SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Karlo Markić

PRIMJENA VEKTORSKE METODE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu ćemo pokazati kako se odabrani rezultati elementarne geometrije mogu dokazati vektorskom metodom. Vektorskom metodom nazivamo način dokazivanja matematičkih tvrdnji u kojima se uvode pogodno odabrani vektori te se primijenjuju svojstva i operacije karakteristične za rad s vektorima. Stoga ćemo na početku svakog poglavlja navesti definicije i osnovna svojstva onih objekata iz područja vektora koji će biti ključni pri dokazivanju tvrdnji primjenom vektorske metode. Veliki broj teorema koje smo uvrstili u ovaj rad je dokazan na više načina što dovoljno govori o tome koliko je vektorska metoda moćno sredstvo za provjeravanje istinitosti planimetrijskih i stereometrijskih zakonitosti. Cilj nam je napraviti odmak od tradicionalnog načina dokazivanja geometrijskih tvrdnji te pokazati kako i vektorska metoda može biti efikasan način njihovog dokazivanja.
U prvom poglavlju ovog rada donosimo najznačajnije definicije i iskaze nekih tvrdnji o vektorima. Tvrdnje koje ćemo navesti u prvom poglavlju nećemo dokazati te ostavljamo čitatelju da njihove dokaze potraži u drugim izvorima.
Drugo poglavlje započinjemo definicijama radijvektora točke u ravnini i prostoru te djelišne točke orijentirane dužine. Nakon toga iskazujemo i dokazujemo teorem o djelišnoj točki orijentirane dužine te navodimo korolar tog teorema koji se odnosi na polovište orijentirane dužine. U drugom dijelu ovog poglavlja vektorskom metodom dokazujemo nekoliko planimetrijskih tvrdnji koristeći radijvektore.
U trećem poglavlju definiramo operaciju skalarnog množenja vektora te iskazujemo i dokazujemo najvažnija svojstva te operacije. Također, navodimo i neke posljedice tih svojstava. U drugom dijelu ovog poglavlja vektorskom metodom dokazujemo nekoliko planimetrijskih problema koristeći definiciju i svojstva skalarnog množenja vektora te donosimo rješenje jednog natjecateljskog zadatka.
U četvrtom poglavlju proučavamo operaciju vektorskog množenja vektora. Poseban naglasak stavljamo na geometrijsku interpretaciju modula vektorskog produkta. Najprije dokazujemo bitna svojstva ove operacije, a potom i neke planimetrijske i stereometrijske tvrdnje primjenom tih svojstava.
Peto poglavlje je posvećeno operaciji mješovitog množenja vektora. Kao i u prethodna dva poglavlja, i ovdje najprije definiramo novu operaciju te dokazujemo njena najvažnija svojstva. Nakon toga vektorskom metodom dokazujemo dvije tvrdnje koristeći dokazana

svojstva i geometrijsku interpretaciju mješovitog produkta.
U posljednja tri poglavlja ovoga rada uvrstili smo mnoge dobro poznate teoreme elementarne geometrije koji se odnose na trokut, četverokut i kružnicu te tetraedar, paralelepiped i sferu. Neke od tih teorema učenici u svojem matematičkom obrazovanju prvi put susretnu u višim razredima osnovne škole. Iako se navedeni teoremi najčešće dokazuju standardnim geometrijskim aparatima poput sukladnosti i sličnosti te trigonometrije i analitičke geometrije, ovdje ćemo pokazati kako se oni mogu vrlo efikasno i elegantno dokazati i primjenom klasične algebre vektora, odnosno vektorskom metodom.
Pri izradi ovoga rada koristili smo sljedeće izvore: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] i [16]. Sve slike koje smo uvrstili u ovaj rad izradili smo samostalno u programu dinamične geometrije *GeoGebra*.

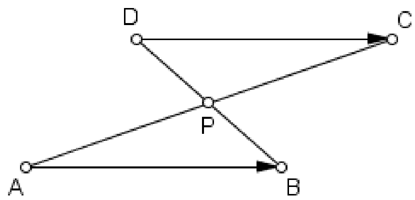
Poglavlje 1

Osnovni pojmovi o vektorima i vektorskom računu

U ovom poglavlju donosimo definicije i tvrdnje koje ćemo koristiti pri obradi teme ovog rada. Pri pisanju ovog poglavlja služili smo se sljedećim izvorima: [4], [15] i [16].

Definicija 1.1. *Uređeni par točaka* (A, B) *zovemo orijentiranom dužinom kojoj je točka A početak, a točka B kraj, i pišemo* $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 1.2. *Za orijentirane dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{DC}$ *kažemo da su ekvivalentne i pišemo* $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC}$ *ako dužine* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BD}$ *imaju isto polovište P.*



Slika 1.1.

Teorem 1.3. *Relacija* $\approx$ *je relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina ravnine* M.

Kvocijentni skup $M \times M/_{\approx}$ označavat ćemo s V^2, a njegove elemente nazivamo vektori. Klasu ekvivalencije orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ označavat ćemo također s $\overrightarrow{AB}$. Klasu ekvivalencije orijentirane dužine $\overrightarrow{AA}$ zvat ćemo nulvektor i označavati s $\vec{0}$. Za vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ označavat ćemo njemu suprotni vektor $\overrightarrow{BA}$ s $-\vec{a}$. Očito je da vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Definicija 1.4. *Duljina (modul) vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je udaljenost točaka A i B, tj. duljina $|AB|$ dužine $\overline{AB}$. Pišemo $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.*

Vektor $\vec{a}$ kojemu je duljina jednaka 1, tj. za koji vrijedi $|\vec{a}| = 1$ nazivamo **jedinični** ili **normirani** vektor.

Definicija 1.5. *Za vektore $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$, kažemo da su istog smjera, tj. da su kolinearni ako vrijedi $AB \parallel CD$. U suprotnom govorimo o nekolinearnim vektorima. Dogovorno, smatramo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.*

Propozicija 1.6. *Vektori $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ su kolinearni ako i samo ako postoji jedinstveni skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.*

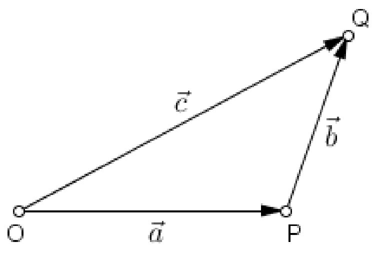
Propozicija 1.7. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ nekolinearni vektori. Tada za svaki vektor $\vec{c} \in V^2$ postoje i jednoznačno su određeni skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.*

Prethodna propozicija zapravo kaže da se svaki vektor $\vec{c} \in V^2$ može prikazati kao linearna kombinacija nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iz V^2.

Definicija 1.8. *Neka su A, B i O točke koje pripadaju pravcu AB. Za vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ kažemo da su iste orijentacije ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O, odnosno suprotne orijentacije ako se točke A i B nalaze s različitih strana točke O.*

Vektor je potpuno određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom. Drugim riječima, dva su vektora jednaka ako imaju jednake duljine te ako su istog smjera i iste orijentacije. Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora realnim brojem (skalarom) definiraju se pomoću predstavnika klase.

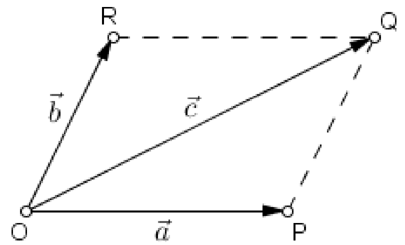
Definicija 1.9. *Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora i O bilo koja (čvrsta) točka ravnine. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$. Tada vektor $\overrightarrow{OQ} = \vec{c}$ zovemo zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i pišemo $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.*



Slika 1.2.

Ovako definirano zbrajanje vektora nazivamo zbrajanje pomoću **pravila trokuta**. Za vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ kažemo još da su ulančani ili da se nadovezuju jer se završetak vektora $\vec{a}$ podudara s početkom vektora $\vec{b}$.
Navedimo još jednu definiciju zbrajanja vektora.

Definicija 1.10. *Neka je O proizvoljna točka ravnine te neka su točke P i R takve da vrijedi $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OR}$. Konstruirajmo paralelogram $OPQR$. Tada vektor $\overrightarrow{OQ} = \vec{c}$ zovemo zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i pišemo $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.*



Slika 1.3.

Ovako definirano zbrajanje vektora nazivamo zbrajanje pomoću **pravila paralelograma**. Lako se pokaže da su gore definirana dva zbrajanja ista operacija.

Propozicija 1.11. *Za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$ vrijedi:*

(i) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *(asocijativnost),*

(ii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ *(neutralni element),*

(iii) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ *(suprotni element),*

(iv) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(komutativnost).*

Iz prethodne propozicije je jasno da je $(V^2, +)$ komutativna grupa.

Definicija 1.12. *Neka je $\vec{a}$ neki vektor i $\lambda \in \mathbb{R}$. Umnožak $\lambda\vec{a}$ skalara $\lambda \neq 0$ i vektora $\vec{a}$ je vektor kojemu je duljina jednaka $|\lambda||\vec{a}|$, istog je smjera kao i vektor $\vec{a}$ te je iste orijentacije kao i $\vec{a}$ za $\lambda > 0$, a suprotne za $\lambda < 0$. Za $\lambda = 0$ definira se $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.*

Propozicija 1.13. *Za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ i svaka dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(i) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

(ii) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$,

(iii) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,

(iv) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Definicija 1.14. *Dva su vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ linearno nezavisna ako $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ povlači $\lambda = \mu = 0$. Inače govorimo o linearno zavisnim vektorima.*

Možemo još reći da su dva vektora linearno nezavisna ako njihova linearna kombinacija iščezava samo za trivijalan slučaj. Drugim riječima, ako postoji linearna kombinacija dvaju vektora koja je jednaka nulvektoru, onda su ti vektori linearno zavisni.

Definicija 1.15. *Baza vektorskog prostora V^2 je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ od dva nekolinearna vektora iz V^2.*

Neka je E prostor. Relacija $\approx$ dana definicijom 1.2 je relacija ekvivalencije na skupu orijentiranih dužina prostora E. Kvocijentni skup $E \times E/_{\approx}$ označavamo s V^3, a njegove elemente također nazivamo vektori. Svi pojmovi dani definicijama 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.10 i 1.12 analogno se definiraju i za vektore iz V^3. Tri su vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ linearno nezavisna ako $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$ povlači $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Definicija 1.16. *Vektori iz V^3 su komplanarni ako su paralelni s istom ravninom. Nulvektor smatramo komplanarnim sa svim vektorima prostora V^3. Vektore koji nisu komplanarni nazivamo nekomplanarnim vektorima.*

Propozicija 1.17. *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori. Tada za svaki vektor $\vec{d} \in V^3$ postoje i jednoznačno su određeni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$.*

Zaključujemo da su za prikaz vektora u prostoru potrebna tri nekomplanarna vektora. Svaku trojku $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ takvih vektora nazivamo baza vektorskog prostora V^3.

Definicija 1.18. *Neka je $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ baza vektorskog prostora V^2 i neka je $\vec{a} \in V^2$ neki vektor. Tada prema propoziciji 1.7 postoje jedinstveni α i $\beta \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\vec{a} = \alpha\,\overrightarrow{a_1} + \beta\,\overrightarrow{a_2}.$$

Preslikavanje $k : V^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $k(\vec{a}) = (\alpha, \beta)$, gdje je $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ skup svih uređenih parova realnih brojeva, nazivamo koordinatizacija prostora V^2.

Na ovaj način je vektor prikazan kao uređeni par realnih brojeva. Skalare α i β nazivamo koordinatama vektora $\vec{a}$ u odnosu na zadanu bazu, a uređeni par (α, β) koordinatnim prikazom vektora $\vec{a}$. Važno je uočiti da koordinatni prikaz vektora u V^2 ovisi o odabiru baze.

Definicija 1.19. *Neka je $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ baza vektorskog prostora V^3 i neka je $\vec{a} \in V^3$ neki vektor. Tada prema propoziciji 1.17 postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\vec{a} = \alpha \overrightarrow{a_1} + \beta \overrightarrow{a_2} + \gamma \overrightarrow{a_3}.$$

Preslikavanje $k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $k(\vec{a}) = (\alpha, \beta, \gamma)$, *gdje je* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *skup svih uređenih trojki realnih brojeva, nazivamo koordinatizacija prostora* V^3.

Na ovaj način je vektor prikazan kao uređena trojka realnih brojeva. Skalare α, β i γ nazivamo koordinatama vektora $\vec{a}$ u odnosu na zadanu bazu, a uređenu trojku (α, β, γ) koordinatnim prikazom vektora $\vec{a}$. Važno je uočiti da koordinatni prikaz vektora u V^3 ovisi o odabiru baze.

Poglavlje 2

Radijvektori

U ovom ćemo poglavlju definirati radijvektore, dokazati teorem o radijvektoru djelišne točke neke dužine, iskazati njegov korolar o polovištu dužine te ćemo nekoliko planimetrijskih problema dokazati vektorskom metodom koristeći radijvektore. Teorijski uvod nalazimo u [5] i [6].

Definicija 2.1. *Neka je O čvrsta točka ravnine i T bilo koja točka u ravnini. Usmjerena dužina $\overrightarrow{OT}$ se naziva radijvektor točke T i označava $\overrightarrow{r_T}$.*

Umjesto točaka ravnine možemo promatrati točke prostora. Analogno definirana usmjerena dužina $\overrightarrow{OT}$ i u tom se slučaju naziva radijvektor točke T.

Definicija 2.2. *Neka su A, B i T tri točke istog pravca i $A \neq B$. Kažemo da točka T dijeli orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ u omjeru $\lambda \in \mathbb{R}$ ako vrijedi $\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{BT}$.*

Teorem 2.3. *Neka su $\overrightarrow{r_A}$ i $\overrightarrow{r_B}$ radijvektori točaka A i B. Radijvektor $\overrightarrow{r_T}$ točke T koja orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ dijeli u omjeru λ dan je s*

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\,\overrightarrow{r_B}}{1 - \lambda}.$$

Dokaz. Neka je O čvrsta točka ravnine i T točka koja dijeli orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ u omjeru λ. Iz $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OT}$ slijedi da je $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_A}$. Iz $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OT}$ pak slijedi da je $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_B}$. Uvrštavanjem zapisa orijentiranih dužina $\overrightarrow{AT}$ i $\overrightarrow{BT}$ pomoću radijvektora u izraz $\overrightarrow{AT} = \lambda\,\overrightarrow{BT}$ dobivamo

$$\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_A} = \lambda\,(\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_B}).$$

Izrazimo li iz ove jednakosti $\overrightarrow{r_T}$ dobivamo tvrdnju teorema. □

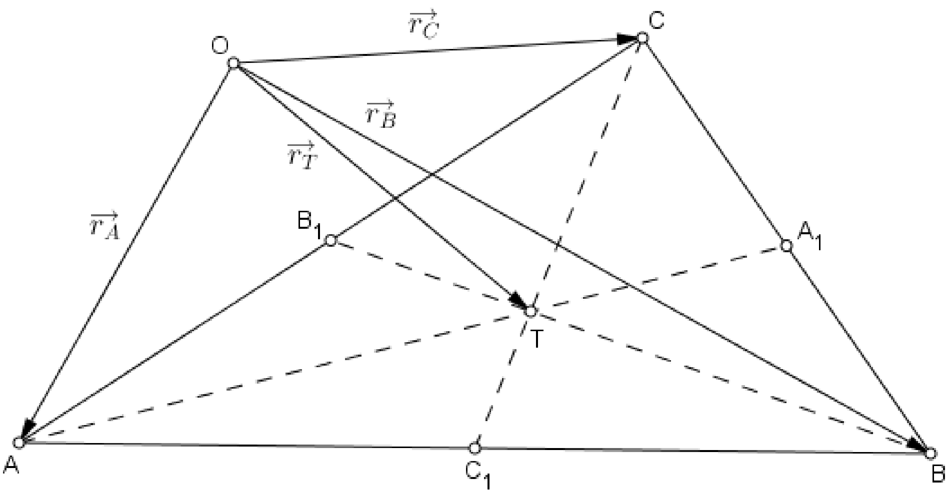
Korolar 2.4. *Za $\lambda = -1$ točka T je polovište dužine $\overline{AB}$ pa za radijvektor polovišta, kojeg ćemo označiti s P, vrijedi*

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right).$$

Primjer 2.5. [5] *Dokažite da se sve tri težišnice trokuta ABC sijeku u istoj točki T za koju vrijedi*

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right).$$

Točku T nazivamo težište trokuta.



Slika 2.1.

Rješenje. Dan je trokut ABC. Neka su A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka je O bilo koja čvrsta točka ravnine te neka su $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$ i $\overrightarrow{r_C}$ redom radijvektori vrhova A, B i C trokuta ABC.
Uzmimo da su K, L i M redom točke na težišnicama $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ trokuta ABC koje ih dijele u omjeru $\lambda = -2$.
Budući da je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi

$$\overrightarrow{r_A} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2}. \tag{2.1}$$

S obzirom na to da K dijeli težišnicu $\overline{AA_1}$ u omjeru $\lambda = -2$, prema teoremu 2.3 vrijedi

$$\overrightarrow{r_K} = \frac{\overrightarrow{r_A} - (-2)\,\overrightarrow{r_{A_1}}}{1-(-2)},$$

odnosno

$$\overrightarrow{r_K} = \frac{\overrightarrow{r_A} + 2\,\overrightarrow{r_{A_1}}}{3}. \tag{2.2}$$

Uvrštavanjem (2.1) u (2.2) dobivamo

$$\overrightarrow{r_K} = \frac{\overrightarrow{r_A} + 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2}}{3},$$

odnosno

$$\overrightarrow{r_K} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}).$$

Isti se rezultat dobije i za $\overrightarrow{r_L}$ i $\overrightarrow{r_M}$. Iz toga slijedi da je $\overrightarrow{r_K} = \overrightarrow{r_L} = \overrightarrow{r_M}$ pa možemo zaključiti da su K, L i M iste točke, odnosno da se težišnice trokuta ABC sijeku u istoj točki. Ako tu točku označimo s T, dobivamo

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}),$$

a to smo i trebali dokazati.

Primjer 2.6. [5] *Dane su točke D, E i F redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC koje dijele te stranice u istom omjeru, tj.*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \lambda, \quad \frac{|CE|}{|AE|} = \lambda \quad i \quad \frac{|AF|}{|BF|} = \lambda,$$

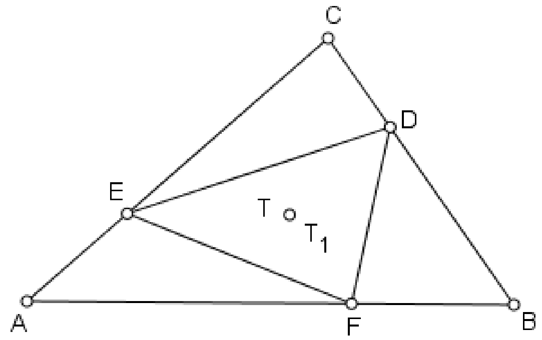
pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Dokažite da trokuti ABC i DEF imaju zajedničko težište.

Rješenje. Neka je T težište trokuta ABC, a T_1 težište trokuta DEF. Prema tvrdnji primjera 2.5 za težište T trokuta ABC vrijedi

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}).$$

Također, iz istog razloga za težište T_1 trokuta DEF vrijedi

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}). \tag{2.3}$$



Slika 2.2.

Budući da točke D, E i F redom dijele stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC u istom omjeru $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, tada, prema teoremu 2.3, vrijedi

$$\overrightarrow{r_D} = \frac{\overrightarrow{r_B} - \lambda\, \overrightarrow{r_C}}{1 - \lambda}, \tag{2.4}$$

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{\overrightarrow{r_C} - \lambda\, \overrightarrow{r_A}}{1 - \lambda} \tag{2.5}$$

i

$$\overrightarrow{r_F} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\, \overrightarrow{r_B}}{1 - \lambda}. \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem (2.4), (2.5) i (2.6) u (2.3) dobivamo

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{r_B} - \lambda\, \overrightarrow{r_C}}{1 - \lambda} + \frac{\overrightarrow{r_C} - \lambda\, \overrightarrow{r_A}}{1 - \lambda} + \frac{\overrightarrow{r_A} - \lambda\, \overrightarrow{r_B}}{1 - \lambda}\right).$$

Primijetimo da svi pribrojnici u zagradi na desnoj strani prethodne jednakosti imaju isti nazivnik pa iz te zagrade možemo izlučiti $\frac{1}{1 - \lambda}$. Time dobivamo

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3\,(1 - \lambda)}\,(\overrightarrow{r_B} - \lambda\, \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_C} - \lambda\, \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_A} - \lambda\, \overrightarrow{r_B}).$$

Sređivanjem izraza u zagradi u prethodnoj jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3\,(1 - \lambda)}\,[\,\overrightarrow{r_A}\,(1 - \lambda) + \overrightarrow{r_B}\,(1 - \lambda) + \overrightarrow{r_C}\,(1 - \lambda)].$$

Izlučivanjem zajedničkog faktora $1 - \lambda$ iz uglate zagrade u prethodnom izrazu dobivamo

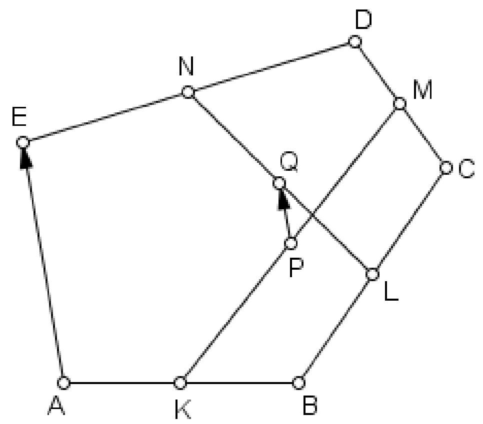
$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3\,(1 - \lambda)}\,(1 - \lambda)\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}),$$

a iz toga slijedi da je

$$\overrightarrow{r_{T_1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}).$$

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{r_{T_1}} = \overrightarrow{r_T}$. To znači da su radijvektori točaka T_1 i T jednaki pa zaključujemo da vrijedi $T_1 \equiv T$. Drugim riječima, zaključujemo da trokuti ABC i DEF imaju isto težište što smo i trebali dokazati.

Primjer 2.7. [5] (Državno natjecanje, 1996., 1. razred srednje škole) *Točke K, L, M i N redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ peterokuta $ABCDE$, a točke P i Q su redom polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Dokažite da je $\overline{PQ} \parallel \overline{AE}$ i $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.*



Slika 2.3.

Rješenje. Neka je O bilo koja čvrsta točka ravnine. Tada su $\overrightarrow{r_P}$ i $\overrightarrow{r_Q}$ redom radijvektori točaka P i Q pa vrijedi

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}. \tag{2.7}$$

Budući da je točka Q polovište dužine $\overline{LN}$, slijedi da je

$$\overrightarrow{r_Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_N}). \tag{2.8}$$

Također, kako je točka P polovište dužine $\overline{KM}$, vrijedi

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_M}). \tag{2.9}$$

Uvrštavanjem izraza (2.8) i (2.9) u jednakost (2.7) dobivamo

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_N}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_M}\right). \tag{2.10}$$

Nadalje, točka L je polovište stranice $\overline{BC}$ peterokuta $ABCDE$ pa je

$$\overrightarrow{r_L} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right). \tag{2.11}$$

Točka N je polovište stranice $\overline{DE}$ peterokuta $ABCDE$ pa vrijedi

$$\overrightarrow{r_N} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E}\right). \tag{2.12}$$

Točka K je polovište stranice $\overline{AB}$ peterokuta $ABCDE$ pa je

$$\overrightarrow{r_K} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right). \tag{2.13}$$

Napokon, točka M je polovište stranice $\overline{CD}$ peterokuta $ABCDE$ pa vrijedi

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right). \tag{2.14}$$

Uvrstimo (2.11), (2.12), (2.13) i (2.14) u (2.10) te sredimo dobiveni izraz. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{r_B} + \frac{1}{4}\overrightarrow{r_C} + \frac{1}{4}\overrightarrow{r_D} + \frac{1}{4}\overrightarrow{r_E} - \frac{1}{4}\overrightarrow{r_A} - \frac{1}{4}\overrightarrow{r_B} - \frac{1}{4}\overrightarrow{r_C} - \frac{1}{4}\overrightarrow{r_D} \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{r_E} - \frac{1}{4}\overrightarrow{r_A} \\
&= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_A}\right) \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.
\end{aligned}$$

Dakle, uočavamo da vrijedi $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Iz ovoga zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AE}$ kolinearni pa stoga pripadaju paralelnim pravcima. Iz toga slijedi da je $\overline{PQ} \parallel \overline{AE}$. Također, iz jednakosti vektora $\overrightarrow{PQ}$ i $\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ slijedi da su njihove duljine jednake, a to povlači da je $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.

Poglavlje 3

Skalarni produkt

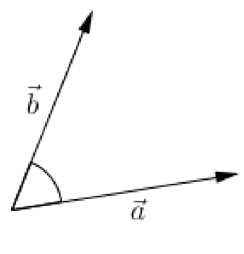
U ovom ćemo poglavlju najprije definirati operaciju **skalarnog množenja** vektora te ćemo potom navesti i dokazati neka njezina bitna svojstva. Nakon toga ćemo definirati ortonormiranu bazu vektorskog prostora V^3 te ćemo izvesti formulu za skalarno množenje vektora zadanih pravokutnim koordinatama. U drugom dijelu ovog poglavlja ćemo primjenom vektorske metode dokazati nekoliko planimetrijskih problema koristeći skalarno množenje vektora. Definicije, propozicije i njihove dokaze te korolare koje navodimo u prvom dijelu ovog poglavlja nalazimo u [4], [6], [7] i [11].

Definicija 3.1. *Skalarno množenje u V^3 je preslikavanje $\cdot : V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definirano na sljedeći način:*

(1) ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti od nulvektora, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, pri čemu je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iz V^3,

(2) ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

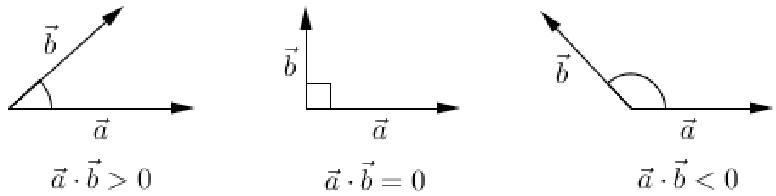
Realni broj $\vec{a} \cdot \vec{b}$ naziva se skalarni umnožak ili skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 3.1.

Hoće li rezultat skalarnog množenja vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ biti pozitivan, negativan ili jednak nuli ovisi o veličini kuta što ga zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako je kut između vektora

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ šiljast, onda je njihov skalarni umnožak pozitivan broj. U slučaju kada je kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tup, tada je skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ negativan broj. Ako je pak veličina kuta između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka $\frac{\pi}{2}$, onda za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **okomiti** ili **ortogonalni**, tj. oni tada zatvaraju pravi kut.



Slika 3.2.

Dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su iste orijentacije ako zatvaraju kut od 0 radijana, dok su dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije ako zatvaraju kut veličine π. Također, važno je uočiti da vrijedi $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$.

Propozicija 3.2. *Skalarno množenje vektora ima sljedeća svojstva:*

(i) $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \geq 0,\ \forall \vec{a} \in V^3$,

(ii) $\vec{a}^{\,2} = 0$ *ako i samo ako je* $\vec{a} = \vec{0}$,

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *(komutativnost),*

(iv) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *(kvaziasocijativnost),*

(v) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *(distributivnost prema zbrajanju vektora).*

Prva dva svojstva skalarnog množenja nazivaju se *pozitivna definitnost*.

Dokaz.

(i) Iz definicije skalarnog množenja slijedi da je $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{a})$. Vektor $\vec{a}$ sa samim sobom zatvara kut od 0 radijana pa je $\cos 0 = 1$. Iz toga slijedi da je $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ što je uvijek nenegativno, tj. vrijedi $\vec{a}^{\,2} \geq 0$ za svaki $\vec{a}$ iz V^3.

(ii) Prema svojstvu *(i)* vrijedi $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ pa je $\vec{a}^{\,2} = 0$ ako i samo ako je $|\vec{a}|^2 = 0$. To pak vrijedi ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$ što je zadovoljeno ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.

(iii) Prema definiciji 3.1 vrijedi

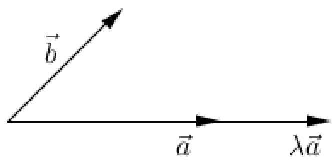
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{3.1}$$

i

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}| \cos \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a}) \tag{3.2}$$

Zbog komutativnosti množenja realnih brojeva te iz činjenice da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$ slijedi da su desne strane izraza (3.1) i (3.2) jednake pa su im onda jednake i lijeve. Drugim riječima, za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

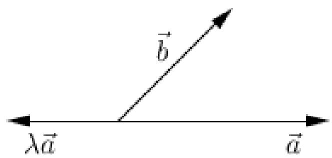
(iv) Za $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo stoga da vrijedi $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$.



Slika 3.3.

Ako je $\lambda > 0$, onda su $\vec{a}$ i $\lambda\,\vec{a}$ kolinearni vektori iste orijentacije pa vrijedi $|\lambda\,\vec{a}| = \lambda\,|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Iz ovih dviju činjenica te iz definicije 3.1 slijedi

$$\begin{aligned}(\lambda\,\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda\,\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda\,|\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$



Slika 3.4.

Ako je $\lambda < 0$, onda su $\vec{a}$ i $\lambda\,\vec{a}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije pa vrijedi $|\lambda\,\vec{a}| = -\lambda\,|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Iz ovih dviju činjenica te iz definicije 3.1 slijedi

$$\begin{aligned}(\lambda\,\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda\,\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\lambda\,\vec{a}, \vec{b}) \\ &= -\lambda\,|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= -\lambda\,|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= \lambda\,|\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

$\square$

Prije nego dokažemo svojstvo *(v)* iz propozicije 3.2, dokažimo sljedeću lemu.

Lema 3.3. *Za sve* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *vrijedi*

(1) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$,

(2) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$.

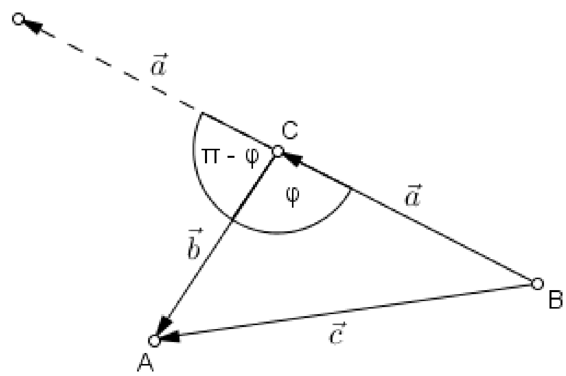
Dokaz.

(1) Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$. Prema pravilu trokuta za zbrajanje vektora očito vrijedi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Označimo s φ veličinu kuta $\sphericalangle BCA$ trokuta ABC. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 slijedi da je $\vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2$ pa je $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{c}|^2$. Primjenom kosinusovog poučka na trokut ABC dobivamo

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

odnosno

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$



Slika 3.5.

Uočimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju kut veličine $\pi - \varphi$. Budući da je $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$, slijedi

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \varphi),$$

tj.

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}).$$

Primjenom definicije 3.1 dobivamo

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 vrijedi $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^{\,2}$ i $|\vec{b}|^2 = \vec{b}^{\,2}$. Iz toga slijedi da je

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b},$$

a to smo i trebali dokazati.

(2) Ova tvrdnja se dokazuje analogno kao i upravo dokazana tvrdnja (1). Potrebno je samo umjesto $\vec{b}$ uzeti $-\vec{b}$ te je tada $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

□

Vratimo se sada na dokaz svojstva *(v)* iz propozicije 3.2.

Dokaz.

(v) U nastavku ćemo transformirati izraz $4\,(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$ tako što ćemo više puta primijeniti svojstva iz leme 3.3. Imamo

$$\begin{aligned}
4\,(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= ((\vec{a}+\vec{b}) + 2\,\vec{c})^2 - (\vec{a}+\vec{b})^2 - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= ((\vec{a}+\vec{b}) + 2\,\vec{c})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 - 2\,\vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{b}^{\,2} - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= ((\vec{a}+\vec{c}) + (\vec{b}+\vec{c}))^2 + ((\vec{a}+\vec{c}) - (\vec{b}+\vec{c}))^2 - 2\,\vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{b}^{\,2} - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= (\vec{a}+\vec{c})^2 + 2\,(\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+\vec{c}) + (\vec{b}+\vec{c})^2 + (\vec{a}+\vec{c})^2 \\
&\quad - 2\,(\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+\vec{c}) + (\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\,\vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{b}^{\,2} - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= 2\,(\vec{a}+\vec{c})^2 + 2\,(\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\,\vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{b}^{\,2} - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= 2\,\vec{a}^{\,2} + 4\,\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\,\vec{c}^{\,2} + 2\,\vec{b}^{\,2} + 4\,\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\,\vec{c}^{\,2} - 2\,\vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{b}^{\,2} - 4\,\vec{c}^{\,2} \\
&= 4\,\vec{a}\cdot\vec{c} + 4\,\vec{b}\cdot\vec{c}.
\end{aligned}$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti s 4 dobivamo da je

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

□

Korolar 3.4. *Za sve $\vec{a},\vec{b} \in V^3$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

(1) $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Propozicija 3.5. *Vektori* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *su međusobno okomiti ako i samo ako je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ međusobno okomiti vektori. Tada oni zatvaraju kut veličine $\frac{\pi}{2}$. Skalarnim množenjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobivamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2}$. Budući da je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, slijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
$\Leftarrow$: Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ takvi da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Iz definicije 3.1 slijedi da je $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Budući da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu nulvektori, njihovi moduli moraju biti različiti od nule. Iz toga zaključujemo da treba vrijediti $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. S obzirom na to da veličina kuta što ga zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ treba biti iz intervala $[0, \pi]$, jedini kut koji zadovoljava uvjet $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ je onaj kojemu je veličina jednaka $\frac{\pi}{2}$. Dakle, imamo $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Iz ovoga je sada jasno da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno okomiti. □

Definicija 3.6. *Neka je* $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *baza vektorskog prostora* V^3 *sa svojstvom da su svi vektori baze jedinični i u parovima međusobno okomiti (ortogonalni), tj. neka vrijedi*

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \qquad \vec{i} \perp \vec{j}, \qquad \vec{j} \perp \vec{k} \qquad i \qquad \vec{i} \perp \vec{k}.$$

Tada kažemo da je B ***ortonormirana baza*** *vektorskog prostora* V^3.

Već smo u definiciji 1.19 vidjeli da se svaki vektor iz V^3 može prikazati kao uređena trojka realnih brojeva te da te brojeve onda nazivamo koordinatama vektora u odnosu na neku bazu u V^3. Na isti način je moguće prikazati bilo koji vektor iz V^3 u odnosu na ortonormiranu bazu. Tada koordinate vektora u odnosu na ortonormiranu bazu nazivamo *ortogonalnim* ili *pravokutnim* koordinatama.

Propozicija 3.7. *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *ortonormirana baza za vektorski prostor* V^3 *te neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *bilo koja dva vektora iz* V^3 *zadana svojim pravokutnim koordinatama. Tada je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

Dokaz. Budući da je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza za V^3, iz definicije 3.6 znamo da vrijedi $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 slijedi $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$ i $\vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = 1$. Također, iz definicije 3.6 znamo da je $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ i $\vec{i} \perp \vec{k}$. Prema propoziciji 3.5 zaključujemo da vrijedi $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ i $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. S obzirom na to da je skalarno množenje vektora komutativna operacija, vrijedi i sljedeće: $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$, $\vec{k}\cdot\vec{j}=0$ i $\vec{k}\cdot\vec{i}=0$. Skalarnim množenjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te primjenom upravo navedenih svojstava dobivamo

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k})\cdot(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1\vec{i}^2+\alpha_1\beta_2\vec{i}\cdot\vec{j}+\alpha_1\beta_3\vec{i}\cdot\vec{k}+\alpha_2\beta_1\vec{j}\cdot\vec{i}+\alpha_2\beta_2\vec{j}^2+\alpha_2\beta_3\vec{j}\cdot\vec{k} \\
&\quad+\alpha_3\beta_1\vec{k}\cdot\vec{i}+\alpha_3\beta_2\vec{k}\cdot\vec{j}+\alpha_3\beta_3\vec{k}^2 \\
&= \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.8. *Vektori $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in V^3,\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$ zadani svojim pravokutnim koordinatama su okomiti ako i samo ako je*

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

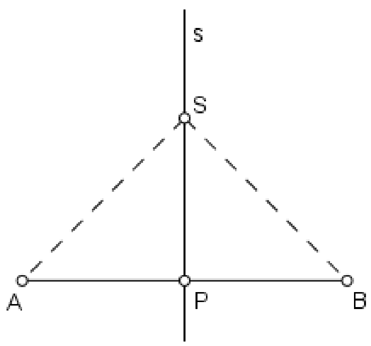
Korolar 3.9. *Neka je $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in V^3$ bilo koji vektor zadan pravokutnim koordinatama. Tada za njegov modul vrijedi*

$$|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}.$$

U nastavku ovog poglavlja ćemo nekoliko poznatih planimetrijskih problema dokazati primjenom definicije i svojstava skalarnog množenja vektora.

Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju. Dokažimo primjenom skalarnog množenja vektora karakterizaciju točaka na simetrali dužine.

Teorem 3.10. *Točka S pripada simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako vrijedi $|SA|=|SB|$.*



Slika 3.6.

Dokaz. $\Rightarrow$: Dana je dužina $\overline{AB}$. Neka je pravac s njezina simetrala. Znamo da je simetrala s okomita na dužinu $\overline{AB}$ i da prolazi njenim polovištem P. Uzmimo proizvoljnu točku S koja pripada simetrali s. Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA}$. Kvadriranjem ove jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{SA}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA}^2.$$

Budući da su vektori $\overrightarrow{SP}$ i $\overrightarrow{PA}$ međusobno okomiti, prema propoziciji 3.5 slijedi da je $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$ pa vrijedi $\overrightarrow{SA}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + \overrightarrow{PA}^2$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 vrijedi

$$|\overrightarrow{SA}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2 + |\overrightarrow{PA}|^2. \tag{3.3}$$

Također, uočimo da vrijedi $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PB}$. Kvadriranjem ove jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{SB}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}^2.$$

S obzirom na to da su vektori $\overrightarrow{SP}$ i $\overrightarrow{PB}$ međusobno okomiti, prema propoziciji 3.5 slijedi da je $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ pa vrijedi $\overrightarrow{SB}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + \overrightarrow{PB}^2$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 vrijedi

$$|\overrightarrow{SB}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2. \tag{3.4}$$

Budući da je P polovište dužine $\overline{AB}$, očito vrijedi $|PA| = |PB|$, tj.

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2. \tag{3.5}$$

Uvrštavanjem (3.5) u (3.4) dobivamo da je

$$|\overrightarrow{SB}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2 + |\overrightarrow{PA}|^2. \tag{3.6}$$

Iz (3.3) i (3.6) je jasno da vrijedi $|\overrightarrow{SA}|^2 = |\overrightarrow{SB}|^2$. Korjenovanjem dobivamo da je $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}|$, a iz definicije 1.4 slijedi da je $|SA| = |SB|$.

$\Leftarrow$: Dana je dužina $\overline{AB}$ i točka S koja ne pripada toj dužini. Znamo da vrijedi $|SA| = |SB|$. Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{AP}$. Kvadriranjem ovog izraza dobivamo

$$\overrightarrow{SA}^2 = \overrightarrow{SP}^2 - 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2. \tag{3.7}$$

Također, uočimo da vrijedi $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PB}$. Kvadriranjem ovog izraza dobivamo

$$\overrightarrow{SB}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}^2. \tag{3.8}$$

Budući da je $|SA| = |SB|$, onda je $|SA|^2 = |SB|^2$. S obzirom na to da duljine vektora $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$ odgovaraju duljinama dužina $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$, slijedi $|\overrightarrow{SA}|^2 = |\overrightarrow{SB}|^2$. Nadalje, prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 slijedi da je $\overrightarrow{SA}^2 = \overrightarrow{SB}^2$. Uvrštavanjem izraza (3.7) i (3.8) u jednakost $\overrightarrow{SA}^2 = \overrightarrow{SB}^2$ dobivamo

$$\overrightarrow{SP}^2 - 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2 = \overrightarrow{SP}^2 + 2\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}^2. \tag{3.9}$$

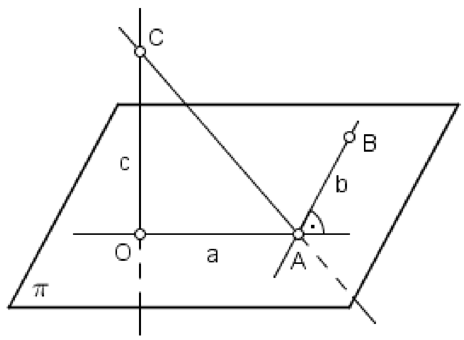
Budući da je P polovište dužine $\overline{AB}$, tada vrijedi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$, tj. $\overrightarrow{AP}^2 = \overrightarrow{PB}^2$. Iz tog razloga je jednakost (3.9) ekvivalentna sljedećoj

$$4\,\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

Dijeljenjem cijelog izraza s 4 dobivamo da je $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Iz ovoga, prema propoziciji 3.5, zaključujemo da su $\overrightarrow{SP}$ i $\overrightarrow{AP}$ međusobno okomiti vektori. Budući da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AP}$ kolinearni (jer oba pripadaju pravcu AB), vektor $\overrightarrow{SP}$ je okomit i na vektor $\overrightarrow{AB}$. Uz to, završna točka P vektora $\overrightarrow{SP}$ je polovište dužine $\overline{AB}$. Iz ovih dviju činjenica možemo zaključiti da vektor $\overrightarrow{SP}$ pripada pravcu koji je okomit na dužinu $\overline{AB}$ i da prolazi njenim polovištem P. Iz ovoga očito slijedi da točka S pripada simetrali s dužine $\overline{AB}$. □

Primjenom skalarnog produkta moguće je dokazati i poznati poučak o tri okomice.

Teorem 3.11. [14] [15] (Poučak o tri okomice) *Neka je pravac c okomit na ravninu π u točki O. Ako pravac a prolazi točkom O i okomito siječe pravac b u točki A, onda su pravci CA i b također međusobno okomiti, pri čemu su $C \in c$, $a \subset \pi$ i $b \subset \pi$.*



Slika 3.7.

Dokaz. Neka je C proizvoljna točka koja pripada pravcu c takva da je $C \neq O$ te neka je B bilo koja točka koja pripada pravcu b za koju vrijedi $B \neq A$. Kako bismo dokazali da su pravci CA i b međusobno okomiti, dovoljno je dokazati da vrijedi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$. Stoga je

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

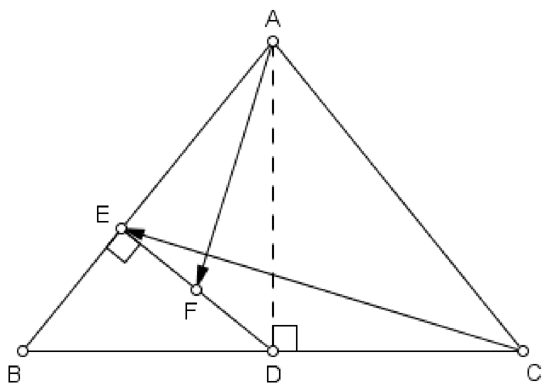
Iz distributivnosti skalarnog množenja prema zbrajanju vektora slijedi

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

S obzirom na to da je pravac c okomit na ravninu π, okomit je na bilo koji pravac koji pripada toj ravnini. To povlači da je pravac c okomit na pravac b. Iz toga slijedi da je $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Budući da su pravci a i b međusobno okomiti, onda su okomiti i vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$ pa, prema propoziciji 3.5, slijedi da je $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Sada je jasno vrijedi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, tj. da su vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{AB}$ međusobno okomiti pa su okomiti i pravci CA i b. □

Sljedeći zadatak se pojavio na Državnom natjecanju iz matematike 2006. godine. Zadan je učenicima 3. razreda srednje škole koji su tada već učili vektore i skalarni produkt. U službenim rješenjima zadatak je riješen na dva načina - vektorski i planimetrijski. Ovdje donosimo detaljno raspisano službeno rješenje ovog zadatka pomoću vektora.

Primjer 3.12. [1] (Državno natjecanje, 2006., 3. razred srednje škole, A varijanta) *U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$ te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokažite da je AF okomito na EC.*



Slika 3.8.

Rješenje. Uočimo najprije da vrijedi $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$. Budući da je F polovište dužine $\overline{DE}$, onda je $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ pa vrijedi $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$. Također, uočimo da je $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$. S obzirom na to da je trokut ABC jednakokračan, nožište D visine na osnovicu $\overline{BC}$ tog trokuta ujedno je i polovište te osnovice. Stoga, vrijedi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ pa je $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE}$. Imajući na umu da je $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ slijedi

$$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} - 2\,\overrightarrow{ED}.$$

Skalarnim množenjem vektora $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{CE}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} &= \left(\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{ED}\right) \cdot (\overrightarrow{EB} - 2\,\overrightarrow{ED}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} - 2\,\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED}.\end{aligned}$$

Budući da je $AB \perp ED$, onda je i $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{ED}$ pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0. \tag{3.10}$$

Analogno se pokaže da vrijedi $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$. Iz ovih činjenica slijedi

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED}. \tag{3.11}$$

Za vektor $\overrightarrow{AE}$ vrijedi $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, odnosno $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}$. Stoga je

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB}.$$

Već smo se uvjerili da je $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$. Stoga je $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB}$. Nadalje, budući da je $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$, vrijedi

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Budući da je visina $\overline{AD}$ okomita na osnovicu $\overline{BC}$ trokuta ABC, onda su okomiti i pravci AD i BC kojima one pripadaju. S obzirom na to da su pravci AD i BC ujedno i nositelji vektora $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$, to povlači da su i navedeni vektori međusobno okomiti pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Iz kolinearnosti vektora $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DB}$ slijedi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Sada imamo

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED}. \tag{3.12}$$

Uvrštavanjem izraza (3.12) u jednakost (3.11) dobivamo

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{ED}.$$

Dakle, vrijedi

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED}.$$

Iz relacije (3.10) znamo da je $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$. Iz toga slijedi da je $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ pa, prema propoziciji 3.5, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{CE}$ međusobno okomiti, a onda su okomiti i pravci AF i CE kojima oni pripadaju.

Za kraj ovog poglavlja donosimo rješenje jednog zadatka u kojem su vektori zadani svojim koordinatnim prikazima u ortonormiranoj bazi.

Primjer 3.13. [15] *Zadane su točke $A(1,-1,2)$, $B(7,2,4)$ i $C(-2,1,8)$. Dokažite da je trokut ABC jednakokračan i pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.*

Rješenje. Kako bismo dokazali da je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A, dovoljno je dokazati da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ međusobno okomiti. Prikažimo sada vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ za V^3. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = (7-1)\vec{i} + (2+1)\vec{j} + (4-2)\vec{k} = (6,3,2),$$

i

$$\overrightarrow{AC} = (-2-1)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (8-2)\vec{k} = (-3,2,6).$$

Primjenom propozicije 3.7 odredimo skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Imamo

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (6,3,2) \cdot (-3,2,6) = 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = -18 + 6 + 12 = 0.$$

Budući da za vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ zadane pravokutnim koordinatama vrijedi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, prema korolaru 3.8 zaključujemo da su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ međusobno okomiti vektori. Dakle, trokut ABC je zaista pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.
Trebamo još provjeriti je li trokut ABC jednakokračan. Budući da je kut pri vrhu A trokuta ABC pravi, trokut ABC će biti jednakokračan ako i samo ako su veličine kutova pri vrhovima B i C jednake, odnosno ako i samo ako su stranice nasuprot tih kutova jednakih duljina. Drugim riječima, treba vrijediti $|AB| = |AC|$, odnosno $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. Primjenom korolara 3.9 odredimo duljine vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Imamo

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

i

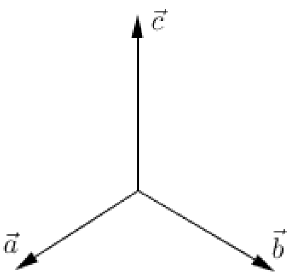
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

Uočavamo da su duljine vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednake pa možemo zaključiti da je trokut ABC zaista jednakokračan s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Poglavlje 4

Vektorski produkt

U ovom poglavlju ćemo definirati operaciju množenja vektora kojoj je rezultat ponovno vektor. Ta operacija se naziva **vektorsko množenje**. Posebnost vektorskog množenja je u tome da se ono definira samo u vektorskom prostoru V^3. Naime, ne postoji analogon ove operacije u V^2 ili nekom vektorskom prostoru dimenzije veće od 3. U prvom dijelu ovog poglavlja ćemo iskazati i dokazati najvažnija svojstva vektorskog množenja te ćemo izreći i neke posljedice tih svojstava. U drugom dijelu ovog poglavlja vektorskom metodom dokazujemo razne planimetrijske i stereometrijske tvrdnje primjenom definicije i svojstava vektorskog množenja. Uvodne definicije, propozicije i njihove dokaze te korolare nalazimo u sljedećim izvorima: [4], [6], [8] i [11].
Prije nego što definiramo novu operaciju nad vektorima u V^3 uvedimo pojam desne (desno orijentirane ili pozitivno orijentirane) baze vektorskog prostora V^3. „Za bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako promatrajući s vrha vektora $\vec{c}$ uočavamo obilazak od vektora $\vec{a}$ do vektora $\vec{b}$ kraćim putom kao obilazak u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (pozitivan obilazak)" [4, str. 30]. Na slici 4.1. je prikazan tipičan primjer desne baze $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ vektorskog prostora V^3.



Slika 4.1.

Pri utvrđivanju je li baza desno orijentirana mogu nam pomoći dva pravila - *pravilo desne* *ruke* i *pravilo desnog vijka*. „Kod pravila desne ruke ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst pokazuje drugi vektor, a savinuti srednji prst treći vektor. Kod pravila desnog vijka zaokruženim prstima od kažiprsta do malog prsta pokazujemo obilazak od prvog do drugog vektora, a treći vektor je određen ispruženim palcom" [4, str. 30].

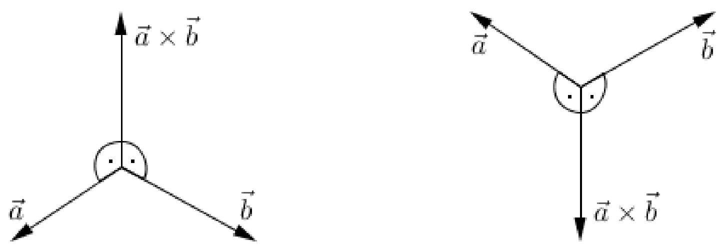
Definicija 4.1. *Vektorsko množenje je preslikavanje* $\times : V^3 \times V^3 \longrightarrow V^3$ *koje svakom paru vektora* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *pridružuje vektor* $\vec{a} \times \vec{b} \in V^3$ *za koji vrijedi*

(1) ako su vektori $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *kolinearni, onda je* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$*,*

(2) ako vektori $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *nisu kolinearni, onda je:*

- *(a) modul vektora* $\vec{a} \times \vec{b}$ *dan je s* $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$*,*
- *(b)* $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$*,* $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$*, tj. vektor* $\vec{a} \times \vec{b}$ *je okomit na ravninu određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*,*
- *(c) uređena trojka* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ *čini tzv. desnu bazu prostora* V^3*.*

Rezultat vektorskog množenja vektora nazivamo vektorskim umnoškom ili vektorskim produktom vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*.*



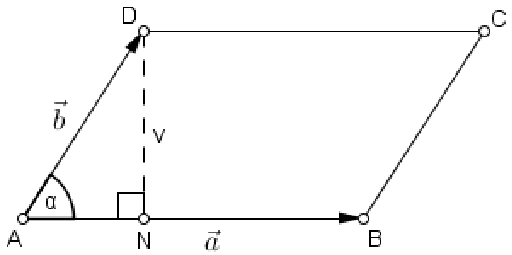
Slika 4.2.

Sljedeća propozicija daje geometrijsku interpretaciju modula vektorskog produkta.

Propozicija 4.2. *Modul* $|\vec{a} \times \vec{b}|$ *vektorskog produkta* $\vec{a} \times \vec{b}$ *jednak je površini paralelograma razapetog nekolinearnim vektorima* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$*.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ paralelogram razapet nekolinearnim vektorima $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Neka je N nožište visine v iz vrha D na stranicu $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$. Uočimo da je trokut AND pravokutan s pravim kutom pri vrhu N. Iz trigonometrije pravokutnog trokuta slijedi da je

$$\sin \alpha = \frac{v}{|AD|},$$



Slika 4.3.

pri čemu je α veličina kuta pri vrhu A trokuta AND. Budući da je $|AD| = |\overrightarrow{AD}| = |\vec{b}|$, iz prethodnog izraza dobivamo da je $v = |\vec{b}|\sin\alpha$. Površina P paralelograma općenito se računa kao umnožak duljine jedne njegove stranice i duljine visine na tu stranicu. Stoga, za paralelogram $ABCD$ vrijedi $P = |AB| \cdot v$. Budući da je $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$ i $v = |\vec{b}|\sin\alpha$, zaključujemo da je $P = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, a prema (2) iz definicije 4.1 slijedi da za površinu paralelograma $ABCD$ vrijedi $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$. □

Budući da svaki trokut možemo interpretirati kao polovinu paralelograma kojeg određuju vektori dviju stranica tog trokuta te zbog činjenice da je površina paralelograma jednaka modulu vektorskog produkta dvaju nekolinearnih vektora koji ga razapinju, možemo zaključiti da je površina trokuta jednaka polovini modula vektorskog produkta vektora svojih dviju stranica.

Propozicija 4.3. *Vektori $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

Dokaz. $\Rightarrow$: Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori, onda prema (1) iz definicije 4.1 slijedi $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.
$\Leftarrow$: Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ takvi da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Pretpostavimo da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni vektori. Tada prema (2) iz definicije 4.1 slijedi

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Da bi izraz $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ bio jednak nuli, treba vrijediti $|\vec{a}| = 0$ ili $|\vec{b}| = 0$ ili $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Odnosno, $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, \pi\}$. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, onda je $\vec{a}$ kolinearan s bilo kojim vektorom iz V^3 pa tako i s vektorom $\vec{b}$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni vektori. Analogno zaključujemo i u slučaju kada je $\vec{b} = \vec{0}$. Nadalje, ako vrijedi $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, onda je $\vec{a} = \vec{b}$, a znamo da su jednaki vektori kolinearni pa je to opet u kontradikciju s pretpostavkom. Napokon, ako je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$, onda vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pripadaju istom pravcu pa su očito kolinearni. Dakle, i u ovom slučaju smo dobili kontradikciju s pretpostavkom. Budući da smo razmatranjem svih mogućnosti došli do kontradikcije s pretpostavkom da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni vektori, zaključujemo da oni moraju biti kolinearni. Dakle, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. □

Korolar 4.4. *Za svaki $\vec{a} \in V^3$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.*

U nastavku donosimo osnovna svojstva vektorskog množenja.

Propozicija 4.5. *Za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ *(antikomutativnost),*

(2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *(kvaziasocijativnost),*

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ *(distributivnost prema zbrajanju vektora).*

Dokaz.

(1) Odredimo najprije module vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$. Prema (2) iz definicije 4.1 slijedi da je $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i $|\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{b}||\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$. Zbog komutativnosti množenja realnih brojeva i činjenice da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$ zaključujemo da su moduli vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ jednaki. Smjerovi vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ su isti (jer su oba vektora okomita na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$), ali su njihove orijentacije suprotne. Iz toga slijedi da je $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

(2) Za $\lambda = 0$ tvrdnja očito vrijedi.
Ako je $\lambda > 0$, onda su $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ kolinearni vektori iste orijentacije pa vrijedi $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Za module vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ vrijedi

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

i

$$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Uočavamo da za $\lambda > 0$ vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ imaju jednake module. Također, za $\lambda > 0$ vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ imaju isti smjer i istu orijentaciju. Iz toga možemo zaključiti da su vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ jednaki kada je $\lambda > 0$.
Ako je $\lambda < 0$, onda su $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije pa vrijedi $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Zbog toga vrijedi i $\sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sin(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.
Odredimo sada module vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Imamo

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

i

$$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Uočavamo da za $\lambda < 0$ vektori $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ i $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ imaju jednake module. Također, za $\lambda < 0$ vektori $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ i $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ imaju isti smjer i istu orijentaciju. Iz toga možemo zaključiti da su vektori $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ i $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ jednaki kada je $\lambda < 0$.
Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Svojstvo (3) iz propozicije 4.5 ćemo dokazati nakon što dokažemo propoziciju 4.7.

Korolar 4.6. *Za sve $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V^3$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(2') $\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (kvaziasocijativnost),

(3') $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora).

U nastavku donosimo osnovne tvrdnje vezane uz vektorski produkt kada su vektori zadani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi.

Propozicija 4.7. *Neka je $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ desna ortonormirana baza vektorskog prostora V^3 i neka su $\vec{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ bilo koja dva vektora iz V^3 dana svojim pravokutnim koordinatama. Tada vrijedi*

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. S obzirom na to da je $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ desna ortonormirana baza vektorskog prostora V^3, vrijedi $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ i $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$. Zbog antikomutativnosti vektorskog množenja vrijedi $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{i}$ i $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{j}$. Prema korolaru 4.4 vrijedi $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$ i $\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$. Odredimo sada $\vec{a}\times\vec{b}$ primjenom upravo navedenih svojstava. Imamo

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k})\times(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1(\vec{i}\times\vec{i}) + \alpha_1\beta_2(\vec{i}\times\vec{j}) + \alpha_1\beta_3(\vec{i}\times\vec{k}) + \alpha_2\beta_1(\vec{j}\times\vec{i}) + \alpha_2\beta_2(\vec{j}\times\vec{j}) \\
&\quad + \alpha_2\beta_3(\vec{j}\times\vec{k}) + \alpha_3\beta_1(\vec{k}\times\vec{i}) + \alpha_3\beta_2(\vec{k}\times\vec{j}) + \alpha_3\beta_3(\vec{k}\times\vec{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1\vec{0} + \alpha_1\beta_2\vec{k} - \alpha_1\beta_3\vec{j} - \alpha_2\beta_1\vec{k} + \alpha_2\beta_2\vec{0} + \alpha_2\beta_3\vec{i} + \alpha_3\beta_1\vec{j} \\
&\quad - \alpha_3\beta_2\vec{i} + \alpha_3\beta_3\vec{0} \\
&= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Dobiveni rezultat možemo pregledno zapisati pomoću determinante trećeg reda pa imamo

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

□

Korolar 4.8. *Vektori* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in V^3$ *zadani svojim pravokutnim koordinatama su kolinearni ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Sada možemo primjenom propozicije 4.7 dokazati svojstvo (3) iz propozicije 4.5.

Dokaz.

(3) Neka su vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ dani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Tada vrijedi $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$ pa je

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) \times (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Prema propoziciji 4.7 slijedi

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Nadalje, vrijedi

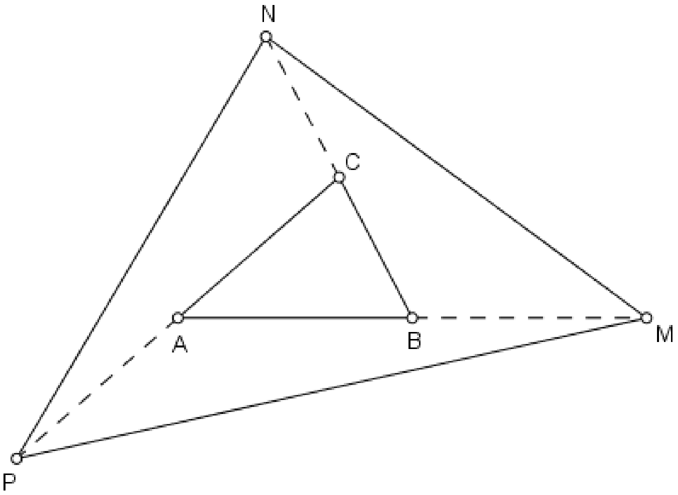
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Primjenom propozicije 4.7 na desnu stranu prethodne jednakosti dobivamo da je $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

□

Vektorski produkt ima velike primjene pri računanju površina ravninskih likova, kao i pri dokazivanju tvrdnji s površinama. Pri dokazivanju planimetrijskih problema s površinama na osobit način se primjenjuje propozicija 4.2 u kojoj je dana geometrijska interpretacija vektorskog produkta. U nastavku donosimo nekoliko zadataka s površinama u kojima ćemo primijeniti razna svojstva vektorskog množenja.

Primjer 4.9. [8] *Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC produlje se redom preko vrhova B, C i A za duljinu same stranice do točaka M, N i P. Odredite omjer površina trokuta MNP i ABC.*



Slika 4.4.

Rješenje. Neka je baza $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ baza vektorskog prostora V^2. Budući da je površinu trokuta ABC jednaka polovini površine paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, vrijedi

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|. \tag{4.1}$$

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, odnosno $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Budući da je stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC produljena preko vrha B za svoju vlastitu duljinu do točke M, onda vrijedi

$$\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB}. \tag{4.2}$$

Stranica $\overline{BC}$ trokuta ABC je preko vrha C produljena za svoju vlastitu duljinu do točke N pa vrijedi $\overrightarrow{BN} = 2\,\overrightarrow{BC}$. S obzirom na to da je $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, slijedi $\overrightarrow{BN} = 2\,(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, odnosno

$$\overrightarrow{BN} = -2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}. \tag{4.3}$$

Stranica $\overline{CA}$ trokuta ABC je preko vrha A produljena za svoju vlastitu duljinu do točke P pa vrijedi $\overrightarrow{CP} = 2\,\overrightarrow{CA}$, odnosno

$$\overrightarrow{CP} = -2\,\overrightarrow{AC}. \tag{4.4}$$

Prikažimo vektor $\overrightarrow{MN}$ kao linearnu kombinaciju vektora baze. Najprije uočimo da vrijedi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, odnosno $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. Uvrštavanjem izraza (4.2) i (4.3) u prethodnu jednakost dobivamo da je $\overrightarrow{MN} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$, tj.

$$\overrightarrow{MN} = -3\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}. \tag{4.5}$$

Prikažimo sada vektor $\overrightarrow{MP}$ kao linearnu kombinaciju vektora baze. Primijetimo da vrijedi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, odnosno $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$. Uvrštavanjem izraza (4.2) i (4.4) u prethodnu jednakost dobivamo $\overrightarrow{MP} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AC}$, odnosno

$$\overrightarrow{MP} = -2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}. \tag{4.6}$$

Budući da je površina trokuta MNP jednaka polovini modula vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{MP}$, vrijedi

$$P_{MNP} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}|.$$

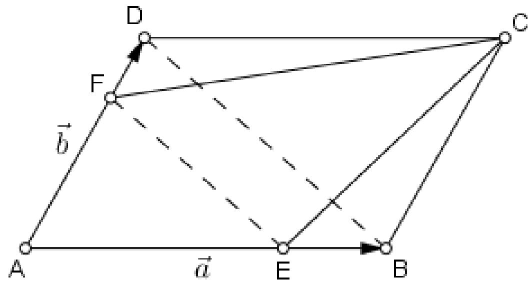
Uvrštavanjem izraza (4.5) i (4.6) u prethodnu jednakost te primjenom svojstava vektorskog množenja iz propozicije 4.5 i korolara 4.4 dobivamo

$$\begin{aligned}
P_{MNP} &= \frac{1}{2}\,|(-3\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}) \times (-2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})| \\
&= \frac{1}{2}\,|6\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - 4\,\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}\,|3\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - 4\,\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| \\
&= \frac{1}{2}\,|3\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + 4\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}\,|7\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\
&= 7\left(\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|\right).
\end{aligned}$$

Sada je iz (4.1) jasno da vrijedi $P_{MNP} = 7\,P_{ABC}$ pa je traženi omjer $P_{MNP} : P_{ABC} = 7 : 1$.

Sljedeći zadatak se pojavio na Županijskom natjecanju iz matematike 2005. godine te je zadan učenicima 1. razreda srednje škole. U službenim rješenjima ovoga zadatka nema dokaza zadane tvrdnje pomoću vektorske metode. Ondje je zadatak riješen na dva načina primjenom metode površina. Mi ćemo ovdje pokazati kako se ovaj natjecateljski zadatak može riješiti primjenom vektorske metode, točnije primjenom definicije i svojstava vektorskog množenja.

Primjer 4.10. [12] (Županijsko natjecanje, 2005., 1. razred srednje škole) *Na stranicama* $\overline{AB}$ *i* $\overline{AD}$ *paralelograma* $ABCD$ *odabrane su redom točke* E *i* F *takve da je* $EF \parallel BD$. *Dokažite da trokuti* BCE *i* CDF *imaju jednake površine.*



Slika 4.5.

Rješenje. Uočimo najprije da dužine $\overline{AE}$ i $\overline{AB}$ pripadaju pravcu AB. Također, jasno je da dužine $\overline{FA}$ i $\overline{DA}$ pripadaju pravcu DA. Iz teksta zadatka znamo da vrijedi $EF \parallel BD$ pa je onda zadovoljeno i $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$. Sada je jasno da dva para odgovarajućih stranica trokuta AEF i ABD leže na istim pravcima dok preostali par njihovih stranica pripada dvama paralelnim pravcima. Iz toga zaključujemo da su trokuti AEF i ABD slični s koeficijentom sličnosti $k \in \mathbb{R}$, pri čemu je $0 < k < 1$.
Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Tada, zbog sličnosti trokuta AEF i ABD, vrijedi $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{a}$. Iz istog razloga vrijedi i $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AD} = k \cdot \vec{b}$. Uočimo da je

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \vec{a} - k\,\vec{a} = (1-k)\,\vec{a}$$

i

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \vec{b} - k\,\vec{b} = (1-k)\,\vec{b}.$$

Promotrimo trokut BCE. Njegova je površina, u oznaci P_{BCE}, jednaka polovini površine paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BE}$. Drugim riječima, površina trokuta BCE je jednaka polovini modula vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BE}$. Dakle, vrijedi

$$P_{BCE} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BE}|. \tag{4.7}$$

Budući da su $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ nasuprotne stranice paralelograma $ABCD$, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ jednaki jer imaju isti smjer i istu orijentaciju te jednake duljine. Iz toga slijedi da je

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b}. \tag{4.8}$$

Također, jasno je da vrijedi i

$$\overrightarrow{BE} = -(1-k)\,\vec{a}. \tag{4.9}$$

Prema definiciji vektorskog množenja, iz (4.7) slijedi

$$P_{BCE} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|\sin\beta,$$

pri čemu je β veličina kuta što ga zatvaraju stranice $\overline{BC}$ i $\overline{EB}$ trokuta BCE. Uvrštavanjem izraza (4.8) i (4.9) u prethodnu jednakost dobivamo

$$P_{BCE} = \frac{1}{2}\,|\vec{b}||-(1-k)\,\vec{a}|\sin\beta,$$

odnosno

$$P_{BCE} = \frac{1}{2}\,(1-k)|\vec{a}||\vec{b}|\sin\beta. \tag{4.10}$$

Promotrimo sada trokut CDF. Njegova je površina, u oznaci P_{CDF}, jednaka polovini modula vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{DF}$ i $\overrightarrow{DC}$. Dakle, imamo

$$P_{CDF} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{DF} \times \overrightarrow{DC}|. \tag{4.11}$$

Uočimo da vrijedi

$$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{FD} = -(1-k)\,\vec{b}. \tag{4.12}$$

Također, kako su $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ nasuprotne stranice paralelograma $ABCD$, onda su one paralelne i jednakih duljina pa vrijedi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, odnosno

$$\overrightarrow{DC} = \vec{b}. \tag{4.13}$$

Prema definiciji vektorskog množenja, iz (4.11) slijedi

$$P_{CDF} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{DC}|\sin\delta,$$

pri čemu je δ veličina kuta što ga zatvaraju stranice $\overline{DF}$ i $\overline{CD}$ trokuta CDF. Uvrštavanjem izraza (4.12) i (4.13) u prethodnu jednakost dobivamo

$$P_{CDF} = \frac{1}{2}\,|-(1-k)\,\vec{b}||\vec{a}|\sin\delta,$$

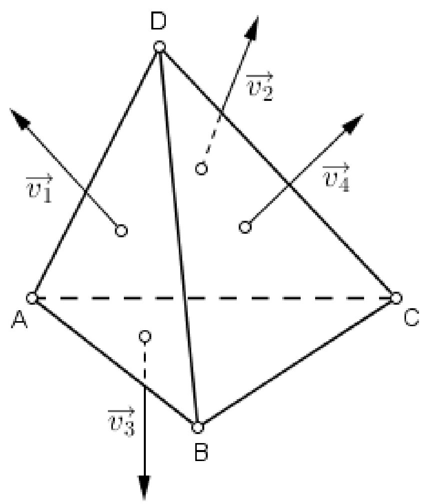
odnosno

$$P_{CDF} = \frac{1}{2}(1-k)|\vec{a}||\vec{b}|\sin\delta. \tag{4.14}$$

Budući da su β i δ ujedno i veličine nasuprotnih kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CDA$ paralelograma $ABCD$, zaključujemo da vrijedi $\beta = \delta$. Iz toga proizlazi da su desne strane izraza (4.10) i (4.14) jednake pa su onda jednake i površine trokuta BCE i CDF.

Zadatak koji ćemo riješiti u nastavku zadan je na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi održanoj 1996. godine. Ovo natjecanje zapravo je bilo završetak priprema učenika hrvatskih srednjih škola koji su se pripremali za 37. međunarodnu matematičku olimpijadu koja se iste godine održala u Indiji. U službenim rješenjima ovaj zadatak je riješen na dva načina. Mi ovdje donosimo malo detaljnije raspisano rješenje u kojem se primjenjuju svojstva vektorskog množenja vektora.

Primjer 4.11. [3] (Hrvatska matematička olimpijada, 1996.) *Nad svakom stranom tetraedra $ABCD$ konstruiran je vektor koji je okomit na tu stranu. Njegov modul je jednak njezinoj površini i usmjeren je na vanjsku stranu tetraedra. Dokažite da je suma tih vektora jednaka nulvektoru.*



Slika 4.6.

Rješenje. Dan je tetraedar $ABCD$. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Neka su $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ i $\vec{v_4}$ redom vektori okomiti na strane ADB, ADC, ABC i BCD tetraedra $ABCD$ te orijentirani na njegovu vanjsku stranu.
Vektor $\vec{v_1}$ je okomit na stranu ADB. To povlači da je okomit i na vektore $\vec{a}$ i $\vec{c}$. Uočimo da vektori $\vec{a}$, $\vec{c}$ i $\vec{v_1}$ čine desnu bazu za V^3. Uz to, duljina vektora $\vec{v_1}$ jednaka je površini strane

ADB, odnosno polovini modula vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$. Iz svega navedenog jasno je da vrijedi

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{2}.$$

Analognim zaključivanjem dobivamo da vrijedi

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{2} \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{v_3} = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{2}.$$

Za vektor $\overrightarrow{v_4}$ koji je okomit na stranu BCD tetraedra $ABCD$ vrijedi da je jednak polovini vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$. Budući da je $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c}$ i $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{c}$, slijedi da je

$$\overrightarrow{v_4} = \frac{(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})}{2},$$

odnosno

$$\overrightarrow{v_4} = \frac{(\vec{a} + (-\vec{c})) \times (\vec{b} + (-\vec{c}))}{2}.$$

Iz distributivnosti vektorskog množenja prema zbrajanju vektora slijedi

$$\overrightarrow{v_4} = \frac{\vec{a} \times (\vec{b} + (-\vec{c})) + (-\vec{c}) \times (\vec{b} + (-\vec{c}))}{2}.$$

Prema svojstvu (3') iz korolara 4.6 vrijedi

$$\overrightarrow{v_4} = \frac{\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times (-\vec{c}) + (-\vec{c}) \times \vec{b} + (-\vec{c}) \times (-\vec{c})}{2}.$$

Primjenom svojstva (2) iz propozicije 4.5, odnosno svojstva (2') iz korolara 4.6 slijedi

$$\overrightarrow{v_4} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2} - \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{2} - \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} \times \vec{c}}{2}.$$

Zbog antikomutativnosti vektorskog množenja vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, a prema korolaru 4.4 vrijedi $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$. Stoga je

$$\overrightarrow{v_4} = -\frac{\vec{b} \times \vec{a}}{2} - \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{2} - \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{2}.$$

Zbrajanjem vektora $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ i $\overrightarrow{v_4}$ dobivamo

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + \vec{v_4} = \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{2} - \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{2} - \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{2} - \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{2} = \vec{0},$$

a to smo i trebali dokazati.

Sada ćemo dokazati jednu tvrdnju u kojoj će vektori biti zadani u pravokutnim koordinatama.

Primjer 4.12. *Zadane su točke* $A(1,-2,2)$, $B(4,-3,-1)$, $C(3,-6,0)$, $D(2,3,-2)$, $E(-1,4,1)$ *i* $F(1,0,-1)$. *Dokažite da trokuti* ABC *i* DEF *imaju jednake površine.*

Rješenje. Kako bismo odredili površinu P_1 trokuta ABC potrebno je izračunati polovinu modula vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ koji ga određuju. Odredimo, stoga, koordinatne prikaze ovih vektora u ortonormiranoj bazi za V^3. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (4-1)\vec{i} + (-3+2)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (3,-1,-3), \\
\overrightarrow{AC} &= (3-1)\vec{i} + (-6+2)\vec{j} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} = (2,-4,-2).
\end{aligned}$$

Vektorskim množenjem vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ dobivamo

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k} + 2\vec{k} - 12\vec{i} + 6\vec{j} = -10\vec{i} - 10\vec{k} = (-10, 0, -10).$$

Površinu P_1 trokuta ABC dobit ćemo kao polovinu duljine vektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Primjenom korolara 3.9 dobivamo da je

$$P_1 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + 0^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{200} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Dakle, površina trokuta ABC iznosi $5\sqrt{2}$.
Analogno, površinu P_2 trokuta DEF dobit ćemo kao polovinu modula vektorskog produkta vektora $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{DF}$ kojima je taj trokut određen. Stoga, odredimo najprije njihove prikaze u pravokutnim koordinatama. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= (-1-2)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (1+2)\vec{k} = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-3,1,3), \\
\overrightarrow{DF} &= (1-2)\vec{i} + (0-3)\vec{j} + (-1+2)\vec{k} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-1,-3,1).
\end{aligned}$$

Vektorskim množenjem vektora $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{DF}$ dobivamo

$$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k} + \vec{k} + 9\vec{i} + 3\vec{j} = 10\vec{i} + 10\vec{k} = (10, 0, 10).$$

Površina P_2 trokuta DEF jednaka je polovini duljine vektora $\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF}$. Stoga, imamo

$$P_2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF}| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 0^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{200} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Dakle, površina trokuta DEF iznosi $5\sqrt{2}$.
Budući da vrijedi $P_1 = P_2 = 5\sqrt{2}$, zaključujemo da su površine trokuta ABC i DEF zaista jednake.

Poglavlje 5

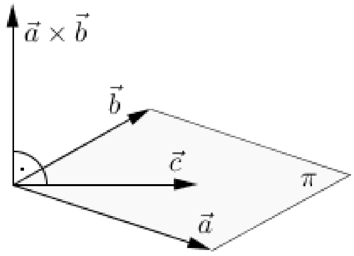
Mješoviti produkt

Ovo poglavlje donosi još jedan način na koji se mogu množiti vektori. Radi se o tzv. **mješovitom** ili **vektorsko-skalarnom množenju**. Rezultat mješovitog množenja vektora je skalar. Kao i u slučaju skalarnog i vektorskog množenja, i ovdje ćemo iskazati i dokazati bitna svojstva mješovitog množenja vektora te ćemo izreći i posljedice nekih njegovih svojstava. Također, primjenom vektorske metode ćemo riješiti nekoliko planimetrijskih problema pri čemu ćemo koristiti definiciju i svojstva mješovitog množenja vektora. Početne definicije, propozicije i njihove dokaze te korolare donosimo prema [4], [6] i [11].

Definicija 5.1. *Preslikavanje $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ koje trojci vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pridružuje skalar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ nazivamo mješovitim množenjem vektora. Rezultat $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ mješovitog množenja vektora nazivamo mješoviti umnožak ili mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Koristi se i oznaka $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.*

Propozicija 5.2. *Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ jednak je nuli ako i samo ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.*

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Ova jednakost vrijedi ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili ako su $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti vektori. U slučaju kada je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ su kolinearni jer je nulvektor kolinearan s bilo kojim vektorom iz V^3. Dodatno, iz $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, prema propoziciji 4.3, slijedi da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. Sada je jasno da su u slučaju kada je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni. Promotrimo sada slučaj kada je $\vec{c} = \vec{0}$. Budući da je nulvektor kolinearan s bilo kojim vektorom iz V^3, slijedi da je $\vec{c}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$, ali i s vektorom $\vec{b}$. Iz toga slijedi da su i u ovom slučaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni. Preostaje nam još promotriti slučaj kada su $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti vektori. Iz definicije 4.1 znamo da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na ravninu koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Budući da je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, zaključujemo da je $\vec{c}$ paralelan s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Drugim riječima, možemo zaključiti da su i u ovom slučaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni. Uočimo da smo u sva tri slučaja došli do zaključka su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni pa je time ovaj smjer dokazan.



Slika 5.1.

$\Leftarrow$: Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni vektori. Želimo dokazati da je njihov mješoviti produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ jednak nuli. Ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$, onda je očito $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ jer je skalarni produkt nulvektora s bilo kojim vektorom jednak 0. Pretpostavimo da vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ i $\vec{c} \neq \vec{0}$. Budući da je $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, tada, prema propoziciji 4.3, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, nego određuju jednu ravninu koju možemo označiti s π. Prema (2) iz definicije 4.1 znamo da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na ravninu π. Iz pretpostavke da su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni slijedi da je vektor $\vec{c}$ paralelan s ravninom π. Stoga je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na vektor $\vec{c}$ pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, tj. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. □

Dokažimo sada najvažnija svojstva mješovitog množenja vektora.

Propozicija 5.3. *Za $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

(1) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,

(2) $(\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Dokaz.

(1) Izraz $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ je ekvivalentan izrazu $((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$. Prema svojstvu (3) iz propozicije 4.5 vrijedi $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}$ pa je $((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$. Primjenom svojstva (5) iz propozicije 3.2 na desnu stranu ovog izraza dobivamo da je $((\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$, odnosno $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

(2) Zapišimo najprije izraz $(\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ u ekvivalentnom obliku kao $((\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$. Prema svojstvu (2) iz propozicije 4.5 vrijedi $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ pa je $((\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \lambda (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$, a to je isto što i $\lambda (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Dakle, vrijedi $(\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

□

Korolar 5.4. *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

(1') $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c})$,

(1") $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_1}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_2})$,

(2') $(\overrightarrow{a}, \lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,

(2") $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \lambda \overrightarrow{c}) = \lambda (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Sada ćemo izreći nekoliko tvrdnji vezanih uz mješoviti produkt vektora kada su oni dani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi.

Propozicija 5.5. *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *desna ortonormirana baza vektorskog prostora* V^3 *te neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *i* $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *koordinatni prikazi vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *u toj bazi. Za mješoviti produkt vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *tada vrijedi*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Izraz $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je ekvivalentan izrazu $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Prema propoziciji 4.7 vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}$. Budući da je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ desna ortonormirana baza vektorskog prostora V^3, to znači da su svaka dva vektora koja čine tu bazu međusobno okomita pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$ i $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$. Uz to, svaki vektor desne ortonormirane baze ima duljinu jednaku 1 pa, prema svojstvu (1) iz propozicije 3.2, slijedi da je $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$ i $\vec{k}^2 = 1$. Imajući na umu ove činjenice odredimo skalarni produkt vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$. Imamo

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= [(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}] \cdot (\gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{k}) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3.\end{aligned}$$

Desna strana posljednje jednakosti se može pregledno zapisati u obliku determinante trećeg reda pa imamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

a to je upravo tvrdnja ove propozicije. □

Korolar 5.6. *Tri vektora su komplanarna ako za njihove koordinatne prikaze* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *i* $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *u desnoj ortonormiranoj bazi vrijedi*

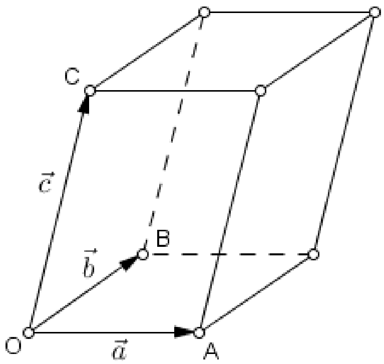
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propozicija 5.7. *Za* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 5.5 i činjenice da pri zamjeni poretka dvaju susjednih redaka determinanta trećeg reda mijenja predznak, dok pri cikličkoj zamjeni redaka njezin predznak ostaje isti. □

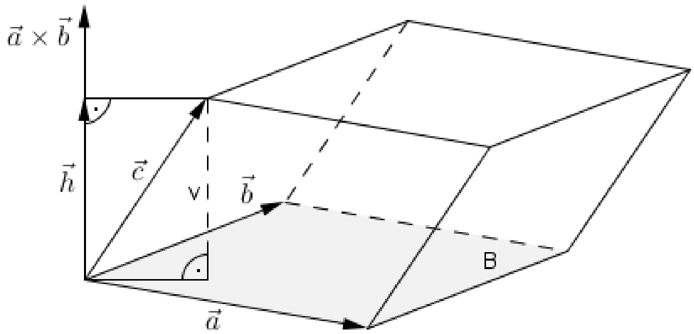
Mješoviti produkt vektora ima i svoju geometrijsku interpretaciju. Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ tri nekomplanarna vektora. Tada vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u prostoru određuju jedan paralelepiped. Možemo još reći da je paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 5.2.

Propozicija 5.8. *Obujam paralelepipeda razapetog vektorima* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Dokaz. Neka vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ čine desnu bazu za V^3. Prema (2) iz definicije 4.1 znamo da i vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ čine desnu bazu za V^3 pa možemo zaključiti da se vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ nalaze s iste strane ravnine određene vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iz toga pak zaključujemo da je veličina kuta što ga zatvaraju vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ manja od $\frac{\pi}{2}$, a to povlači da je $\cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$. Neka je $\vec{h}$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Vektori $\vec{h}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ su očito kolinearni pa



Slika 5.3.

je veličina kuta između vektora $\vec{h}$ i $\vec{c}$ jednaka veličini kuta među vektorima $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$. Stoga, iz trigonometrije pravokutnog trokuta slijedi

$$\cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{|\vec{h}|}{|\vec{c}|},$$

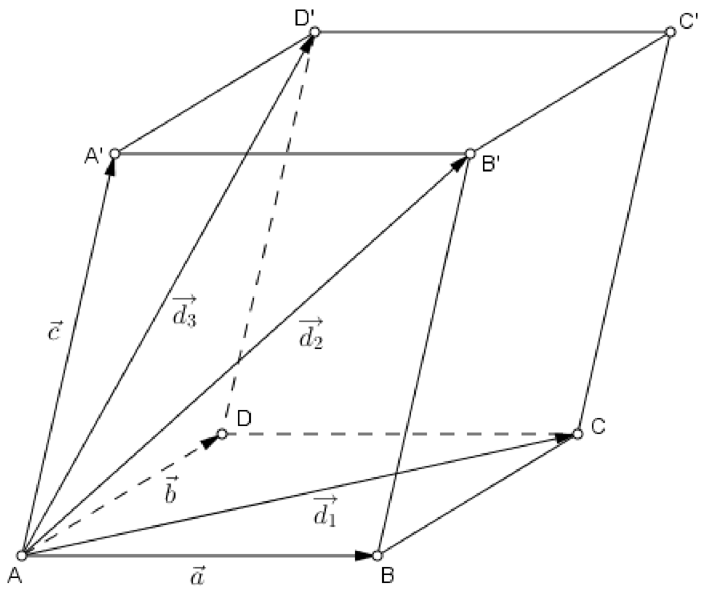
odnosno $|\vec{h}| = |\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$. Uočimo da je $|\vec{h}|$ zapravo duljina visine v paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Baza B tog paralelepipeda je paralelogram kojeg određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pa je površina baze, prema propoziciji 4.2, jednaka modulu vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Drugim riječima, vrijedi $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Budući da je obujam V paralelepipeda općenito jednak umnošku površine baze B i duljine visine v, uvrštavanjem $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$ i $v = |\vec{h}| = |\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ u formulu $V = B \cdot v$ dobivamo

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}),$$

što je očito veće od 0. Primjenom definicije skalarnog množenja vektora na desnu stranu prethodne jednakosti dobivamo da je $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, odnosno $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
Ako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ lijeva baza za V^3, onda vektori $\vec{b}$, $\vec{a}$ i $\vec{c}$ u ovom redoslijedu čine desnu bazu za V^3. Analognim zaključivanjem kao i u slučaju kada je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bila desna baza prostora V^3 dobivamo da je $V = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ i tada je obujam V paralelepipeda negativan. Prema propoziciji 5.7 vrijedi $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Iz toga slijedi da je $V = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ što je sada očito pozitivan broj.
Na kraju možemo zaključiti da, bez obzira je li $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ desna ili lijeva baza prostora V^3, za obujam V paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$, a to smo i trebali dokazati. □

U nastavku ovog poglavlja ćemo vektorskom metodom riješiti nekoliko zadataka u kojima ćemo koristiti svojstva mješovitog množenja vektora.

Primjer 5.9. [15] *Neka je V_1 obujam paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a V_2 obujam paralelepipeda određenog vektorima plošnih dijagonala prvog paralelepipeda. Dokažite da je $V_2 = 2\,V_1$.*



Slika 5.4.

Rješenje. Dan je paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ razapet vektorima $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Prema propoziciji 5.8 obujam V_1 paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$ jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Drugim riječima, vrijedi

$$V_1 = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Neka su $d_1 = \overline{AC}$, $d_2 = \overline{AB'}$ i $d_3 = \overline{AD'}$ plošne dijagonale koje izlaze iz vrha A paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$. Trebamo dokazati da one razapinju novi paralelepiped čiji je obujam, u oznaci V_2, dvostruko veći od obujma V_1 zadanog paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$. Drugim riješima, želimo dokazati da je $V_2 = 2\,V_1$.

Uvedimo oznake: $\vec{d_1} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d_2} = \overrightarrow{AB'}$ i $\vec{d_3} = \overrightarrow{AD'}$. Prema propoziciji 5.8 za obujam V_2 paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ i $\vec{d_3}$ vrijedi

$$V_2 = |(\vec{d_1}, \vec{d_2}, \vec{d_3})|.$$

Budući da su d_1, d_2 i d_3 plošne dijagonale iz vrha A paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$, jasno je da vrijedi $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d_2} = \vec{a} + \vec{c}$ i $\vec{d_3} = \vec{b} + \vec{c}$. Iz toga slijedi da je

$$V_2 = |(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{b}+\vec{c})|.$$

Prema svojstvu (1) iz propozicije 5.3 slijedi da je

$$V_2 = |(\vec{a}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{b}+\vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{b}+\vec{c})|.$$

Primjenom svojstva (1') iz korolara 5.4 dobivamo da je

$$V_2 = |(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}+\vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}+\vec{c})|.$$

Primjenom svojstva (1") iz korolara 5.4 na prethodni izraz dobivamo

$$V_2 = |(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c})|.$$

Uočimo da zbog komplanarnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$. Analogno zaključujemo da vrijedi $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}) = 0$, $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = 0$ i $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 0$. Stoga je

$$V_2 = |(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})|.$$

Prema propoziciji 5.7 vrijedi $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pa je

$$V_2 = |-(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

odnosno

$$V_2 = |-2\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

a to je ekvivalentno sljedećem

$$V_2 = 2\,|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Budući da je $V_1 = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$, slijedi da je $V_2 = 2\,V_1$, a to smo i trebali dokazati.

Sada ćemo dokazati jednu tvrdnju u kojoj će vektori biti zadani svojim koordinatnim prikazima u ortonormiranoj bazi.

Primjer 5.10. *Dokažite da točke* $A(1,0,3)$, $B(1,-1,2)$, $C(1,-3,0)$ *i* $D(-1,1,0)$ *pripadaju istoj ravnini.*

Rješenje. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ desna ortonormirana baza. Prikažimo vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ u toj bazi. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = (1-1)\,\vec{i} + (-1-0)\,\vec{j} + (2-3)\,\vec{k} = (0,-1,-1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1)\,\vec{i} + (-3-0)\,\vec{j} + (0-3)\,\vec{k} = (0,-3,-3),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1-1)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (0-3)\vec{k} = (-2, 1, -3).$$

Odredimo sada mješoviti produkt vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Primjenom propozicije 5.5 i Laplaceovog razvoja determinante trećeg reda po prvom stupcu dobivamo da je

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (3-3) = -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

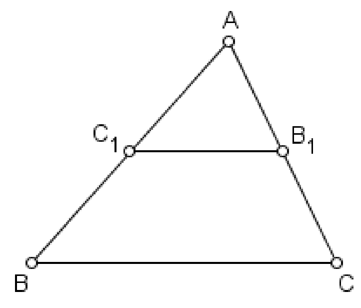
Budući da je mješoviti produkt vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ jednak nuli, prema propoziciji 5.2 zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ komplanarni pa su onda komplanarne i zadane točke A, B, C i D.

Poglavlje 6

Teoremi o trokutu i tetraedru

Ovo poglavlje sadrži niz dobro poznatih geometrijskih teorema (Pitagorin, Cevin, Menelajev...) koji se odnose na trokut. Uz to, u ovom poglavlju je dokazan teorem o težištu tetraedra te je riješen jedan zadatak s natjecanja u kojem se primjenjuje tvrdnja tog teorema. Teoremi koje navodimo u ovom poglavlju se obično dokazuju primjenom klasičnih planimetrijskih alata poput sukladnosti i sličnosti. Mi ovdje donosimo njihove dokaze primjenom vektorske metode. Neki od teorema su dokazani na više načina što pokazuje raskoš vektorske metode.
Prva tvrdnja koju ćemo dokazati u ovom poglavlju je poučak o srednjici trokuta. Tvrdnju ćemo dokazati na dva načina primjenom vektorske metode. Prvi dokaz koji ovdje navodimo može se naći u knjigama [14] i [15], dok drugi (radijvektorski) dokaz donosi Čeliković u [6]. Ovdje smo dokaze pronađene u navedenoj literaturi detaljnije raspisali te smo promijenili neke oznake.

Teorem 6.1. *Srednjica trokuta paralelna je s njegovom trećom stranicom, a njena duljina jednaka je polovini duljine te stranice.*



Slika 6.1.

Dokaz. 1. način
Dan je trokut ABC. Označimo s C_1 polovište stranice $\overline{AB}$, a s B_1 polovište stranice $\overline{CA}$ tog trokuta. Tada je dužina $\overline{C_1B_1}$ srednjica trokuta ABC. Vektor $\overrightarrow{C_1B_1}$ zapišimo kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{C_1A}$ i $\overrightarrow{AB_1}$. Imamo

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AB_1}. \tag{6.1}$$

Budući da je C_1 polovište stranice $\overline{AB}$, to povlači da točka C_1 dijeli dužinu $\overline{AB}$ na dva dijela jednakih duljina. Stoga je duljina vektora $\overrightarrow{C_1A}$ jednaka polovini duljine vektora $\overrightarrow{BA}$. Dakle, vrijedi $\overrightarrow{C_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Analognim zaključivanjem dobivamo da vrijedi $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Uvrštavanjem ovih izraza u relaciju (6.1) te sređivanjem desne strane dobivene jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_1B_1} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Uočimo da su vektori $\overrightarrow{C_1B_1}$ i $\overrightarrow{BC}$ kolinearni. To znači da pripadaju paralelnim pravcima C_1B_1 i BC. Iz toga zaključujemo da vrijedi $\overline{C_1B_1} \parallel \overline{BC}$, tj. da je srednjica $\overline{C_1B_1}$ paralelna sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC. Također, uočimo da je duljina vektora $\overrightarrow{C_1B_1}$ jednaka polovini duljine vektora $\overrightarrow{BC}$ pa je i duljina srednjice $\overline{C_1B_1}$ jednaka polovini duljine stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC, tj. vrijedi $|C_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|$. Do istih zaključaka bismo došli i da smo promatrali bilo koju od preostalih dviju srednjica trokuta ABC.

2. način
Dan je trokut ABC. Neka je B_1 polovište stranice $\overline{CA}$. Tada, prema korolaru 2.4, vrijedi

$$\overrightarrow{r_{B_1}} = \frac{\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A}}{2}. \tag{6.2}$$

Neka je C_1 polovište stranice $\overline{AB}$. Iz korolara 2.4 slijedi

$$\overrightarrow{r_{C_1}} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}}{2}. \tag{6.3}$$

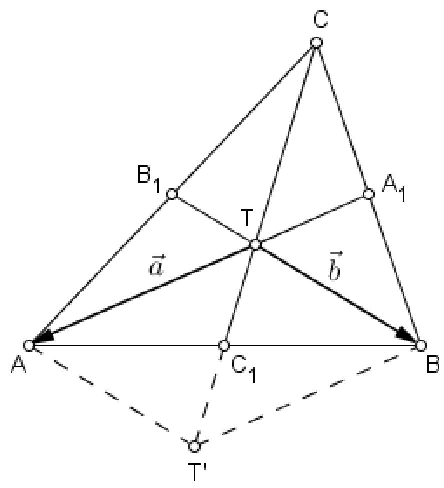
Za vektor $\overrightarrow{B_1C_1}$ srednjice $\overline{B_1C_1}$ trokuta ABC vrijedi $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{r_{C_1}} - \overrightarrow{r_{B_1}}$. Uvrštavanjem izraza (6.2) i (6.3) u ovu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C_1} &= \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}}{2} - \frac{\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_C}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Uočimo da su vektori $\overrightarrow{B_1C_1}$ i $\overrightarrow{CB}$ kolinearni. To znači da pripadaju paralelnim pravcima B_1C_1 i CB. Iz toga slijedi da je $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{BC}$, odnosno srednjica $\overline{B_1C_1}$ je paralelna sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC. Također, primjećujemo da je duljina vektora $\overrightarrow{B_1C_1}$ jednaka polovini duljine vektora $\overrightarrow{CB}$ što povlači da je duljina srednjice $\overline{B_1C_1}$ jednaka polovini duljine stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Tvrdnja se analogno dokazuje i za preostale dvije srednjice trokuta ABC. □

Sljedeći teorem zapravo je drugačije izrečena tvrdnja primjera 2.5 koju smo već dokazali vektorskom metodom koristeći radijvektore. Ovdje ćemo pokazati kako se ovaj teorem može dokazati na još jedan način primjenom vektorske metode. Sljedeći dokaz se može naći u [14].

Teorem 6.2. *Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 mjereći od vrha trokuta.*



Slika 6.2.

Dokaz. Dan je trokut ABC. Neka je točka A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, a točka B_1 polovište stranice $\overline{CA}$ tog trokuta te neka se težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ sijeku u točki T. Uvedimo sljedeće oznake: $\vec{a} = \overrightarrow{TA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{TB}$.
Uočimo da su točke T, A i A_1 kolinearne. Budući da se točke A i A_1 na pravcu AA_1 nalaze s različitih strana točke T, zaključujemo da postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R}^-$ takav da je $\overrightarrow{TA_1} = \alpha\overrightarrow{TA}$, odnosno $\overrightarrow{TA_1} = \alpha\vec{a}$. Slično tome, točke T, B i B_1 su kolinearne. S obzirom na to da se točke B i B_1 na pravcu BB_1 nalaze s različitih strana točke T, zaključujemo da postoji skalar $\beta \in \mathbb{R}^-$ takav da je $\overrightarrow{TB_1} = \beta\overrightarrow{TB}$, odnosno $\overrightarrow{TB_1} = \beta\vec{b}$.
Pretpostavimo da je točka C_1 polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka je T' točka na pravcu TC_1 čija je udaljenost od točke C_1 jednaka udaljenosti točaka T i C_1. Drugim riječima, neka je T' točka za koju vrijedi $|TC_1| = |T'C_1|$. Budući da smo pretpostavili da je C_1 polovište stranice $\overline{AB}$, tada vrijedi $|AC_1| = |C_1B|$. S obzirom na to da točka C_1 raspolavlja dužine $\overline{AB}$ i $\overline{TT'}$, zaključujemo da su te dužine zapravo dijagonale paralelograma čiji su vrhovi točke A, T', B i T. Drugim riječima, četverokut $AT'BT$ je paralelogram. Tada je, prema pravilu paralelograma za zbrajanje vektora, duljina vektora $\overrightarrow{TT'}$ jednaka zbroju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle, vrijedi

$$\overrightarrow{TT'} = \vec{a} + \vec{b}. \tag{6.4}$$

S obzirom na to da je točka C_1 polovište dužine $\overline{TT'}$, vrijedi $|TC_1| = \frac{1}{2}|TT'|$, odnosno $\overrightarrow{TC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TT'}$. Iz toga slijedi da je $2\overrightarrow{TC_1} = \overrightarrow{TT'}$. Uvrštavanjem jednakosti $2\overrightarrow{TC_1} = \overrightarrow{TT'}$ u izraz (6.4) dobivamo $2\overrightarrow{TC_1} = \vec{a} + \vec{b}$, odnosno

$$\overrightarrow{TC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}). \tag{6.5}$$

Uočimo da vektor $\overrightarrow{B_1A}$ možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{B_1T}$ i $\overrightarrow{TA}$, tj. tako da vrijedi $\overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{B_1T} + \overrightarrow{TA}$. Budući da je $\overrightarrow{TB_1} = \beta\vec{b}$, imamo $\overrightarrow{B_1T} = -\overrightarrow{TB_1} = -\beta\vec{b}$. Također, znamo da je $\overrightarrow{TA} = \vec{a}$. Stoga, zaključujemo da vrijedi $\overrightarrow{B_1A} = \vec{a} - \beta\vec{b}$.
Slično tome, vektor $\overrightarrow{A_1B}$ možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{A_1T}$ i $\overrightarrow{TB}$. Dakle, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1T} + \overrightarrow{TB}$. Znamo da je $\overrightarrow{TA_1} = \alpha\vec{a}$ pa je $\overrightarrow{A_1T} = -\overrightarrow{TA_1} = -\alpha\vec{a}$. Uz činjenicu da je $\overrightarrow{TB} = \vec{b}$, slijedi $\overrightarrow{A_1B} = -\alpha\vec{a} + \vec{b}$.
Vektor $\overrightarrow{CT}$ pak možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{CB_1}$ i $\overrightarrow{B_1T}$ pa imamo $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1T}$. Budući da točka B_1 dijeli stranicu $\overline{CA}$ trokuta ABC na dva jednaka dijela, vrijedi $|CB_1| = |B_1A|$, tj. $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{B_1A}$. Iz toga zaključujemo da je $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1T}$. Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{B_1T} = -\overrightarrow{TB_1} = -\beta\vec{b}$ i $\overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{B_1T} + \overrightarrow{TA} = -\beta\vec{b} + \vec{a}$. Tada je $\overrightarrow{CT} = -\beta\vec{b} + \vec{a} - \beta\vec{b}$, odnosno

$$\overrightarrow{CT} = \vec{a} - 2\beta\,\vec{b}. \tag{6.6}$$

Na sličan način dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CT} &= \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1T}\\ &= \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1T}\\ &= \overrightarrow{A_1T} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{A_1T}\\ &= 2\overrightarrow{A_1T} + \overrightarrow{TB}.\end{aligned}$$

Zbog $\overrightarrow{A_1T} = -\alpha\vec{a}$ i $\overrightarrow{TB} = \vec{b}$ slijedi da je

$$\overrightarrow{CT} = -2\alpha\vec{a} + \vec{b}. \tag{6.7}$$

Izjednačavanjem desnih strana izraza (6.6) i (6.7) dobivamo $\vec{a} - 2\beta\vec{b} = -2\alpha\vec{a} + \vec{b}$. Izjednačavanjem skalara uz vektor $\vec{a}$, odnosno vektor $\vec{b}$ na lijevoj i desnoj strani ove jednakosti dobivamo da je $1 = -2\alpha$ i $-2\beta = 1$, tj.

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}.$$

To povlači $\overrightarrow{TA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{TA}$ i $\overrightarrow{TB_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{TB}$. Iz toga zaključujemo da točka T dijeli težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ u omjeru $2:1$. Uvrštavanjem $\beta = -\frac{1}{2}$ u (6.6) dobivamo $\overrightarrow{CT} = \vec{a} + \vec{b}$. Uvrstimo li pak izraz $\overrightarrow{CT} = \vec{a} + \vec{b}$ u (6.5) dobivamo $\overrightarrow{TC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CT}$, odnosno

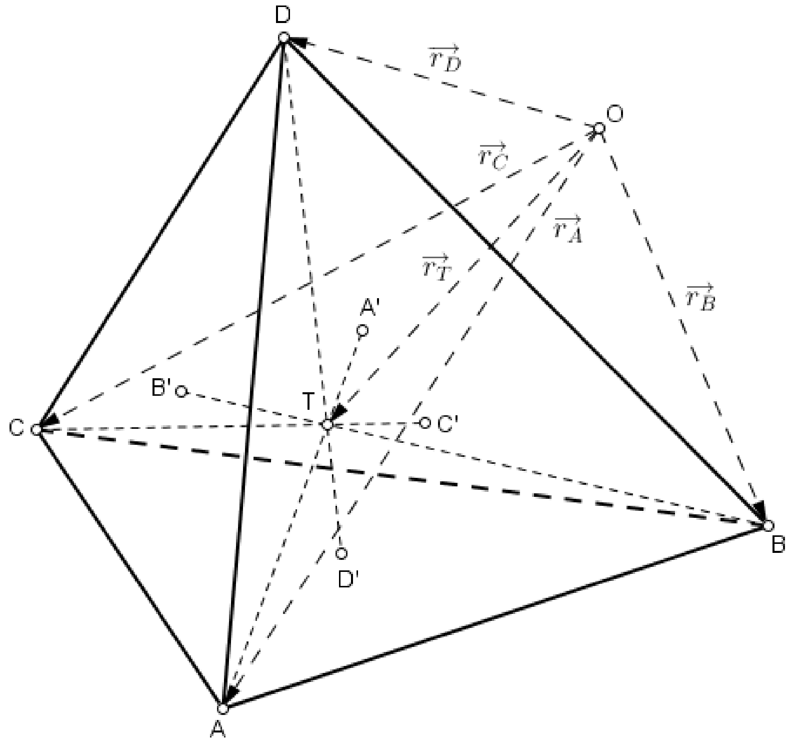
$$\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{TC_1}.$$

Iz posljednje jednakosti se jasno razabire da točka T pripada težišnici $\overline{CC_1}$ te da vrijedi $|CT| : |TC_1| = 2 : 1$. Time smo dokazali da težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru $2 : 1$ mjereći od vrha trokuta. □

Poznavajući dokaz prethodnog teorema pomoću radijvektora lako je dokazati i njegov stereometrijski analogon koji nalazimo kod Devidéa u [10].

Teorem 6.3. *Težišnica tetraedra je dužina koja spaja vrh tetraedra s težištem njemu nasuprotne strane. Sve četiri težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki koju nazivamo težište tetraedra. Težište tetraedra dijeli svaku težišnicu u omjeru 3 : 1 računajući od vrha tetraedra.*

Dokaz. Dan je tetraedar $ABCD$. Neka je O bilo koja čvrsta točka prostora te neka su $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{r_C}$ i $\overrightarrow{r_D}$ redom radijvektori vrhova A, B, C i D tetraedra $ABCD$. Neka su A', B', C' i D' redom težišta strana BCD, CDA, DAB i ABC tetraedra $ABCD$. Prema tvrdnji dokazanoj u primjeru 2.5 za radijvektore težišta A', B', C' i D' vrhovima A, B, C i D nasuprotnih strana tetraedra vrijedi



Slika 6.3.

$$\overrightarrow{r_{A'}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}),$$

$$\overrightarrow{r_{B'}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A}),$$

$$\overrightarrow{r_{C'}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B})$$

i

$$\overrightarrow{r_{D'}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}).$$

Neka je T_A točka na težišnici $\overline{AA'}$ koja tu težišnicu dijeli u omjeru $3:1$ računajući od vrha A tetraedra $ABCD$. Promotrimo vektor $\overrightarrow{AT_A}$. Za njega vrijedi $\overrightarrow{AT_A} = \overrightarrow{r_{T_A}} - \overrightarrow{r_A}$, odnosno

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{AT_A}.$$

Budući da točka T_A dijeli težišnicu $\overline{AA'}$ u omjeru $3:1$ mjereći od vrha A tetraedra $ABCD$, zaključujemo da je $\overrightarrow{AT_A} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AA'}$. Iz toga slijedi da je

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \overrightarrow{r_A} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AA'}.$$

S obzirom na to da je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{r_{A'}} - \overrightarrow{r_A}$, slijedi

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \overrightarrow{r_A} + \frac{3}{4}\,(\overrightarrow{r_{A'}} - \overrightarrow{r_A}),$$

tj.

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{r_A} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{r_{A'}}. \tag{6.8}$$

Već smo istaknuli da za radijvektor težišta A' strane BCD tetraedra $ABCD$ vrijedi

$$\overrightarrow{r_{A'}} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}). \tag{6.9}$$

Uvrštavanjem izraza (6.9) u jednakost (6.8) dobivamo

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{r_A} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\,(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}),$$

odnosno

$$\overrightarrow{r_{T_A}} = \frac{1}{4}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}).$$

Isto se dobije za analogno definirane točke T_B, T_C i T_D na težišnicama $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ i $\overline{DD'}$ tetraedra $ABCD$. Iz toga zaključujemo da vrijedi $T_A \equiv T_B \equiv T_C \equiv T_D$, odnosno da sve četiri težišnice tetraedra $ABCD$ prolaze istom točkom koju možemo označiti s T. Točku T nazivamo težište tetraedra $ABCD$. □

Sada ćemo riješiti jedan natjecateljski zadatak u kojem ćemo primijeniti upravo dokazani teorem o težištu tetraedra.

Primjer 6.4. [2] (Županijsko natjecanje, 2000., 3. razred srednje škole) *Težište tetraedra $ABCD$ je točka T čiji je radijvektor dan s*

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{4}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}). \tag{6.10}$$

Ako je težište jednako udaljeno od vrhova A i B, dokažite da je

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2. \tag{6.11}$$

Rješenje. Ako je težište T tetraedra $ABCD$ jednako udaljeno od njegovih vrhova A i B, tj. ako vrijedi $|AT| = |BT|$, onda vrijedi i $|AT|^2 = |BT|^2$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 slijedi

$$\overrightarrow{AT}^2 = \overrightarrow{BT}^2. \tag{6.12}$$

Budući da je $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_A}$ i $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_B}$, jednakost (6.12) je ekvivalentna sljedećoj

$$(\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_A})^2 = (\overrightarrow{r_T} - \overrightarrow{r_B})^2.$$

Kvadriranjem obiju strana prethodne jednakosti dobivamo

$$\overrightarrow{r_T}^2 - 2\,\overrightarrow{r_T} \cdot \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_A}^2 = \overrightarrow{r_T}^2 - 2\,\overrightarrow{r_T} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B}^2,$$

odnosno

$$\overrightarrow{r_A}^2 - \overrightarrow{r_B}^2 - 2\,\overrightarrow{r_T} \cdot \overrightarrow{r_A} + 2\,\overrightarrow{r_T} \cdot \overrightarrow{r_B} = 0.$$

Uvrstimo sada izraz (6.10) u posljednju jednakost. Dobivamo

$$\overrightarrow{r_A}^2 - \overrightarrow{r_B}^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}) \cdot \overrightarrow{r_A} + 2 \cdot \frac{1}{4}\,(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}) \cdot \overrightarrow{r_B} = 0$$
$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_A}^2 - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_B}^2 - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_D} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_D} = 0.$$

Dijeljenjem s $\frac{1}{2}$ slijedi da je

$$\overrightarrow{r_A}^2 - \overrightarrow{r_B}^2 - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_D} = 0. \tag{6.13}$$

Želimo dokazati da vrijedi jednakost (6.11). Primjenom svojstva *(i)* iz propozicije 3.2 na izraz (6.11) dobivamo

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BD}^2.$$

Ovu jednakost možemo zapisati u ekvivalentnom obliku na sljedeći način

$$(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A})^2 + (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A})^2 = (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B})^2 + (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B})^2.$$

Kvadriranjem svakog binoma te dodatnim sređivanjem dobivamo

$$\overrightarrow{r_C}^2 - 2\,\overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_A}^2 + \overrightarrow{r_D}^2 - 2\,\overrightarrow{r_D} \cdot \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_A}^2 = \overrightarrow{r_C}^2 - 2\,\overrightarrow{r_C} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B}^2 + \overrightarrow{r_D}^2 - 2\,\overrightarrow{r_D} \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B}^2$$
$$2\,\overrightarrow{r_A}^2 - 2\,\overrightarrow{r_B}^2 - 2\,\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} - 2\,\overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_D} + 2\,\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + 2\,\overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_D} = 0.$$

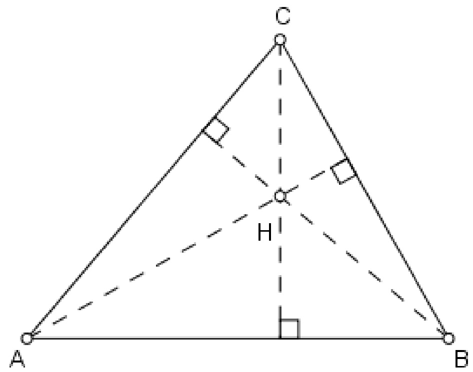
Dakle, vrijedi

$$\overrightarrow{r_A}^2 - \overrightarrow{r_B}^2 - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} \cdot \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B} \cdot \overrightarrow{r_D} = 0. \tag{6.14}$$

Uočimo da su izrazi (6.13) i (6.14) ekvivalentni. Stoga, zaključujemo da zaista vrijedi tvrdnja koju smo trebali dokazati.

Sljedeća tvrdnja koju ćemo dokazati je poučak o ortocentru trokuta koji se često naziva i poučak o visinama trokuta. Navedeni poučak ćemo dokazati na dva načina primjenom vektorske metode. U oba dokaza se primjenjuje karakterizacija okomitosti vektora pomoću skalarnog produkta. Prvi način na koji ćemo dokazati ovaj teorem dan je u [9], dok drugi dokaz nalazimo u [15].

Teorem 6.5. (Poučak o ortocentru trokuta) *Sva tri pravca kojima pripadaju visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*



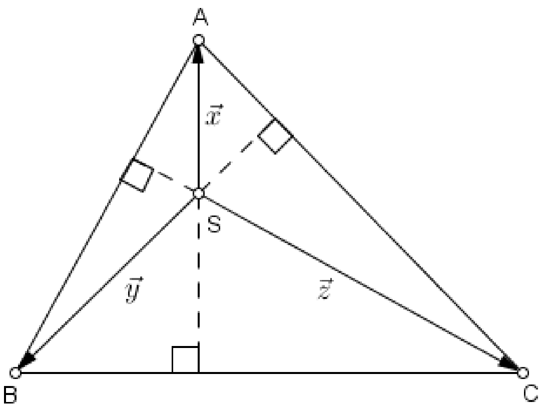
Slika 6.4.

Dokaz. 1. način
Dan je trokut ABC. Neka je točka H sjecište pravaca kojima pripadaju visine spuštene iz vrhova B i C na pravce kojima pripadaju njima nasuprotne stranice $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Budući da su pravci CH i AB međusobno okomiti, onda su okomiti i vektori $\overrightarrow{CH}$ i $\overrightarrow{AB}$ pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Također, znamo da su pravci BH i AC međusobno okomiti pa su onda okomiti i vektori $\overrightarrow{BH}$ i $\overrightarrow{AC}$. Iz propozicije 3.5 slijedi $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Želimo dokazati da su i vektori $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{BC}$ međusobno okomiti. Drugim riječima, želimo dokazati da vrijedi $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
Vektor $\overrightarrow{BC}$ zapišimo kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$. Time dobivamo $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. Budući da je $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, slijedi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Uvrštavanjem ove jednakosti u relaciju $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}.
\end{aligned}
$$

S obzirom na to da je $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ i $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, slijedi $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Budući da je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednak nuli, prema propoziciji 3.5 zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{BC}$ međusobno okomiti pa su onda okomiti i pravci AH i BC. Time smo dokazali da se sva tri pravca kojima pripadaju visine trokuta ABC sijeku u točki H koja se naziva ortocentar trokuta ABC.

2. način



Slika 6.5.

Dan je trokut ABC. Neka je točka S sjecište pravaca kojima pripadaju visine spuštene iz vrhova A i B na pravce kojima pripadaju njima nasuprotne stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC. Želimo dokazati da i pravac kojemu pripada visina spuštena iz vrha C na pravac na kojem leži stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC prolazi točkom S.
Neka su $\vec{x} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{SB}$ i $\vec{z} = \overrightarrow{SC}$. Prema pravilu trokuta za zbrajanje vektora vrijedi $\overrightarrow{BC} = \vec{z} - \vec{y}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{x} - \vec{z}$ i $\overrightarrow{AB} = \vec{y} - \vec{x}$. Budući da su pravci kojima pripadaju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ ujedno i pravci kojima pripadaju visine spuštene iz vrhova A i B, onda su spomenuti vektori okomiti na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ koje se nalaze nasuprot tim vrhovima trokuta ABC. Iz ovoga slijedi $\vec{x} \perp \overrightarrow{BC}$ i $\vec{y} \perp \overrightarrow{CA}$. Stoga, prema propoziciji 3.5 vrijedi $\vec{x} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ i $\vec{y} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Uvrštavanjem izraza $\overrightarrow{BC} = \vec{z} - \vec{y}$ u relaciju $\vec{x} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ dobivamo $\vec{x} \cdot (\vec{z} - \vec{y}) = 0$. Iz definicije suprotnog vektora i svojstva (2) danog u korolaru 3.4 slijedi

$$\vec{x} \cdot \vec{z} - \vec{x} \cdot \vec{y} = 0. \tag{6.15}$$

Analogno, uvrštavanjem izraza $\overrightarrow{CA} = \vec{x} - \vec{z}$ u relaciju $\vec{y} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ dobivamo $\vec{y} \cdot (\vec{x} - \vec{z}) = 0$, odnosno

$$\vec{y} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{z} = 0. \tag{6.16}$$

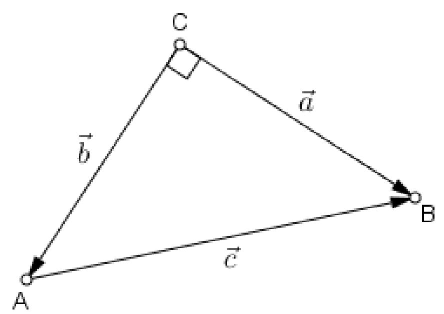
Zbrajanjem izraza (6.15) i (6.16) dobivamo $\vec{x} \cdot \vec{z} - \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$. Skalarno množenje vektora je komutativno pa vrijedi $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$. Iz toga slijedi da je $\vec{x} \cdot \vec{z} - \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$, odnosno $-\vec{z} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0$. Dijeljenjem ovog izraza s -1 dobivamo $\vec{z} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0$. Budući da je $\vec{z} = \overrightarrow{SC}$

i $\vec{y} - \vec{x} = \overrightarrow{AB}$, navedena jednakost je ekvivalentna sljedećoj $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. S obzirom na to da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{SC}$ i $\overrightarrow{AB}$ jednak nuli, prema propoziciji 3.5 zaključujemo da su navedeni vektori međusobno okomiti, odnosno da je pravac SC okomit na pravac AB. To povlači da visina iz vrha C trokuta ABC leži na pravcu SC, tj. da ona prolazi točkom S. Sada je jasno da se sva tri pravca kojima pripadaju visine trokuta ABC sijeku u točki S koju nazivamo ortocentar trokuta ABC. □

Sada ćemo iskazati i dokazati Pitagorin poučak kojeg učenici prvi put susretnu u 8. razredu osnovne škole. Poznato je da se Pitagorin poučak može dokazati na jako puno različitih načina pri čemu se primjenjuju razni pristupi dokazivanju i koriste najrazličitiji matematički aparati svojstveni određenim matematičkim disciplinama. Ovdje donosimo dva načina na koje je moguće dokazati Pitagorin poučak primjenom vektorske metode. Prvi način je preuzet iz knjige [14] autora Anđelka Marića, dok se drugi način može naći u knjizi [15] istog autora.

Teorem 6.6. (Pitagorin poučak) *Zbroj kvadrata duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze.*

Dokaz. 1. način



Slika 6.6.

Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Prema pravilu trokuta za zbrajanje vektora vrijedi $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, odnosno $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Skalarnim množenjem vektora $\vec{c}$ sa samim sobom dobivamo $\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, odnosno

$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2.$$

Primjenom svojstva (2) iz leme 3.3 na desnu stranu prethodne jednakosti dobivamo da je

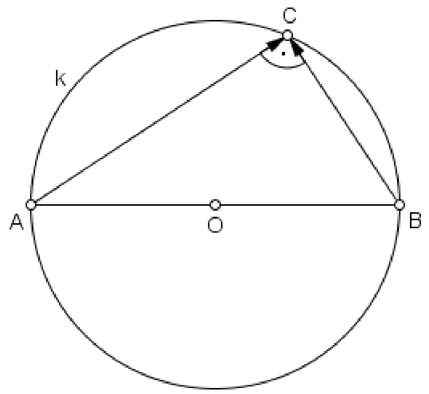
$$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} - 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$

Budući da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju pravi kut, onda su oni međusobno okomiti pa, prema propoziciji 3.5, vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Iz toga slijedi da je

$$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}.$$

S obzirom na to da je skalarni kvadrat vektora jednak kvadratu duljine tog vektora, vrijedi sljedeće: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$ i $\vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2$. Uzevši u obzir ovu činjenicu zaključujemo da vrijedi $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, odnosno $c^2 = a^2 + b^2$, a to smo i trebali dokazati.

2. način



Slika 6.7.

Neka je O polovište dužine $\overline{AB}$ te neka vrijedi $|AB| = c$. Skup svih točaka C za koje vrijedi da je trokut ABC pravokutan je kružnica k kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer. Dakako, iz tog skupa treba izbaciti točke A i B. Uočimo da vrijedi

$$|OA| = |OB| = |OC| = \frac{c}{2}.$$

Zapišimo vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{AO}$. Imamo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO}$$

i

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO}.$$

Neka je $a = |BC|$ i $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Tada je $a = |\vec{a}| = |\overrightarrow{BC}|$. Kvadriranjem ovog izraza dobivamo $a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 vrijedi $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2$. Iz toga slijedi da je

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2$. Uvrštavanjem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO}$ u ovu jednakost dobivamo $a^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO})^2$. Primjenom svojstva (2) iz leme 3.3 dobivamo

$$a^2 = \overrightarrow{OC}^2 - 2\,\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO}^2. \tag{6.17}$$

Neka je $b = |AC|$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Tada je $b = |\vec{b}| = |\overrightarrow{AC}|$. Analognim zaključivanjem kao i u prethodom razmatranju dobivamo da je $b^2 = \overrightarrow{AC}^2$. Uvrštavanjem $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO}$ u ovu jednakost dobivamo $b^2 = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO})^2$. Primjenom svojstva (1) iz leme 3.3 slijedi da je

$$b^2 = \overrightarrow{OC}^2 + 2\,\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO}^2. \tag{6.18}$$

Zbrajanjem izraza (6.17) i (6.18) dobivamo

$$a^2 + b^2 = 2\,\overrightarrow{OC}^2 + 2\,\overrightarrow{AO}^2 = 2\,(\overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{AO}^2) = 2\,(|OC|^2 + |AO|^2).$$

Budući da je $|OC| = |AO|$, slijedi

$$a^2 + b^2 = 4\,|OC|^2 = 4 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{c^2}{4} = c^2.$$

Dakle, zaključujemo da vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, a to smo i trebali dokazati. □

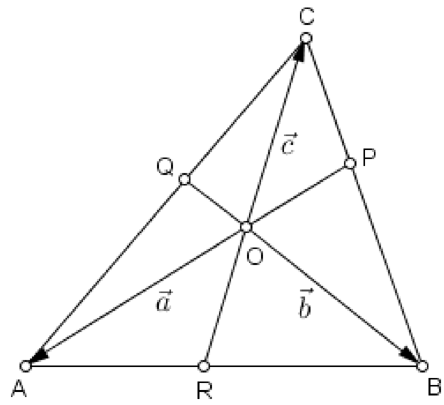
Sljedeći teorem je zapravo nepotupuna verzija dobro poznatog teorema elementarne geometrija kojeg je iskazao i dokazao talijanski matematičar Giovanni Ceva (1648.-1734.). Naime, potpuni iskaz tog teorema sadrži ekvivaleniju, tj. formulaciju *ako i samo ako* što znači da se tvrdnja treba dokazati u oba smjera. Ovdje ćemo koristeći vektorsku metodu dokazati tvrdnju koja je samo jedan smjer spomenutog Cevinog teorema. Dokaz koji navodimo nalazi se u [14] i [15].

Teorem 6.7. (Cevin poučak) *Neka su P, Q i R redom točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AP, BQ i CR sijeku se u jednoj točki ako vrijedi*

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1.$$

Dokaz. Neka se pravci AP, BQ i CR sijeku u točki O. Uvedimo oznake: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Tada postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}. \tag{6.19}$$



Slika 6.8.

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR} = -\vec{a} + r\overrightarrow{OC}$, pri čemu je $r \in \mathbb{R}$. Uvažavajući relaciju (6.19) slijedi da je $\overrightarrow{AR} = -\vec{a} + r(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$, odnosno

$$\overrightarrow{AR} = (r\alpha - 1)\vec{a} + r\beta\vec{b}. \tag{6.20}$$

Također, uočimo da vrijedi $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OB} = -r(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) + \vec{b}$, tj.

$$\overrightarrow{RB} = -r\alpha\vec{a} + (1 - r\beta)\vec{b}. \tag{6.21}$$

Budući da vektori $\overrightarrow{AR}$ i $\overrightarrow{RB}$ pripadaju pravcu AB, zaključujemo da su linearno zavisni. Stoga, postoji $m \in \mathbb{R}^+$ takav da je $\overrightarrow{RB} = m \cdot \overrightarrow{AR}$. Iz (6.20) i (6.21) slijedi

$$-r\alpha\vec{a} + (1 - r\beta)\vec{b} = m[(r\alpha - 1)\vec{a} + r\beta\vec{b}],$$

odnosno

$$-r\alpha = m(r\alpha - 1) \qquad \text{i} \qquad 1 - r\beta = mr\beta.$$

Možemo zamisliti da ove dvije jednadžbe čine sustav dviju linearnih jednadžbi s nepoznanicama r i m. Eliminacijom nepoznanice r dobivamo sljedeću jednadžbu

$$\alpha(m + 1) - m\beta(m + 1) = 0.$$

Kandidati za rješenje ove jednadžbe su $m = -1$ i $m = \frac{\alpha}{\beta}$. Budući da je $m \in \mathbb{R}^+$, $m = -1$ nije njezino rješenje. Stoga je jedino rješenje ove jednadžbe $m = \frac{\alpha}{\beta}$.

Neka je $n \in \mathbb{R}^+$ takav da je $\overrightarrow{PC} = n \cdot \overrightarrow{BP}$. Iz izraza (6.19) slijedi

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} + \frac{1}{\alpha}\vec{c}.$$

Iz relacije (6.19) i činjenice da je $m = \dfrac{\alpha}{\beta}$ kružnim zamjenama dobivamo da vrijedi

$$n = \frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} = -\beta.$$

Neka je $p \in \mathbb{R}^+$ takav da je $\overrightarrow{QA} = p \cdot \overrightarrow{CQ}$. Iz jednakosti (6.19) slijedi

$$\vec{b} = \frac{1}{\beta}\,\vec{c} - \frac{\alpha}{\beta}\,\vec{a}.$$

Ponovno, kružnim zamjenama, zbog (6.19) i $m = \dfrac{\alpha}{\beta}$, dobivamo

$$p = \frac{\frac{1}{\beta}}{-\frac{\alpha}{\beta}} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Iz $\overrightarrow{RB} = m \cdot \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{PC} = n \cdot \overrightarrow{BP}$ i $\overrightarrow{QA} = p \cdot \overrightarrow{CQ}$ slijedi

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}.$$

Budući da je $m = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $n = -\beta$ i $p = -\dfrac{1}{\alpha}$, zaključujemo da vrijedi

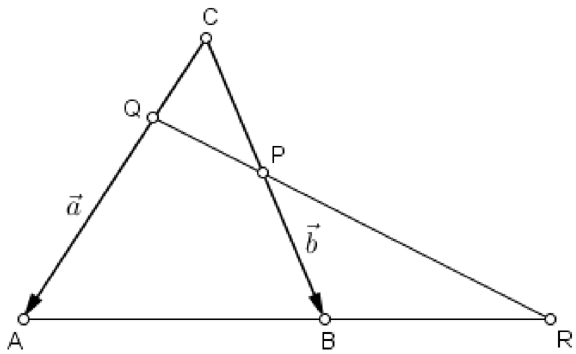
$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\beta}\right) \cdot (-\alpha) = 1,$$

a to smo i trebali dokazati. □

Slično kao i u slučaju Cevinog poučka, još jedan dobro poznati teorem elementarne geometrije koji u originalu sadrži ekvivalenciju, a pripisuje se starogrčkom matematičaru Menelaju Aleksandrijskom (70.-140.) ćemo iskazati samo u jednom smjeru te ćemo taj smjer dokazati primjenom vektorske metode. Dokaz donosi Marić u [14].

Teorem 6.8. (Menelajev poučak) *Ako bilo koji pravac siječe pravce kojima pripadaju stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom u točkama P, Q i R, onda vrijedi*

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{BR}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1. \tag{6.22}$$



Slika 6.9.

Dokaz. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Tada postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takvi da je $\overrightarrow{CQ} = \alpha\vec{a}$ i $\overrightarrow{CP} = \beta\vec{b}$. Uočimo da vrijedi

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CQ} = \vec{a} - \alpha\vec{a} = (1-\alpha)\vec{a} \tag{6.23}$$

i

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP} = \vec{b} - \beta\vec{b} = (1-\beta)\vec{b}.$$

Nadalje, očito je da vrijedi i $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ te

$$\overrightarrow{QP} = \beta\vec{b} - \alpha\vec{a}. \tag{6.24}$$

Budući da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AR}$ linearno zavisni, postoji $\lambda \in \mathbb{R}^+$ takav da je $\overrightarrow{AR} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, tj.

$$\overrightarrow{AR} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}). \tag{6.25}$$

Za vektor $\overrightarrow{BR}$ vrijedi

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)(\vec{b} - \vec{a}). \tag{6.26}$$

Za vektor $\overrightarrow{AR}$ vrijedi $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AQ} + \mu \cdot \overrightarrow{QP}$, pri čemu je $\mu \in \mathbb{R}^+$. Iz (6.23) i (6.24) slijedi $\overrightarrow{AR} = (\alpha - 1)\vec{a} + \mu(\beta\vec{b} - \alpha\vec{a})$, odnosno

$$\overrightarrow{AR} = (\alpha - 1 - \mu\alpha)\vec{a} + \mu\beta\vec{b}. \tag{6.27}$$

Izjednačavanjem jednakosti (6.25) i (6.27) dobivamo

$$-\lambda = \alpha - 1 - \mu\alpha \qquad \text{i} \qquad \lambda = \mu\beta.$$

Iz posljedenje jednakosti je jasno da vrijedi $\mu = \dfrac{\lambda}{\beta}$. Uvrštavanjem ove zamjene u jednakost $-\lambda = \alpha - 1 - \mu\alpha$ dobivamo da je

$$\lambda = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}. \tag{6.28}$$

Uvrstimo li (6.28) u (6.25) i (6.26), dobit ćemo

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}(\vec{b} - \vec{a})$$

i

$$\overrightarrow{BR} = \frac{\alpha(\beta - 1)}{\alpha - \beta}(\vec{b} - \vec{a}).$$

Iz definicije suprotnog vektora slijedi da je $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{CP} = -\beta\vec{b}$ i $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PB} = (\beta - 1)\vec{b}$. Uvrštavanjem dobivenih izraza za vektore $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BR}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CQ}$ i $\overrightarrow{QA}$ u relaciju (6.22) dobivamo

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{BR}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\dfrac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}}{\dfrac{\alpha(\beta - 1)}{\alpha - \beta}} \cdot \frac{\beta - 1}{-\beta} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 1,$$

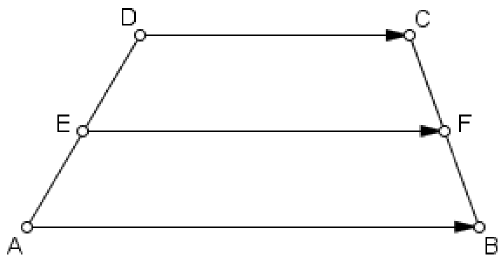
a to je uistinu tvrdnja ovog teorema. $\square$

Poglavlje 7

Teoremi o četverokutu i paralelepipedu

Ovo poglavlje sadrži nekoliko poznatih teorema o četverokutu i paralelopipedu koje ćemo ovdje dokazati koristeći vektorsku metodu.
Srednjica trapeza je dužina koja spaja polovišta njegovih krakova. Stoga, na početku ovog poglavlja donosimo teorem o srednjici trapeza kojeg ćemo dokazati primjenom vektorske metode na tri različita načina. Prvi i treći način nalazimo u [14] i [15], a mi još dodajemo i dokaz pomoću radijvektora.

Teorem 7.1. *Srednjica trapeza paralelna je s njegovim osnovicama, a duljina srednjice jednaka je polovini zbroja duljina osnovica.*



Slika 7.1.

Dokaz. 1. način

Dan je trapez $ABCD$. Neka je točka E polovište kraka $\overline{DA}$, a točka F polovište kraka $\overline{BC}$ tog trapeza. Tada je dužina $\overline{EF}$ srednjica trapeza $ABCD$. Uočimo da vektor $\overrightarrow{EF}$ možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BF}$. Dakle, vrijedi

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}. \tag{7.1}$$

Također, vektor $\overrightarrow{EF}$ možemo zapisati i kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{CF}$ pa imamo

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}. \tag{7.2}$$

Zbrajanjem jednakosti (7.1) i (7.2) dobivamo

$$2\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF},$$

odnosno

$$2\,\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}). \tag{7.3}$$

Vektori $\overrightarrow{EA}$ i $\overrightarrow{ED}$ su međusobno suprotni jer imaju jednaku duljinu i isti smjer, ali su suprotne orijentacije. Zbog toga vektori $\overrightarrow{EA}$ i $\overrightarrow{ED}$ u zbroju daju nulvektor.
Analogno zaključujemo za vektore $\overrightarrow{BF}$ i $\overrightarrow{CF}$. Iz toga slijedi da je jednakost (7.3) ekvivalentna jednakosti $2\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, odnosno

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}). \tag{7.4}$$

Budući da su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ vektori osnovica trapeza $ABCD$, oni su očito kolinearni jer pripadaju paralelnim pravcima. Iz (7.4) je, stoga, jasno da je vektor $\overrightarrow{EF}$ kolinearan sa svakim od njih. Drugim riječima, vrijedi $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ i $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$. Također, iz (7.4) očito slijedi

$$|EF| = \frac{1}{2}\,(|AB| + |DC|),$$

a to smo i trebali dokazati.

<u>2. način</u>
Dan je trapez $ABCD$. Neka su E i F redom polovišta njegovih krakova $\overline{DA}$ i $\overline{BC}$. Tada, prema korolaru 2.4, vrijedi

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A}}{2} \tag{7.5}$$

i

$$\overrightarrow{r_F} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2}. \tag{7.6}$$

Znamo da vrijedi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{r_F} - \overrightarrow{r_E}$. Uvrštavanjem izraza (7.5) i (7.6) u ovu jednakost dobivamo

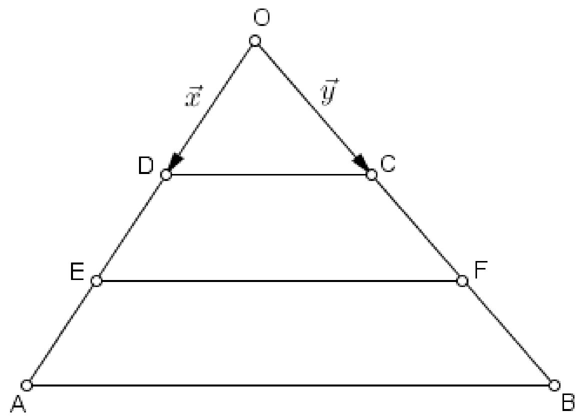
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2} - \frac{\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A}}{2}\\ &= \frac{(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}) + (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_D})}{2}\\ &= \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).\end{aligned}$$

S obzirom na to da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ kolinearni, iz posljednje jednakosti zaključujemo da je i vektor $\overrightarrow{EF}$ kolinearan sa svakim od njih. To povlači da je $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ i $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$. Drugim riječima, srednjica $\overline{EF}$ trapeza $ABCD$ je paralelna s njegovim osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$. Uz to, iz posljednje jednakosti je jasno da vrijedi

$$|EF| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |DC|\right)$$

pa smo time dokazali tvrdnju ovog teorema.

<u>3. način</u>



Slika 7.2.

Dan je trapez $ABCD$. Neka se pravci BC i AD sijeku u točki O te neka su točke E i F redom polovišta krakova $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ trapeza $ABCD$. Uvedimo oznake: $\vec{x} = \overrightarrow{OD}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{OC}$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA} = \alpha\vec{x}$ i $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} = \alpha\vec{y}$. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{x} + \alpha\vec{x} + \alpha\vec{x} = (1 + 2\alpha)\vec{x},\\
\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \vec{y} + \alpha\vec{y} + \alpha\vec{y} = (1 + 2\alpha)\vec{y},\\
\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \vec{x} + \alpha\vec{x} = (1 + \alpha)\vec{x},\\
\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \vec{y} + \alpha\vec{y} = (1 + \alpha)\vec{y}.
\end{aligned}$$

Prikažimo sada vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{EF}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(1 + 2\alpha)\vec{x} + (1 + 2\alpha)\vec{y}, \tag{7.7}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = -\vec{x} + \vec{y} \tag{7.8}$$

i

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = -(1+\alpha)\vec{x} + (1+\alpha)\vec{y}. \tag{7.9}$$

Zbrajanjem jednakosti (7.7) i (7.8) dobivamo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = [-(1+2\alpha)\vec{x} + (1+2\alpha)\vec{y}] + (-\vec{x} + \vec{y}),$$

odnosno

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = -2(1+\alpha)\,\vec{x} + 2(1+\alpha)\vec{y}. \tag{7.10}$$

Iz (7.9) i (7.10) je sada jasno da vrijedi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{EF}$, odnosno

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

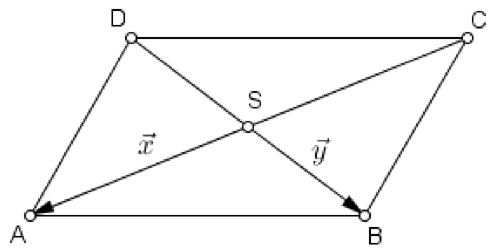
Budući da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ linearno zavisni, onda je svaki od njih linearno zavisan i s vektorom $\overrightarrow{EF}$. To znači da vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{EF}$ pripadaju paralelnim pravcima AB, DC i EF. Iz toga slijedi da je srednjica $\overline{EF}$ trapeza $ABCD$ paralelna s njegovim osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$. Dakako, iz posljednje jednakosti očito slijedi da je

$$|EF| = \frac{1}{2}\,(|AB| + |DC|),$$

a time je uistinu dokazana tvrdnja ovog teorema. □

Sljedeći teorem ćemo dokazati vektorskom metodom na tri načina. Prva dva načina nalazimo u [14], a mi još dodajemo dokaz pomoću radijvektora.

Teorem 7.2. *Dijagonale paralelograma se raspolavljaju.*



Slika 7.3.

Dokaz. <u>1. način</u>
Dan je paralelogram $ABCD$. Neka je S polovište dijagonale $\overline{AC}$. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{CS}. \tag{7.11}$$

Budući da nasuprotne stranice paralelograma pripadaju paralelnim pravcima te imaju jednake duljine, zaključujemo da vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}. \tag{7.12}$$

Zbrajanjem jednakosti (7.11) i (7.12) dobivamo $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}$. Primijetimo da se na obje strane ove jednakosti javlja zbroj dvaju ulančanih vektora pa je ovaj izraz ekvivalentan sljedećem

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DS}.$$

Iz toga zaključujemo da je točka S jednako udaljena od točaka B i D pa je onda S polovište dijagonale $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$. Budući da obje dijagonale paralelograma $ABCD$ imaju isto polovište S, slijedi tvrdnja teorema.

2. način

Dan je paralelogram $ABCD$. Neka je S sjecište njegovih dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Uvedimo oznake: $\vec{x} = \overrightarrow{SA}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{SB}$. Tada postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ takvi da je $\overrightarrow{SC} = \alpha\vec{x}$ i $\overrightarrow{SD} = \beta\vec{y}$. Želimo dokazati da je $\alpha = \beta = -1$ jer su vektori $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SC}$, odnosno $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SD}$ istog smjera i jednake duljine, ali suprotne orijentacije. Uočimo da vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = -\vec{x} + \vec{y} \tag{7.13}$$

i

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}. \tag{7.14}$$

Budući da su $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ nasuprotne stranice paralelograma, vrijedi $|AB| = |DC|$, odnosno $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Stoga možemo izjednačiti relacije (7.13) i (7.14). Time dobivamo

$$-\vec{x} + \vec{y} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{y},$$

odnosno

$$(\alpha + 1)\vec{x} = (\beta + 1)\vec{y}.$$

Budući da su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni, posljednja jednakost je zadovoljena samo ako vrijedi $\alpha + 1 = 0$ i $\beta + 1 = 0$, odnosno $\alpha = -1$ i $\beta = -1$, a to smo i trebali dokazati.

3. način

Neka je S polovište dijagonale $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$. Tada, prema korolaru 2.4, vrijedi

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2}. \tag{7.15}$$

Iz $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}$ slijedi da je

$$\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{r_B}. \tag{7.16}$$

Također, vrijedi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_D}$ pa je

$$\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{r_D}. \tag{7.17}$$

Uvrštavanjem izraza (7.16) i (7.17) u jednakost (7.15) dobivamo

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{r_D}}{2}.$$

Budući da su $\overline{BA}$ i $\overline{DC}$ nasuprotne stranice paralelograma $ABCD$, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{DC}$ istog smjera i jednake duljine, ali suprotne orijentacije. Stoga, oni u zbroju daju nulvektor. Dakle, vrijedi $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. Iz toga slijedi da je

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2}.$$

Neka je T polovište dijagonale $\overline{BD}$ paralelograma $ABCD$. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2}.$$

Uočimo da smo dobili $\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{r_S}$. Iz toga slijedi da je $T \equiv S$. To povlači da se dijagonale paralelograma $ABCD$ sijeku u istoj točki, preciznije u zajedničkom polovištu pa zaključujemo da se one raspolavljaju. □

Primjenjujući posljednju metodu dokazivanja (pomoću radijvektora) pokazat ćemo da vrijedi i stereometrijski analogon prethodnog teorema.

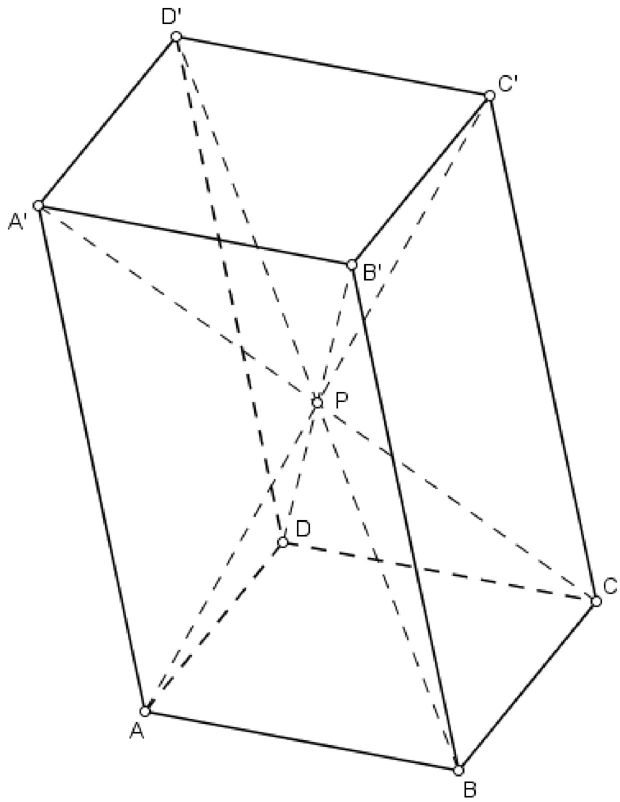
Teorem 7.3. *U paralelepipedu se prostorne dijagonale raspolavljaju.*

Dokaz. Zadan je paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$. Njegove prostorne dijagonale su: $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$ i $\overline{DB'}$. Neka je T polovište prostorne dijagonale $\overline{BD'}$. Tada je

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_{D'}}}{2}.$$

Neka je S polovište prostorne dijagonale $\overline{AC'}$. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{C'}}}{2}. \tag{7.18}$$



Slika 7.4.

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}$, tj.

$$\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{r_B}. \tag{7.19}$$

Također, vrijedi i $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{r_{C'}} - \overrightarrow{r_{D'}}$, odnosno

$$\overrightarrow{r_{C'}} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{r_{D'}}. \tag{7.20}$$

Uvrštavanjem izraza (7.19) i (7.20) u jednakost (7.18) dobivamo

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{r_{D'}}}{2}.$$

Budući da su $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{D'C'}$ vektori istog smjera i jednake duljine, ali suprotne orijentacije, oni u zbroju daju nulvektor. Dakle, vrijedi $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'C'} = \vec{0}$ pa je

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_{D'}}}{2}.$$

Uočimo da je $\overrightarrow{r_S} = \overrightarrow{r_T}$ pa zaključujemo da vrijedi $S \equiv T$. Neka je U polovište prostorne dijagonale $\overline{CA'}$. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{r_U} = \frac{\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_{A'}}}{2}. \tag{7.21}$$

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}$, tj.

$$\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{r_A}. \tag{7.22}$$

Također, uočimo da je $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{r_{A'}} - \overrightarrow{r_{C'}}$, odnosno

$$\overrightarrow{r_{A'}} = \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{r_{C'}}. \tag{7.23}$$

Uvrštavanjem izraza (7.22) i (7.23) u jednakost (7.21) dobivamo

$$\overrightarrow{r_U} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{r_{C'}}}{2}.$$

Budući da su $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{C'A'}$ vektori istog smjera i jednake duljine, ali suprotne orijentacije, oni u zbroju daju nulvektor. Dakle, vrijedi $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \vec{0}$ pa je

$$\overrightarrow{r_U} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{C'}}}{2}.$$

Uočimo da je $\overrightarrow{r_U} = \overrightarrow{r_S}$ pa zaključujemo da vrijedi $U \equiv S$. Neka je V polovište prostorne dijagonale $\overline{DB'}$. Tada vrijedi

$$\overrightarrow{r_V} = \frac{\overrightarrow{r_{B'}} + \overrightarrow{r_D}}{2}. \tag{7.24}$$

Budući da je $\overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{r_{B'}} - \overrightarrow{r_{D'}}$, onda je

$$\overrightarrow{r_{B'}} = \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{r_{D'}}. \tag{7.25}$$

Također, iz $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}$ slijedi da je

$$\overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{r_B}. \tag{7.26}$$

Uvrštavanjem jednakosti (7.25) i (7.26) u relaciju (7.24) dobivamo

$$\overrightarrow{r_V} = \frac{\overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{r_{D'}} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{r_B}}{2}.$$

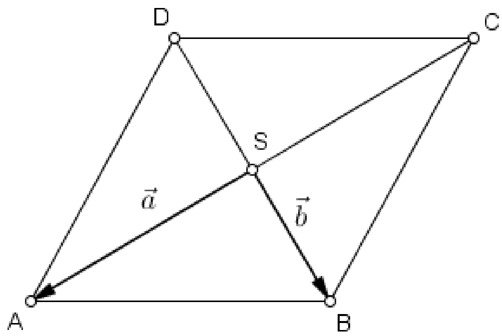
Budući da su $\overrightarrow{D'B'}$ i $\overrightarrow{BD}$ vektori istog smjera i jednake duljine, ali suprotne orijentacije, oni u zbroju daju nulvektor. Drugim riječima, vrijedi $\overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$. Stoga je

$$\overrightarrow{r_V} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_{D'}}}{2}.$$

Uočimo da je $\overrightarrow{r_V} = \overrightarrow{r_T}$ pa zaključujemo da vrijedi $V \equiv T$. Dobili smo da je $U \equiv S$ i $V \equiv T$ te da je $S \equiv T$. Iz toga slijedi da je $S \equiv T \equiv U \equiv V$. Dakle, zaključujemo da sve četiri prostorne dijagonale paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$ imaju isto polovište, a to znači da se raspolavljaju. Zajedničko polovište prostornih dijagonala paralelepipeda $ABCDA'B'C'D'$ možemo označiti s P. □

Teorem 7.4. [14] [15] *Dijagonale romba su međusobno okomite.*

Dokaz. 1. način



Slika 7.5.

Zadan je romb $ABCD$. Neka je S sjecište njegovih dijagonala. Označimo s $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$. Prikažimo vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

i

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Budući da je $|AB| = |CB|$, onda vrijedi $|AB|^2 = |CB|^2$, tj. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CB}|^2$. Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 slijedi da je $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CB}^2$. Drugim riječima, vrijedi

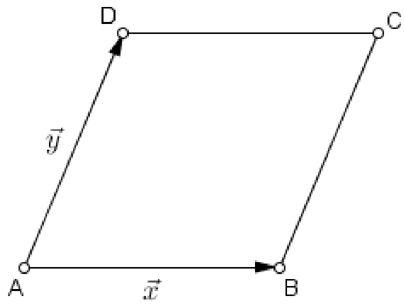
$$(-\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2.$$

Kvadriranjem lijeve i desne strane prethodnog izraza te dodatnim sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\vec{a}^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 &= \vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2\\ -2\,\vec{a}\cdot\vec{b} &= 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}\\ 4\,\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0.\end{aligned}$$

Budući da je skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak nuli, zaključujemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno okomiti. To povlači da su i dužine $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$ međusobno okomite pa su onda okomite i dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$ romba $ABCD$ čime je tvrdnja teorema dokazana.

2. način



Slika 7.6.

Dan je romb $ABCD$. Neka je $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$. Budući da su sve stranice romba jednakih duljina, vrijedi $|AB| = |AD|$, odnosno $|\vec{x}| = |\vec{y}|$. Zapišimo vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Imamo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}$$

i

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{x} - \vec{y}.$$

Skalarnim množenjem vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$ dobivamo

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = (\vec{x} + \vec{y})\cdot(\vec{x} - \vec{y}).$$

Primijetimo da se na desnoj strani posljednje jednakosti javlja razlika kvadrata. Stoga, desnu stranu ove jednakosti možemo zapisati na sljedeći način

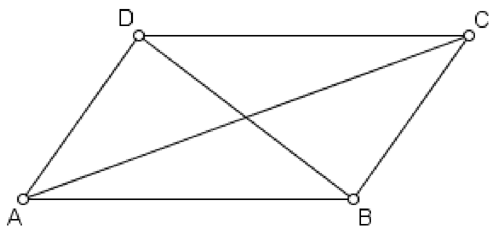
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \vec{x}^2 - \vec{y}^2.$$

Budući da vrijedi $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$ i $\vec{y}^2 = |\vec{y}|^2$, slijedi

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2.$$

Uzevši u obzir činjenicu da je $|\vec{x}| = |\vec{y}|$, zaključujemo da vrijedi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Budući da je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$ jednak nuli, prema propoziciji 3.5 zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$ međusobno okomiti pa su onda okomite i dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$ romba $ABCD$ što smo i trebali dokazati. □

Teorem 7.5. [14] [15] (Euklidov poučak za paralelogram) *Zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina njegovih stranica.*



Slika 7.7.

Dokaz. Dan je paralelogram $ABCD$. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$ su dijagonale tog paralelograma. Zapišimo vektor $\overrightarrow{AC}$ kao zbroj ulančanih vekotra $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. Imamo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Prikažimo sada vektor $\overrightarrow{DB}$ kao zbroj ulančanih vekotra $\overrightarrow{DA}$ i $\overrightarrow{AB}$. Dobivamo $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$. S obzirom na to da vrijedi $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, slijedi da je

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}. \tag{7.27}$$

Budući da vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ imaju isti smjer (jer pripadaju paralelnim pravcima na kojima leže nasuprotne stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$) i orijentaciju te vrijedi $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednaki pa izraz (7.27) možemo zapisati na sljedeći način

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.$$

Promotrimo sada zbroj kvadrata duljina dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$ paralelograma $ABCD$. Imamo

$$\begin{aligned} |AC|^2 + |DB|^2 &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})^2 \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 \\ &= 2\,\overrightarrow{AB}^2 + 2\,\overrightarrow{BC}^2. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$|AC|^2 + |DB|^2 = 2\,(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2). \tag{7.28}$$

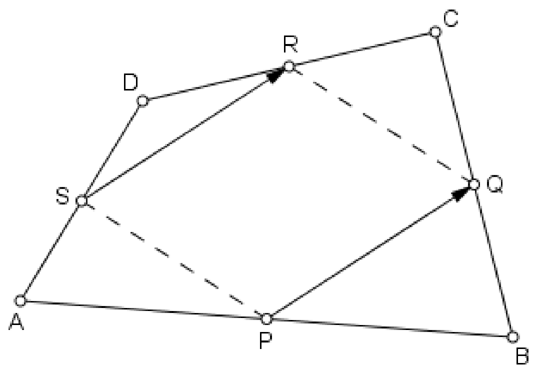
Kako je skalarni kvadrat nekog vektora jednak kvadratu duljine tog vektora, a duljina vektora duljini dužine kojoj su krajnje točke početak i kraj tog vektora, onda vrijedi $\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2$, $\overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2$, $\overrightarrow{AB}^2 = |AB|^2$ i $\overrightarrow{BC}^2 = |BC|^2$. Imajući na umu ovu činjenicu, jednakost (7.28) možemo zapisati na sljedeći način

$$|AC|^2 + |DB|^2 = 2\,(|AB|^2 + |BC|^2),$$

a to smo i trebali dokazati. □

Sljedeći primjer ćemo riješiti na dva načina. Prvi način donosi Čeliković u članku [5], dok se drugi način nalazi u skripti [6] istog autora.

Primjer 7.6. *Točke P, Q, R i S su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Dokažite da je četverokut $PQRS$ paralelogram.*



Slika 7.8.

Rješenje. <u>1. način</u>

Dovoljno je dokazati da je $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ jer su tada vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{SR}$ jednakih duljina te pripadaju paralelnim pravcima.

Budući da su P i Q polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, prema korolaru 2.4 vrijedi $\overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B})$ i $\overrightarrow{r_Q} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$. Stoga je

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

S obzirom na to da su R i S polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ četerokuta $ABCD$, prema korolaru 2.4 vrijedi $\overrightarrow{r_R} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})$ i $\overrightarrow{r_S} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A})$ pa je

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{r_R} - \overrightarrow{r_S} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Budući da zaista vrijedi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, zaključujemo da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

2. način

Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Tada vrijedi

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}. \tag{7.29}$$

Uočimo da vrijedi

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

i

$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$

Zbrajanjem vektora $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$ dobivamo

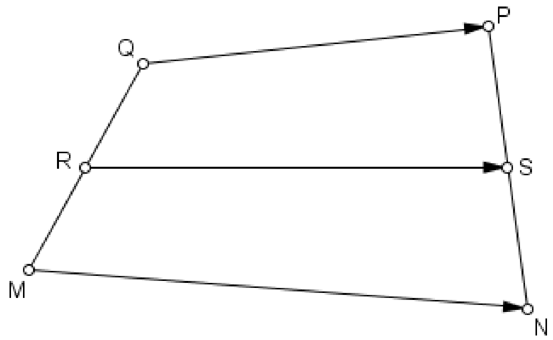
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}).$$

Zbog (7.29) slijedi da je $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$. To povlači da je $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$, odnosno $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Budući da su vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{SR}$ jednaki, to povlači da imaju jednake duljine i isti smjer, tj. da pripadaju paralelnim pravcima. Iz toga slijedi da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

Teorem 7.7. [13] *Neka su točke E i F polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$. Tada su polovišta dijagonala četverokuta $AEFD$ i $BCFE$ vrhovi nekog paralelograma.*

Prije nego dokažemo ovaj teorem, dokažimo sljedeću lemu.

Lema 7.8. [13] *Ako su R i S polovišta stranica $\overline{NP}$ i $\overline{QM}$ konveksnog četverokuta $MNPQ$, onda je* $2\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$.



Slika 7.9.

Dokaz. Sa slike 7.9. je jasno da vrijedi

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} \tag{7.30}$$

i

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NS}. \tag{7.31}$$

Zbrajanjem jednakosti (7.30) i (7.31) dobivamo

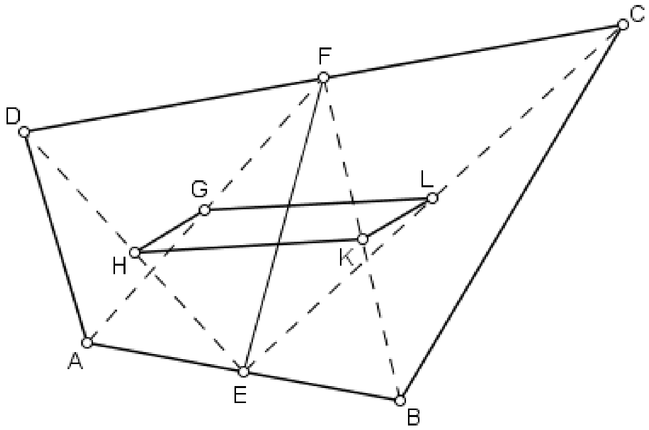
$$2\overrightarrow{RS} = (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RM}) + (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{NS}). \tag{7.32}$$

Vektori $\overrightarrow{RQ}$ i $\overrightarrow{RM}$ imaju isti smjer (jer pripadaju istom pravcu) i jednake duljine, ali su suprotne orijentacije. Stoga, vrijedi $\overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{RM}$ pa je $\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{RM} = \vec{0}$. Analogno zaključujemo za vektore $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{NS}$. Dakle, vrijedi $\overrightarrow{PS} = -\overrightarrow{NS}$ pa je $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{NS} = \vec{0}$. Iz toga slijedi da je jednakost (7.32) ekvivalentna sljedećoj

$$2\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MN},$$

a to smo i trebali dokazati. □

Dokažimo sada prethodno iskazani teorem 7.7.



Slika 7.10.

Dokaz. Dan je konveksni četverokut $ABCD$ te polovišta E i F njegovih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka su G i H redom polovišta dijagonala $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$ četverokuta $AEFD$ te K i L redom polovišta dijagonala $\overline{BF}$ i $\overline{EC}$ četverokuta $BCFE$.
Promotrimo konveksni četverokut $AECF$. Prema lemi 7.8 vrijedi

$$2\,\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC}. \tag{7.33}$$

Promotrimo sada konveksni četverokut $DEBF$. Primjenom leme 7.8 na taj četverokut dobivamo

$$2\,\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DF}.$$

Budući da je $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FC}$, slijedi

$$2\,\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC}. \tag{7.34}$$

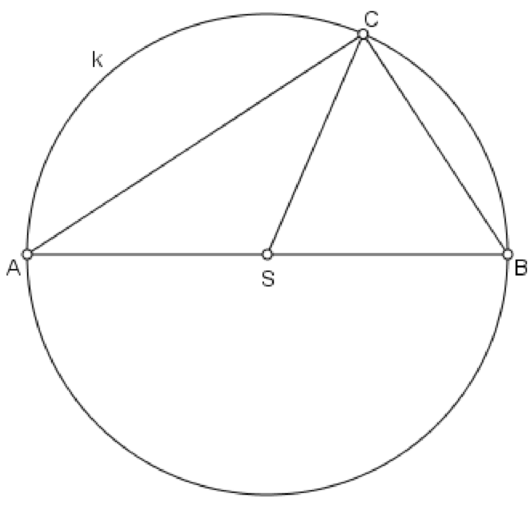
S obzirom da su desne strane jednakosti (7.33) i (7.34) jednake, onda su im očito jednake i lijeve strane. Dakle, vrijedi $2\,\overrightarrow{GL} = 2\,\overrightarrow{HK}$, odnosno $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{HK}$.
Budući da su vektori $\overrightarrow{GL}$ i $\overrightarrow{HK}$ jednaki, to znači da pripadaju paralelnim pravcima te da imaju jednake duljine. Iz toga zaključujemo da su dužine $\overline{GL}$ i $\overline{HK}$ zapravo stranice paralelograma. Dakle, četverokut $GHKL$ je paralelogram. □

Poglavlje 8

Teoremi o kružnici i sferi

U ovom poglavlju ćemo vektorskom metodom dokazati dvije tvrdnje vezane uz kružnicu i jednu tvrdnju koja se odnosi na sferu.

Teorem 8.1. [14] (Talesov poučak o obodnom kutu) *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*



Slika 8.1.

Dokaz. Neka je dana kružnica k polumjera duljine r sa središtem u točki S te neka je toj kružnici upisan trokut ABC tako da točka S pripada stranici $\overline{AB}$ tog trokuta. Tada je očito da je dužina $\overline{AB}$ promjer kružnice k. Stoga je kut pri vrhu C trokuta ABC obodni kut nad promjerom $\overline{AB}$ kružnice k. Želimo dokazati da je kut što ga zatvaraju stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$

trokuta ABC pravi. Drugim riječima, želimo dokazati da je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ jednak nuli.
Budući da su dužine $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ i $\overline{SC}$ polumjeri kružnice k, vrijedi

$$|SA| = |SB| = |SC| = r.$$

Vektor $\overrightarrow{CA}$ možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{SA}$ pa imamo $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA}$.
Vektor $\overrightarrow{CB}$ možemo zapisati kao zboj ulančanih vektora $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{SB}$ pa imamo $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB}$.
Budući da je $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{SA}$, slijedi $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{SA}$.
Izračunajmo sada skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$. Imamo

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA}) \cdot (\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{CS}^2 - \overrightarrow{SA}^2 = |CS|^2 - |SA|^2 = r^2 - r^2 = 0.$$

Budući da je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ jednak nuli, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ međusobno okomiti, tj. da zatvaraju pravi kut. To povlači da stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC zatvaraju pravi kut, odnosno da je obodni kut pri vrhu C nad promjerom $\overline{AB}$ kružnice k pravi, a to smo i trebali dokazati. □

Sljedeći zadatak je zadan učenicima 8. razreda osnovne škole na Županijskom natjecanju iz matematike održanom 2006. godine. Budući da se učenici 8. razreda osnovne škole do tada još nisu susreli sa skalarnim množenjem vektora, službeno rješenje ovog zadatka je bilo planimetrijsko i to primjenom Talesovog i Pitagorinog poučka. Ovdje ćemo pokazati kako se ovaj zadatak može riješiti vektorskom metodom primjenom skalarnog produkta.

Primjer 8.2. [12] (Županijsko natjecanje, 2006., 8. razred osnovne škole) *Zadan je kvadrat $ABCD$ kojem je opisana kružnica k. Na manjem od dva luka kružnice, određenih točkama A i B, dana je proizvoljna točka P, različita od A i B. Dokažite da vrijedi jednakost*

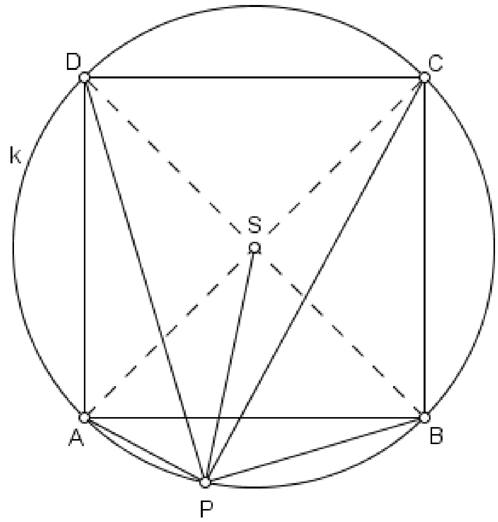
$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4|AB|^2.$$

Rješenje. Neka je S sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$, tj. središte kvadratu opisane kružnice k. Neka je α kut što ga zatvaraju vektori $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SA}$. Tada je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SA}$ jednak

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} = |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SA}| \cdot \cos\alpha. \tag{8.1}$$

Budući da su $\overline{PS}$ i $\overline{SA}$ polumjeri kružnice k, očito vrijedi $|PS| = |SA| = r$, pri čemu je r duljina polumjera kružnice k. Iz toga slijedi da je $|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{SA}| = r$. Izraz 8.1 sada možemo zapisati na sljedeći način: $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} = r \cdot r \cdot \cos\alpha$, odnosno

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} = r^2 \cos\alpha. \tag{8.2}$$



Slika 8.2.

Neka je γ kut što ga zatvaraju vektori $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SC}$. Tada je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SC}$ jednak

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SC} = |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SC}| \cdot \cos\gamma. \tag{8.3}$$

Budući da su $\overline{PS}$ i $\overline{SC}$ polumjeri kružnice k, jasno je da vrijedi $|PS| = |SC| = r$, odnosno $|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{SC}| = r$. Jednakost 8.3 sada možemo prevesti u oblik $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SC} = r \cdot r \cdot \cos\gamma$, odnosno

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SC} = r^2 \cos\gamma. \tag{8.4}$$

Točka S pripada dijagonali $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$. Štoviše, ona je njezino polovište. Stoga, zaključujemo da je $\sphericalangle ASC$ ispruženi kut, tj. da je njegova veličina iznosi 180°. Uočimo da vrijedi $\sphericalangle ASP + \sphericalangle PSC = \sphericalangle ASC$, odnosno $\alpha + \gamma = 180°$ pa je $\alpha = 180° - \gamma$. Iz toga slijedi da je $\cos\alpha = \cos(180° - \gamma)$, odnosno

$$\cos\alpha = -\cos\gamma. \tag{8.5}$$

Uvažavajući činjenicu (8.5), izraz (8.2) možemo zapisati na sljedeći način

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} = -r^2 \cos\gamma. \tag{8.6}$$

Zbrajanjem jednakosti (8.6) i (8.4) dobivamo da vrijedi

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SC} = -r^2 \cos\gamma + r^2 \cos\gamma,$$

odnosno

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SC} = 0. \tag{8.7}$$

Neka je β kut što ga zatvaraju vektori $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SB}$, a δ kut što ga zatvaraju vektori $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SD}$. Tada vrijedi $\beta + \delta = 180^\circ$, odnosno $\delta = 180^\circ - \beta$ pa je $\cos\delta = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$. Analogno kao u prethodnim razmatranjima dobije se da vrijedi $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SB} = r^2 \cos\beta$ i $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SD} = -r^2 \cos\beta$ pa je

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SD} = r^2 \cos\beta - r^2 \cos\beta,$$

odnosno

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SD} = 0. \tag{8.8}$$

Uočimo da vektor $\overrightarrow{PA}$ možemo zapisati kao zbroj ulančanih vektora $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SA}$. Dakle, imamo $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA}$. Kvadriranjem ovog izraza dobivamo

$$\overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{PS}^2 + 2\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA}^2,$$

odnosno

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 + 2|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SA}| + |\overrightarrow{SA}|^2. \tag{8.9}$$

Analogno, iz $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SB}$ dobivamo

$$|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 + 2|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SB}| + |\overrightarrow{SB}|^2. \tag{8.10}$$

Iz $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SC}$ slijedi

$$|\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 + 2|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SC}| + |\overrightarrow{SC}|^2, \tag{8.11}$$

dok iz $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SD}$ slijedi

$$|\overrightarrow{PD}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 + 2|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SD}| + |\overrightarrow{SD}|^2. \tag{8.12}$$

Također, jasno je da vrijedi

$$|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{SD}| = r.$$

Zbrajanjem jednakosti (8.9), (8.10), (8.11) i (8.12) dobivamo

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 &= 4|\overrightarrow{PS}|^2 + 2\,(|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SA}| + |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SB}| + |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SC}| \\
&\quad + |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SD}|) + 4|\overrightarrow{SA}|^2 \\
&= 4|\overrightarrow{PS}|^2 + 2\,(|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SA}| + |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SC}|) + 2\,(|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \\
&\quad + |\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SD}|) + 4|\overrightarrow{SA}|^2
\end{aligned}$$

Iz (8.7) i (8.8) slijedi da je

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 4\,|\overrightarrow{PS}|^2 + 4\,|\overrightarrow{SA}|^2.$$

Iz činjenice $|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{SA}| = r$, slijedi

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 4\,r^2 + 4\,r^2 = 8\,r^2.$$

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$. Budući da dijagonale kvadrata zatvaraju pravi kut, zaključujemo da je trokut BSA pravokutan s pravim kutom pri vrhu S. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut BSA dobivamo da je $a^2 = 2\,r^2$. Iz toga slijedi

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 8\,r^2 = 8 \cdot \frac{a^2}{2} = 4\,a^2,$$

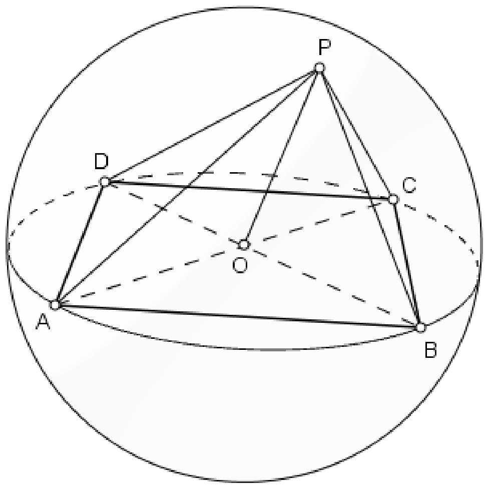
odnosno

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4\,|AB|^2,$$

a to smo i trebali dokazati.

Za kraj donosimo zadatak u kojem ćemo tvrdnju vezanu uz sferu dokazati vektorskom metodom.

Primjer 8.3. [15] *U glavnu kružnicu sfere polumjera R upisan je pravokutnik. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti bilo koje točke sfere od vrhova pravokutnika stalan, tj. ne zavisi o izboru točke na sferi.*



Slika 8.3.

Rješenje. Neka je O središte sfere polumjera R te neka je u bilo koju njenu glavnu kružnicu upisan pravokutnik $ABCD$. Neka je P proizvoljna točka na sferi. Tada očito vrijedi

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = |OP| = R.$$

Uočimo da vrijedi $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$. S obzirom na to da je pravokutnik $ABCD$ upisan u glavnu kružnicu sfere, zaključujemo je točka O ujedno i sjecište dijagonala tog pravokutnika. Budući da se dijagonale pravokutnika raspolavljaju, možemo zaključiti da vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ imaju jednake duljine i isti smjer, ali suprotnu orijentaciju pa vrijedi $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$. Iz toga slijedi da je $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}$.
Prema svojstvu *(i)* iz propozicije 3.2 vrijedi $|PA|^2 = \overrightarrow{PA}^2$ i $|PC|^2 = \overrightarrow{PC}^2$. Odredimo zbroj $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2$. Imamo

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA})^2.$$

Primjenom svojstava dokazanih u lemi 3.3 dobivamo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 &= \overrightarrow{PO}^2 + 2\,\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{PO}^2 - 2\,\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 \\ &= 2\,(\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2) = 2\,(|PO|^2 + |OA|^2) = 2\,(R^2 + R^2) = 4\,R^2.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$|PA|^2 + |PC|^2 = 4\,R^2. \tag{8.13}$$

Analogno se pokaže da vrijedi

$$|PB|^2 + |PD|^2 = 4\,R^2. \tag{8.14}$$

Zbrajanjem jednakosti (8.13) i (8.14) dobivamo da je

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4\,R^2 + 4\,R^2 = 8\,R^2.$$

Uočimo da je dobiveni rezultat konstanta. Iz toga zaključujemo da je zbroj kvadrata duljina bilo koje točke sfere od vrhova pravokutnika upisanog u njezinu glavnu kružnicu stalan, tj. on ne ovisi o odabiru točke na sferi.

Bibliografija

[1] M. Balagović, Ž. Hanjš, M. Krnić, *Matematička natjecanja 2005./2006.*, Element i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2007.

[2] M. Bombardelli, I. Brnetić, S. Varošanec, *Matematička natjecanja 1999./2000.*, Element i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2001.

[3] M. Bombardelli, Ž. Hanjš, S. Varošanec, *Matematička natjecanja 1995./96.*, Element i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1997.

[4] M. Bombardelli, Ž. Milin Šipuš, *Analitička geometrija*, skripta za istoimeni kolegij koji se izvodio na Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u akademskoj godini 2016./2017.

[5] L. Čeliković, *Primjena radijus-vektora i koordinatne metode u planimetriji*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 10 (ur: Z. Kurnik i S. Varošanec), Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2001, 12-25.

[6] L. Čeliković, *Vektori (skripta)*, Društvo mladih matematičara „Pitagora" Beli Manastir, Beli Manastir, 1986.

[7] A. Čižmešija, *Primjena skalarnog množenja u rješavanju planimetrijskih zadataka*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 5 (ur: Z. Kurnik i S. Varošanec), Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996, 45-62.

[8] A. Čižmešija, *Računanje površina primjenom vektorskog produkta*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 6 (ur: Z. Kurnik i S. Varošanec), Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1997, 36-52.

[9] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 - udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2005.

[10] V. Devidé, *Riješeni zadaci iz više matematike s kratkim repetitorijem definicija i teorema*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[11] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[12] Z. Kurnik (urednik), *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj 1992.-2006.*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2007.

[13] A. Marić, *Četverokut: definicije, poučci, formule, primjeri, zadatci*, Element, Zagreb, 2006.

[14] A. Marić, *Poučci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 2001.

[15] A. Marić, *Vektori*, Element, Zagreb, 2002.

[16] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom radu opisujemo vektorsku metodu te pomoću nje dokazujemo mnoge dobro poznate planimetrijske i stereometrijske probleme. Rad je podijeljen na osam poglavlja.
U prvom poglavlju donosimo pregled osnovnih definicija i tvrdnji vezanih uz vektore i vektorski račun.
U drugom poglavlju definiramo radijvektor točke u ravnini i prostoru te dokazujemo geometrijske tvrdnje koristeći radijvektore.
U trećem, četvrtom i petom poglavlju definiramo operacije skalarnog, vektorskog i mješovitog množenja, dokazujemo njihova bitna svojstva te iskazujemo neke posljedice tih svojstava. Primjenom definicija i svojstava ovih operacija dokazujemo mnoge tvrdnje iz elementarne geometrije.
Posljednja tri poglavlja su posvećena primjeni vektorske metode na trokut, četverokut i kružnicu te tetraedar, paralelepiped i sferu.

Summary

In this thesis, we describe the vector method and we prove many well-known planimetric and stereometric problems by using it. Thesis is divided into eight chapters.
In the first chapter, we provide an overview of basic definitions and claims related to vectors and operations on them.
In the second chapter, we define radius vectors in the plane and in the space and we prove some planimetric problems by applying them.
In the third, the fourth and the fifth chapter, we define the inner, vector (cross) and mixed (scalar triple) products of vectors. We also apply these operations to solve some geometric problems.
In last three chapters, we show the application of the vector method to triangle, quadrilateral, circle, tetrahedron, parallelepiped and sphere.

Životopis

Rođen sam 2. srpnja 1991. godine u Mostaru, Bosna i Hercegovina. Pohađao sam Drugu osnovnu školu u Širokom Brijegu koju sam završio 2006. godine. Iste godine upisujem Gimnaziju fra Dominika Mandića u Širokom Brijegu. Maturirao sam 2010. godine. Nakon toga upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu na kojem sam u srpnju 2014. godine završio Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički te tako postao prvostupnik edukacije matematike. U rujnu iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.