SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Mijoč

GALE–SHAPLEYEV ALGORITAM, VARIJACIJE I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. Saša Singer

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

D. Gale i L. S. Shapley su u svom radu [5] predstavili problem stabilnih brakova. Promatrali su problem sparivanja kroz primjere upisa studenata na fakultet, te sparivanja muškaraca i žena – braka, otkud je i proizašlo ime problema. Naravno, tražili su efikasan algoritam za sparivanje, takav da dobiveno sparivanje ima neka lijepa svojstva. O svemu tome, pa i malo više, će se raspravljati kroz ovaj diplomski rad.

U prvom poglavlju govorit ću o problemu stabilnih brakova i definirati osnovne pojmove.

U drugom poglavlju detaljno ću opisati Gale–Shapleyev algoritam i njegova svojstva.

U trećem poglavlju pričat ću o nekim varijacijama i primjenama Gale–Shapleyevog algoritma.

Poglavlje 1

Problem stabilnih brakova

1.1 Opis problema

U problemu stabilnih brakova promatramo dva konačna skupa duljine n, skup muškaraca M i skup žena W. Pretpostavljamo da element svakog skupa ima strogo uređenu listu preferencija iz suprotnog skupa (precizna definicija slijedi) i ta lista je potpuna, tj. točno se znaju preferencije za sve osobe iz suprotnog skupa. Uzmimo za primjer $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ i $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Liste preferencija možemo zapisati matrično, po redcima,

$$\begin{matrix} m_1: \\ m_2: \\ m_3: \\ m_4: \end{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & w_2 & w_1 & w_4 \\ w_4 & w_3 & w_1 & w_2 \\ w_2 & w_1 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} w_1: \\ w_2: \\ w_3: \\ w_4: \end{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_3 & m_2 & m_4 & m_1 \\ m_4 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_2 & m_4 & m_1 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

U primjeru 1.1 vidimo da je npr. (w_3, w_2, w_1, w_4) preferencijska lista osobe m_2.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da osoba p **preferira** osobu q u odnosu na osobu r ako je q ispred r u listi preferencija osobe p.*

U primjeru 1.1 vidimo da npr. m_3 preferira w_3 u odnosu na w_2.

1.2 Sparivanje i svojstva

Definicija 1.2.1. ***Sparivanje** S je 1–1 korespodencija između skupa muškaraca M i skupa žena W.*

Definicija 1.2.2. *Muškarca m i ženu w sparene u sparivanju S zovemo **partneri** i pišemo $m = p_S(w)$ i $w = p_S(m)$.*

Definicija 1.2.3. *Kažemo da muškarac m i žena w čine* **blokirajući par** *u sparivanju S, ako m i w nisu partneri u S, ali m preferira w u odnosu na $p_S(m)$ te w preferira m u odnosu na $p_S(w)$.*

Definicija 1.2.4. *Kažemo da je sparivanje S* **stabilno** *ako ne postoji niti jedan blokirajući par u sparivanju S.*

Definicija 1.2.5. *Kažemo da je sparivanje* **nestabilno** *ako nije stabilno.*

Traženje blokirajućih parova (tj. provjera stabilnosti) je dosta jednostavno. Da bi par bio blokirajući moraju jedno drugo preferirati u odnosu na svoje partnere. Očito, tada slijedeći algoritam pronalazi sve blokirajuće parove.

```
za svakog muškarca m:
    za svaku ženu w:
        ako m preferira w u odnosu na svoju partnericu:
            ako w preferira m u odnosu na svog partnera:
                ispiši blokirajući par (m,w)
```

Za svakog muškarca (njih n) algoritam provjerava, za svaku ženu koja je ispred njegove partnerice u preferencijskoj listi (njih najviše $n - 1$), je li taj muškarac ispred njezinog partnera na njezinoj preferencijskoj listi. Jasno je da je algoritam vremenske složenosti $O(n^2)$.

Jedno sparivanje je npr.

$$S_1 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3), (m_4, w_4)\}.$$

U njemu su m_i i w_i partneri za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tj. u oznakama: $p_{S_1}(m_i) = w_i$ i $p_{S_1}(w_i) = m_i$ za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Primjenom navedenog algoritma možemo vidjeti da su (m_2, w_3), (m_3, w_4) i (m_4, w_3) blokirajući parovi za sparivanje S_1, što se lako i provjeri.

Promatrajući primjer 1.1, možemo se "igrati" i tražiti stabilna sparivanja te naći npr. sparivanja

$$S_2 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_4), (m_4, w_3)\}$$

i

$$S_3 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_3), (m_3, w_4), (m_4, w_2)\}$$

koja su stabilna.

Vidimo da možemo imati više stabilnih sparivanja pa uvodimo pojam **optimalnosti**.

Definicija 1.2.6. *Kažemo da je sparivanje S* **optimalno** *za neku osobu q ako je sparivanje S stabilno i ne postoji neko drugo stabilno sparivanje R takvo da q preferira $p_R(q)$ u odnosu na $p_S(q)$.*

Definicija 1.2.7. *Kažemo da je sparivanje S* ***optimalno za muškarce*** *ukoliko je optimalno za svakog muškarca.*

Definicija 1.2.8. *Kažemo da je sparivanje S* ***optimalno za žene*** *ukoliko je optimalno za svaku ženu.*

Poglavlje 2

Gale–Shapleyev algoritam

2.1 Osnovni algoritam

Gale–Shapleyev algoritam rješava problem stabilnih brakova opisan u prethodnom poglavlju. Pretpostavljamo da postoje dva konačna skupa duljine n, skup muškaraca M i skup žena W. Pretpostavljamo i da element svakog skupa ima strogo uređenu listu preferencija iz suprotnog skupa i da je ta lista je potpuna, tj. ne dopuštamo da postoje neželjene osobe.

Bez smanjenja općenitosti, u ovom diplomskom radu promatrat ću algoritam u kojem će muškarci prositi, a žene prihvaćati, odbijati i raskidati zaruke. Naravno, može se promatrati i algoritam u kojem su uloge zamijenjene pa govorimo o algoritmu u kojem prose muškarci, odnosno, o algoritmu u kojem prose žene.

Na početku su svi slobodni, a nadalje se algoritam izvršava u više koraka. Prvo svaki slobodan muškarac zaprosi ženu koju najviše preferira, dok žene prihvaćaju prosidbu muškarca kojeg najviše preferiraju, a ostale prosidbe odbijaju (ako ih ima). Inače (ponovno), svaki slobodni muškarac (oni koji su bili odbijeni u prvom koraku) prose drugu po redu u preferencijskoj listi. Tada su, ponovno, neki prihvaćeni, a neki ne. Odbijeni u sljedećem koraku prose treću osobu po redu u svojoj preferencijskoj listi. Može se dogoditi da su neki, koji su nakon prvog koraka bili zaručeni, u drugom koraku ostavljeni, pa oni prose drugu osobu po redu u svojoj preferencijskoj listi. Koraci se ponavljaju dok svi nisu zaručeni i tada se žene. Algoritam staje ukoliko nema slobodnih muškaraca (svi muškarci i žene su spareni), ili ukoliko su slobodni muškarci iscrpili svoju preferencijsku listu (ostalo je nesparenih muškaraca pa time i žena).

Jasno se vidi da žena, kad je jednom zaručena, ostaje zaručena do kraja algoritma. Jedino što se njezin partner može mijenjati i to na bolje (u smislu njezinih preferencija). Za razliku od toga, muškarci se nude ženama, počevši od one koju najviše preferiraju. Ako ih one odbiju ili prekinu zaruke s njima, nude se sljedećoj koju najviše preferiraju, tj. mogu biti zaručeni pa slobodni. Njihove se potencijalne partnerice mijenjaju silazno po preferencijskoj listi, tj. svaku sljedeću manje preferiraju nego prethodnu. Možda na prvu nije jasno, ali pokazat ćemo da ovaj algoritam uvijek daje potpuno sparivanje i da je to sparivanje stabilno. To da algoritam daje potpuno sparivanje znači da muškarci nikad neće iscrpiti svoje preferencijske liste i ostati slobodni. Prvo ćemo iznijeti pseudôkod preuzet iz [6].

```
postavi svaku osobu da je slobodna
za svakog slobodnog muškarca m koji nije zaprosio sve žene radi:
    w = prva žena na preferencijskoj listi muškarca m
                     koju m još nije zaprosio
    ako je w slobodna:
        postavi da su m i w zaručeni jedno za drugo
    inače:
        ako w preferira m u odnosu na svog zaručnika m':
            postavi da su m i w zaručeni jedno za drugo
                     i da je m' slobodan
        inače:
            w odbija m (m ostaje slobodan, w ostaje zaručena)
ispiši sparivanje definiramo zaručenim parovima
```

Napomena 2.1.1. *Algoritam ne određuje raspored kojim muškarci prose. Naime, kad se izvrše prosidbe, žena ostaje zaručena s proscem kojeg najviše preferira. U rasporedu prosidbi žena se, jedino privremeno, može zaručiti s manje preferiranim muškarcem, tj. umjesto odbijanja se može dogoditi prihvaćanje i ostavljanje (ili obratno). A vidimo da algoritam ne razlikuje ostavljene i odbijene muškarce (u oba slučaja su slobodni), pa raspored prošnji ne utječe na rezultat algoritma.*

Uzmimo, na primjer, $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ i $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ i liste preferencija zadane slijedećim matricama (2.1):

$$\begin{array}{c} m_1 : \\ m_2 : \\ m_3 : \end{array} \begin{bmatrix} w_3 & w_2 & w_1 \\ w_3 & w_2 & w_1 \\ w_3 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} w_1 : \\ w_2 : \\ w_3 : \end{array} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Uzevši u obzir napomenu 2.1.1, pretpostavit ćemo da slobodni muškarci prose po rasporedu svojih indeksa.

U početku su svi slobodni. Potom m_1 prosi w_3 (prvu ženu na svojoj preferencijskoj listi), a w_3 prihvaća prosidbu jer je bila slobodna. U ovom trenutku su m_1 i w_3 spareni jedno za drugo, a ostali su slobodni. Nakon toga, m_2 prosi w_3 (prvu ženu sa svoje preferencijske liste), koja prihvaća prosidbu jer ga preferira u odnosu na svog trenutnog zaručnika. Trenutno su m_2 i w_3 spareni jedno za drugo, a ostali slobodni. Potom i m_3 prosi w_3 (prvu ženu sa svoje preferencijske liste), ali ga ona odbija jer više preferira svog partnera. I dalje su m_2 i w_3 spareni jedno za drugo, a ostali su slobodni:

$$\begin{matrix} m_1: \\ m_2: \\ m_3: \end{matrix} \begin{bmatrix} \cancel{w_3} & w_2 & w_1 \\ \boxed{w_3} & w_2 & w_1 \\ \cancel{w_3} & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} w_1: \\ w_2: \\ w_3: \end{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{bmatrix}.$$

Potom slobodni muškarci m_1 i m_3 prose, redom, w_2 i w_1, iduće žene u svojim preferencijskim listama. One su slobodne pa obje prihvaćaju prosidbe:

$$\begin{matrix} m_1: \\ m_2: \\ m_3: \end{matrix} \begin{bmatrix} \cancel{w_3} & \boxed{w_2} & w_1 \\ \boxed{w_3} & w_2 & w_1 \\ \cancel{w_3} & \boxed{w_1} & w_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} w_1: \\ w_2: \\ w_3: \end{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{bmatrix}.$$

Nema više slobodnih muškaraca pa algoritam završava i daje stabilno sparivanje S:

$$S = \{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)\}.$$

2.2 Svojstva algoritma

Lema 2.2.1. *Sparivanje S koje daje opisani algoritam je* ***potpuno****.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji barem jedan muškarac m i jedna žena w koji nisu spareni. Svaka žena, kad je prvi put zaprošena, se zaruči i, kad je jednom zaručena, onda je zaručena do kraja algoritma (samo joj se partner može mijenjati nabolje). Prema tome, ako w nije zaručena, to znači da w nikad nije bila zaprošena. Lista preferencija za m je potpuna, tj. u njoj se nalaze sve žene, pa tako i w. Da bi m ostao slobodan do kraja algoritma, trebao bi zaprositi sve žene i sve bi ga trebale odbiti (pa tako i w). To je kontradikcija s činjenicom da w nije zaprošena (slobodna žena uvijek prihvaća prosidbu). □

Teorem 2.2.2. *Sparivanje S koje daje opisani algoritam je i* ***stabilno****.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji blokirajući par (m, w). Po definiciji, to znači da m preferira w u odnosu na $p_S(m)$ i da w preferira m u odnosu na $p_S(w)$. Ali, to nije moguće, jer je m, prije nego što je zaprosio svoju partnericu iz sparivanja S, morao zaprositi w. No, w tada ne bi mogla završiti sa svojim partnerom $p_S(w)$, jer je imala prosidbu od m pa je morala završiti s m ili nekim preferiranijim muškarcem koji nije $p_S(w)$. □

Korolar 2.2.3. *Iz prethodnog teorema slijedi da za svaki problem stabilnih brakova postoji barem jedno stabilno sparivanje.*

2.3 Složenost algoritma

Algoritam staje kad nema više slobodnih muškaraca. U svakom koraku mora se dogoditi barem jedna prosidba. Svaki muškarac svaku ženu može zaprositi najviše jedanput pa imamo najviše n^2 mogućih prosidbi. Stoga je, očito, algoritam vremenske složenosti $O(n^2)$. Algoritam je, zapravo, linearan po ulazu, jer svaka osoba (njih $2n$) ima preferencijsku listu koja je duljine n. Drugim riječima, algoritam u najgorem slučaju, samo jednom prođe po ulazu.

Algoritam je još fascinantniji kad pogledamo prostor problema. Pogledajmo koliko različitih sparivanja ima: za skup muškaraca M i skup žena W, oba duljine n, možemo prebrojati moguća različita sparivanja, tako da fiksiramo mjesta za muškarce i onda na ta mjesta različito možemo rasporediti žene na $n!$ načina, tj. postoji $n!$ različitih sparivanja. Nadalje, interesantno je pitanje koliki je broj stabilnih sparivanja, jer algoritam pronalazi stabilno sparivanje. Knuth je u [10] pokazao da broj stabilnih sparivanja raste eksponencijalno po duljini skupa muškaraca, odnosno, duljini skupa žena. Preciznije, promatra se maksimalan broj stabilnih sparivanja po svim mogućim preferencijskim listama.

Napomena 2.3.1. *Možemo primijetiti da za svaki $n \in \mathbb{N}$, za skupove muškaraca i žena duljine n, postoje njihove preferencijske liste takve da postoji samo jedno stabilno sparivanje. Npr. svakom m_i je na prvom mjestu u preferencijskoj listi w_i i svakoj w_i je na prvom mjestu u preferencijskoj listi m_i. Očito, tada postoji jedno stabilno sparivanje u kojem su spareni m_i i w_i za $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Označimo s $f(n)$ maksimalan broj stabilnih sparivanja po svim mogućim preferencijskim listama, gdje su skup muškaraca i skup žena duljine n. U [14] je pokazano da vrijedi $f(n) \in \Omega(2.28^n)$. Za gornju ogradu imamo $f(n) \in O\left(\frac{n!}{2^n}\right)$ (vidi [12]). Iz [8] sam preuzeo sljedeću tablicu koja pokazuje $f(n)$ za prvih nekoliko potencija broja 2.

n	$f(n)$
1	1
2	2
4	10
8	268
16	195472
32	104310534400

2.4 Optimalnost

Znamo da Gale–Shapleyev algoritam daje stabilno sparivanje i da postoji postoji više različitih stabilnih sparivanja. Među različitim stabilnim sparivanjima osobe su sparene s osobama koje više ili manje preferiraju. Tada za svaku osobu postoji optimalno sparivanje, kao i najgore moguće sparivanje. Vidjet ćemo zanimljive rezultate o sparivanju koje daje Gale–Shapleyev algoritam.

Teorem 2.4.1. *Sva moguća izvršavanja Gale–Shapleyovog algoritma u kojem muškarci prose daju isto stabilno sparivanje S i S je optimalno za muškarce.*

Dokaz. Moguća izvršenja znače moguće rasporede prošnji, a u napomeni 2.1.1 smo vidjeli da rasporedi prošnji nemaju utjecaja na dobiveno sparivanje. Dakle, sva moguća izvršavanja Gale–Shapleyovog algoritma u kojem muškarci prose daju isto stabilno sparivanje S.

Još treba dokazati da je S optimalno za muškarce. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji stabilno sparivanje S' u kojem postoji muškarac m takav da m preferira $p_{S'}(m)$ u odnosu na $p_S(m)$. Radi jednostavnosti, označimo s $w = p_S(m)$ partnericu od m iz sparivanja S i s $w' = p_{S'}(m)$ partnericu od m iz sparivanja S'. Zbog preferencija od m, očito je m zaprosio w' prije w (u izvršavanju Gale–Shapleyejevog algoritma koji je dao sparivanje S) i w' ga je ostavila zbog muškarca kojeg više preferira – označimo ga s m'. Pretpostavimo, bez gubitka općenitosti, da je ovo prvo mjesto gdje je žena odbila stabilnog partnera.

Tada m' ne može imati stabilnu partnericu koju preferira više nego w', jer ih je sve koje preferira više od w' zaprosio i odbile su ga prije nego što je zaprosio w', a to je bilo prvo mjesto gdje je žena odbila stabilnog partnera.

Tada je (m', w') blokirajući par za sparivanje S', tj. sparivanje S' nije stabilno. □

Napomena 2.4.2. *Istaknimo, algoritam daje optimalno sparivanje za svakog muškarca, ili, drugim riječima, ne postoji stabilno sparivanje takvo da je bilo kojem muškarcu bolje nego u sparivanju iz algoritma. Znači, kad bismo uzeli za svakog muškarca njegovu najbolju stabilnu partnericu, dobili bismo stabilno sparivanje. Naravno, kad bi prosile žene, algoritam bi dao stabilno sparivanje koje je optimalno za žene.*

Teorem 2.4.3. *Sparivanje S koje daje Gale–Shapleyev algoritam u kojem muškarci prose je najgore moguće za žene, tj. ne postoji sparivanje S' i žena w takvi da w preferira $p_S(w)$ u odnosu na $p_{S'}(w)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji sparivanje S' u kojem postoji žena w takva da w preferira $m = p_S(w)$ u odnosu na $m' = p_{S'}(w)$. Pošto je m' sparen s w u S', m je sparen s nekom drugom ženom w' u stabilnom sparivanju S'. Tada, jer je S optimalno za muškarce, m preferira w u odnosu na w' pa je (m, w) blokirajući par za S'. □

Vidimo da su u Gale–Shapleyevom algoritmu u kojem prose muškarci, u puno boljoj poziciji muškarci, na ušrb žena. Muškarci dobivaju najbolje moguće sparivanje, dok žene najgore moguće. To je inspiriralo R. W. Irvinga, P. Leathera i Dana Gusfielda da pronađu algoritam koji pronalazi stabilo sparivanje koje je općenito optimalno[1] (vidi [9]). Spomenuti algoritam ima vremensku složenost $O(n^4)$, što je znatno lošije od vremenske složenosti Gale–Shapleyevog algoritma, koja je $O(n^2)$.

Možemo uzeti u obzir i mogućnost varanja – podvaljivanja krivih lista preferencija, naravno u vidu tjeranja algoritma da vrati bolje sparivanje (za osobu koja vara). Roth je u [11] pokazao da u Gale–Shapleyevom algoritmu u kojem prose muškarci, muškarci nikad ne profitiraju varanjem. Nažalost, ne možemo isto reći i za žene. Gale i Sotomayor su u [4] dokazali da, u modelu s odbijanjem, ženama se isplati varati, osim ako imaju samo jednog stabilnog partnera. U [13] se analiziraju mogućnosti varanja žena. Autori su simulirali nasumične probleme stabilnih brakova s varanjem žena i zabilježili da se postotak žena koji je profitirao varanjem kretao od 5% do 9%.

[1] Uzimaju se u obzir pozicije partnera svih osoba.

Poglavlje 3

Varijacije i primjene Gale–Shapleyevog algoritma

U ovom poglavlju govorit ćemo o varijacijama i primjenama Gale–Shapleyovog algoritma. Takav algoritam koristi se od prijava za upis u školu ili fakultet, do primjena u ekonomiji ili medicini.

3.1 Poopćenja problema stabilnih brakova

Uzevši u obzir definiciju problema stabilnog braka, možemo se zapitati što bi bilo kada bi neka od ograničenja promijenili i pogledali neke varijacije originalnog problema.

Različit broj muškaraca i žena

Prvo poopćenje koje bismo mogli promatrati je da broj muškaraca i žena nije jednak. U tom slučaju, osnovni algoritam staje. Naravno, tada sparivanje koje algoritam daje nije potpuno, ali je stabilno.

Problem stabilnih brakova s ne strogo uređenim preferencijama

Možemo promatrati i slučaj kada osoba može jednako preferirati više osoba, tj. ne razlikovati ih po preferenciji. Tada je dovoljno napraviti nejednakosti (na proizvoljan način) i osnovni algoritam će dati potpuno i stabilno rješenje.

Stabilno sparivanje je, po definiciji, sparivanje za koje ne postoje blokirajući parovi, a blokirajući par čine muškarac i žena koji **oboje** preferiraju jedno drugo **više** nego svoje partnere. Tada, muškarac m i žena w ne čine blokirajući par ako npr. muškarac m više preferira w od svoje partnerice i žena w jednako preferira m kao svog partnera. Ili obratno, da žena w više preferira m od svog partnera i muškarac m jednako preferira w i svoju partnericu, što možda nije ono što smo željeli.

Drugim riječima, ako bi jednoj osobi bilo bolje u smislu preferencija, a drugoj osobi jednako dobro, tada oni ne čine blokirajući par.

Ako ipak želimo i takve slučajeve smatrati nestabilnima, moramo definirati pojmove strogo blokirajući par i stroga stabilnost.

Definicija 3.1.1. *Za muškarca m i ženu w kažemo da čine* ***strogo blokirajući par*** *u sparivanju S ako m i w nisu spareni u S i ako vrijedi*

- *m preferira w u odnosu na $p_S(m)$ i ne vrijedi da w preferira $p_S(w)$ u odnosu na m, ili*
- *vrijedi da w preferira m u odnosu na $p_S(w)$ i ne vrijedi da m preferira $p_S(m)$ u odnosu na w.*

Napomena 3.1.2. *Drugim riječima, strogo blokirajući par je i onaj par u kojemu bi jednome bilo bolje, a drugome ne bi bilo lošije.*[1]

Definicija 3.1.3. *Za sparivanje S kažemo da je* ***strogo stabilno*** *ukoliko ne postoji strogo blokirajući par za sparivanje S.*

Napomena 3.1.4. *Očito je svaki blokirajući par ujedno i strogo blokirajući par, ali obrat ne vrijedi. Iz toga slijedi da je i svako strogo stabilno sparivanje odmah i stabilno sparivanje (obrat, također, ne vrijedi).*

Strogo stabilno sparivanje ne mora postojati. Neka je $M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$ i pritom m_1 i m_2 preferiraju w_1 u odnosu na w_2, dok w_1 i w_2 jednako preferiraju m_1 i m_2. Tada ne postoji strogo stabilno sparivanje, jer ako je w_1 sparena s m_1, tada je (m_2, w_1) blokirajući par. Inače w_1 je sparena s m_2 pa je (m_1, w_1) blokirajući par.

Postoji algoritam vremenske složenosti $O(n^4)$ koji pronalazi strogo stabilno sparivanje, ukoliko takvo postoji. Algoritam je preuzet iz [7]. U istom izvoru je dokazana i korektnost algoritma.

```
postavi da su sve osobe slobodne
ponavljaj
    za svakog slobodnog muškarca m:
        w = prva žena na preferencijskoj listi muškarca m
                    koju m još nije zaprosio
        m prosi i zaručuje se s w
        za svakog muškarca m' koji je strogo iza m na
                   preferencijskoj listi od w
```

[1] Misli se na bolje ili lošije u smislu preferencija blokirajućeg para u odnosu na partnera iz sparivanja.

```
            ako su m' i w zaručeni
                prekini zaruke od m' i w
    ako skup zaruka ne čini sparivanje
        nađi kritičan skup muškaraca S
        za svaku ženu zaručenu za muškarca iz S
            prekini sve zaruke s w
dok (se lista nekog muškarca ne iscrpi) ili
            (dok su svi zaručeni)
ako su svi zaručeni
    sparivanje koje daju zaruke je strogo stabilno
inače
    ne postoji strogo stabilno sparivanje
```

Definiramo kritičan skup koji se spominje u algoritmu.

Napomena 3.1.5. *Neka je S skup muškaraca. Tada sa $Z(S)$ označavamo skup svih zaručnica muškaraca iz S.*

Definicija 3.1.6. *Neka je S neki skup muškaraca.* ***Deficitarnost*** *skupa S, u oznaci $\delta(S)$, definiramo kao*

$$\delta(S) = |S| - |Z(S)|.$$

Definicija 3.1.7. *Za skup muškaraca S, $S \subseteq M$, kažemo da je* ***maksimalno deficitaran*** *ako vrijedi*

$$\delta(S) = \max_{A \subseteq M} |A| - |Z(A)|.$$

Definicija 3.1.8. *Za skup muškaraca S kažemo da je* ***kritičan*** *ako je maksimalno deficitaran i ako nijedan njegov pravi podskup nije maksimalno deficitaran.*

Problem stabilnih brakova s nepotpunim listama

Prirodno je promatrati i problem stabilnih brakova s nepotpunim listama. To jednostavno znači da, osobe koje nisu na listi, su osobe koje su neprihvatljive. Drugim riječima, na preferencijskoj listi se nalaze samo prihvatljive osobe. Iz toga, očito, slijedi da ne mora postajati potpuno sparivanje, jer se, na primjer, može dogoditi da nitko nikome nije prihvatljiv.

I u ovom slučaju osnovni algoritam daje stabilno sparivanje. Naravno, sparivanje općenito nije potpuno.

3.2 Problem bolnice–specijalizanti

O problemu bolnice–specijalizanti je napisano više radova. Radi se o sparivanju dva skupa – skupa bolnica H i skupa specijalizanata R. Uvjet je da jedan specijalizant može biti sparen s najviše jednom bolnicom, dok jedna bolnica može biti sparena s najviše q specijalizanata, gdje je $q \in \mathbb{N}$. Broj q zovemo bolničkom kvotom dane bolnice. Na kardinalitet skupova H i R, kao i na veličinu bolničkih kvota nema daljnih pretpostavki. Pretpostavljamo da svaki specijalizant i svaka bolnica imaju potpunu i strogu preferencijsku listu elemenata suprotnog skupa.

Možemo primijetiti da, ukoliko je kardinalitet skupova H i R jednak, i ukoliko su kvote svih bolnica jednake 1, tada se zapravo radi o problemu stabilnih brakova. Dakle, problem bolnice–specijalizanti je poopćenje problema stabilnih brakova.

Ovaj problem se isto tako rješava osnovnim Gale–Shapleyevim algoritmom. Naravno, analogno kao i u problemu stabilnih brakova, možemo promatrati algoritam u kojem prose bolnice i algoritam u kojem prose specijalizanti. Sparivanje koje daje algoritam je optimalno za skup koji prosi. Algoritam ima vremensku složenost $O(n^2)$.

Istim problemom možemo modelirati sparivanje djece sa školama ili studente s fakultetima. I u tim svrhama se algoritam pokazao iznimno uspješnim. Naime, neki drugi algoritmi, koji su se prije koristili i koji nisu imali svojstvo stabilnosti, nisu bili dobro prihvaćeni i često bi se mijenjali. Problem je ležao u dva razloga. Prvi razlog je što odsudstvo svojstva stabilnosti dozvoljava blokirajuće parove. Ti blokirajući parovi imaju se pravo buniti na sparivanje, pa ga čak mogu i "oboriti", jer bi oboma bilo bolje zajedno, nego s partnerima iz danog sparivanja. Odatle je možda i došlo ime za stabilno sparivanje. Drugi razlog jest to da oni koji prose ne mogu varati, najbolja taktika im je istinito predočiti svoje preferencijske liste. S druge strane, oni koji bivaju prošeni imaju male izglede za uspješno varanje. A što god bilo s tim varanjem, dano sparivanje će opet biti stabilno. U primjeni, skoro uvijek, oni koji prose su ljudi (specijalizanti, učenici, studenti), dok su organizacije (bolnice, škole, fakulteti) oni koji primaju prošnje.

Varijacije problema bolnice–specijalizanti

Kao i za problem stabilnih brakova, za problem bolnice–specijalizanti možemo promatrati problem bolnice–specijalizanti s tim da ne postoje strogo uređene preferencije, kao i problem bolnice–specijalizanti s nepotpunim listama. Za njih će vrijediti analogni rezultati.

Uz spomenute varijacije, postoji i problem bolnice–specijalizanti s parovima u kojemu specijalizant može imati svog para (drugog specijalizanta) s kojim želi dobiti istu bolnicu ili specifične parove bolnica. Na primjer, muž i žena mogu željeti raditi specijalizaciju blizu jedno drugome.

Za razliku od dosadašnjih problema, problem bolnice–specijalizanti s parovima je NP–potpun.

3.3 Daljnje generalizacije problema

Problem sparivanja mnogo–mnogo

Problem sparivanja mnogo–mnogo je prirodno poopćenje problema bolnice–specijalizanti. Tu se radi o sparivanju dva skupa S i T, gdje elementi iz oba skupa imaju svoju kvotu – broj koji označava s koliko elemenata suprotnog skupa se taj element može spariti. Naravno, i dalje svaki element ima potpune i stroge preferencijske liste elemenata suprotnog skupa.

Definicija 3.3.1. *Kažemo da elementi $s \in S$ i $t \in T$ čine **blokirajući par za sparivanje mnogo–mnogo** R, ako s i t nisu spareni u R i*

- *postoji u, partner od s iz R, i*
- *postoji v, partner od t iz R,*

takvi da s preferira t u odnosu na u i t preferira s u odnosu na v.

Definicija 3.3.2. *Kažemo da je sparivanje mnogo–mnogo **stabilno** ako za njega ne postoje blokirajući parovi.*

Postoji algoritam koji pronalazi stabilno sparivanje za problem sparivanja mnogo–mnogo. Njegova vremenska složenost jest $O(n^2)$, gdje je $n = \max\{|S|, |T|\}$ (vidi [1]).

Generalizani problem sparivanja

Generalizani problem sparivanja je genaralizacija problema sparivanja mnogo–mnogo. To je sparivanje između skupa poslodavaca P i skupa radnika R. Problem se formalno može definirati kao uređena četvorka (Γ, s, d, π), gdje je:

- Γ usmjereni graf koji predstavlja preferencije,
- $s : R \to \langle 0, +\infty\rangle$, gdje $s(r)$ predstavlja koliko najviše sati radnik r može raditi,
- $d : P \to \langle 0, +\infty\rangle$, gdje $d(p)$ predstavlja koliko najviše sati rada poslodavac p treba,
- $\pi : P \times R \to [0, +\infty\rangle$, gdje $\pi(p, r)$ predstavlja koliko najviše radnik r može raditi za poslodavca p.

Za problem (Γ, s, d, π) sparivanje definiramo kao funkciju $x : P \times R \to \mathbb{R}$ za koju vrijede slijedeća tri svojstva:

1. $(\forall r \in R) \quad \sum_{p \in P} x(p, r) \leq s(r)$,
2. $(\forall p \in P) \quad \sum_{r \in R} x(p, r) \leq d(p)$,
3. $(\forall p \in P, \forall r \in R) \quad 0 \leq x(p, r) \leq \pi(p, r)$.

Za poslodavca p i radnika r, vrijednost $x(p, r)$ predstavlja broj sati koliko radnik r radi za poslodavca p. Prvi uvjet da bi funkcija x bila sparivanje je da radnik r, za sve poslodavce ukupno, ne radi više od svog maksimuma sati $s(r)$. Analogno, drugi uvjet kaže da, svi radnici zajedno, za poslodavca p ne smiju raditi više od $d(p)$ sati. Treći uvjet je da radnik r za poslodavca p radi nenegativan broj sati, koji je manji od granice $\pi(p, r)$.

Označimo s:

- $P(p', r') := \{ p \in P \mid \neg(r' \text{ preferira } p' \text{ u odnosu na } p) \}$,
- $R(p', r') := \{ r \in R \mid \neg(p' \text{ preferira } r' \text{ u odnosu na } r) \}$.

Vidimo da $P(p', r')$ predstavlja skup svih poslodavaca za koje nije istina da radnik r' preferira p' u odnosu na njih, odnosno, sve poslodavce koji su na preferencijskoj listi od r' prije p', uključujući p'. Analogno, $R(p', r')$ predstavlja sve radnike koji su na preferencijskoj listi od p' prije r', uključujući r'.

Za sparivanje kažemo da je **stabilno** ako $x(p, r) \leq \pi(p, r)$ implicira da vrijedi barem jedno od slijedećeg:

1. $\sum_{p' \in P(p,r)} x(p', r) = s(r)$,
2. $\sum_{r' \in R(p,r)} x(p, r') = d(p)$.

To znači da ako radnik r za poslodavca p ne radi maksimalan broj sati $\pi(p, r)$, onda je napunjen kapacitet rada radnika r (odnosno, poslodavca p) i to poslodavcima (radnicima) koji nisu lošiji od poslodavca p (radnika r)[2].

Označimo s n broj čvorova u grafu Γ, a s m broj bridova. Postoji algoritam koji pronalazi optimalno sparivanje za radnike ili poslodavce, vremenske složenosti $O(nm)$ (vidi [2]). U [3] je poboljšana vremenska složenost na $O(m \log n)$.

U literaturi [2] spominje se problem pod imenom *the stable allocation*. Problem je diskretan ako s, d i π poprimaju cjelobrojne vrijednosti. Iz tog problema dobivamo:

- problem stabilnih brakova – ako vrijedi $s(r) = d(p) = \pi(p, r) = 1$, za $\forall p \in P$, $\forall r \in R$,
- problem bolnice–specijalizanti – ako vrijedi $s(r) = \pi(p, r) = 1$ i $d(p) \geq 1$, za $\forall p \in P$, $\forall r \in R$,
- problem sparivanja mnogo–mnogo – ako vrijedi $\pi(p, r) = 1$ i $d(p) \geq 1$ i $s(r) \geq 1$, za $\forall p \in P$, $\forall r \in R$.

[2] Lošiji u smislu preferencija radnika r, odnosno, poslodavca p.

Bibliografija

[1] Mourad Baïou i Michel Balinski, *Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry)*, Discrete Applied Mathematics **101** (2000), br. 1, 1 – 12, ISSN 0166-218X, `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X99002036`.

[2] ______, *Erratum: The Stable Allocation (or Ordinal Transportation) Problem*, Mathematics of Operations Research **27** (2002), br. 4, 662–680, `https://doi.org/10.1287/moor.27.4.662.302`.

[3] Brian C. Dean i Siddharth Munshi, *Faster Algorithms for Stable Allocation Problems*, Algorithmica **58** (2010), br. 1, 59–81, ISSN 1432-0541, `https://doi.org/10.1007/s00453-010-9416-y`.

[4] David Gale i Marilda Sotomayor, *Some remarks on the stable matching problem*, Discrete Applied Mathematics **11** (1985), br. 3, 223–232.

[5] D. Gale i L. S. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriage*, The American Mathematical Monthly **69** (1962), br. 1, 9–15, `http://www.jstor.org/stable/2312726`.

[6] Dan Gusfield i Robert W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1989.

[7] Robert W. Irving, *Stable marriage and indifference*, Discrete Applied Mathematics **48** (1994), br. 3, 261 – 272, ISSN 0166-218X, `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X9200179P`.

[8] Robert W. Irving i Paul Leather, *The Complexity of Counting Stable Marriages*, SIAM Journal on Computing **15** (1986), br. 3, 655–667, `http://dx.doi.org/10.1137/0215048`.

[9] Robert W Irving, Paul Leather i Dan Gusfield, *An efficient algorithm for the "optimal" stable marriage*, Journal of the ACM (JACM) **34** (1987), br. 3, 532–543.

[10] Donald Ervin Knuth, *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.

[11] Alvin E Roth, *The economics of matching: Stability and incentives*, Mathematics of operations research **7** (1982), br. 4, 617–628.

[12] Georgios K. Stathopoulos, *Variants of Stable Marriage Algorithms, Complexity and Structural Properties*, 2011, `http://mpla.math.uoa.gr/media/theses/msc/Stathopoulos_G.pdf`.

[13] Chung Piaw Teo, Jay Sethuraman i Wee Peng Tan, *Gale-Shapley stable marriage problem revisited: strategic issues and applications*, Integer Programming and Combinatorial Optimization: 7th International IPCO Conference, Graz, Austria, June 1999. Proceedings, Springer, 1999, str. 429–438.

[14] Edward G. Thurber, *Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem*, Discrete Mathematics **248** (2002), br. 1, 195–219, `http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00194-7`.

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisuje se problem stabilnih brakova te se definira njegovo rješenje – stabilno sparivanje, kao i ostala njegova svojstva.

Obrađuje se i algoritam koji rješava problem stabilnih brakova – Gale Shapleyev algoritam. Govori se o njegovoj složenosti i svojstvima.

Promatramo i poopćenja osnovnog problema stabilnih brakova. Dajemo i definiciju stroge stabilnosti te navodimo algoritam koji pronalazi strogo stabilno rješenje, ukoliko ono postoji. Govorimo o problemu bolnice–specijalizanti, kao i o daljnim poopćenjima problema stabilnih brakova.

Summary

In this master thesis, we decribe the stable marriage problem and we define its solution – the stable matching. We also define its properties.

We elaborate an algorithm that solves the stable marriage problem – the Gale–Shapley algorithm. We talk about its complexity and its properties.

We consider generalizations of the stable marriage problem, and we define the strong stability. We also give an algorithm which finds a strongly stable matching, if one exists. We present an insight into the hospital–residents problem, as well as into some further generalizations of the problem.

Životopis

Rođen sam u Metkoviću 20. studenog 1991. Tamo sam završio osnovnu školu kao i Gimnaziju Metković, prirodoslovno–matematički smjer.

U jesen 2010. sam upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2015., kada upisujem diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu.

Od srpnja 2016. radim kao software developer u Ericsson Nikola Tesla d.d.