vrhova te da niz počinje i završava u istom vrhu slijedi da nemamo petlji, tj. u izrazu (2.1) nemamo dijagonalnih elemenata. Slijedi da je svaki preostali sumand:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\mathbb{E}[X_N(i_1, i_2) \cdots X_N(i_k, i_1)] &= \frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{N^k}} \\ &= N^{\frac{-k}{2}-1}. \end{aligned}$$

Dakle, preostalo nam je prebrojati te puteve $i = i_1 i_2 \cdots i_k i_1$ s težinom $\frac{k}{2}+1$ i s $\frac{k}{2}$ različitih bridova. Za takve puteve definiramo nizove $l = l_1 l_2 \cdots l_k$ na sljedeći način:

$$l_j := \begin{cases} 1 & j = 1 \\ l_{j-1} + 1 & j \neq 1 \text{ i brid } i_j i_{j+1} \text{ se pojavljuje prvi puta} \\ l_{j-1} - 1 & j \neq 1 \text{ i brid } i_j i_{j+1} \text{ se pojavljuje drugi puta} \end{cases}$$

Kao i ranije, bridove smatramo jednakima i u slučaju da su vrhovi suprotnog rasporeda. Npr., za niz $i = 132524231$ pripadni niz l bio bi 12323210. Primijetimo da takvi nizovi, osim što počinju s 1, uvijek završavaju s 0.

Za puteve kao gore kažemo da su ekvivalentni ukoliko imaju jednake nizove l. Svaka klasa ekvivalencije takvih puteva ima $N(N-1)\cdots(N-t+1)$ elemenata što je asimptotski jednako broju $N^t = N^{\frac{k}{2}+1}$ kada $N \to \infty$. Pritom kažemo da su (A_N) i (B_N) asimptotski jednaki ako vrijedi $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N} = 1$. Iz toga proizlazi:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big] = \text{broj različitih nizova } l \text{ duljine } k.$$

Neka B_k predstavlja broj gore opisanih nizova duljine $2k$ i neka je l jedan takav niz. Neka je j prvo mjesto u tom nizu u kojem se pojavljuje 0. Naravno, 0 se može pojavljivati samo na parnim indeksima, tj. $2, 4, 6, ..., 2k-2, 2k$, tako da j možemo zamijeniti s $2m$ gdje m poprima vrijednosti iz $\{1, 2, ..., k\}$. Pomoću te 0 možemo dobiti 2 podniza: $l_1 l_2 \cdots l_j$ duljine $2m$ i $l_{j+1} l_{j+2} \cdots l_{2k}$ duljine $2k - 2m$. Prvi podniz ima 0 samo na posljednjem mjestu, tako da tom prvom podnizu možemo ukloniti prvi i posljednji element (koji su sigurno 1 i 0) te ostale elemente podniza smanjimo za -1. Tako smo dobili novi podniz duljine $2m-2$ i postoji bijektivna korespondencija između takvih nizova duljine $2m-2$ i podnizova duljine $2m$ dobivenih na gornji način. Slijedi da B_k zadovoljava rekurziju $B_k = \sum_{m=1}^{k} B_{m-1} B_{k-m}$. Konačno, preostaje iskoristiti lemu 1.1.1 kako bismo zaključili $B_k = C_k$.

□

Sljedeća propozicija je druga i posljednja pomoćna tvrdnja u dokazu Wignerovog teorema 2.2.1.

Propozicija 2.3.2. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big| > \epsilon\Big) = 0.$$

Dokaz. Iz Čebiševljeve nejednakosti proizlazi:

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big| > \epsilon\Big) \\ &\le \frac{\mathrm{Var}\Big(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big)^2\Big), \end{aligned}$$

tako da je po teoremu o sendviču dovoljno pokazati:

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big)^2\Big) = 0.$$

U prethodnoj smo propoziciji pokazali:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) = \frac{1}{N}\mathrm{tr}X_N^k,$$

iz čega dobijemo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big)^2\Big] &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[(\mathrm{tr}X_N^k)^2\Big] \\ &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} X_N(i_1,i_2)X_N(i_2,i_3)\cdots X_N(i_{k-1},i_k)X_N(i_k,i_1)\Big)^2\Big] \\ &= \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i'_1,\dots,i'_k=1}}^{N} X_N(i_1,i_2)\cdots X_N(i_k,i_1)X_N(i'_1,i'_2)\cdots X_N(i'_k,i'_1)\Big] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i'_1,\dots,i'_k=1}}^{N} \mathbb{E}\Big[X_N(i_1,i_2)\cdots X_N(i_k,i_1)X_N(i'_1,i'_2)\cdots X_N(i'_k,i'_1)\Big], \end{aligned}$$

a tako dobijemo i:

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big)^2 &= \frac{1}{N^2}\Big(\mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}X_N^k\Big]\Big)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \mathbb{E}\Big[X_N(i_1,i_2)X_N(i_2,i_3)\cdots X_N(i_{k-1},i_k)X_N(i_k,i_1)\Big]\Big)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ i'_1,\dots,i'_k=1}}^{N} \mathbb{E}\Big[X_N(i_1,i_2)\cdots X_N(i_k,i_1)\Big]\mathbb{E}\Big[X_N(i'_1,i'_2)\cdots X_N(i'_k,i'_1)\Big].
\end{aligned}
$$

Uvedimo nove oznake radi kompaktnijeg zapisa:

$$
\begin{aligned}
i &= (i_1, i_2, ..., i_k),\\
i' &= (i'_1, i'_2, ..., i'_k),\\
X_N(i) &= X_N(i_1, i_2)\cdots X_N(i_k, i_1),\\
X_N(i') &= X_N(i'_1, i'_2)\cdots X_N(i'_k, i'_1).
\end{aligned}
$$

Dakle, od sada nadalje razmatramo izraz:

$$
\frac{1}{N^2}\sum_{i,i'}\Big(\mathbb{E}\Big[X_N(i)X_N(i')\Big] - \mathbb{E}\Big[X_N(i)\Big]\mathbb{E}\Big[X_N(i')\Big]\Big). \tag{2.2}
$$

Slično kao u prethodnoj propoziciji, gledamo nizove indeksa $i = (i_1, i_2, ..., i_k), i' = (i'_1, i'_2, ..., i'_k)$ i interpretiramo ih kao grafove sa skupom vrhova $V \cup V' = \{i_1, i_2, ..., i_k\} \cup \{i'_1, i'_2, ..., i'_k\}$ i skupom bridova $E \cup E' = \{i_1i_2, ..., i_ki_1\} \cup \{i'_1i'_2, ..., i'_ki'_1\}$. Za razliku od prethodne propozicije, u ovom slučaju naš graf nije nužno povezan. Definiramo težinu para nizova indeksa s $t(i, i') = |V \cup V'|$. Osim toga, za dva para nizova indeksa (i, i') i (j, j') kažemo da su ekvivalentni ako postoji bijekcija na skupu indeksa $\{1, 2, ..., N\}$ takva da svaki odgovarajući indeks nizova i i i' preslikava u odgovarajući indeks nizova j i j'. Ekvivalentni parovi imaju jednake težine i daju nam jednake sumande u izrazu (2.2).

U kojem slučaju će nam sumandi u izrazu (2.2) biti jednaki 0? Zbog pretpostavke o nezavisnosti slučajnih varijabli slučajne matrice X_N te pretpostavke da su očekivanja tih slučajnih varijabli 0, slijedi da će sumandi biti jednaki 0 ukoliko se neki brid za par nizova indeksa (i, i') u sumandu pojavljuje samo jednom. Također, sumand će biti jednak 0 ukoliko za par nizova indeksa (i, i') skupovi bridova E i E' nemaju zajedničkih bridova — tada zbog nezavisnosti slijedi $\mathbb{E}\Big[X_N(i)X_N(i')\Big] = \mathbb{E}\Big[X_N(i)\Big]\mathbb{E}\Big[X_N(i')\Big]$.

Sada promatramo samo sumande različite od 0. Neka je (i, i') par nizova indeksa za koje je težina $t \leq k + 1$. Postoji $N(N-1)\cdots(N-t-1) \leq N^{k+1}$ takvih ekvivalentnih parova. Nadalje, zbog pretpostavke da slučajne varijable koje su elementi slučajne matrice

X_N imaju konačne momente, svaki takav par indeksa u izrazu (2.2) sudjeluje s $O(\frac{1}{N^{k+2}})$. Dakle, svi sumandi zajedno svake klase ekvivalencije s težinama $t \leq k+1$ će konvergirati prema 0 kada $N \to \infty$.

Sada gledamo sumande za koje pripadni par nizova indeksa ima težinu $t \geq k+2$. Kao i ranije, svaka klasa ekvivalencije parova nizova indeksa težine t ima $O(N^t)$ elemenata. Iz toga proizlazi da će sumandi izraza (2.2) pridonositi ukupnoj sumi s barem $O(1)$. Zbog toga, kako bi cijeli izraz (2.2) konvergirao u 0 za $N \to \infty$, moramo pokazati da su svi sumandi s težinama $t \geq k+2$ jednaki 0.

Ranije smo već spomenuli kako je nužan uvjet da sumand bude različit od 0 da skupovi bridova E i E' imaju barem jedan zajednički brid, tj. graf mora biti povezan. Također, svaki par indeksa se u izrazu (2.2) mora pojaviti barem dvaput (pri čemu parove indeksa $i_j i_{j+1}$ i $i_{j+1} i_j$ smatramo jednakima jer nam daju jednake elemente matrice X_N zbog simetričnosti). Iz toga slijedi da za sumand različit od 0 nužno vrijedi da predstavlja povezan graf s najviše k bridova. Međutim, takav graf ima najviše $k+1$ različitih vrhova, dakle sumandi s težinama $t \geq k+2$ su jednaki 0. □

U dokazu propozicije, usput smo pokazali i sljedeću lemu.

Lema 2.3.3. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $C \geq 0$ (ne ovisi o N) takav da vrijedi:*

$$\left| \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big)^2\Big] - \Big(\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)\Big]\Big)^2 \right| \leq \frac{C}{N^2} \tag{2.3}$$

za dovoljno velike N.

Slijedi dokaz Wignerovog teorema 2.2.1 korištenjem propozicija 2.3.1 i 2.3.2.

Dokaz. Iz Markovljeve nejednakosti dobijemo za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) > \epsilon \Big) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) \Big] \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2k}}{5^k} \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) \Big] \\
&\leq \frac{1}{\epsilon 5^k} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^{2k} dL_N(x) \Big] \\
&\xrightarrow[2.3.1]{N\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\sigma(x)}{\epsilon 5^k} \\
&= \frac{C_k}{\epsilon 5^k} \leq \frac{4^k}{\epsilon 5^k},
\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili činjenicu da je $C_k \leq 4^k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, a C_k je, kao i dosad, k-ti Catalanov broj.

Kako $\mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) > \epsilon \Big)$ raste zajedno s k, a $\frac{4^k}{\epsilon 5^k}$ pada prema 0 kada $k \to \infty$, nužno slijedi:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) > \epsilon \Big) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{|x|>5} dL_N(x) \Big] = 0 \tag{2.4}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka su sada $f \in C_b(\mathbb{R})$ i $\epsilon > 0$. Iz Weierstrassovog teorema aproksimacije dobijemo egzistenciju polinoma $Q(x) = \sum_{i=0}^{L} c_i x^i$ za koji vrijedi:

$$|Q(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{za svaki } x \in [-5, 5]. \tag{2.5}$$

Raspisujemo:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \Big| \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N \Big| \\
&+ \Big| \int_{\mathbb{R}} Q \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} Q dL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big] \Big| \\
&+ \Big| \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big] - \int_{\mathbb{R}} Q d\sigma \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} Q d\sigma - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \Big|.
\end{aligned}$$

Definirajmo sljedeće izraze:

$$\begin{aligned}
p_1 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big), \\
p_2 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big), \\
p_3 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} Q \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big), \\
p_4 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} Q dL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big] \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big), \\
p_5 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q dL_N \Big] - \int_{\mathbb{R}} Q d\sigma \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big), \\
p_6 &:= \mathbb{P}\Big(\Big| \int_{\mathbb{R}} Q d\sigma - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \Big| > \frac{\epsilon}{6} \Big).
\end{aligned}$$

Pomoću gore definiranih izraza i raspisa dobili smo:

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma\Big| > \epsilon\Big) \leq \sum_{j=1}^{6} p_j.$$

Pogledajmo što će se dogoditi sa svakim od p_j kada pustimo $N \to \infty$.

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |f| \mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N > \frac{\epsilon}{6}\Big) \end{aligned}$$

Iz Markovljeve nejednakosti dobivamo dalje:

$$\leq \frac{6}{\epsilon}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |f| \mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big]$$

te koristeći pretpostavku da je $f \in C_B(\mathbb{R})$, tj. da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $M = \sup|f(x)|$ konačan:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{6M}{\epsilon}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big] \\ &\leq \frac{6M}{\epsilon}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |x^k| \mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N(x)\Big] \\ &\xrightarrow[(2.4)]{N\to\infty} 0 \end{aligned}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Za p_2 raspisujemo:

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} (Q - f) \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |Q - f| \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N > \frac{\epsilon}{6}\Big), \end{aligned}$$

a iskoristimo li (2.5) dobijemo:

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{6} \mathbb{1}_{[-5,5]} dL_N > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(L_N([-5,5]) > 1\Big) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili činjenicu da za svaki $\omega \in \Omega$ mjera $L_N(\omega)$ poprima vrijednosti u $[0, 1]$.

Pogledajmo što dobijemo za p_3:

$$\begin{aligned} p_3 &= \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} Q\mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &\le \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} \Big|Q\mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big), \end{aligned}$$

a iskoristimo li Markovljevu nejednakost dobili smo:

$$\begin{aligned} &\le \frac{6}{\epsilon}\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |Q|\mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big] \\ &\le \frac{6}{\epsilon}\sum_{i=0}^{L} |c_i|\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} |x^i|\mathbb{1}_{[-5,5]^c} dL_N\Big] \\ &\xrightarrow[(2.4)]{N\to\infty} 0, \end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili (2.5).

Promotrimo sada p_4:

$$\begin{aligned} p_4 &= \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} QdL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} QdL_N\Big]\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &\le \sum_{i=0}^{L} \mathbb{P}\Big(|c_i|\Big|\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N\Big]\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{L} \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N\Big]\Big| > \frac{\epsilon}{6|c_i|}\Big) \\ &\xrightarrow[2.3.2]{N\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Nadalje, za p_5 imamo:

$$\begin{aligned} p_5 &\le \sum_{i=0}^{L} \mathbb{P}\Big(|c_i|\Big|\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N\Big] - \int_{\mathbb{R}} x^i d\sigma\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\ &\le \sum_{i=0}^{L} \mathbb{P}\Big(\Big|\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} x^i dL_N\Big] - \int_{\mathbb{R}} x^i d\sigma\Big| > \frac{\epsilon}{6|c_i|}\Big) \\ &\xrightarrow[2.3.1]{N\to\infty} \sum_{i=0}^{L} \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Konačno za p_6 vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
p_6 &= \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} Q d\sigma - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma\Big| > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} |Q - f| \mathbb{1}_{[-5,5]} d\sigma > \frac{\epsilon}{6}\Big) \\
&= \mathbb{P}(\emptyset) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili relaciju:

$$\int_{\mathbb{R}} |Q - f| \mathbb{1}_{[-5,5]} d\sigma = \int_{\mathbb{R}} |Q - f| d\sigma.$$

Naime, polukružna razdioba σ je koncentrirana na segmentu $[-2, 2]$ pa pogotovo pridružuje mjeru 0 komplementu segmenta $[-5, 5]$. □

Primijetimo da smo dokazali i više, da tvrdnja teorema ne vrijedi samo za $f \in C_b(\mathbb{R})$, već i ako je funkcija f polinom.

2.4 Wignerov teorem za slučajne matrice uz slabije pretpostavke

Definicija 2.4.1. *Neka je $C_b(\mathbb{R})$ skup svih neprekidnih ograničenih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definirajmo sljedeći skup funkcija:*

$$\mathrm{Lip}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C_b(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq 1,\ \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 1 \Big\}.$$

Takve funkcije zovemo Lipschitzove ograničene funkcije.

Napomena 2.4.2. *Slaba konvergencija ekvivalentna je konvergenciji u odnosu na Lipschitzove ograničene funkcije. Za dokaz ove tvrdnje čitatelja upućujemo na [1].*

Teorem 2.4.3. *Neka su X_N Wignerove slučajne matrice definirane kao u definiciji 2.1.1, ali umjesto pretpostavke da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $r_k := \max(\mathbb{E}|Z_{1,2}|^k, \mathbb{E}|Y_1|^k) < \infty$, pretpostavljamo samo da je $r_2 < \infty$. Tada tvrdnja teorema 2.2.1 i dalje vrijedi.*

Dokaz. Neka je $C \geq 0$. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ definiramo nove simetrične slučajne matrice $\hat{X}_N$ sa sljedećom relacijom:

$$\hat{X}_N(i, j) := X_N(i, j) \mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)| \leq C} - \mathbb{E}\Big[X_N(i, j) \mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)| \leq C}\Big].$$

Nadalje, neka su $\hat{\lambda}_1^N, \hat{\lambda}_2^N, \dots, \hat{\lambda}_N^N$ (slučajne) svojstvene vrijednosti slučajne matrice $\hat{X}_N$. Iz njih definiramo slučajnu mjeru $\hat{L}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\hat{\lambda}_i^N}$.

Iz Hoffman-Wielandtovog teorema iz odjeljka 1.5 imamo:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\lambda_i^N - \hat{\lambda}_i^N\right|^2 \leq \frac{1}{N}\mathrm{tr}(X_N - \hat{X}_N)^2.$$

Neka su $i, j \in 1, 2, \dots, N$; raspišimo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
X_N(i,j) - \hat{X}_N(i,j) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\sqrt{N}X_N(i,j) - \sqrt{N}\hat{X}_N(i,j)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\sqrt{N}X_N(i,j) - \mathbb{E}[\sqrt{N}X_N(i,j)] - \sqrt{N}\hat{X}_N(i,j)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\sqrt{N}X_N(i,j)\mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)|\geq C} - \mathbb{E}[\sqrt{N}X_N(i,j)\mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)|\geq C}]\Big),
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili pretpostavku da za sve $i, j \in 1, 2, \dots, N$ vrijedi $\mathbb{E}[\sqrt{N}X_N(i,j)] = 0$, a u posljednjoj jednakosti smo iskoristili definiciju slučajne matrice $\hat{X}_N$ i linearnost očekivanja. Odavde dalje dobivamo:

$$\begin{aligned}
W_N &:= \frac{1}{N}\mathrm{tr}(X_N - \hat{X}_N)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\mathrm{tr}(\sqrt{N}X_N - \sqrt{N}\hat{X}_N)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\sqrt{N}X_N(i,j)\mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)|\geq C} - \mathbb{E}[\sqrt{N}X_N(i,j)\mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)|\geq C}]\Big)^2.
\end{aligned}$$

Kako smo pretpostavili da $r_2 < \infty$, slijedi da niz brojeva

$$\left(\mathbb{E}\Big[(\sqrt{N}X_N(i,j))^2\mathbb{1}_{\sqrt{N}|X_N(i,j)|\geq C}\Big]\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

konvergira prema 0 kada $C \to \infty$ i to za svake $i, j \in 1, 2, \dots, N$. Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ možemo pronaći C dovoljno velik da za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\Big(|W_N| > \epsilon\Big) < \epsilon.$$

S druge strane, na događaju $\{|W_N| \leq \epsilon\}$ te za $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ imamo:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\hat{L}_N \right| &= \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^{N} \Big(f(\lambda_i^N) - f(\hat{\lambda}_i^N) \Big) \right| \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| f(\lambda_i^N) - f(\hat{\lambda}_i^N) \right| \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \lambda_i^N - \hat{\lambda}_i^N \right| \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \lambda_i^N - \hat{\lambda}_i^N \right|^2} \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{N} \mathrm{tr}\Big(X_N - \hat{X}_N \Big)^2} \\
&\leq \sqrt{W_N} \\
&\leq \sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Primijetimo kako na niz slučajnih matrica $\hat{X}_N$ možemo primijeniti originalan Wignerov teorem 2.2.1. Zajedno s napomenom 2.4.2, slijedi tvrdnja teorema. □

2.5 Wignerov teorem za slučajne matrice – konvergencija gotovo sigurno

U ovom odjeljku dajemo još jaču tvrdnju Wignerovog teorema. Naime, teorem 2.2.1 govori kako niz slučajnih mjera L_N konvergira slabo po vjerojatnosti prema polukružnoj razdiobi. Međutim, vrijedi i jača tvrdnja – niz slučajnih mjera konvergira slabo gotovo sigurno prema polukružnoj razdiobi.

Prije nego krenemo na dokaz gore navedene tvrdnje, prisjetimo se jednog klasičnog rezultata opće teorije vjerojatnosti.

Lema 2.5.1 (Borel–Cantellijeva lema)**.** *Neka je $E_1, E_2, \dots$ niz događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je suma vjerojatnosti tih događaja konačna, tj. ako vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty,$$

tada vrijedi:

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n \to \infty} E_n \Big) = 0.$$

Dokaz. Za dokaz leme upućujemo čitatelja na [5]. □

Korolar 2.5.2. *Niz slučajnih mjera L_N konvergira slabo gotovo sigurno prema polukružnoj razdiobi σ.*

Dokaz. Pokažimo najprije da se tvrdnja propozicije 2.3.2 može proširiti na konvergenciju gotovo sigurno, tj. da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) - \mathbb{E}[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)]\Big| = 0\right) = 1,$$

tj. za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{N\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x) - \mathbb{E}[\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x)]\Big| < \epsilon\right) = 1, \tag{2.6}$$

Radi kompaktnijeg zapisa uvedimo sljedeću oznaku:

$$X_N^k := \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N(x).$$

Raspišimo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
\sum_{N=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\big|X_N^k - \mathbb{E}[X_N^k]\big| \geq \epsilon\Big) &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{N=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big[(X_N^k - \mathbb{E}[X_N^k])^2\Big] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{N=1}^{\infty}\Big(\mathbb{E}[(X_N^k)^2] - (\mathbb{E}[X_N^k])^2\Big) \\
&\leq C_1 + \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{C}{N^2} \\
&= C_1 + \frac{1}{\epsilon^2}\frac{C\pi^2}{6} < \infty,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili Markovljevu nejednakost, u drugoj nejednakosti smo iskoristili lemu 2.3.3, gdje je $C_1 > 0$ dovoljno velika konstanta, pošto lema 2.3.3 vrijedi tek za dovoljno velike N.

Sada iz Borel–Cantellijeve leme 2.5.1 slijedi:

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{N\to\infty}\big|X_N^k - \mathbb{E}[X_N^k]\big| \geq \epsilon\Big) = 0,$$

što je ekvivalentno s (2.6).

Želimo dokazati da za svaku $f \in C_b(\mathbb{R})$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \right| = 0 \right) = 1,$$

tj. za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{N\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \right| < \epsilon \right) = 1, \tag{2.7}$$

Uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}
X_N &:= \left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \right|, \\
X_N^1 &:= \left| \int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-N,N]} dL_N \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-N,N]^c} dL_N \right|, \\
X_N^2 &:= \left| \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[-N,N]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q_N \mathbb{1}_{[-N,N]} dL_N \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f - Q_N) \mathbb{1}_{[-N,N]} dL_N \right|, \\
X_N^3 &:= \left| \int_{\mathbb{R}} Q_N \mathbb{1}_{[-N,N]} dL_N - \int_{\mathbb{R}} Q_N dL_N \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} Q_N \mathbb{1}_{[-N,N]^c} dL_N \right|, \\
X_N^4 &:= \left| \int_{\mathbb{R}} Q_N dL_N - \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q_N dL_N \Big] \right|, \\
X_N^5 &:= \left| \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} Q_N dL_N \Big] - \int_{\mathbb{R}} Q_N d\sigma \right|, \\
X_N^6 &:= \left| \int_{\mathbb{R}} Q_N d\sigma - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (Q_N - f) d\sigma \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (Q_N - f) \mathbb{1}_{[-2,2]} d\sigma \right|,
\end{aligned}$$

gdje je Q_N polinom iz Weierstrassovog teorema aproksimacije za funkciju f i segment $[-N, N]$. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$X_N \leq X_N^1 + X_N^2 + X_N^3 + X_N^4 + X_N^5 + X_N^6. \tag{2.8}$$

Za nizove slučajnih varijabli $(X_N^1)_{N\in\mathbb{N}}$ i $(X_N^3)_{N\in\mathbb{N}}$ jasno vidimo kako gotovo sigurno konvergiraju prema degeneriranoj slučajnoj varijabli 0. Nadalje, zbog načina na koji smo odabrali polinom Q_N, niz slučajnih varijabli $(X_N^2)_{N\in\mathbb{N}}$ također konvergira gotovo sigurno prema 0. Slično zaključujemo i za niz brojeva $(X_N^6)_{N\in\mathbb{N}}$, tj. za svaki $N \geq 2$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $X_N^6 \leq \left| \int_{\mathbb{R}} (Q_N - f) \mathbb{1}_{[-N,N]} d\sigma \right| < \epsilon$. Iz (2.6) slijedi kako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $\mathbb{P}\left(\limsup_{N\to\infty} X_N^4 \geq \epsilon \right) = 0$. Konačno, iz propozicije 2.3.1 imamo $\lim_{N\to\infty} X_N^5 = 0$.

Iz (2.8) sada imamo za svaki $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\limsup_{N\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}} f dL_N - \int_{\mathbb{R}} f d\sigma\Big| \geq \epsilon\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\limsup_{N\to\infty} X_N \geq \epsilon\Big)\\
&\leq \mathbb{P}\Big(\limsup_{N\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{6} X_N^i\Big) \geq \epsilon\Big)\\
&\leq \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{6}\limsup_{N\to\infty} X_N^i \geq \epsilon\Big)\\
&\leq \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}\Big(\limsup_{N\to\infty} X_N^i \geq \frac{\epsilon}{6}\Big)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

odakle slijedi (2.7). □

2.6 Jedna posljedica Wignerovog teorema

Za kraj ovog poglavlja pokažimo jednu jednostavnu posljedicu Wignerovog teorema. Prisjetimo se prvo definicije slučajne mjere L_N: za svaki $\omega \in \Omega$ definirano je $L_N(\omega) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sada je:

$$\begin{aligned}
L_N(\omega)((a, b]) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,b]} dL_N(\omega)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{(a,b]} d\delta_{\lambda_i^N(\omega)}\\
&= \frac{1}{N}\mathrm{card}\Big\{i \in \{1, ..., N\} : \lambda_i^N(\omega) \in (a, b]\Big\},
\end{aligned}$$

iz čega dalje slijedi:

$$L_N((a, b]) = \frac{1}{N}\mathrm{card}\Big\{i \in \{1, ..., N\} : \lambda_i^N \in (a, b]\Big\},$$

tj. $L_N((a, b])$ je slučajna varijabla čije vrijednosti su udio λ_i^N koje upadaju u interval $(a, b]$.

Korolar 2.6.1. *Za svake $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a < b$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \Big|L_N(\omega)((a, b]) - \sigma((a, b])\Big| > \epsilon\Big\}\Big) = 0.$$

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, neka je $\epsilon > 0$ te neka su $f, g \in C_b(\mathbb{R})$ takve da je:

$$0 \leq g \leq \mathbb{1}_{(a,b]} \leq h \leq 1 \tag{2.9}$$

i takve da vrijedi:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} hd\sigma - \int_{\mathbb{R}} gd\sigma \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.10}$$

Iz (2.9) dobijemo dvije relacije:

$$\int_{\mathbb{R}} gdL_N \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,b]} dL_N = L_N((a,b]) \leq \int_{\mathbb{R}} hdL_N$$

i

$$\int_{\mathbb{R}} gd\sigma \leq \sigma((a,b]) \leq \int_{\mathbb{R}} hd\sigma.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
D_N &:= \Big| L_N((a,b]) - \sigma((a,b]) \Big| \\
&\leq \max \Big\{ \Big| \int_{\mathbb{R}} gdL_N - \sigma((a,b]) \Big|, \Big| \int_{\mathbb{R}} hdL_N - \sigma((a,b]) \Big| \Big\} \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} gdL_N - \sigma((a,b]) \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} hdL_N - \sigma((a,b]) \Big| \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} gdL_N - \int_{\mathbb{R}} gd\sigma \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} gd\sigma - \sigma((a,b]) \Big| + \\
&+ \Big| \int_{\mathbb{R}} hdL_N - \int_{\mathbb{R}} hd\sigma \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} hd\sigma - \sigma((a,b]) \Big|.
\end{aligned}$$

Kako je:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} gd\sigma - \sigma((a,b]) \Big| = \sigma((a,b]) - \int_{\mathbb{R}} gd\sigma$$

i

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} hd\sigma - \sigma((a,b]) \Big| = \int_{\mathbb{R}} hd\sigma - \sigma((a,b]),$$

slijedi

$$D_N \leq \Big| \int_{\mathbb{R}} gdL_N - \int_{\mathbb{R}} gd\sigma \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} hdL_N - \int_{\mathbb{R}} hd\sigma \Big| + \Big(\int_{\mathbb{R}} hd\sigma - \int_{\mathbb{R}} gd\sigma \Big).$$

Dakle, dobili smo:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}(D_N > \epsilon) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} g dL_N - \int_{\mathbb{R}} g d\sigma\Big| > \frac{\epsilon}{3}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} h dL_N - \int_{\mathbb{R}} h d\sigma\Big| > \frac{\epsilon}{3}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\int_{\mathbb{R}} h d\sigma - \int_{\mathbb{R}} g d\sigma > \frac{\epsilon}{3}\Big) \\
&\xrightarrow{N\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Naime, po Wignerovom teoremu prva dva pribrojnika konvergiraju u 0, dok je treći upravo jednak 0. Time je završen dokaz korolara. □

Lijepa interpretacija korolara 2.6.1 je da se svojstvene vrijednosti Wignerove slučajne matrice raspoređuju upravo prema polukružnoj razdiobi σ. To ćemo simulirati i ilustrirati u idućem poglavlju.

Poglavlje 3

Simulacija distribucije svojstvenih vrijednosti Wignerove slučajne matrice

Posljednji korolar prethodnog poglavlja daje nam teorijsku podlogu za kratku računalnu simulaciju Wignerovih slučajnih matrica i njihovih svojstvenih vrijednosti. Jednom izračunate svojstvene vrijednosti prikazat ćemo u histogramu kako bismo dobili ideju o distribuciji tih svojstvenih vrijednosti.

Sljedeći kod napisan je u programskom jeziku R[1], *open source* okruženju za računarsku statistiku.

```
generate_random_matrix <- function(dimension) {
    random_matrix = matrix(rnorm(dimension*dimension,
                                 mean = 0,
                                 sd = 1/sqrt(dimension)),
                           dimension)
    random_matrix[lower.tri(random_matrix)] =
        t(random_matrix)[lower.tri(random_matrix)]
    return(random_matrix)
}

wigner_semicircle_x = seq(from = -2, to = 2, by = 0.1)
wigner_semicircle_y = (1/(2*pi))*
        sqrt(4-wigner_semicircle_x*wigner_semicircle_x)
wigner_semicircle_y = c(rep(0, 10),
                        wigner_semicircle_y,
                        rep(0, 10))
```

[1] The R Project for Statistical Computing [7]

```
matrix_100 = generate_random_matrix(100)
matrix_250 = generate_random_matrix(250)
matrix_500 = generate_random_matrix(500)
matrix_750 = generate_random_matrix(750)
matrix_1000 = generate_random_matrix(1000)
matrix_2500 = generate_random_matrix(2500)
matrix_5000 = generate_random_matrix(5000)
matrix_7500 = generate_random_matrix(7500)
matrix_10000 = generate_random_matrix(10000)

eigenvalues_100 = eigen(matrix_100, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_250 = eigen(matrix_250, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_500 = eigen(matrix_500, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_750 = eigen(matrix_750, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_1000 = eigen(matrix_1000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_2500 = eigen(matrix_2500, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_5000 = eigen(matrix_5000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_7500 = eigen(matrix_7500, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_10000 = eigen(matrix_10000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values

hist(eigenvalues_100, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_250, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
```

```
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_750, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_1000, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_2500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_5000, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_7500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

h = hist(eigenvalues_10000, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)
```

Analizirajmo pojedine dijelove koda:

```
generate_random_matrix <- function(dimension) {
    random_matrix = matrix(rnorm(dimension*dimension,
                                 mean = 0,
                                 sd = 1/sqrt(dimension)),
                           dimension)
    random_matrix[lower.tri(random_matrix)] =
        t(random_matrix)[lower.tri(random_matrix)]
    return(random_matrix)
}
```

U ovoj metodi generiramo realnu simetričnu matricu dane dimenzije. Prvo generiramo slučajne brojeve iz normalne distribucije, a zatim popunimo matricu s njima. Na kraju, u donji trokut matrice prekopiramo brojeve iz gornjeg trokuta, kako bi konačna matrica bila simetrična.

```
wigner_semicircle_x = seq(from = -2, to = 2, by = 0.1)
wigner_semicircle_y = (1/(2*pi))*
        sqrt(4-wigner_semicircle_x*wigner_semicircle_x)
wigner_semicircle_y = c(rep(0, 10),
                        wigner_semicircle_y,
                        rep(0, 10))
```

Ovim naredbama smo izračunali koordinate grafa funkcije gustoće polukružne razdiobe. Taj graf ćemo kasnije dodati u histograme svojstvenih vrijednosti generiranih matrica kako bismo usporedili distribuciju tih svojstvenih vrijednosti s polukružnom razdiobom.

```
matrix_100 = generate_random_matrix(100)
matrix_250 = generate_random_matrix(250)
matrix_500 = generate_random_matrix(500)
matrix_750 = generate_random_matrix(750)
matrix_1000 = generate_random_matrix(1000)
matrix_2500 = generate_random_matrix(2500)
matrix_5000 = generate_random_matrix(5000)
matrix_7500 = generate_random_matrix(7500)
matrix_10000 = generate_random_matrix(10000)
```

Ovdje su generirane matrice pomoću metode s početka. Generirane matrice su dimenzija 100×100, 250×250, 500×500, 750×750, 1000×1000, 2500×2500, 5000×5000, 7500×7500, 10000×10000.

```
eigenvalues_100 = eigen(matrix_100, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_250 = eigen(matrix_250, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_500 = eigen(matrix_500, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_750 = eigen(matrix_750, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_1000 = eigen(matrix_1000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_2500 = eigen(matrix_2500, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_5000 = eigen(matrix_5000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_7500 = eigen(matrix_7500, symmetric = TRUE,
```

```
                        only.values = TRUE)$values
eigenvalues_10000 = eigen(matrix_10000, symmetric = TRUE,
                        only.values = TRUE)$values
```

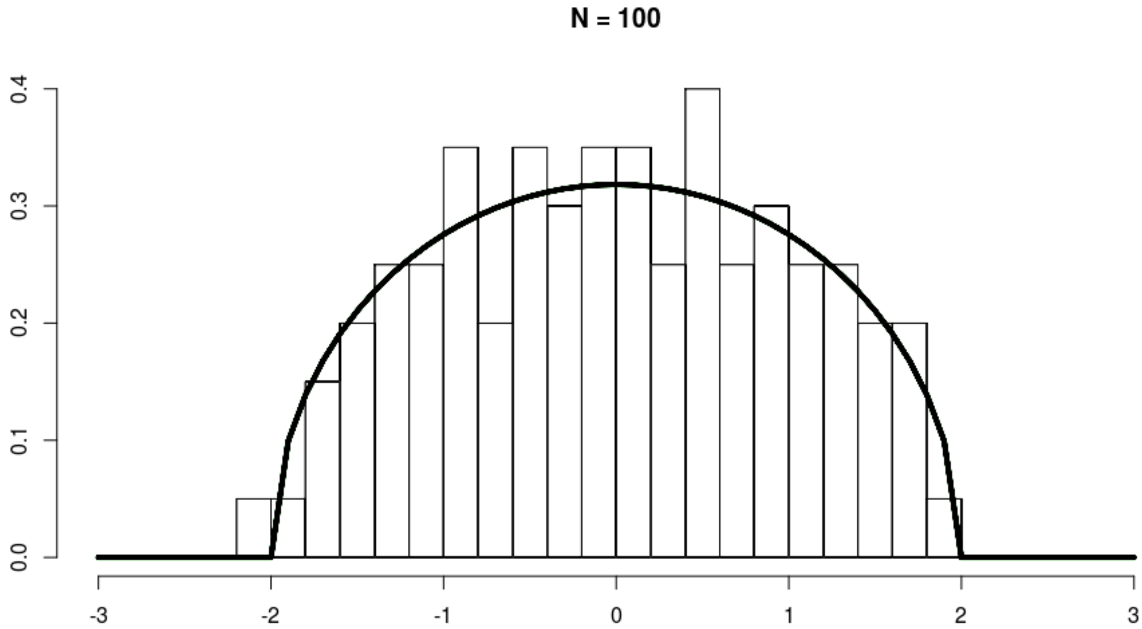
Svojstvene vrijednosti generiranih matrica računamo metodom *eigen*, koja u našem slučaju prima nekoliko dodatnih parametara. *symmetric = TRUE* govori metodi kako je matrica simetrična, što omogućuje metodi korištenje bržeg i efikasnijeg algoritma za nalaženje svojstvenih vrijednosti matrica. *only.values = TRUE* govori metodi kako je dovoljno da nam izračuna svojstvene vrijednosti matrice, bez računanja svojstvenih vektora, što također značajno ubrzava izvođenje programa.

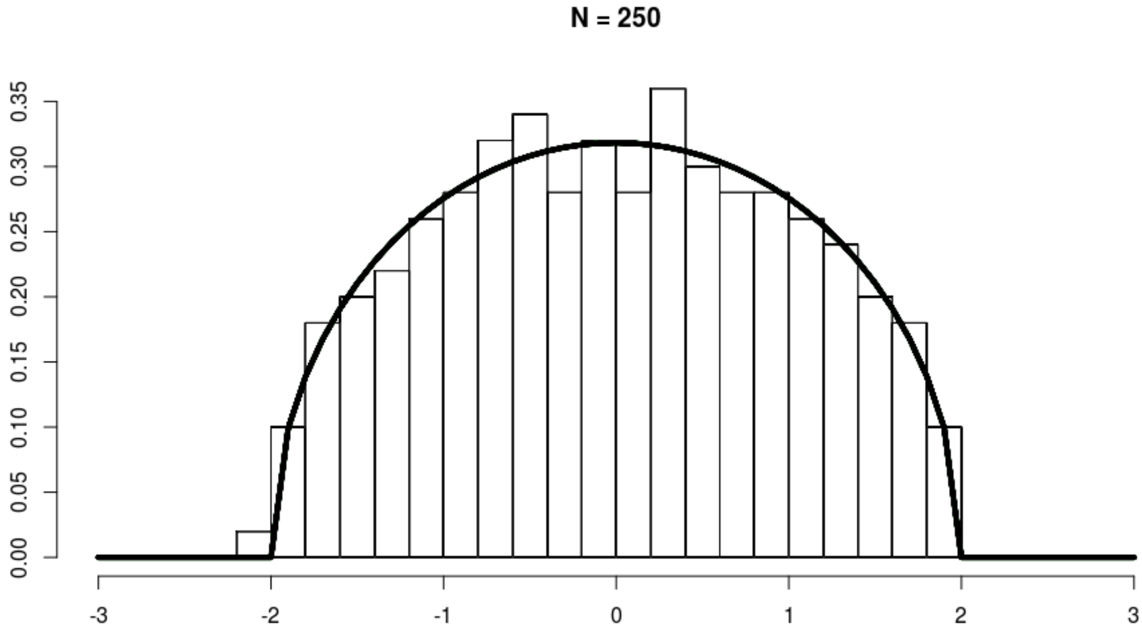
```
hist(eigenvalues_100, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_250, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_750, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_1000, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_2500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_5000, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y, col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_7500, freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
```

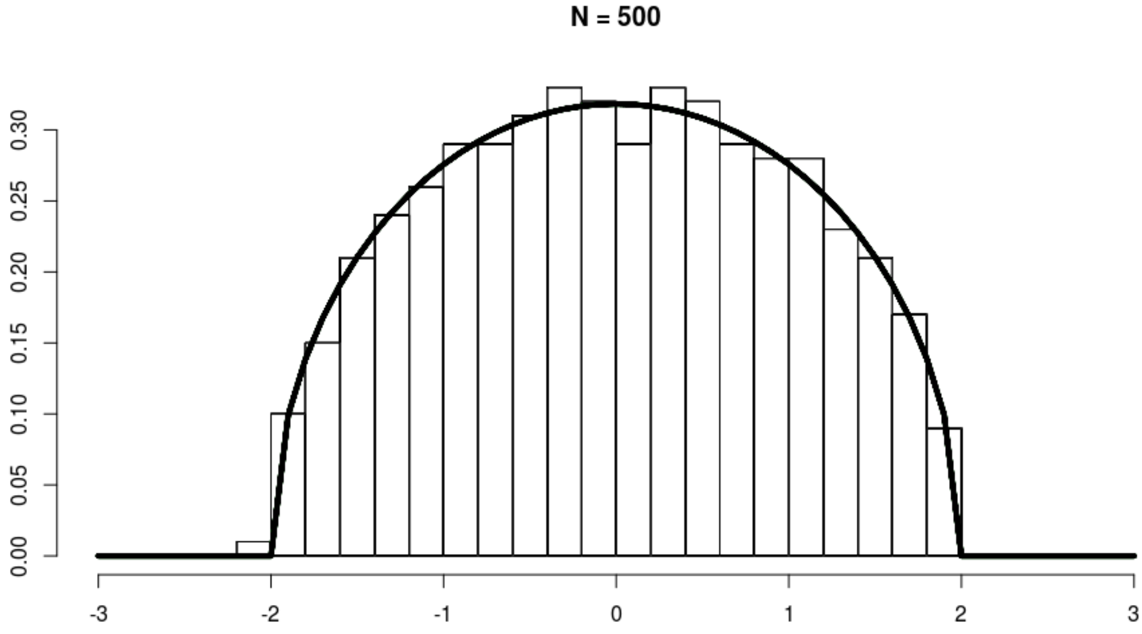
```
        wigner_semicircle_y , col="green", lwd = 4)

hist(eigenvalues_10000 , freq = FALSE, xlim = c(-3,3))
lines(seq(from = -3, to = 3, by = 0.1),
        wigner_semicircle_y , col="green", lwd = 4)
```

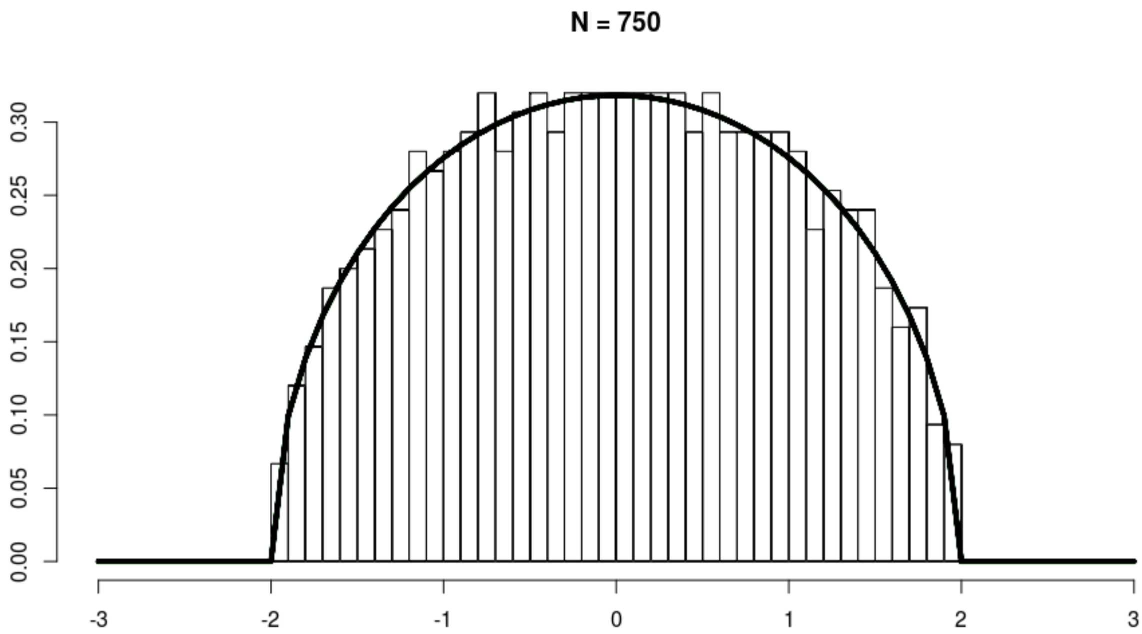
Ovim naredbama dobivamo histograme izračunatih svojstvenih vrijednosti, zajedno s grafom funkcije gustoće polukružne razdiobe.

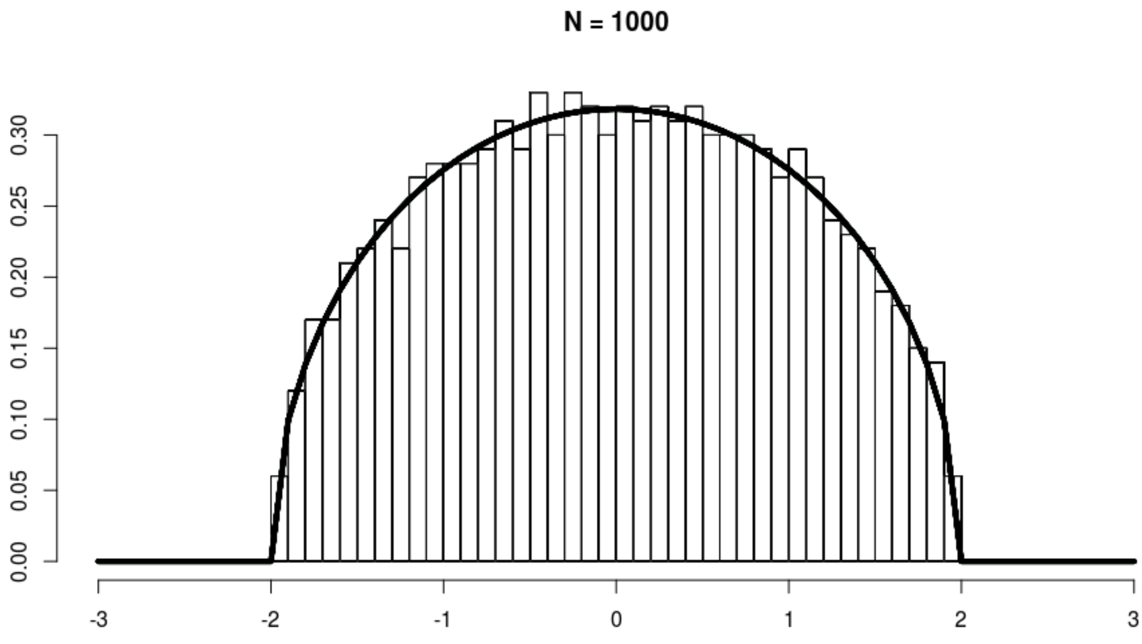
Na slikama koje slijede vidimo rezultate programa (razlikuju se sa svakim izvođenjem zbog slučajnog odabira elemenata matrica). Primijetimo kako s rastom dimenzije dobijemo finije histograme, koji sve više poprimaju oblik grafa funckije gustoće polukružne razdiobe. Osim toga, vidimo i kako je moguće da neke svojstvene vrijednosti poprime vrijednost izvan intervala $[-2, 2]$, ali s rastom dimenzije udio takvih svojstvenih vrijednosti pada prema 0.

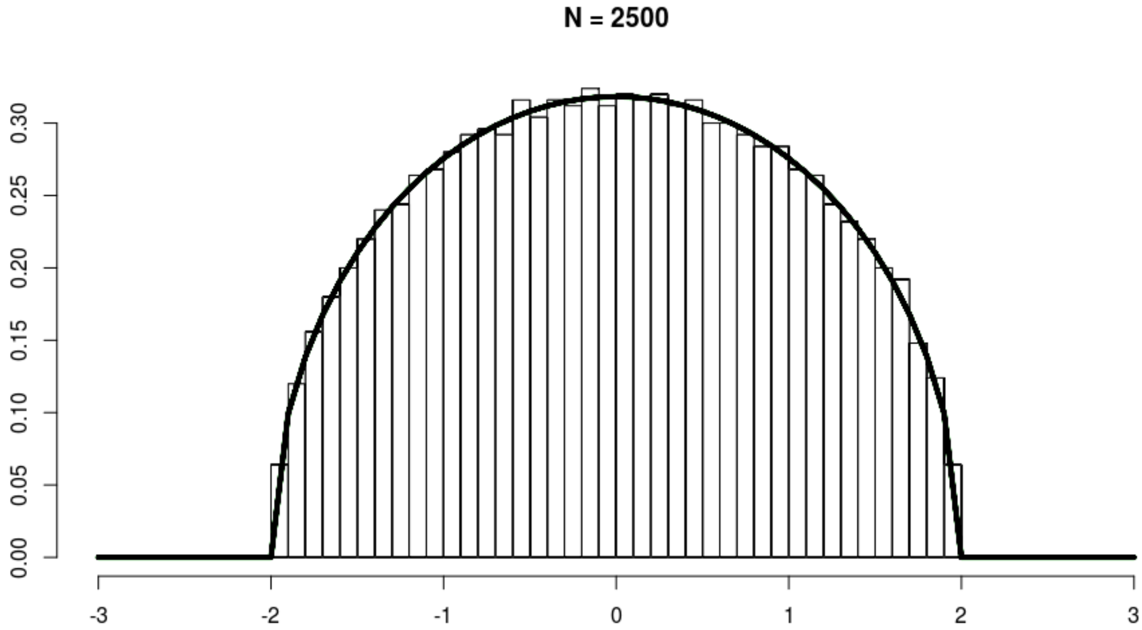


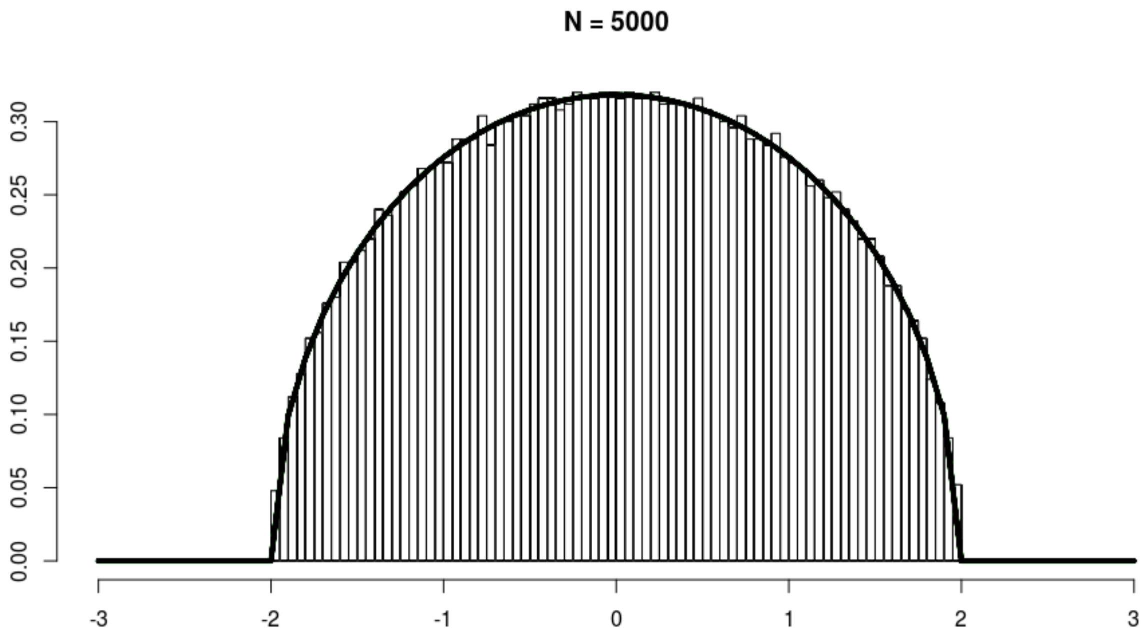

N = 250
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
-3
-2
-1
0
1
2
3

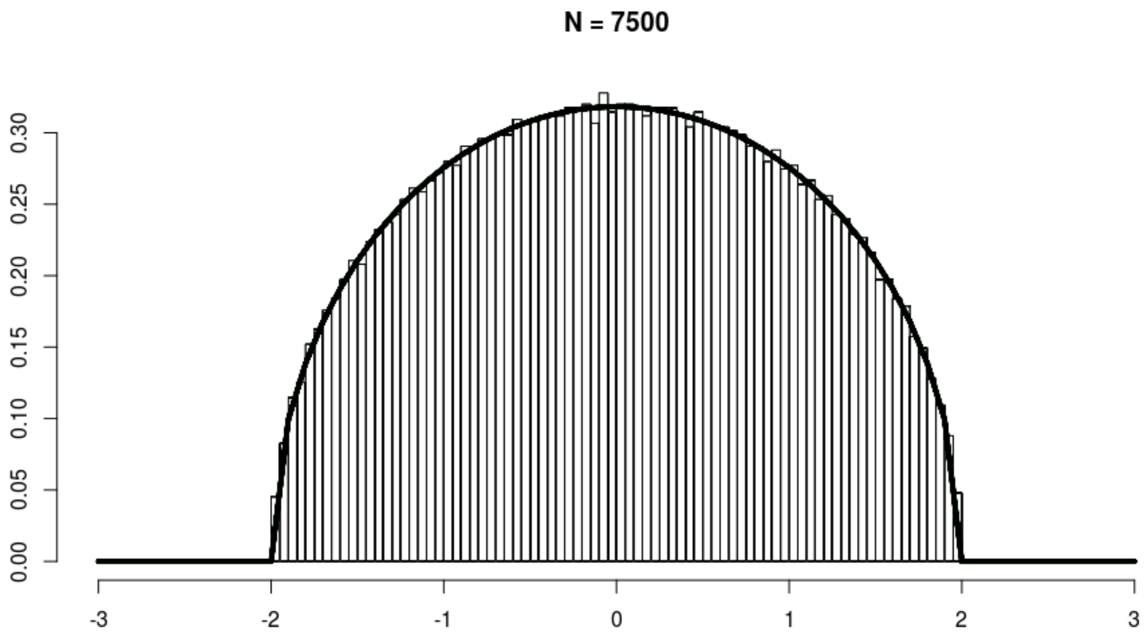

N = 500
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3

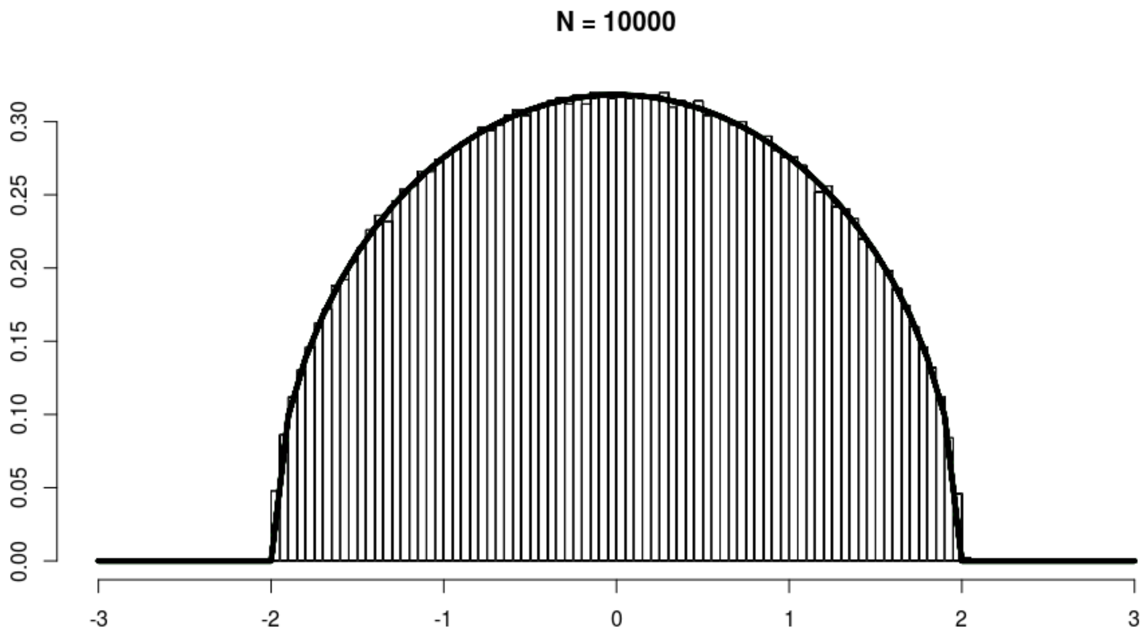

N = 750
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3


N = 1000
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3


N = 2500
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3


N = 5000
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3


N = 7500
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3


N = 10000
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
-3
-2
-1
0
1
2
3

Bibliografija

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet i O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 118, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] G. Birkhoff, *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Univ. Nac. Tucumán Rev **Ser. A** (1946), br. no. 5, 147–151.

[3] A.R. Feier, *Methods of Proof in Random Matrix Theory*, Harvard University, 2012.

[4] D. Jackson, *A Proof of Weierstrass's Theorem*, The American Mathematical Monthly **41** (1934.), br. 5, 309–312.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[6] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, Graduate Studies in Mathematics 132, American Mathematical Society, Providence, 2012.

[7] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017, `https://www.R-project.org`, posjećena 15. srpnja 2017.

[8] D. Veljan, *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[9] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Annals of Mathematics **62** (1955), br. 2, 548–564.

[10] J. Wishart, *Generalized product moment distribution in samples*, Biometrika **20 A** (1928), br. 1–2, 32–52.

Sažetak

Slučajne matrice su koncept iz teorije vjerojatnosti, koji je motiviran numeričkom linearnom algebrom, teorijskom fizikom, teorijom brojeva, matematičkom statistikom i još mnogim drugim granama matematike i fizike. U ovom radu obrađuju se tzv. realne Wignerove slučajne matrice, koje su simetrične matrice s međusobno nezavisnim jednako distribuiranim elementima na dijagonali i u gornjem trokutu. Ako su $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ svojstvene vrijednosti takve matrice, promatraju se slučajne vjerojatnosne mjere $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$. Jedan od najklasičnijih rezultata o slučajnim matricama je Wignerov teorem, koji govori da niz takvih mjera konvergira slabo po vjerojatnosti kada $N \to \infty$ prema polukružnoj razdiobi, tj. distribuciji s gustoćom $\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}$ za $-2 \leq x \leq 2$. Glavni cilj ovog rada je dati elementarni dokaz tog važnog teorema.

Summary

Random matrix is a term from probability theory, inspired by numerical linear algebra, theoretical physics, number theory, mathematical statistics, and many other fields of mathematics and physics. In this thesis we consider the so-called Wigner random matrices, which are symmetric matrices with independent identically distributed diagonal elements and independent identically distributed upper triangular elements. Assuming that $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ are eigenvalues of such random matrix, we consider a probability measure $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$. Wigner's semicircle law states that this probability measure converges weakly in probability, as $N \to \infty$, to the semicircle distribution with density $\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ for $-2 \leq x \leq 2$. The main topic of this thesis is an elementary proof of this important theorem.

Životopis

Rođen sam 13. studenog 1992. godine u Zaboku. Godine 2007. upisao sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Krapini. Godine 2011. upisao sam Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam 2015. godine završio preddiplomski sveučilišni studij Matematike te iste godine upisao i Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike.