Kosa crnih rupa

Bedić, Suzana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Suzana Bedić

KOSA CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Suzana Bedić

Diplomski rad

Kosa crnih rupa

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem svom mentoru, Ivici Smoliću, na trudu, pristupačnosti i uvijek dobroj volji i entuzijazmu.

Sažetak

Crne rupe su gravitacijski objekti koje predviđa opća teorija relativnosti kao rezultat potpunog gravitacijskog kolapsa materije. Jedno od zanimljivih svojstava crnih rupa rupa je mali broj parametara kojima su potpuno opisane u konačnom stanju, neovisno o procesu nastajanja i materiji od koje su nastale. Taj je teorijski rezultat postao poznat kao hipoteza: ,,crne rupe nemaju kosu", gdje je *kosa* svako polje pridruženo crnoj rupi koje pridonosi površinskom integralu u prostornoj beskonačnosti (analogno Gaussovom zakonu u elektrostatici). Važan doprinos temi su dali dokazi o jedinstvenosti Schwarzschildovog prostor-vremena kao statičnog, sfernosimetričnog, asimptotski ravnog vakuumskog rješenja Einsteinovih jednadžbi, i Reissner-Nördstromovog kada je prisutno elektromagnetsko polje. Isto vrijedi za Kerrovo i Kerr-Newmanovo rješenje za stacionaran slučaj.

Prvi dokazi gornje hipoteze su Bekensteinovi dokazi koji su isključili mogućnost postojanja široke klase polja oko statične i stacionarne crne rupe. Ubrzo se pokazala važnost uključenih pretpostavki i da je postojanje kose moguće ako se neka od njih izostavi. Opći uvjeti za (ne)postojanja kose su postali nejasni. U ovom radu smo detaljno prošli kroz Bekensteinove teoreme i dali pregled pronađenih kosa i njihovih svojstava. Među njima je i donja granica 'duljine kose' dokazana za vrlo općeniti slučaj, ali opet narušena u nekim modelima. Važno je koje pretpostavke su uključene u dokaze odsustva kose. U većini slučajeva, jedna od njih je ista simetrija metrike i polja materije, a njenim izostavljanjem dolazimo do nekoliko rješenja. Analizirali smo moguće slučajeve nenasljeđivanja simetrije za skalarna polja. Na kraju smo ukazali na moguću provjeru rezultata eksperimentima u tijeku, čime se testira i sama opća teorija relativnosti, a moguće je i nalaženje novih fizikalnih polja.

Black hole hair

Abstract

Black holes are gravitational objects predicted by general theory of relativity as a result of absolute gravitational collapse of matter. One of their interesting feature is that they are completely described by only few parameters in a final state, despite of precise process and matter from which they were formed. This theoretical result has become known as hypothesis: ,,black holes have no hair", where *hair* is every field associated with black hole that contribute to the surface integral in spacelike infinity (analog to the Gauss integral in electrostatics). Big contribution to the topic was given by theorems about uniqueness of Schwarzschild spacetime as static, spherically symmetric, asimptotically flat vacuum solution of Einstein's equations, and Reissner-Nördstrom, in the presence of electromagnetic field. The same is true fot Kerr and Kerr-Newman solutions in stationary case.

First proofs of above hypothesis were Bekenstein's proofs which excluded existence of wide range of fields around static and stationary black holes. Soon was shown the importance of included assumptions and that black hole hair can exist if some of them were omitted. General conditions for (non)existence of hair became unsettled. In this work we have gone in detail through Bekenstein's theorems and gave review of existing hair and their characteristics. Lower bound on 'hair length' is among them. While proved for fairly general case, it's still violated in some models. It's important to note on which assumptions are based no-hair theorems. In most cases, one of them is equivalence of symmetry between matter fields and metric. Leaving it out, sometimes we can find hair. We have analyzed possible symmetry non-inheritance of scalar fields. In the end we pointed to possible testing with ongoing experiments, which would also test general relativity and could lead to finding new fields in nature.

Sadržaj

1 Uvod

Današnja najbolja i eksperimentalno dobro potvrđena teorija gravitacije, opća teorija relativnosti, izjednačava gravitacijsku silu sa geometrijom kontinuuma zvanog prostor-vrijeme. Iz teorije proizlaze neke zanimljive pojave, kao ovisnost prostorne i vremenske udaljenosti dva događaja o opažaču (dilatacija vremena i kontrakcija duljine), te promjena valne duljine i zakrivljenost putanje svjetlosti prolaskom blizu masivnog objekta (gravitacijski crveni pomak i gravitacijske leće). Te se pojave mjere eksperimentalno i opažanjima. Opća teorija relativnosti predviđa i nekoliko tipova singularnosti – 'točke' beskonačne zakrivljenosti prostor-vremena. Jedna od njih je *veliki prasak*, početak svemira u kojeg se nalazimo. Drugi tip singularnosti, i jedini kojeg očekujemo naći u svemiru, je unutar objekata zvanih crne rupe[1], lokaliziranih objekata takve zakrivljenosti prostor-vremena da ništa iz njih ne može izaći. Indirektno opažanje crnih rupa se postiže proučavanjem gibanja zvijezda i drugih astrofizičkih objekata, kao i promjene valne duljine i skretanja putanja svjetlosti oko vrlo lokaliziranih i masivnih područja svemira koja ne zrače. Na taj su način crne rupe zvjezdanih masa nađene unutar galaksija među plinom i zvijezdama, a supermasivne crne rupe (mase veće od 100 000 Sunčevih masa) u središtima gotovo svake promatrane galaksije. Važna svojstva crnih rupa su simetričnost i jedinstvenost koju su za specijalne slučajeve prvi dokazali Israel [20, 21] i Carter [22]; tzv. teoremi jedinstvenosti. To je rezultiralo pretpostavkom da su crne rupe potpuno opisane sa nekoliko parametara; masom, angularnim momentom (zamahom) i električnim nabojem, što je postalo poznato kao hipoteza: „crne rupe nemaju kosu" (NHC[2]) [2]. Neko vrijeme se tu pretpostavku smatralo teoremom, a prve korake u njenom dokazivanju napravio je Bekenstein [25] dokazavši nemogućnost postojanja skalarnog ili masivnog vektorskog polja (kose) oko statične crne rupe. U narednim godinama uslijedili su dokazi, protuprimjeri i različiti blaži oblici teorema. U ovom radu pokušat ćemo razjasniti kakvu kosu crne rupe mogu imati i pod kojim uvjetima, u kojem obliku vrijedi NHC, ako uopće vrijedi, motivirati zanimanje za kosu crnih rupa i diskutirati mogućnosti eksperimentalne provjere rezultata.

Prvo ćemo izložiti opću teoriju relativnosti u 2. poglavlju. Spomenutim teoremima jedinstvenosti ćemo započeti 3. poglavlje, a zatim precizno definirati kosu, te objasniti razliku sekundarne i primarne. U 4. poglavlju izložit ćemo originalne Bekensteinove dokaze koji su potaknuli mnoge kasnije radove. U 5. poglavlju proći ćemo kroz protuprimjere i vidjeti na koji se način mogu zaobići Bekensteinovi i drugi dokazi, te navesti one koji idu u prilog teoremu. Zadržat ćemo se na teoremu „crne rupe nemaju kratku kosu"[3], koji govori o donjoj graničnoj 'duljini kose', tj. minimalnom području prostiranja polja od crne rupe izraženom preko njenog radijusa. Ipak,

[1] Postoje i tzv. gole singularnosti čija je mogućnost fizikalnog postojanja isključena pretpostavkom *kozmičke cenzure [1]* koja kaže da su sve singularnosti u svemiru sakrivene horizontom događaja.

[2] engl. *no hair conjecture*

[3] U literaturi poznat kao *„no short hair conjecture"*

određeni modeli polja, kao anizotropni fluidi, ne poštuju nužno tu granicu. Pritom se, kao i kod nekih drugih skalarnih kosa koje ćemo navesti, ključnom pokazuje razlika simetrije polja materije i prostor-vremena, što je tema 6. poglavlja. Nakon teorijskih predviđanja postavlja se pitanje eksperimentalne provjere, a odgovor možda dobijemo uskoro. Naime, u tijeku je rad na projektu *Event horizon telescope* o kojem ćemo pisati u 7. poglavlju. Konačno, završit ćemo raspravom i zaključcima u 8. poglavlju. U cijelom radu koristimo prirodni sustav jedinica u kojem je $G = c = \hbar = 1$.

2 Opća teorija relativnosti

1905. godine Albert Einstein je promijenio opće shvaćanje prostora i vremena objavom specijalne teorije relativnosti (STR) [3] temeljene na dva principa:

1. zakoni fizike su isti u svim inercijalnim (neakceleriranim) sustavima
2. brzina svjetlosti u vakuumu je ista u svim inercijalnim sustavima.

Glavna posljedica teorije je nepostojanje apsolutnog prostora i vremena; vremenski i prostorni intervali između dva događaja nemaju apsolutno značenje, već je neovisan o opažaču prostor-vremenski (linijski) interval ds^2 definiran s

$$\triangle s^2 = -\left(\triangle t\right)^2 + \left(\triangle x\right)^2 + \left(\triangle y\right)^2 + \left(\triangle z\right)^2 . \tag{2.1}$$

Događaj je pritom točka u prostor-vremenu potpuno opisana četvorkom brojeva (t, x, y, z).

Deset godina kasnije Einstein je razradio ideju u opću teoriju relativnosti (OTR) [4] koja je danas standardna teorija gravitacije. Krenuvši od misaonog pokusa zaključuje da ne postoji preferirani koordinatni sustav, dakle, opći zakoni prirode se moraju izraziti jednadžbama koje vrijede u svakom koordinatnom sustavu - princip *opće kovarijantnosti*.

Kao prikladni matematički alat uvodi tenzore, za koje postoje opća pravila transformacije promjenom koordinatnog sustava čime je postignuta opća kovarijantnost fizikalnog zakona ako je izražen izjednačavanjem komponenti tenzora sa nulom. Linijski element (2.1) infinitezimalno udaljenih događaja se može pisati[4]

$$ds^2 = g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau , \tag{2.2}$$

gdje je $g_{\sigma\tau}$ metrički tenzor, čije su komponente funkcije od x^σ, i ima ulogu gravitacijskog polja. Prostor-vrijeme specijalne teorije relativnosti je ravno, prostor Minkowskog, čiji je metrički tenzor u globalnom inercijalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu

$$g_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\sigma\tau}, \tag{2.3}$$

dok u OTR-u prostor-vrijeme općenito nije takvo. Primijetimo da (2.2) može biti negativan, nula i pozitivan. Kažemo da je interval ds^2

- *vremenski* ako je $ds^2 < 0$
- *svjetlosni* ako je $ds^2 = 0$

[4]Sumacija po ponovljenim indeksima se podrazumijeva.

- *prostorni* ako je $ds^2 > 0$.

Isto vrijedi za svaki vektor v^μ ovisno o njegovoj normi

$$N = v^\mu v_\mu.$$

Prilikom promjene koordinatnog sustava, komponente linijskog elementa dx^σ se transformiraju

$$dx'^\sigma = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{2.4}$$

što je općenito pravilo transformacije kontravarijantnih vektora (tenzori prvog ranga s gornjim indeksima). Tenzori s donjim indeksima se nazivaju kovarijantni i za općeniti tenzor (*k, l*) tipa, gdje je k broj kontravarijantnih, a l broj kovarijantnih indeksa, vrijedi

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}.$$

Za metrički tenzor vrijedi

$$g^{\mu\nu} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\sigma$$

i njime se diže/spušta indeks tenzora:

$$T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\gamma} g_{\mu\delta} T_\gamma{}^{\beta\delta}{}_\nu.$$

Samo prostor-vrijeme je prikazano D-dimenzionalnom mnogostrukošću M, skupom koji zadovoljava sljedeća svojstva:

1. svaki $p \in M$ se nalazi barem u jednom otvorenom podskupu $O_\alpha \subset M$, tj. familija podskupova $\{O_\alpha\}$ pokriva M

2. za svaki α postoji preslikavanje $\psi_\alpha : O_\alpha \cap U_\alpha$, gdje je U_α otvoreni podskup od $\mathbb{R}^D$

3. ako se dva skupa preklapaju, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, postoji glatko preslikavanje $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ ($\circ$ označava kompoziciju) koje preslikava točke iz $\psi_\alpha [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^D$ u točke u $\psi_\beta [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^D$.

S obzirom da se obična parcijalna derivacija,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \equiv \partial_\lambda,$$

ne transformira kao tenzor, uvodimo odgovarajuću veličinu, *kovarijantnu derivaciju* ∇_λ; preslikavanje glatkog tenzorskog polja tipa (*k, l*) u tip (*k, l+1*), koje zadovoljava određena svojstva (linearnost, Leibnitzovo pravilo, komutativnost na skalarnoj funkciji,...);

$$\nabla_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = \partial_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \sum_i \Gamma^{\mu_i}_{\lambda\sigma} T^{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} - \sum_j \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_j} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_l},$$

gdje je $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ *Christoffelov simbol* (ili *afina koneksija*). Iz simetričnosti

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$$

i zahtjeva $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ imamo jedinstven Christoffelov simbol

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right).$$

Poopćenu ulogu ravne linije u zakrivljenom prostoru ima geodezik, krivulja x^μ parametrizirana s λ, koja zadovoljava geodetsku jednadžbu

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

i po njoj se giba slobodnopadajuće tijelo. Sva informacija o zakrivljenosti prostor-vremena je sadržana u Riemannovom tenzoru danom s

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.$$

Iz njega se kontrakcijama dobivaju Riccijev tenzor,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu},$$

i Riccijev skalar,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu.$$

Odnos gravitacijskog polja, $g_{\mu\nu}$, i materije određen je Einsteinovom jednadžbom

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(R - 2\Lambda \right) g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

gdje je $T_{\mu\nu}$ simetrični tenzor kojim je opisana raspodjela materije - *tenzor energije i impulsa*, a Λ je kozmološka konstanta o čijoj vrijednosti ovisi zakrivljenost svemira u asimptotskoj beskonačnosti[5] (ravan, pozitivno ili negativno zakrivljen). U Lagrangeovoj formulaciji krećemo od djelovanja iz kojeg varijacijskim principom (vidi dodatak A) dobivamo jednadžbe gibanja polja. Ukupno djelovanje sustava je zbroj djelovanja polja materije poopćeno na zakrivljeni prostor, S_M, i djelovanja gravitacijskog polja, S_H;

$$S = S_M + \frac{S_H}{16\pi}. \tag{2.6}$$

[5] Pod *asimptotska beskonačnost* mislimo na dio prostor-vremena prostorno i/ili vremenski toliko udaljeno da je izvan utjecaja lokalnih izvora gravitacije.

S_H se naziva *Hilbertovo* djelovanje i dano je s

$$S_H = \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^D x, \tag{2.7}$$

gdje je g determinanta metričkog tenzora, a $\sqrt{-g} d^D x$ je invarijantni element volumena D-dimenzionalnog prostor-vremena. Varijacijom (2.6) po $g^{\mu\nu}$ dobivamo Einsteinovu jednadžbu (2.5), a po poljima materije pripadne jednadžbe gibanja polja.

Ako je geometrija invarijantna na neku transformaciju koja preslikava mnogostrukost M 'samu u sebe' (difeomorfizam), kažemo da M ima simetriju. Pripadne simetrije metrike se zovu *izometrije*, a vektorsko polje ξ^μ koje generira tu transformaciju *Killingovo vektorsko polje.* Nužan i dovoljan uvjet za postojanje izometrije je

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.8}$$

gdje je $\pounds$ Liejeva derivacija čije je djelovanje na općeniti tenzor dano sa[6]

$$\begin{aligned} \pounds_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= t^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\sigma t^{\mu_i} + \sum_{j=1}^{l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_l} \nabla_{\nu_j} t^\sigma. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) dobivamo Killingovu jednadžbu

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0.$$

Prostor-vrijeme je stacionarno ako postoji vremenski Killingov vektor (barem u nekom dijelu prostor-vremena), a osnosimetrično ako postoji prostorno Killingovo polje zatvorenih orbita.[7] Stacionarno prostor-vrijeme sa pripadnim Killingovim vektorom ortogonalnim na hiperplohu ($D - 1$ - podmnogostrukost) je statično. Navedimo nekoliko posebno važnih simetričnih asimptotski ravnih rješenja Einsteinovih jednadžbi (sa $\Lambda = 0$). Najjednostavnija i intuitivna definicija asimptotski ravne metrike je poklapanje sa metrikom Minkowskog (2.3) u asimptotskoj beskonačnosti. Odabirom odgovarajućeg koordinatnog sustava i rastavom metrike

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

[6]Možemo reći da Liejeva derivacija $\pounds_t$ prati što se događa sa tenzorom kada se pomiče duž vektorskog polja t^μ.

[7]Orbita ili integralna krivulja vektorskog polja t^μ je krivulja $x^\mu(\lambda)$ koja rješava jednadžbu

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} = t^\mu.$$

zahtjevamo

$$\lim_{r\to\infty} h_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(r^{-1}\right), \quad \lim_{r\to\infty} \partial_\mu h_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(r^{-2}\right).$$

Za koordinatno neovisne definicije vidi npr. [5], 11. poglavlje i pripadne reference. Schwarzschildovo rješenje [6] opisuje statično, sfernosimetrično vakuumsko ($T_{\mu\nu} = 0$) prostor-vrijeme i ono je u $(t,\, r,\, \theta,\, \varphi)$ koordinatama

$$\begin{gathered} ds^2 = -f\left(r\right)dt^2 + f\left(r\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ f\left(r\right) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \end{gathered} \tag{2.11}$$

gdje je M integracijska konstanta. Primjetimo da u Schwarzschildovom rješenju postoje dvije singularnosti; u $r = 0$ i $r = 2M$. Druga singularnost je koordinatna što znači da je možemo izbjeći promjenom koordinatnog sustava, ali ukazuje na važno svojstvo prostor-vremena. Na plohi $r = 2M$ norma Killingovog vektora vremenske translacije ξ_t, $N = \xi_t\xi^t$, mijenja predznak u pozitivni što znači da smanjivanjem r na manje od $2M$ iz vremenskog, ξ_t prelazi u prostorni vektor. Posljedica je da nijedna čestica (može biti i svjetlost) koja prijeđe tu plohu zvanu *horizont događaja* ne može je prijeći u drugom smjeru, već ostaje zarobljena unutar $r < 2M$ područja i nužno završava u $r = 0$ singularnosti (prava, nekoordinantna singularnost čija je karakteristika da skalari zakrivljenosti kao Kretschmannov skalar

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

divergiraju). Područje obuhvaćeno horizontom događaja se naziva **crna rupa**. Poopćenje Schwarzschildovog rješenja na prisustvo elektromagnetskog polja je Reissner-Nordströmovo (RN) prostor-vrijeme [7,8] dano sa (2.11) i

$$f\left(r\right) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}, \qquad M,\, Q,\, P = konst.$$

Iduća važna rješenja Einsteinovih jednadžbi su Kerrovo stacionarno osnosimetrično rješenje [9], koje opisuje rotirajuću crnu rupu u vakuumu, i pripadno elektromagnetsko poopćenje, Kerr-Newmanovo rješenje [10]. U Boyer-Lindquist [11] koordinatama $(t,\, r,\, \theta,\, \varphi)$ oba rješenja možemo pisati

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{2a\sin^2\theta\left(r^2 + a^2 - \Delta\right)}{\Sigma}dtd\varphi \\ &+ \left(\frac{\left(r^2 + a^2\right)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$
$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 + P^2 - 2Mr,$$

gdje su *M*, *a*, *Q* i *P* konstante i $Q = P = 0$ odgovara Kerrovoj metrici.

Da bi shvatili fizikalno značenje konstanti koje se pojavljuju u metrikama, definirajmo neke veličine za koje vrijede, kako ćemo vidjeti, zakoni vrlo slični Gaussovom u elektrostatici. Tražeći izraz za ukupnu energiju gravitacijskog polja Arnowitt, Deser i Misner [12] su u Hamiltonovoj formulaciji opće relativnosti definirali generatore vremenske translacije u asimptotski ravnom prostor-vremenu i pripadnu očuvanu veličinu, poznatu kao ADM energija (ili ADM masa),

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma} \sigma^i \left(\partial_j h^j{}_i - \partial_i h^j{}_j \right), \tag{2.13}$$

identificirali sa ukupnom energijom. Metrika je pritom u obliku (2.10), sa malim vrijednostima $h_{\mu\nu}$ u prostornoj beskonačnosti u kojoj se integrira. γ u (2.13) je determinanta inducirane metrike γ_{ij} na integracijskoj površini $\partial\Sigma$, tipično 2-sferi u prostornoj beskonačnosti i pritom su *i*, *j* prostorni indeksi. Za Schwarzschildovo rješenje dobivamo $E_{ADM} = M$, pa za Schwarzschildovu crnu rupu M odgovara njenoj masi. Potvrda tog zaključka se može dobiti usporedbom kretanja testnog tijela[8] u Schwarzschildovom i Newtonovom gravitacijskom polju zadano istim parametrom *M*. Isto vrijedi za konstantu *M* u RN i (2.12) rješenjima. Konstanta *Q* odgovara električnom (analogno *P* odgovara magnetskom) naboju pripadne crne rupe za kojeg vrijedi

$$Q = -\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma} \sigma_\nu n_\mu F^{\mu\nu},$$

gdje $\partial\Sigma$, γ i σ_ν imaju isto značenje kao u E_{ADM}, n_μ je normala na prostornu hiperplohu, a $F^{\mu\nu}$ je tenzor snage elektromagnetskog polja. Kada postoji rotacijski Killingov vektor R^ν možemo definirati očuvani zamah

$$J = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma} \sigma_\mu n_\nu \nabla^\mu R^\nu. \tag{2.14}$$

Ako izračunamo *J* za Kerrovu metriku dobivamo aM, dakle a je zamah po jedinici mase. Isti zaključak opet možemo dobiti na drugi način, usporedbom asimptotskog oblika $g_{t\varphi}$ komponente Kerrove metrike i one uzrokovane rotirajućim masenim tijelom, u limesu $r \to \infty$.

Maksimalno simetrično vakuumsko rješenje Einsteinovih jednadžbi sa pozitivnom kozmološkom konstantom Λ (odgovara pozitivnoj vakuumskoj energiji i negativnom

[8]Testno tijelo je ono koje samo ne pridonosi gravitacijskom polju.

tlaku) se naziva de Sitterovo (dS) prostor-vrijeme, a sa negativnom Λ (odgovara negativno vakuumskoj energiji i pozitivnom tlaku) anti-de Sitterovo (AdS).

Spomenimo još *energijske uvjete*, koordinatno nezavisna ograničenja na tenzor energije i impulsa koje je nekad nužno pretpostaviti u dokazivanju raznih teorema, a ovisno o slučaju, pretpostavljamo da vrijede iz fizikalnih razloga. Uz oznaku t^μ za proizvoljni vremenski, i l^μ svjetlosni vektor, definiramo:

- *slabi energijski uvjet (WEC[9]):*
$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geqslant 0,$$
- *svjetlosni energijski uvjet (NEC[10]):*
$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geqslant 0,$$
- *jaki energijski uvjet (SEC[11]):*
$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geqslant \frac{1}{2}T^\alpha{}_\alpha t^\sigma t_\sigma,$$
- *dominantni (DEC[12]):* WEC i
$$T_{\mu\nu}T^\nu{}_\alpha t^\mu t^\alpha \leqslant 0.$$

Dok su WEC, NEC i DEC uvjeti općenito vezani za pozitivnost energije i granične vrijednosti tlakova pripadne materije, SEC implicira da je gravitacija uvijek privlačna.

Vezano za energijske uvjete i ADM energiju vrijedi sljedeći teorem [13–15]:

Teorem *o pozitivnosti energije(PET)*: ADM energija nesingularnog, asimptotski ravnog prostor-vremena koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe i DEC je nenegativna.

Napomenimo da se većina rezultata o kojima ćemo govoriti odnosi na opću teoriju relativnosti, a iz nje smo i izveli pojam crnih rupa. Ipak, široko je rasprostranjeno mišljenje da OTR nije u potpunosti kompletna, tj. da na vrlo visokim skalama energije (dakle, i zakrivljenosti) postoje korekcije, a ono potječe iz raznih pokušaja ujedinjenja gravitacije sa ostalim fizikalnim silama i kvantnom teorijom, objašnjenja tamne energije, kao i izbjegavanja singularnosti. Spomenut ćemo neke rezultate u općenitijem, skalar-tenzor modelu gravitacije i u teorijama struna. Posebnost Bekensteinovih dokaza je upravo općenitost; nevezanost za konkretnu teoriju gravitacije. Za

[9] *Weak Energy Condition*
[10] *Null Energy Condition*
[11] *Strong Energy Condition*
[12] *Dominant Energy Condition*

dokazivanje odsutnosti kose tu su metodu kasnije koristili Bhattacharya i Lahiri kojima ćemo se vratiti u 5. poglavlju.[13]

[13] Osim literature navedene u tekstu, u ovom poglavlju je korišteno i [5, 16–19].

3 Teoremi jedinstvenosti i definicija kose

3.1 Teoremi jedinstvenosti

Fizikalni proces nastajanja crnih rupa je potpun gravitacijski kolaps, npr. kada se u masivnoj zvijezdi prestane odvijati fuzija moguće je gravitacijsko prevladavanje nad tlakom zvijezde. S obzirom da bi neravnotežna raspodjela čestica i polja u okolini crne rupe, do koje može doći kolapsom, rezultirala njihovom preraspodjelom zajedno sa zračenjem energije od ili prema crnoj rupi i da polja i čestice u okolini crne rupe imaju konačnu energiju, općeprihvaćena je pretpostavka da prostor-vrijeme okoline crne rupe (prostor-vrijeme izvan horizonta crne rupe), s vremenom asimptotski teži stacionarnom stanju. Dvije fizikalne pretpostavke za rezultat gravitacijskog kolapsa su regularnost horizonta i okoline, te da je okolina vakuum (ili elektrovakuum–područje u kojem se nalazi elektromagnetsko polje, ali nema izvora naboja i masa). Argument je sljedeći: savršeno simetrična zvijezda rezultira kolapsom u Schwarzschildovu (ili Reissner-Nordströmovu) crnu rupu, dok u prisustvu asimetrije ne očekujemo da ona uzrokuje singularnosti dok je zvijezda još konačne gustoće, a nakon smanjivanja radijusa zvijezde ispod njenog gravitacijskog radijusa (ispod radijusa na koje postaje crna rupa), njime je potpuno odvojena od okoline pa, dakle, ne bi trebala uzrokovati tako drastične promjene u tom području. Također, nakon dovoljno vremena očekujemo da sva materija iz okoline prijeđe horizont ili se izrači u asimptotski daleko područje.

Israel je dokazao dva teorema vezana za statične crne rupe, od kojih se jedan odnosi na vakuumska, a drugi na vakuumska rješenja u prisustvu elektromagnetskog polja. Ovdje ih izlažemo u sažetom obliku [20, 21]:

- Među svim statičnim, asimptotski ravnim vakuumskim (elektrovakuumskim) prostor-vremenima sa zatvorenim, jednostruko povezanim ekvipotencijalnim površinama $g_{00} = konst.$, Schwarzschildovo (RN) rješenje je jedino koje ima nesingularnu površinu beskonačnog crvenog pomaka $g_{00} = 0$.

Slično je za rotirajuće crne rupe, pod pretpostavkom da vrijedi kauzalnost, tj. da nema zatvorenih vremenskih ili svjetlosnih krivulja, Carter dokazao [22]:

- Moguća vakuumska rješenja za osnosimetričnu okolinu crne rupe čine diskretan skup kontinuiranih obitelji, od kojih svaka ovisi barem o jednom, a najviše o dva nezavisna parametra.

Robinson [23] je ubrzo dokazao da postoji samo jedna takva obitelj; Kerrova sa $|a| < M$.

3.2 Definicija kose

Sada vidimo kako je došlo do pretpostavke da crnu rupu u konačnom stanju u potpunosti određuju njena masa, naboj i zamah. Da bi shvatili što predstavlja kosa pogledajmo kako opisujemo gravitacijsko polje proizvoljne distribucije materije. Korisno je imati na umu analogiju sa elektromagnetskim poljem. Potencijal V elektromagnetskog polja neke raspodjele naboja $\rho(\mathbf{r}')$ možemo razviti u multipolni razvoj u potencijama od $1/r$, tj. po multipolnim momentima elektromagnetskog polja:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n P_n(\cos\theta')\,\rho(\mathbf{r}')d\tau',$$

gdje crtane koordinate prekrivaju distribuciju naboja volumnog elementa $d\tau'$, a P_n su Legendreovi polinomi. Pritom je prvi član (*n=0*) monopolni doprinos, drugi (*n=1*) je dipolni itd.

Sličnom logikom, ali tehnički zahtjevnije, gravitacijsko polje možemo prikazati u multipolnom razvoju [24] po momentima mase i struje, analognima električnim i magnetskim momentima u elektromagnetizmu. Za ilustraciju ćemo dati primjer na Kerrovoj metrici, u kojoj spomenuti momenti odgovaraju masi M i zamahu $J = ma$:

$$g_{tt} = \frac{-r^2+2mr-a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = -1 + \frac{2m}{r} - \frac{2ma^2\cos^2\theta}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right),$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2ma\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = -\frac{2ma\sin\theta}{r^2} + \frac{2ma^3\sin\theta\cos^2\theta}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

$$g_{rr} = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2-a^2\sin^2\theta}{r^2} + \frac{8m^3-2ma^2(2-\cos^2\theta)}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2} = 1 + \frac{a^2-a^2\sin^2\theta}{r^2},$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{r^2+a^2}{r^2} + \frac{2m}{r}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right) = 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2ma^2\sin^2\theta}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right).$$

Usporedbom sa općim oblikom razvoja (vidi [24] str. 333 i 334) možemo iščitati doprinos pojedinog momenta (konkretno za ovaj oblik maseni monopolni, m, i strujni dipolni, ma , a transformacijom koordinata i više momente), ali još zanimljivije je što je takav razvoj uopće moguć i u potpunosti je određen sa dva parametra (tri ako crna rupa ima naboj Q). Kao što smo rekli, ukupna masa, zamah i naboj crne rupe definirani su integralom po prostornoj beskonačnosti i kao takvi su tri primjera *kose*, kao i svako dodatno polje, ako postoji, koje trne dovoljno sporo da pridonosi takvom integralu. Iako svaka crna rupa očito ima kosu (barem masu), kada govorimo o teoremima o nepostojanju kose (NH-teoremi[14]) zanemarujemo M, J i Q kao kose.

Napomenimo da se u literaturi nekad razlikuje sekundarna i primarna kosa; kod sekundarne se dodatna informacija može prikazati preko M, J i Q, a primarna je povezana sa novim parametrom (npr. barionski broj, izospin, hipernaboj).

3.3 Motivacija

Zašto nas zanima postojanje kose? Nekoliko je odgovora na to pitanje. Kao što smo rekli, crne rupe su vrlo simetrične, i za pojedinu simetriju i parametre rješenja, često su jedinstvene. To znači da će jedno jedinstveno stanje biti konačno stanje beskonačno mnogo različitih početnih uvjeta; cijela informacija o materiji čijim je kolapsom nastala crna rupa i onoj naknadno upaloj je svedena na tri broja. Dovoljno je usporediti vrlo masivnu česticu i vrlo malu crnu rupu. Kako masa čestice raste, u jednom trenu postaje crna rupa bez informacije o svojstvima čestice iz koje je nastala. Neutrinska kosa bi mogla nositi informaciju o leptonskom broju crne rupe, a mezonska o barionskom, što znači očuvanje (barem dijela) informacije, a i mogućnost drugog tipa interakcije sa crnim rupama, osim gravitacijske. S tim u vezi, crne rupe su solitonska rješenja[15] Einsteinovih jednadžbi, kao čestice u drugim teorijama polja pa bi dodatni naboji na njima odgovarali pobuđenim stanjima.

Drugi je dio zanimanja za kosu vezan uz moguća opažanja (više o tome u 7. poglavlju) i provjeru teorija. Opća teorija relativnosti je dobro testirana, osim u području ekstremne gravitacije. S obzirom da različite teorije daju različite modele crnih rupa i okolnog prostor-vremena, daju i različita predviđanja rezultata opažanja gibanja zvijezda, plina i svjetlosti blizu horizonta događaja. Na isti je način moguće i otkrivanje novih polja u prirodi, što je također dio motivacije za istraživanje crnih rupa, teorijski i opažački.

[14] *no hair theorems*

[15] Ugrubo, soliton je stabilno rješenje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi.

4 Bekensteinovi dokazi

Želimo provjeriti mogućnost postojanja polja u okolini statične gole crne rupe. Okolinom crne rupe $\mathcal{E}$ smatramo cijelo prostor-vrijeme izvan horizonta događaja $\mathcal{H}$, a pod „gola crna rupa" podrazumijevamo da nema vanjskih izvora zračenja ili materije. Također pretpostavljamo da je prostor-vrijeme asimptotski ravno, a horizont zatvorena svjetlosna hiperploha neodređene topologije. U cijelom radu koristimo konvenciju da grčki indeksi idu od 0 do 3, a latinični od 1 do 3, osim u poglavlju 6 gdje je odabir indeksa u skladu sa apstraktnom indeksnom notacijom opisanom u dodatku D. Statičnost nam daje uvjete na metriku: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, $g_{0i} = 0$ (x^0 je vremenska koordinata).

Djelovanje gustoće lagranžijana $\mathcal{L}$ skupa polja ϕ_k, minimalno vezanih za gravitaciju (zakrivljenost prostor-vremena ne ulazi direktno u lagranžijan) je dano sa

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x. \tag{4.15}$$

Varijacijskim principom dobivamo jednadžbu gibanja polja[16] (vidi dodatak A):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} = 0. \tag{4.16}$$

Množeći je s $d^4x\phi_k\sqrt{-g}$ i integrirajući po okolini crne rupe $\mathcal{E}$ (slijedimo Bekensteinov dokaz iz [25]) dobivamo

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} \phi_k\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{4.17}$$

Drugi član u (4.17) možemo napisati kao:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}\phi_k\right)_{,\mu} d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x = \\
&= \int\limits_{\mathcal{E}} \sqrt{-g}\nabla_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k\right)d^4x - \int\limits_{\varepsilon} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{E}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili Stokesov teorem (A.2), a $d\sigma_\mu$ je element hiperplohe koja je rub okoline, $\partial\mathcal{E}$, i pritom se $\partial\mathcal{E}$ sastoji od horizonta i beskonačnosti. Jednadžba (4.17) prelazi u

$$\sum_k \left(\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k\sqrt{-g}d^4x + \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\partial\mathcal{E}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k\right) = 0. \tag{4.18}$$

[16]Oznaka: $\partial_\mu T_{\alpha\beta\gamma\ldots} \equiv T_{\alpha\beta\gamma\ldots,\mu}$, $\nabla_\mu T_{\alpha\beta\gamma\ldots} \equiv T_{\alpha\beta\gamma\ldots;\mu}$

Definiramo

$$b^{\mu} \equiv \sum_k \phi_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}$$

i rastavljamo integral po rubu:

$$-\int_{\mathcal{H}} b^{\mu} d\sigma_{\mu} - \int_{\infty} b^{\mu} d\sigma_{\mu} + \sum_k \left(\int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \phi_k \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} d^4x \right) = 0. \quad (4.19)$$

Sada ćemo pokazati da prva dva člana u (4.19) iščezavaju, a da je izraz u zagradi jednak nuli samo ako je $\phi_k = 0$ svugdje u $\mathcal{E}$. Iz pretpostavke da je $\mathcal{H}$ svjetlosna površina i da se radi o statičnom slučaju imamo

$$g_{\mu\nu} d\sigma^{\mu} d\sigma^{\nu} \overset{\mathcal{H}}{=} 0,$$

tj.

$$g_{ij} d\sigma^{i} d\sigma^{j} \overset{\mathcal{H}}{=} 0. \quad (4.20)$$

Koristeći Schwarz-Cauchy-Bunyakovsky (SCB) nejednakost imamo:

$$\left(g_{ij} d\sigma^{i} b^{j}\right)^2 \leq \left(g_{ij} d\sigma^{i} d\sigma^{j}\right) \left(g_{ij} b^{i} b^{j}\right) \overset{\mathcal{H}}{=} 0, \quad (4.21)$$

odakle slijedi

$$0 \overset{\mathcal{H}}{=} g_{ij} d\sigma^{i} b^{j} \overset{\mathcal{H}}{=} g_{\mu\nu} d\sigma^{\mu} b^{\nu}, \quad (4.22)$$

tj. prvi član jednadžbe (4.19) propada.
Pri tome smo pretpostavili:

1. g_{ij} je pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$, a pozitivno semidefinitna na $\mathcal{H}$
Dokaz: Asimptotska ravnost daje $g_{00} = -1$ asimptotski. g_{00} je kvadrat Killingovog vektora vremenske translacije i pretpostavljamo invarijantnost i neprekidnost u okolini crne rupe. Ako postoji ploha na kojoj g_{00} mijenja predznak, zbog neprekidnosti mora biti zatvorena. $g_{00} = 0$ ploha statične metrike [26] je uvijek svjetlosna ploha, po početnoj pretpostavci nije singularna pa je ili horizont ili dio njega. Zaključujemo $g_{00} < 0$ u okolini, osim na mogućoj izoliranoj plohi koja ima $g_{00} < 0$ s obje strane, a $g_{00} = 0$ na njoj. Slijedi: $g_{00} \leqslant 0$ na i izvan horizonta. Nadalje, ako je dl prostorna udaljenost između dviju točaka odvojenih koordinatnim intervalom dx^i, ona je dobro definirana s $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Očito g_{ij} je pozitivno definitna matrica, osim na horizontu gdje je pozitivno semidefinitna.

2.$g_{ij} b^i b^j < \infty$ na $\mathcal{H}$; dokazujemo kasnije u konkretnom slučaju, ovisno o polju.
Pri razmatranju integrala

$$\int_{\infty} b^{\mu} d\sigma_{\mu}$$

gledamo asimptotsko ponašanje polja. Za bezmasena polja u limesu $r \to \infty$ vrijedi $\phi \propto 1/r$ iz čega slijedi

$$b^\mu \propto \phi\phi^{,\mu} \propto \frac{1}{r^3},$$

a za masivna polja je $\phi \propto \frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r}$ pa imamo

$$b^\mu \propto \mathrm{e}^{-mr}.$$

U oba slučaja b^μ trne u prostornoj beskonačnosti. U vremenskoj beskonačnosti $d\sigma^i = 0$ uvijek i $b^0 = 0$ treba pokazati za svako polje iz čega slijedi

$$\int_\infty b^\mu d\sigma_\mu = 0.$$

Jednadžba (4.19) nam sada daje

$$\sum_k \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k + \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0, \tag{4.23}$$

što je najdalje koliko možemo ići bez specificiranja polja.

4.1 Realno skalarno polje

Prvi slučaj koji ćemo gledati je realno skalarno polje ϕ mase $m > 0$ i potencijala $V = m^2\phi^2$. Pripadna gustoća lagranžijana je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + V(\phi)\right).$$

Uvrštavanje

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \phi} \equiv -\frac{1}{2}V'$$

i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = -\phi^{,\mu}$$

u (4.16) daje

$$\phi_{,\mu}{}^{;\mu} - \frac{1}{2}V' = \phi_{,\mu}{}^{;\mu} - m^2\phi = 0, \tag{4.24}$$

što je Klein-Gordonova jednadžba poopćena na zakrivljeni prostor.
Treba pokazati da je $b^2 = \phi^2\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}$ omeđeno na $\mathcal{H}$. Tenzor energije i impulsa skalarnog polja dan je sa

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + V\right), \tag{4.25}$$

iz čega lako dobijemo neke skalarne veličine:

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi^{,\mu} - \tfrac{1}{2} \cdot 4 \left(\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + V\right) = -\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - 2V,$$

$$T^2 = \left(\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right)^2 + 4V^2 + 4V\left(\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right),$$

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \left(\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right)^2 + V^2 + V\left(\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right),$$

preko kojih možemo napisati:

$$\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} = \sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2} \tag{4.26}$$

$$m^2\phi^2 = -\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2}. \tag{4.27}$$

Iz toga što su T i $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ fizikalni skalari pa moraju biti regularni na $\mathcal{H}$ slijedi da je b^2 regularno na $\mathcal{H}$.Možemo koristiti jednadžbu (4.23) i s obzirom da se radi o statičnom slučaju ($\phi_{,0} = 0$, $b^0 = -\phi\phi^{,0} = 0$) imamo:

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(g_{ij}\phi^{,i}\phi^{,j} + m^2\phi^2\right)\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{4.28}$$

Dokazali smo da je g_{ij} pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$ iz čega izlazi da je jedini način da integral u (4.28) iščezava taj da ϕ iščezava u cijeloj okolini crne rupe.

Ako je masa polja $m = 0$ (4.27) više ne osigurava omeđenost b^2 na $\mathcal{H}$. Također, (4.24) određuje ϕ do na aditivnu konstantu. Problem rješavamo fizikalnim argumentom; ako stavimo rubni uvjet takav da ϕ iščezava asimptotski, možemo interpretirati ϕ^2 kao invarijantnu gustoću vjerojatnosti, koja je kao takva fizikalan skalar, regularna na $\mathcal{H}$. Spomenuta aditivna konstanta ne mora iščezavati, ali ne pojavljuje se u fizikalnim veličinama pa je neobservabilna. Dobivamo isti zaključak kao u slučaju masivnog polja, a to je da polje iščezava u $\mathcal{E}$, a za taj slučaj imamo i Chaseov rezultat iz 1970. [27], a to je da polje postaje singularno na horizontu što je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom o regularnosti horizonta.

4.2 Kompleksno skalarno polje

Sljedeći dokaz odnosi se na kompleksno, **električki nabijeno** skalarno polje ψ, minimalno vezano za gravitaciju i elektromagnetsko polje opisano vektorskim potencijalom A_μ (i tenzorskim poljem $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$). Pripadna gustoća lagranžijana dana je s

$$\mathcal{L} = -\left(d^{\alpha}d^{*}_{\alpha} + m^{2}\psi\psi^{*}\right) - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{4.29}$$

gdje je e naboj polja i

$$d_{\alpha} = \psi_{,\alpha} - ieA_{\alpha}\psi = D_{\alpha}\psi,$$

a D_{α} je kovarijantna derivacija. Pripadni tenzor energije i impulsa je

$$T_{\mu\nu} = d_{\mu}d^{*}_{\nu} + d^{*}_{\mu}d_{\nu} - \left(d^{\alpha}d^{*}_{\alpha} + m^{2}\psi\psi^{*}\right)g_{\mu\nu}. \tag{4.30}$$

Invarijantnost teorije na baždarnu transformaciju

$$\psi \to \psi e^{ie\Lambda}, \quad A_{\mu} \to A_{\mu} + \Lambda_{,\mu} \tag{4.31}$$

vodi na postojanje očuvane električne struje (vidi dodatak B)

$$j_{\mu} = ie\left(\psi d^{*}_{\mu} - \psi^{*}d_{\mu}\right). \tag{4.32}$$

Zbog statičnosti možemo odabrati baždarenje u kojem je $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$. Također vrijedi $j^i = 0$ i

$$j^{0}_{,0} = 0 = g^{00}ie\left(\psi d^{*}_{0} - \psi^{*}d_{0}\right)_{,0}. \tag{4.33}$$

Izjednačavajući realni dio izraza (4.33) s nulom dobivamo:

$$\psi\psi^{*}_{,00} = \psi^{*}\psi_{,00}$$

i ako pretpostavimo $\psi = \zeta\left(x^{\mu}\right) \cdot \mathrm{e}^{i\phi(x^{\mu})}$ dobivamo $\phi_{,00} = 0$, tj. $\phi = \omega x^0 + \varphi$, gdje su ω i φ realne konstante. Iz imaginarnog dijela

$$\Im(4.33) = \left(\psi\psi^{*}\right)_{,0} = 0$$

slijedi da je $\psi\psi^{*}$ neovisno o x^0. Dakle, odabirom $\Lambda = -\frac{\left(\omega x^0 + \varphi\right)}{e}$ možemo dobiti da je ψ realno i vremenski neovisno polje, bez mjenjanja uvjeta na A_{μ}. Za

$$b^{\mu} = \sum_{\psi_k = \psi, \psi*} \psi_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{k,\mu}}$$

nam treba:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} = -\psi^{*,\mu} - ieA^\mu \psi^*, \tag{4.34}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\mu}} = -\psi^{,\mu} - ieA^\mu \psi, \tag{4.35}$$

što daje $b^\mu = -\left(\psi d^{\mu *} + \psi^* d^\mu\right)$.

Slijedi

$$b^0 = -\left(\psi\psi^{*,0} + ieA^0\psi\psi^* + \psi^*\psi^{,0} - ieA^0\psi^*\psi\right) = 0,$$

$$b^i = \left(\psi\psi^{*,i} + \psi^*\psi^{,i}\right) = -\left(\psi\psi^*\right)_{,i},$$

što je realna veličina.

Kako bi pokazali da je $b^\mu b_\mu$ omeđeno na horizontu računamo

$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = d^\mu d^*_\mu + d_\mu d^{\mu *} - 4\left(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*\right) = -2d^\mu d^*_\mu - 4m^2\psi\psi^*$

$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 2|d^\mu d_\mu|^2 + \frac{3}{4}Td^\mu d^*_\mu + \frac{T^2}{16} + \frac{1}{2}\left(d^\mu d^*_\mu\right)^2$

$b^\mu b_\mu = \psi\psi^*\left(d^\mu d_\mu + d^{\mu *}d^*_\mu + 2d^\mu d^*_\mu\right).$

Iz omeđenosti $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ na horizontu $d^\mu d_\mu$ i $d^\mu d^*_\mu$ moraju biti omeđeni. Iz toga i regularnosti skalara T vidimo da i $\psi\psi^*$ mora biti regularno iz čega slijedi da je i $b^\mu b_\mu$ omeđeno na horizontu. Istim zaključivanjem kao prije dobivamo

$$\int_{\partial\mathcal{E}} b^\mu d\sigma_\mu = 0.$$

Uz izraze (4.34) i (4.35) računamo još

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = ieA^\mu\psi^*_{,\mu} - e^2A^2\psi^* - m^2\psi^*$$

i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = -ieA_\mu\psi_{,\mu} - e^2A^2\psi - m^2\psi,$$

čime jednadžba (4.23) postaje

$$\begin{aligned}&\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\psi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} + \psi_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} + \psi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} + \psi^*_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\mu}}\right\}\\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-2e^2A^2\psi^2 - 2m^2\psi^2 - 2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - 2ieA^\mu\psi\psi^*_{,\mu}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Koristeći, otprije poznato, $A^i = 0$ i $\psi_{,0} = \psi^*_{,0} = 0$ dobivamo:

$$\int_{\mathcal{E}} \left\{ g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + \left[m^2 + g_{00}\left(eA^0\right)^2 \right] \psi^2 \right\} \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{4.36}$$

Ranije smo pokazali $g_{00} \leq 0$ i g_{ij} je pozitivno definitna u $\mathcal{E}$. Ako $A^0 \neq 0$ izraz pod integralom nije pozitivno definitan. Sad ćemo pokazati da u našem baždarenju za $\psi \neq 0$ mora biti $A^0 = 0$. Vratimo se očuvanoj struji (4.32);

$$j^0 = -2e^2 A^0 |\psi|^2. \tag{4.37}$$

$|\psi|^2$ interpretiramo kao gustoću vjerojatnosti nabijenih skalarnih mezona, čija je invarijantna gustoća naboja $\sqrt{-j^\mu j_\mu}$. Specifični naboj polja (po mezonu), što je fizikalni skalar, dakle omeđen, je:

$$\frac{\sqrt{-j^\mu j_\mu}}{|\psi|^2} = \frac{\sqrt{-g_{00} j^0 j^0}}{|\psi|^2} = \sqrt{-g_{00}\left(2e^2A^0\right)^2}.$$

Zaključujemo da je $g_{00}\left(A^0\right)^2$ omeđeno. Dalje računamo b^μ za elektromagnetsko polje:

$$b^\mu_{EM} = A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} = \frac{-1}{16\pi} A_\alpha g^{\lambda\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial A_{\alpha,\mu}} \left[A_{\nu,\lambda} - A_{\lambda,\nu}\right]\left[A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}\right] \tag{4.38}$$

$$= \frac{-1}{16\pi}\left(4A_\nu A^{\nu,\mu} - 4A_\nu A^{\mu,\nu}\right) = \frac{-1}{4\pi} A_\nu F^{\mu\nu} \tag{4.39}$$

Lako je pokazati iz (4.38) da vrijedi $b^0_{EM} = 0$. Ista razmatranja kao prije daju regularnost $b^\mu b_\mu$ na $\mathcal{H}$. Jednadžba (4.23) za elektromagnetsko polje je

$$\int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} A_\mu + A_{\mu,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{4.40}$$

Uvrštavajući

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = e^2 \psi \psi^* g^{\alpha\beta} \left(\delta^\mu_\beta A_\alpha + A_\beta \delta^\mu_\alpha \right) = -2e^2 \psi^2 A^\mu$$

i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{1}{16\pi} \cdot 4 \left(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu} \right) = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}$$

u (4.40), i korištenjem opet $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$, dobivamo:

$$\int_{\mathcal{E}} g_{00} \left[\frac{1}{4\pi} g_{ij} F^{0i} F^{0j} + 2\left(eA^0\right)^2 |\psi|^2 \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{4.41}$$

Ako $g_{00} \neq 0$, što je uvjet da izraz u (4.36) nije pozitivno definitan, mora biti $A^0 \overset{\mathcal{E}}{=} 0$. Zaključujemo da polje ψ iščezava u okolini crne rupe. Iz invarijantnosti na baždarnu transformaciju (4.31) slijedi da rezultat vrijedi u svim baždarenjima.

KOMLEKSNO NEUTRALNO SKALARNO POLJE. U slučaju kada je ψ kompleksno, neutralno skalarno polje postupak je isti kao za nabijeno, ali s minimalnim vezanjem polja ψ za izmišljeno polje A_μ. To polje neće doprinositi fizikalnim veličinama ($T^{\mu\nu}$ tenzoru) zbog baždarne invarijantnosti teorije, a vodi na isti rezultat.

4.3 Vektorsko polje

Analiza je vrlo slična za neutralno, realno vektorsko polje B_μ mase $m > 0$. Pripadni tenzor polja je

$$H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}, \tag{4.42}$$

a gustoća gustoća lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}}{16\pi} - m^2\frac{B^\mu B_\mu}{8\pi}. \tag{4.43}$$

Ponovo imamo minimalno vezanje za gravitaciju i lako dobivamo Proca jednadžbu u zakrivljenom prostoru:

$$H^{\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 B^\mu = 0. \tag{4.44}$$

Dok je $H^{\mu\nu}$ tenzor potpuno analogan $F^{\mu\nu}$, B^μ nije baždarno invarijantan kao A^μ, nego je jednadžbom (4.44) potpuno određen iz $H^{\mu\nu}$, što znači da je fizikalno polje. Izračunamo li

$$b^\mu \equiv B_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_{\nu,\mu}} = -\frac{H^{\mu\nu}B_\nu}{4\pi}$$

vidimo da je $b^0 = 0$ u statičnom slučaju, a $b_\mu b^\mu$ fizikalan skalar. Istim postupkom kao ranije dobivamo:

$$\int_{\mathcal{E}} g_{00}\left[g_{ij}H^{0i}H^{0j} + m^2\left(B^0\right)^2\right]\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{4.45}$$

Iz svojstava metričkih elemenata zaključujemo da H^{0i} i B^0 iščezavaju svugdje u $\mathcal{E}$.

Ako je polje bezmaseno B^μ je baždarno invarijantan, nije fizikalno polje i time ne osigurava regularnost veličine $b_\mu b^\mu$. Takvo rješenje sfernosimetrične statične crne rupe sa bezmasenim neutralnim vektorskim poljem već je poznato kao Reissner-Nordströmova crna rupa.

Za kompleksno nabijeno vektorsko polje možemo, sličnim postupkom kao za skalarno polje, bez dodatnih pretpostavki, pokazati da slijedi isti rezultat, odnosno, ako sve zbrojimo, pokazali smo da *statična, sfernosimetrična crna rupa ne može imati masivnu ni bezmasenu skalarnu i masivnu vektorsku kosu, nabijenu, ni neutralnu.* Vidjet ćemo kasnije da pri zaključivanju treba biti oprezan i imati na umu koje smo pretpostavke uzeli u obzir.

4.4 Stacionarno skalarno polje

Iste, 1972. godine Bekenstein je objavio da „crna rupa u svom konačnom stanju ne može biti okružena vanjskim skalarnim, vektorskim ili spin-2 mezonskim poljem" [28,29]. Do tada su Hartle [30] i Teitelboim [31] već razmatrali mogućnost interakcije s crnom rupom slabom interakcijom, izmjenom neutrina. Hartle je zaključio da je takva interakcija nemoguća za Kerrovu crnu rupu, a Teitelboim za sfernosimetričnu crnu rupu zaključuje kako joj se ne može mjeriti leptonski broj izvana. Uz spomenuti Bekensteinov rezultat, koji ćemo u nastavku dokazati, a koji upućuje na neočuvanje barionskog broja u fizici crnih rupa jer nema načina za vanjskog opažača da izmjeri koliko je bariona prešlo horizont, crne rupe se čine vrlo jednostavne (Kerr-Newman rješenja), a $T_{\mu\nu}$ samo elektromagnetske prirode.

Sada ćemo razmotriti masivno skalarno mezonsko polje u okolini, $\mathcal{E}$, **stacionarne rotirajuće** ($g_{\mu\nu,0} = 0$) crne rupe. Po Hawkingovom teoremu [32] znamo da je okolina osnosimetrična, a horizont $\mathcal{H}$ homeomorfan sferi. Metriku okoline možemo pisati u obliku:

$$ds^2 = W\left(d\rho^2 + dz^2\right) + Adt^2 + Bd\varphi^2 + Cdtd\varphi, \tag{4.46}$$

gdje su W, A, B i C neovisni o vremenskoj koordinati t i kutu simetrije φ. Zahtjev za kauzalnošću u okolini (odsustvo zatvorenih vremenskih i svjetlosnih krivulja) vodi na zaključak $W \geqslant 0$ i može iščezavati samo u izoliranim točkama $\rho - z$ ravnine.

Horizont je, po definiciji, nesingularna svjetlosna hiperploha normale n_μ. Zbog simetrija vrijedi $n_t = n_\varphi = 0$;

$$n_\mu n^\mu = 0 = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\rho\rho} n_\rho n_\rho + g^{zz} n_z n_z.$$

Dobivamo:

$$W^{-1}\left(d\rho^2 + dz^2\right) \overset{\mathcal{H}}{=} 0. \tag{4.47}$$

Skalarno polje ψ mase m zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu:

$${\psi_{,\mu}}^{;\mu} - m^2\psi = 0. \tag{4.48}$$

Iz simetrija ($\psi_{,t} = \psi_{,\varphi} = 0$) slijedi:

$${\psi_{,\rho}}^{;\rho} + {\psi_{,z}}^{;z} - m^2\psi = 0. \tag{4.49}$$

Množenjem s $\psi\sqrt{-g}d^4x$ i integracijom po $\mathcal{E}$ dobivamo

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left[\left(W^{-1}\psi_{,\rho}\sqrt{-g}\right)_{,\rho}\psi + \left(W^{-1}\psi_{,z}\sqrt{-g}\right)_{,z}\psi - m^2\psi^2\sqrt{-g}\right] d^4x = 0. \tag{4.50}$$

Prvi član možemo napisati kao

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(W^{-1}\psi_{,\rho}\psi\right)_{,\rho}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \psi_{,\rho}^2 W^{-1}\sqrt{-g}d^4x = \int\limits_{\partial\mathcal{E}} W^{-1}\psi_{,\rho}\psi n_\rho d\sigma - \int\limits_{\mathcal{E}} \psi_{,\rho}^2 W^{-1}\sqrt{-g}d^4x,$$

gdje smo koristili Stokesov teorem. n_μ je normala na rub okoline $\partial\mathcal{E}$ ($\mathcal{H}$ i beskonačnost), a $n_\mu d\sigma$ vektorski element 3D hiperplohe $\partial\mathcal{E}$. Analogno pišemo i drugi član u (4.50) koja postaje

$$\int\limits_{\partial\mathcal{E}} W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)d\sigma = \int\limits_{\mathcal{E}} \left[\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)W^{-1} + m^2\psi^2\right]\sqrt{-g}d^4x. \tag{4.51}$$

Želimo pokazati da integral po rubu $\partial\mathcal{E}$ iščezava. Da integral po beskonačnosti iščezava argumentiramo kao i u statičnom slučaju, asimptotskim ponašanjem polja. Koristeći relacije (4.26) i (4.27) možemo izraziti $\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\psi^2 W^{-1}$ preko fizikalnih veličina, regularnih na horizontu. SCB nejednakost nam daje

$$\left[W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)\right]^2 \leqslant W^{-2}\psi^2\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\left(n_\rho^2 + n_z^2\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0 \tag{4.52}$$

Zadnja jednakost dolazi iz (4.47). Ostaje nam vidjeti da je $d\sigma$ nesingularan. Moraju postojati Kruskalove koordinate [33] u kojima je horizont nesingularan i u kojima možemo izraziti $n_\mu d\sigma$. U tim je koordinatama $d\sigma$ očito nesingularan, a kako je invarijanta slijedi da je nesingularan i u početnim koordinatama. Iz (4.52) i činjenice da je $d\sigma$ nesingularan slijedi da lijeva strana jednadžbe (4.51) iščezava. Ako uzmemo u obzir koje smo uvjete na W tražili radi kauzalnosti, vidimo da desna strana od (4.51) iščezava samo ako je $\psi \stackrel{\mathcal{E}}{=} 0$.

4.5 Poopćen Bekensteinov dokaz za skalarna polja

Primijetimo da je ključno u dosadašnjim dokazima bilo $V' \geqslant 0$, što ne predstavlja problem ako imamo skalarno polje koje zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu, ali se postavlja pitanje vrijedi li NHC za polja drugačijeg potencijala. Primjer polja od interesa je Higgsovo polje sa potencijalom u obliku dvostruke jame i za koje je $V' < 0$ u nekim područjima. Sada ćemo pokazati da je pozitivnost gustoće energije polja dovoljan uvjet za isključivanje skalarne, minimalno vezane kose [34].

Pretpostavke:

- statična, asimptotski ravna, sfernosimetrična metrika
- minimalno vezanje polja za gravitaciju
- nenegativna gustoća energije polja

Djelovanje multipleta skalarnih polja ψ, χ, ... minimalno vezanih za gravitaciju dano je s

$$S_{\psi,\chi,\dots} = -\int \mathscr{E}\left(I, J, K, ..., \psi, \chi, ...\right) \sqrt{-g} d^4x, \tag{4.53}$$

gdje je $\mathscr{E}$ funkcija, $I \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}$, $J \equiv g^{\alpha\beta}\chi_{,\alpha}\chi_{,\beta}$, $K \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\chi_{,\beta}$ su primjeri invarijanti složenih od prvih derivacija polja, koje odgovaraju kinetičkim članovima u lagranžijanu. Mi ćemo se u daljnjem računu, radi jednostavnosti, zadržati na dva skalarna polja (poopćenje na više je trivijalno). Tenzor energije i impulsa koji odgovara djelovanju $S_{\psi,\chi}$ je

$$T_\alpha^\beta = -\mathscr{E}\delta_\alpha^\beta + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)\psi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)\chi_{,\alpha}\chi^{,\beta} + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\left(\chi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + \psi_{,\alpha}\chi^{,\beta}\right). \tag{4.54}$$

Opažač 4-brzine U^α ($U^\alpha U_\alpha = -1$) opaža lokalnu gustoću energije

$$\rho = \mathscr{E} + 2\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)\left(\psi_{,\alpha}U^\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)\left(\chi_{,\alpha}U^\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,\alpha}U^\alpha\psi_{,\beta}U^\beta\right]. \tag{4.55}$$

Pretpostavljamo da polje ima vremenski Killingov vektor. Ako se opažač giba duž tog Killingovog vektora imamo $\psi_{,\alpha}U^\alpha$, $\chi_{,\alpha}U^\alpha$ i $\rho = \mathscr{E}$, iz čega slijedi

$$\mathscr{E} \geqslant 0. \tag{4.56}$$

Ako se drugi opažač giba relativno prema prvome 3-brzinom $\mathbf{v}$, u slobodnopadajućem koordinatnom sustavu, sugibajućem sa prvim opažačem vrijedi $U^0 = \gamma$ i $\mathbf{U} = \gamma\mathbf{v}$, gdje je $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Kada $|\mathbf{v}| \to 1$, članovi u (4.55) koji sadrže derivacije očito dominiraju nad $\mathscr{E}$, prema tome ukupno moraju biti nenegativni. Izraz u uglatoj zagradi u (4.55) možemo napisati kao kvadratnu formu

$$z^T Q z, \tag{4.57}$$

gdje je

$$z = \begin{pmatrix} \psi_{,\alpha}U^\alpha \\ \\ \chi_{,\alpha}U^\alpha \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right) \\ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right) & \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right) \end{pmatrix}.$$

Uvjet da je kvadratna forma (4.57) nenegativna za svaki z je ekvivalentan uvjetu da je Q pozitivno semidefinitna što znači da njene svojstvene vrijednosti i principalni minori a i b moraju biti nenegativni (vidi npr. [35]). Uvjet na svojstvene vrijednosti od Q daje

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}\right)^2 \leqslant 4\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right)\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right) \tag{4.58}$$

i (uzevši u obzir da nas ne zanima trivijalno rješenje u kojem su polja konstantna u cijelom prostoru)

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right) > 0, \quad \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right) > 0. \tag{4.59}$$

Sada pretpostavljamo postojanje statičnog asimptotski ravnog rješenja Einsteinovih jednadžbi za skalarno polje. Metriku izvan horizonta možemo pisati kao

$$ds^2 = -\mathsf{e}^{\nu} dt^2 + \mathsf{e}^{\lambda} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{4.60}$$

gdje su ν i λ funkcije od r i trnu kao $\mathcal{O}(r^{-1})$ kada $r \to \infty$. Također $\psi = \psi(r)$ i $\chi = \chi(r)$. Horizont događaja $\mathcal{H}$ odgovara površini $r = r_h$, gdje $\mathsf{e}^{\nu(r_h)} = 0$ (ako postoji više takvih r_h horizont odgovara vanjskom).
Zakon očuvanja kojeg zadovoljava ${T_\mu}^\nu$ dan s (4.54) je

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0, \tag{4.61}$$

čija je r komponenta

$$\left[\sqrt{-g}T^r_r\right]' - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta,r}T^{\alpha\beta} = 0, \tag{4.62}$$

gdje crtica označava $\partial/\partial r$ i

$$\sqrt{-g} = \mathsf{e}^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 \sin\theta.$$

Jednadžba (4.62) je jednaka

$$\sin\theta\left[\mathsf{e}^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 T^r_r\right]' - \frac{1}{2}\mathsf{e}^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 \sin\theta\left[g_{rr,r}g^{rr}T^r_r + g_{tt,r}g^{tt}{T_t}^t + g_{\theta\theta,r}g^{\theta\theta}{T_\theta}^\theta + g_{\varphi\varphi,r}g^{\varphi\varphi}{T_\varphi}^\varphi\right],$$

a zbog statičnosti i sferne simetrije ${T_\mu}^\nu$ je dijagonalan i vrijedi ${T_\theta}^\theta = {T_\varphi}^\varphi$, što nam omogućuje da je pišemo u obliku

$$\left(\mathsf{e}^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 T^r_r\right)' - \frac{1}{2}\mathsf{e}^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2\left(\nu' T^t_t + \lambda' T^r_r + 4T^\theta_\theta/r\right) = 0. \tag{4.63}$$

Sređivanjem izraza (4.63) i korištenjem ${T_t}^t = {T_\theta}^\theta = -\mathscr{E}$ dobivamo

$$\left(\mathsf{e}^{\frac{\nu}{2}} r^2 T^r_r\right)' = -\left(\mathsf{e}^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' \mathscr{E}. \tag{4.64}$$

Integrirajmo dobivenu jednadžbu po ϱ od r_h do r. Član izvrijednjen u r_h iščezava jer $\mathsf{e}^{\nu(r_h)} = 0$, a T^r_r je konačan (mora biti kako bi fizikalna invarijanta $T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ bila konačna na $\mathcal{H}$);

$$T_r^r(r) = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}}{r^2}\int\limits_{r_h}^{r}\left(\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}\varrho^2\right)'\mathscr{E}d\varrho. \tag{4.65}$$

Primijetimo, $\mathrm{e}^{\nu(r_h)} = 0$ i $\mathrm{e}^{\nu(r>r_h)} > 0$ pa e^{ν}mora rasti s r blizu horizonta. Iz (4.65) slijedi da, uz $\mathscr{E} > 0$, dovoljno blizu horizonta mora vrijediti ${T_r}^r < 0$. Nadalje, izraz (4.64) možemo napisati u obliku

$$(T_r^r)' = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}}{r^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}r^2\right)'(\mathscr{E} + T_r^r)\,, \tag{4.66}$$

a (4.54) daje

$$\mathscr{E} + T_r^r = 2e^{-\lambda}\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)(\psi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)(\chi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,r}\psi_{,r}\right]. \tag{4.67}$$

Ranije izvedeni uvjeti (4.58) i (4.59) daju $\mathscr{E} + {T_r}^r \geqslant 0$ svugdje, što povlači $(T_r^r)' < 0$ dovoljno blizu horizinta (vidi (4.66)). Kada asimptotsko ponašanje $\mathrm{e}^{\nu/2} \to 1$ stavimo u (4.66) dobivamo $(T_r^r)' < 0$. Za održavanje asimptotske ravnosti $\mathscr{E}$ mora padati barem sa r^{-3} u limesu $r \to \infty$ (Vidi jednadžbu (4.70) i pripadni komentar.). Integral u (4.65) tada konvergira i $|{T_r}^r|$ pada asimptotski sa r^{-2}, ali kako je $(T_r^r)' < 0$ zaključujemo da je T_r^r pozitivan i asimptotski se smanjuje povećanjem r. Iz prijašnjih zaključaka o ponašanju ${T_r}^r$ blizu horizonta zaključujemo da postoji interval $[r_a, r_b]$ gdje $(T_r^r)' > 0$ i da T_r^r mijenja predznak na nekom r_c; $r_a > r_c > r_b$ (moguće je više takvih intervala). Sada ćemo, pomoću Einsteinovih jednadžbi, pokazati da je takav rezultat neostvariv. Relevantne Einsteinove jednadžbe su

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(r^{-2} - r^{-1}\lambda'\right) - r^{-2} = 8\pi G T_t^t = -8\pi G\mathscr{E} \tag{4.68}$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(r^{-1}\lambda' + r^{-2}\right) - r^{-2} = 8\pi G T_r^r. \tag{4.69}$$

Rješavanjem prve dobivamo

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - 8\pi G r^{-1}\int\limits_{r_h}^{r}\mathscr{E}r^2dr - 2GMr^{-1}, \tag{4.70}$$

gdje je M konstanta integracije. Asimptotska ravnost zahtjeva $\mathscr{E} = \mathcal{O}\left(r^{-3}\right)$ asimptotski tako da $\lambda = \mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$. Također zahtjevamo $\mathrm{e}^{\lambda(r_h)} \to \infty$ tako da $2GM = r_h$ (M interpretiramo kao masu crne rupe). Iz (4.70) slijedi da je $\mathrm{e}^{\lambda} \geqslant 1$ u cijeloj okolini. (Promjena predznaka nije moguća jer bi, uz $\mathrm{e}^{\nu} > 0$, značila promjenu signature, što ne odgovara regularnosti rješenja.). Drugu Einsteinovu jednadžbu pišemo kao

$$\mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2}}r^{-2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}r^2\right)' = \left[4\pi r G T_r^r + \frac{1}{2r}\right]\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{3}{2r} > 4\pi r G T_r^r\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{2}{r}, \tag{4.71}$$

gdje nejednakost dolazi od $\frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{2} + \frac{3}{2} > 2$. U području $[r_c, r_b]$ smo našli $T_r^r > 0$, iz čega slijedi $\mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2}} r^{-2} \left(\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' > 0$ u tom području, a što uvršteno u (4.66) daje $(T_r^r)' < 0$, u suprotnosti sa ranijim zaključkom. Jedini način za izbjeći kontradikciju je prihvaćanje da su polja ψ,χ,... konstantna u okolini $\mathcal{E}$, takvih vrijednosti da sve komponente $T_\alpha{}^\beta$ iščezavaju, tj. (vidi jedn. (4.54))

$$\mathscr{E}(0, 0, 0, ..., \psi, \chi, ...) = 0. \tag{4.72}$$

To je upravo rješenje koje nam je služilo kao asimptotski rubni uvjet, tj. rješenje je identično Schwarzschildovo. Ako je crna rupa električki ili magnetski nabijena, a skalarna polja nisu vezana za elektromagnetsko, tako da vrijedi jednadžba (4.61), slična rasprava vodi na zaključak da crna rupa mora biti Reissner-Nordströmova.

5 Kose i teoremi

Dokazi koje smo do sada vidjeli se oslanjaju na nekoliko vrlo važnih pretpostavki čija opravdanost nije trivijalno pitanje. Osim toga, obuhvaćaju samo jednu klasu polja. Sada ćemo ukratko izložiti različite modele polja materije, ističući pretpostavku čije je izostavljanje ključno za postojanje kose kada je ista moguća. Najvažnije rezultate možemo podijeliti u dvije grupe; *neabelova* i *skalarna* polja, dok je ostalih tek nekoliko. Detaljnije informacije se mogu naći u navedenoj literaturi. Ako nije drugačije napomenuto podrazumijevamo opću teoriju relativnosti u četiri dimenzije prostor-vremena. Rezultate ćemo, također, podijeliti po asimptotskom obliku prostor-vremena, tj. vrijednosti kozmološke konstante Λ.

5.1 Neabelova kosa

5.1.1 $\Lambda = 0$

Već se u prvim Bekensteinovim dokazima dalo naslutiti da NHC neće nužno vrijediti za bezmasena baždarna polja sa neabelovom interakcijom. Pokazat ćemo to na primjeru Einstein-Yang-Mills (EYM) sustava sa SU(2) baždarnom grupom (EYM-SU(2)). Prva solitonska rješenja ovog sustava su našli Bartnik i McKinnon [36], što je potaknulo traganje za analognim rješenjima koja sadrže horizont.
Lagranžijan SU(2) baždarne teorije se može pisati

$$\mathcal{L}_{EYM} = -\frac{1}{16\pi}\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{(i)}_{\rho\sigma}\right] = -\frac{1}{16\pi}\left[|F|^2\right],$$

gdje je i grupni indeks,

$$F^{(i)}_{\mu\nu} = A^{(i)}_{\nu,\mu} - A^{(i)}_{\mu,\nu} + g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}$$

i g je konstanta baždarnog vezanja polja A_ν. Jednadžba koja odgovara Bekensteinovoj jednadžbi (4.40) je

$$\int_{\mathcal{E}} d^4x\sqrt{-g}\left[-8\pi\mathcal{L}_{EYM} + \frac{1}{2}\left(g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}\right)F^{(i)\mu\nu}\right] = 0. \tag{5.73}$$

Ako gledamo statična polja i, zbog jednostavnosti, pretpostavimo $A^{(i)}_0 = 0$ slijedi $|F|^2 \geqslant 0$, ali drugi član u (5.73) nije nužno pozitivan pa je očito da postojanje takvog nelinearnog člana može voditi na zaobilaženje NHC-a. Yasskin u [37] izlaže metodu kojom se za svako rješenje Einstein-Maxwell jednadžbi može konstruirati skup rješenja vezanih EYM jednadžbi bilo koje baždarne grupe sa invarijantnom metrikom, gdje su baždarna polja bezmaseni vektorski mezoni, a baždarni naboji očuvane veličine kao izospin i hipernaboj. Sva rješenja imaju istu geometriju Kerr-Newman tipa, ali bi ih čestice različitih naboja mogle razlikovati. Postojanje ovih rješenja ne iznenađuje s obzirom da SU(2) baždarna grupa sadrži U(1) kao podgrupu, a za koju znamo da postoje upravo RN i Kerr-Newman rješenja. Po toj analogiji se pripadna polja i naboji općih baždarnih grupa također nazivaju električnim i magnetskim. U tom su smislu ova rješenja *uronjena abelova* jer je SU(2) baždarni potencijal produkt U(1) diona[17] i konstantne matrice, tj. svi nelinearni članovi baždarnih polja su nula. Uronjena U(1) rješenja EYM sustava su nazvana *obojene crne rupe*[18].

Tvrdnja da su sva statična rješenja EYM jednadžbi sa konačnim nabojem boje uronjena abelova, što je dokazano za SU(2) baždarnu grupu, je poznata kao „neabelov teorem ćelavosti". Bizon dokazuje da je električni dio YM polja nula, a čisto magnetske EYM jednadžbe imaju dvije klase rješenja; abelovo sa RN metrikom i asimptotski neabelovo sa iščezavajućim YM magnetskim nabojem [38, 39]. Ubrzo su i nađena takva neutralna potpuno neabelova EYM statična sfernosimetrična SU(2) rješenja[19] [40–43]. Jedini parametar za koji postoji Gaussov zakon je ADM masa crne rupe, a za danu masu može biti više različitih rješenja.

Za EYM-SU(2) sustav su, osim statičnih sfernosimetričnih rješenja (vidi i [44]), nađena statična osnosimetrična karakterizirana s dva cijela broja; broj namatanja i broj čvorova funkcija baždarnih polja, a moguće je i proširenje na EYM-dilaton (EYMD) sustav [46, 47]. Također se može pokazati da spomenuta statična rješenja imaju rotirajuća poopćenja koja, za razliku od statičnih, imaju neiščezavajući električni naboj baždarnog polja, proporcionalan zamahu crne rupe [48, 49] i da postoji grana neutralnih rotirajućih crnih rupa i grana nabijenih nestatičnih sa iščezavajućim zamahom [50]. Osim rješenja za pojedinačne baždarne grupe (vidi i [51–53]) poopćenje na EYM-SU(N) sustav sa pripadnim statičnim sfernosimetričnim rješenjima se može naći u [54]. Jedno od proširenja EYM sustava je dodavanje skalarnog dilatonskog polja i pripadna rješenja se nazivaju *dilatonske obojene crne rupe* [55–59]. Takav sustav je specijalan slučaj općenitog modela inspiriranog teorijama struna, za kojeg postoje različite kose kvalitativno slične obojenim crnim rupama [60–63].

Kao što smo rekli, rješenje EYM jednadžbi opisuje crnu rupu sa pridruženim poljem bezmasenog vektorskog mezona. S obzirom da mezoni koje opažamo imaju konačnu masu zanima nas EYM-Higgs (EYMH) sustav zbog poznatog generiranja mase Higgsovim mehanizmom. EYM sustavu se može dodati triplet Higgsovog polja u adjungiranoj reprezentaciji, i tako dobiti crnu rupu sa kosom neiščezavajućeg magnetskog naboja [20] ili dublet u fundamentalnoj, što vodi na neutralna rješenja [66, 71].

Zanimljivo je primjetiti da, za razliku od (elektro)vakuumskih, neabelova statična rješenja nisu nužno sferno pa čak ni osnosimetrična [46, 47, 72–75].

Prva crna rupa s neabelovom kosom pronađena je kao rješenje Einstein-Skyrme

[17] Dion je solitonsko rješenje sa električnim i magnetskim nabojem.

[18] Rješenja nose konačni Yang-Mills naboj, a generatori SU(3) simetrije odgovaraju gluonima, nosiocima „naboja boje".

[19] Naziv *obojene crne rupe* se zadržao iako su rješenja neutralna i odnosi se na sva EYM rješenja neovisno o baždarnoj grupi.

[20] Takav se sustav može gledati kao crna rupa unutar 't Hooft-Polyakov monopola (regularno solitonsko rješenje EYMH sustava [64, 65]) pa se ovakav tip rješenja često naziva „crne rupe u monopolima".

modela Schwarzschildove geometrije [76], gdje u lagranžijan ulazi nelinearno polje materije sa svojstvima ujedinjenja mezona i njihovih izvora, a koje je ponudio Skyrme 1961. [77], a pripadni lagranžijan je invarijantan na SU$(2) \times$ SU(2) transformaciju. Numerički su sfernosimetričan model riješili Droz, Heusler i Straumann [78], a puni spektar rješenja dali Bizon i Chmaj [79]. Postoje i statična osnosimetrična rješenja bez limesa iščezavajućeg horizonta [80, 81]. Skyrme kosa se pokazuje linearno stabilna i to po dva stabilna rješenja za istu masu, jedini globalni parametar.

Stabilnost

U definiciji kose nismo spominjali njenu stabilnost, ali je ona fizikalno važna jer se kvantnomehaničke fluktuacije ne mogu izbjeći i nestabilna kosa na kozmičkim skalama vremena gotovo sigurno prelazi u vakuum. Na pitanje stabilnosti nije uvijek lako odgovoriti i može se ispitivati na različite načine, a u dosta slučajeva još nije poznata.

Pokazuje se da su statična sfernosimetrična EYM rješenja nestabilna za sve baždarne grupe, a Torii, Tachizawa i Maeda [82,83] ispituju EYMH rješenja u kontekstu teorije katastrofe [84, 85], posebno neutralna i nabijena nalazeći stabilna u oba slučaja, a nabijene crne rupe imaju i po dva stabilna rješenja za danu masu. Također argumentiraju da iako je Skyrme kosa stabilna, njena entropija je uvijek manja od Schwarzschildove crne rupe iste mase i zato bi se izgubila tokom formacije crne rupe, dok monopolne imaju maksimalnu entropiju među svim crnim rupama iste mase i moguće je da su to konačni objekti u svemiru. Za analizu stabilnosti neabelovih kosa vidi i [86–94].

5.1.2 $\Lambda > 0$

Eksperimentalna vrijednost kozmološke konstante Λ je približno $2 \cdot 10^{-35} s^{-2}$ [95][21] i svemir u kojem živimo nije asimptotski ravan, već negativno zakrivljen.

Torii, Maeda i Tachizawa [96] su prvi riješili SU(2) EYM($\Lambda > 0$) sustav, pripadne statične sfernosimetrične crne rupe nazvali *kozmičke obojene crne rupe* i utvrdili njihovu nestabilnost. Solitonska rješenja istog sustava su također nestabilna [97, 98].

5.1.3 $\Lambda < 0$

Kako asimptotski AdS rješenja ne očekujemo opaziti u svemiru, zanimanje za njih je često vezano za korespodenciju anti-de Sitter prostora i konformne teorije polja

[21] Noviji eksperimentalni podaci se slažu sa navedenom vrijednošću.

(AdS/CFT korespodencija[22]), kod koje je odgovarajuća teorija na AdS$_{D+1}$ prostoru ekvivalentna konformnoj teoriji u D dimenzija [99, 100].

Crne rupe sa Yang-Millsovom kosom postoje u SU(N) EYM($\Lambda < 0$) sustavu i stabilne su pod uvjetom da je vrijednost $|\Lambda|$ dovoljno velika i da nijedna magnetska funkcija baždarnog polja nema čvorove [101–103]. Horizont ne mora biti sfernosimetričan, već može biti lokalno ravan ili hiperboličan [104], a i za ovaj sustav statična rješenja mogu biti osnosimetrična [105]. Za razliku od $\Lambda \geqslant 0$ slučaja, u prisutnosti negativne kozmološke konstante električni dio baždarnog polja ne mora biti nula za postojanje pravih neabelovih rješenja i takva dionska SU(2) rješenja su karakterizirana sa ADM masom i neabelovim električnim i magnetskim nabojem. Za više detalja vidi npr. [106, 107] i [108] za vezu sa $D = 11$ supergravitacijom.

5.2 Skalarna kosa

Vidjeli smo Bekensteinove dokaze da oko statične sfernosimetrične crne rupe ne može biti statičnog sfernosimetričnog, svugdje regularnog skalarnog polja minimalno vezanog za gravitaciju sa potencijalom $V' \geqslant 0$ svugdje, neovisno o teoriji gravitacije, ni skupa omeđenih statičnih sfernosimetričnih skalarnih polja minimalno vezanih, neovisno o potencijalu, ali sa nenegativnog gustoćom energije, u općoj teoriji relativnosti. Postavlja se pitanje što je sa uključenim pretpostavkama; možemo li dokazati odsustvo kose ili naći rješenja za svaki oblik potencijala, vezanje za gravitaciju i simetriju problema. Istovremeno se u literaturi nalaze razni skalarni NH-teoremi i skalarne kose i potpuni odgovor na uvjete postojanja kose još nije dan. Djelovanje koje pokriva širok raspon modela za realno skalarno polje ϕ je

$$S_R = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \xi \frac{R}{2} \phi^2 - V(\phi) \right], \tag{5.74}$$

gdje ξ određuje vezanje polja za gravitaciju, i pritom $\xi = 0$ odgovara minimalnom vezanju, a $V(\phi)$ je potencijal samointerakcije polja, uključujući maseni član. Analogno djelovanje za kompleksno skalarno polje je dano sa

$$S_K = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \psi^* \nabla^\mu \psi - \xi \frac{R}{2} \psi^2 - V(\psi^* \psi) \right]. \tag{5.75}$$

Podijelit ćemo rezultate opet po vrijednosti kozmološke konstante uzete u model, a radi preglednosti, i za daljnje istraživanje, skraćeni pregled dajemo u obliku tablica u dodatku F.

[22] poznato i kao baždarno-gravitacijska dualnost

5.2.1 $\Lambda = 0$

Prvo nađeno rješenje koje opisuje polje oko crne rupe izvan elektromagnetskog sektora je BBMB[23] kosa [109, 110], a opisuje statično sfernosimetrično bezmaseno skalarno polje konformno vezano za gravitaciju u 4 dimenzije prostor-vremena;

$$\xi = \frac{D-2}{4(D-1)} \overset{D=4}{\equiv} \frac{1}{6} \equiv \xi_c,$$

oko statične crne rupe. Točnije, za svako rješenje Einstein-Maxwell-ψ $(\xi = 0)$ sustava postoji rješenje Einstein-Maxwell-ψ $(\xi = \xi_c)$ sustava. Djelovanje konformnog polja se dobije uvrštavanjem $V = 0$ i $\xi = \xi_c$ u S_R. Varijacijom djelovanja po ψ dobivamo jednadžbu polja

$$\psi_{,\alpha}{}^{;\alpha} - \frac{R}{6}\psi = 0,$$

i pritom se dano vezanje naziva konformno jer je s njim pripadno djelovanje invarijantno na preslikavanje definirano konformnom transformacijom, tj. promjenom skale

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad \psi \to \Omega^{-1}(x)\psi,$$

gdje x označava sve koordinate, a $\Omega(x)$ je neka funkcija sa $\Omega^2(x) > 0$. BBMB kosa je rješenje vezanih Ein.-Max.-ψ $(\xi = \xi_c)$ jednadžbi sa horizontom regularne geometrije, parametrizirano električnim nabojem e i skalarnim nabojem q. Linijski element, elektromagnetsko i skalarno polje tog rješenja su redom:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\ F_{\mu\nu} &= e r^{-2}\left(\delta^r_\mu \delta^t_\nu - \delta^t_\mu \delta^r_\nu\right) \\ \psi &= q\,(r - M)^{-1}, \end{aligned} \tag{5.76}$$

gdje je $M = \sqrt{e^2 - \frac{4\pi q^2}{3}}$. Dano rješenje je prvo smatrano nefizikalnim (osim za $q = 0$) jer skalarno polje divergira na $\mathcal{H}$, no Bekenstein je [111], proučavanjem putanja testnih čestica u prostor-vremenu danim sa 5.76, pokazao da je $\mathcal{H}$ fizikalno regularan jer vrijedi:

i) beskonačnost polja ψ nije povezana sa beskonačno visokom (odbojnom) potencijalnom barijerom (kao beskonačnost elektromagnetsko potencijala u $r = 0$ za odgovarajući predznak naboja)

ii) ne postoje putanje testnih čestica (slobodnih, električki ili skalarno nabijenih) koje završavaju na $\mathcal{H}$ u konačnom vlastitom vremenu

[23] Često nazivana Bekensteinova kosa, prvo su ju otkrili Bocharova, Bronnikov i Melnikov, što nije bilo poznato svugdje, zatim ju je neovisno ponovno otkrio Bekenstein.

iii) plimne akceleracije (gravitacijskog, skalarnog ili elektromagnetskog porijekla) su omeđene na $\mathcal{H}$

S obzirom da je za potpun opis rješenja potreban dodatan parametar, skalarni naboj, rezultat je crna rupa sa (sekundarnom jer ima isti broj parametara kao RN obitelj) kosom. Bronnikov i Kireyev [112] su, međutim, pokazali da je to rješenje nestabilno pod radijalnim perturbacijama.

Iako se ovakav sustav može poopćiti i riješiti za proizvoljnu dimenziju $D \geqslant 3$, crna rupa sa bezmasenom konformnom kosom postoji samo u $D = 4$ [113, 114] i to je jedinstvena BBMB [115] (vidi i [116]). Ako se pretpostavi omeđenost polja svugdje i sfernosimetrična ne-ekstremalna RN geometrija[24], prostor-vrijeme je nužno Schwarzschildovo sa poljem svugdje nula [117].

Neovisno o prihvatljivosti BBMB kao fizikalnog sustava, važnost tog rješenja je isticanje uloge vezanja promatranog polja i gravitacije i ukazivanje na to da divergencija polja nije nužno povezana sa prostorvremenskom singularnošću, te je čestica koja se giba u danom prostor-vremenu ne mora opaziti, ako izravno ne interagira sa poljem.

Očito pitanje je postojanje kose za neki $\xi \neq 0$ (za $\xi = 0$ je nema, kao što smo vidjeli) i $\xi \neq \xi_c$ u istom modelu, i taj je problem ispitao Saa [118] i uspio dokazati odsustvo kose za širok raspon vrijednosti. Pretpostavivši statičnost i sfernu simetriju polja i metrike dokazao je:

1. $\xi < 0$ ⇢ nema kose
2. $0 < \xi < \xi_c$ ⇢ nema kose ψ koja zadovoljava $|\psi(r)| < \xi^{-1/2}$ ili $\xi^{-1} < \psi^2(r) < \xi_c \xi^{-1} (\xi_c - \xi)^{-1}$
3. $\xi_c < \xi$ ⇢ nema kose koja zadovoljava $|\psi(r)| \neq \xi^{-1/2}$

U idućem radu [119], pod pretpostavkom regularnosti polja svugdje isključuje kosu sličnog sustava, ali sa općenitijim djelovanjem

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[f(\phi) R - h(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \qquad f(\phi), h(\phi) > 0 \tag{5.77}$$

koje odgovara općenitom modelu skalar-tenzor teorija, čiji se kratak opis može naći u dodatku C. Poopćenje ovog dokaza na električno nabijenu crnu rupu su dali Banerjee i Sen [120].

Za proizvoljno vezanje ξ i realno skalarno polje ϕ kvartičnog potencijala

$$V(\phi) = \lambda \phi^4, \lambda > 0,$$

[24]Ekstremalna RN crna rupa je ona sa $M^2 = Q^2 + P^2$.

jedino statično rješenje Einsteinovih jednadžbi je Schwarzschildovo sa $\phi = 0$ svugdje [121]. Još općenitiji slučaj, slično kao Banerjee-Sen, ali za opću relativnost i dopuštajući i električnu nabijenost polja su razmatrali Mayo i Bekenstein [122] i dokazali:

- za $\xi = 0$ jedino rješenje je RN sa $\phi = 0$
- oko (neutralne ili nabijene) crne rupe neutralno skalarno polje je identično nula za: $\xi < 0$ i nenegativan potencijal polja i za $1/2 \leqslant \xi$ i nenegativan, regularan potencijal polja
- ne postoji nabijena crna rupa sa nabijenom kosom za svaki ξ i regularan semidefinitan potencijal polja

Pritom u svakom slučaju pretpostavljaju statičnost i sfernu simetriju polja i metrike.

Kao što smo vidjeli, za multiplet realnih skalarnih polja minimalno vezanih za gravitaciju je dovoljno pretpostaviti pozitivnost gustoće energije polja da bi dokazali da nema sfernosimetrične kose oko statične crne rupe (sličan dokaz je dao Sudarsky za pozitivno-semidefinitan potencijal [123]). Ako izostavimo tu pretpostavku moguće je naći rješenja [124]. Najzanimljiviji je ipak sustav kompleksnog polja minimalnog vezanja; (5.75) sa $\xi = 0$. Za bilo koji pozitivno semidefinitni potencijal $V(\psi^*\psi)$ vrijedi Pena-Sudarsky teorem [127] koji kaže da nema statične sfernosimetrične crne rupe sa skupom skalatnih polja različitih od nula. Pritom su za svako polje pretpostavili harmoničku vremensku ovisnost

$$\psi_i(r,t) = \phi_i(r)\,\mathrm{e}^{-i\omega_i t}$$

što je, kako primjećuju, jedino prihvatljivo za statičnu metriku.
S druge strane, odabravši

$$V = \frac{\mu^2}{2}\psi^*\psi \tag{5.78}$$

Herdeiro i Radu [128] su iskoristili slobodu u izboru ansatza polja i pretpostavili:

$$\psi = \phi(r,\theta)\,\mathrm{e}^{i(m\varphi-\omega t)}, \tag{5.79}$$

gdje je $\phi(r,\theta)$ realna funkcija, $\omega > 0$ frekvencija polja i cijeli broj m, azimutalni broj namatanja. Naime, da bi geometrija bila stacionarna i osnosimetrična tenzor energije i impulsa skalarnog polja ne smije ovisiti o vremenskoj i odgovarajućoj kutnoj koordinati, što je postignuto odabranim ansatzom. Četiri su ulazna parametra numeričkog rješavanja Einsteinovih jednadžbi: broj namatanja $m \geqslant 1$, radijus horizonta r_H, frekvencija polja ω i broj čvorova polja n. Rješenja bez čvorova su obično najstabilnija pa su samo njih i gledali. Nakon fiksiranja broja namatanja prebrisuje se $r_H - \omega$ prostor. Na taj način su odredili domenu postojanja *kosatih crnih rupa*

(KCR) koja se s jedne strane preklapa sa Kerrovim rješenjima, a s druge prelazi u rotirajuće bozonske zvijezde[25], bez statičnog limesa. Jedini globalni parametri su M i J i postoje KCR sa istim M i J kao Kerrove crne rupe od kojih mogu imati veću entropiju pa svakako nemamo jedinstvenost, a ni adijabatski raspad u Kerrovu crnu rupu. Zanimljivo je, iako ne iznenađuje jer isto vrijedi za bozonske zvijezde, da KCR mogu narušiti Kerrovu granicu $J \leqslant M^2$. Za astrofizičku relevantnost crne rupe je važna njena masa koja je u ovom slučaju maksimalno $\sim M_{Pl}^2/\mu$, što doseže Sunčevu masu za masu polja $\mu \approx 10^{-11}eV$, a takve čestice nisu poznate. Prijedlog je da se ta granica pomakne drugačijim potencijalom i to je istraženo dodavanjem u lagranžijan člana $\lambda\psi^4$ ili $\beta\psi^6 - \lambda\psi^4$ [130] ali u oba slučaja masa (zarobljena unutar) horizonta zadržava tu granicu, dok ADM masa može rasti. Ako se ovaj rezultat može proširiti na opći potencijal, postojanje ovakve kose je moguće samo za ultralaka skalarna polja. Puna domena postojanja KCR sa kvartičnom samointerakcijom do $n = 8$ je dana u [131]. Iz perspektive bozonskih zvijezda KCR rješavaju dotadašnji problem dodavanja male crne rupe u centar bozonske zvijezde, kao što se može u druge solitone, samo što u ovom slučaju taj soliton mora rotirati. Pitanje stabilnosti nije razjašnjeno, ali autori sugeriraju stabilnost nekih rješenja na relevantnim vremenskim skalama. Detaljnu analizu rješenja daju u [132] gdje ukazuju i na to da stacionarno skalarno polje oko rotirajuće crne rupe može postojati i za $V = 0$ ili neminimalno vezanje.

U poglavlju 4.2 smo prošli kroz Bekensteinov dokaz za nepostojanje masivnog kompleksnog skalarnog polja oko rotirajuće crne rupe pa je važno primijetiti kako su ga Herdeiro i Radu zaobišli, a radi se o razlici simetrije polja i pozadinskog prostorvremena. Prikladno su drugi članak na tu temu nazvali „Novi zaokret za kosu crnih rupa" jer se u više slučajeva razlika simetrije pokazala ključnom. Tu temu detaljnije obrađujemo u 6. poglavlju.

Posebnu skupinu skalarne kose čine *dilatonske crne rupe*, koje je prvo našao Gibbons [133] u $N = 4$ supergravitaciji i to je rješenje parametrizirano sa masom, 6 električnih i 6 magnetskih naboja. Razna slična rješenja se mogu naći u efektivnim niskoenergetskim teorijama struna, a općenito nose konačan dilatonski naboj [134–137]. Postoje i rotirajuća rješenja [138], a kratak opis ovih teorija, metode dobivanja rješenja i pregled nađenih kosa (do 1992. god.) se mogu naći u [139].

5.2.2 $\Lambda > 0$

I za pozitivnu kozmološku konstantu bolje su istražene statične, sfernosimetrične crne rupe sa pridruženim poljima iste simetrije i sljedeće se odnosi na njih. Za djelovanje (5.74) sa $\Lambda > 0$ nema minimalno vezane skalarne kose, bezmasene ili konveksnog potencijala ($V'' \geqslant 0$), dok ima za potencijal u obliku dvostruke jame, pod uvje-

[25]Bozonske zvijezde su stabilne konfiguracije kompleksnih skalarnih polja vezanih gravitacijom koje se prvi put pojavljuju u [194].

tom da vrijedi DEC. Dano rješenje je nestabilno na linearne perturbacije [140]. Metodom vrlo sličnom Bekensteinovoj, odsustvo minimalno vezane kose konveksnog potencijala dokazuju Bhattacharya i Lahiri [141] koristeći Einsteinove jednadžbe samo za pretpostavku omeđenosti kvadrata norme tenzora energije i impulsa $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \equiv T^2$. Također, sferna simetrija nije ključna u njihovom dokazu.

Konformno vezano bezmaseno ili masivno polje bez drugog potencijala samointerakcije je nužno nula [142]. Naprotiv, ako je polje bezmaseno i s kvartičnom samointerakcijom (MTZ model) rješenje postoji i za neutralnu i za električno nabijenu crnu rupu [143]. Rasprava o tom rješenju se može naći u [144] čiji je zaključak da u MTZ modelu nema (prihvatljive) stabilne kose. Dokazano je da netrivijalnog rješenja nema za potencijal $V = 0$ neovisno o vrijednosti vezanja ξ i dimenziji prostorvremena $D \geqslant 4$ [145, 146].

Spomenuti NH-teorem za realno minimalno vezano polje konveksnog potencijala se može dokazati i za stacionaran osnosimetričan slučaj [147], gdje se Einsteinove jednadžbe koriste opet samo u pretpostavci omeđenosti T^2, a važna pretpostavka dokaza je komutativnost pripadna dva Killingova vektora.

5.2.3 $\Lambda < 0$

Kao i u asimptotski de Sitter slučaju, ni u asimptotski anti de Sitter slučaju nema minimalno vezane kose konveksnog potencijala ili s $V = 0$. Simetrična potencijalna jama

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{4}\left(\psi^2 - v^2\right)^2,$$

s druge strane, i asimetrična daju netrivijalna rješenja od kojih su neka stabilna u određenom rasponu parametara jame [148].

Odabirom posebnih negativnih oblika potencijala polja minimalno vezanog za gravitaciju Martínez, Troncoso i Zanelli nalaze različita rješenja čija je stabilnost određena gornjom granicom mase neutralne ili električno nabijene crne rupe [149, 150].

Realno polje potencijala $V = 0$ i proizvoljnog vezanje ispituja Winstanley [145] i pod pretpostavkom regularnosti polja dokazuje da za $\xi < 0$ nema kose, za $0 < \xi < 3/16$ postoje stabilne i za $3/16 < \xi$ nestabilne kose. Granicu nestabilnosti $\xi = 3/16$ možemo shvatiti ako pogledamo oblik jednadžbe skalarnog polja u asimptotskom području;

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = 4\xi\Lambda\psi.$$

Vidimo da $4\xi\Lambda$ možemo poistovjetiti sa (negativnim) kvadratom mase polja m_*^2. Breitenlohner-Freedman granica [151, 152] kaže da polja sa

$$m_*^2 < \frac{3\Lambda}{4}$$

uzrokuju nestabilnost AdS prostor-vremena. U promatranom slučaju Breitenlohner-Freedman granica odgovara upravo $\xi = {}^3\!/_{16}$.

Za konformno vezanje i potencijal (5.78) sa $\mu \geqslant 0$ nalazi stabilna rješenja [142], a za isto vezanje i $V = 0$ ili $V \propto \psi^n$ postoje stabilna rješenja u $D \geqslant 4$ sa ne nužno sfernosimetričnim horizontom.

Vratimo se malo na slučaj $\Lambda = 0$. Unatoč raznim dokazima za skalarna polja, **Higgsova kosa** u Einsteinovoj gravitaciji je moguća u obliku *Nielsen-Olesen* [153] strune probodene kroz crnu rupu [154]. Pripadni lagranžijan sustava je

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu \psi^\dagger \mathcal{D}^\mu \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - U\left(\psi^\dagger \psi\right), \tag{5.80}$$

$$U\left(\psi^\dagger \psi\right) = \frac{\lambda}{4}\left(\psi^\dagger \psi - \eta^2\right)^2,$$

gdje je ψ kompleksno skalarno polje, $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ uobičajena baždarna kovarijantna derivacija i $F_{\mu\nu}$ snaga polja A_μ. Autori su krenuli od pitanja interakcije kozmičkih struna i crnih rupa i našli stabilno osnosimetrično rješenje. Netrivijalna topologija i konfiguracija polja omogućuju zaobilaženje navedenih skalarnih NH-teorema. Za isti model, ali sa uključenom kozmološkom konstantom i električnim nabojem crne rupe, rezultat se može poopćiti na stabilna rotirajuća rješenja [155]. Prostor-vrijeme je asimptotski lokalno ravno sa deficitnim kutom[26], što ih ipak ne svrstava u asimptotski ravna prostor-vremena [156, 157] za koja se može dokazati da u čisto električnom slučaju abelovog modela električno polje oko statične crne rupe iščezava. Pritom to vrijedi za lagranžijan 5.80 sa nenegativnim potencijalom $U\left(\psi^\dagger \psi\right)$ neiščezavajuće vakuumske očekivane vrijednosti. Konkretno za Higgsov model (jedinstveni minimum potencijala), skalarno polje ima vakuumsku očekivanu vrijednost svugdje u okolini [158].

Spomenimo još jedno rješenje, također u Einsteinovoj gravitaciji vezanoj za skalarno polje sa spontanim lomom simetrije. Radi se o O(3) izovektorskom skalarnom polju, a rješenje je statično, sfernosimetrično asimptotski ravno i u limesu iščezavajućeg horizonta daje regularnu konfiguraciju nalik čestici [159]. Model je razmatran ranije i, sa drugim odabirom parametara, nađena su slična rješenja, ali čija ukupna masa divergira [160].

[26] Ukupan zbroj kuteva u punom krugu ne daje $360°$.

5.3 Ostala polja

Što se tiče **polja spina 2**, kao što smo rekli, ne može se pridružiti statičnoj sfernosimetričnoj, asimptotski ravnoj crnoj rupi [29]. Koristeći već spomenutu metodu sa minimalnim korištenjem Einsteinovih jednadžbi Bhattacharya i Lahiri [161, 162] su isto dokazali za stacionarnu osnosimetričnu asimptotski de Sitter 4D crnu rupu, a isti rezultat dobivaju zamjenjujući polje masivnim **spin-**$1/2$ poljem (spinor). Razmatrajući spinore zanemaruju njihovo djelovanje na metriku jer se za njih ne može postaviti nikakav klasični energijski uvjet. Rezultat se slaže sa spomenutima Hartleovim i Teitelboimovim, a vrijedi i za asimptotski ravno prostor-vrijeme, pod pretpostavkom odgovarajućeg asimptotskog trnjenja spinornih polja, i Anti de Sitter ako dodamo uvjet $m^2 \geqslant 5/4|\Lambda|$.

Spin-2 kosa je moguća ipak oko statične sfernosimetrične asimptotski ravne crne rupe u obliku gravitonske kose u teorijama sa **masivnim gravitonom** [163], zbog nelinearne interakcije. Razmatrano tenzorsko polje je i samo nosioc gravitacijske sile. Želeći samo dokazati postojanje kose u takvim teorijama, autori uzimaju lagranžijan sa dva interagirajuća spin-2 polja $g_{\mu\nu}$ i $f_{\mu\nu}$ bez dodatnih polja materije;

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[m_g^2 R_g + m_f^2 \sqrt{\frac{f}{g}} R_f - 2m_v^4 V(g,\, f)\right].$$

f i g su determinante pripadnih metrika, a R_g i R_f Riccijevi skalari, $m_g^{-2} = 16\pi G = 16\pi$, $m_f^{-2} = 16\pi\mathcal{G}$ odgovarajuća gravitacijska vezanja, i m_v je zadan u terminima m_g, m_f i parametara potencijala.

Kao što smo vidjeli u poglavlju 4.3, statična sfernosimetrična crna rupa ne podržava masivno vektorsko (Proca) polje (vidi i [165]), no taj se teorem ne odnosi na **masivno vektorsko polje** neabelove interakcije (ENAP[27]) i takva je kosa moguća [71], i na nju se odnosi analiza stabilnosti u okviru teorije katastrofe spominjana u poglavlju 5.1.1. Drugi način zaobilaženja Bekensteinovog teorema je razlika simetrije polja i prostor-vremena, točnije, da polje ima harmoničku vremensku ovisnost, a prostor-vrijeme je stacionarno. Rješenje koje opisuje stacionarnu, asimptotski ravnu, osnosimetričnu crnu rupu i paran broj realnih (ili proizvoljan broj kompleksnih) Proca polja su dali Herdeiro i Radu [166], te proširuju NH-teorem za statičnu sfernosimetričnu crnu rupu, ako se dopusti harmonička ovisnost polja, tj. *rotacija je nužna za postojanje kose*. Bekensteinov teorem za Proca polje oko asimptotski ravne statične crne rupe se može poopćiti na prostor-vrijeme sa $\Lambda > 0$, a isto vrijedi i za stacionaran osnosimetričan slučaj [141, 147]. Zilhão, Witek i Cardoso [167] numeričkom integracijom Ein.-Proca sustava jednadžbi ispituju interakciju crne rupe i polja i ukazuju na vjerojatnu stabilnost kose.

[27] *Einstein-non-Abelian-Proca*

Crne rupe sa diskretnim baždarnim nabojima. Kvantna kosa povezana sa diskretnim baždarnim nabojem se može pojaviti kada lom lokalne kontinuirane baždarne simetrije ostavi neslomljenom diskretnu podgrupu baždarne grupe. Uzmimo na primjer $U(1)$ baždarnu teoriju sa dva skalarna polja η i ζ, naboja pe i e. Efektivna niskoenergetska teorija je tada teorija jednog kompleksnog polja ζ, invarijantna na transformaciju

$$\zeta \to \mathrm{e}^{2\pi i/p}\zeta.$$

Upadanjem ζ kvanta u crnu rupu, pripadni naboj ostaje, u principu, mjerljiv izvana raspršenjem strune. [168]
U [169] je detaljan opis dvaju tipova kvantne kose koja eksponencijalno trne s udaljenošću od horizonta, mjerljive istim tipom raspršenja; jedan je vezan za diskretan baždarni naboj, a drugi za magnetski naboj boje.

Aksionska kosa. Prva poznata stabilna, dinamička nebaždarna kosa je bezmasena aksionska. Rotacija crne rupe djeluje kao izvor kose, a u statičnom slučaju tu ulogu ima postojanje i električnog i magnetskog naboja [170–172]. Tenzor energije i impulsa ovakvog aksiona iščezava, tako da nema utjecaj na pozadinsko prostor-vrijeme, ali je ukupni aksionski naboj različit od nula u principu mjerljiv.
Razni fizikalni mehanizmi u teoriji struna i sličnim teorijama (otkuda i dolaze modeli aksionskog polja) generiraju masu aksiona i takva je statična masivna kosa također poznata [173], a slično rješenje se može naći i za Schwarzschild-de Sitter prostor-vrijeme [141].

5.4 „Duljina” kose

Sudarsky [123] je u analizi YM kose došao do rezultata da se ona nužno prostire dalje od $3r_H/2$, gdje je r_H radijus horizonta i predlaže daljnju istragu o univerzalnosti tog rezultata. Vezano za to Núñez, Quevedo i Sudarsky objavljuju rad [174] koji započinje ovakvom fizikalnom raspravom:

U nađenim stabilnim kosama je ključan nelinearan karakter materije; interakcija između dijela polja koje bi bilo uvučeno u crnu rupu i dijela koje bi bilo izračeno omogućava stabilnost kose iz čega možemo pretpostaviti da duljina kose ima graničnu donju vrijednost duljine, tj. raspona prostiranja od crne rupe. Ističu da je teorem kojeg dokazuju, a kojeg ćemo sada izložiti, primjenjiv na sve do tada nađene kose.

Teorem: Ako je

$$ds^2 = -e^{-2\delta}\mu dt^2 + \mu^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

linijski element asimptotski ravnog prostor-vremena sfernosimetrične crne rupe, koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe sa poljima materije za koje vrijedi WEC, čiji je trag tenzora energije i impulsa nepozitivan i čija gustoća energije raste prema nuli brže od r^{-4}, onda je funkcija

$$\mathcal{W} \equiv \mathrm{e}^{-\delta} r^4 T^r_r \tag{5.81}$$

negativno-semidefinitna na $\mathcal{H}$ i pada između r_H i r_0, gdje je $r_0 > \frac{3}{2} r_H$ i za neki $r > r_0$ počinje rasti prema asimptotskoj vrijednosti nula.

Teorem kaže da asimptotsko ponašanje polja ne može početi prije nekog

$$r > r_0 > \frac{3}{2} r_H,$$

tj. da se kosa mora protezati barem do te vrijednosti. Dakle, predlažu da NHC vrijedi u obliku **„crne rupe nemaju kratku kosu".**

Godinu kasnije Brown i Husain [175] pokazuju da ta pretpostavka o kratkoj kosi ne vrijedi u najširem smislu jer su našli sfernosimetrično statično rješenje crne rupe sa pridruženim anizotropnim poljem proizvoljne duljine prostiranja od crne rupe. Fizikalna slika je da materija može opstati u jakom gravitacijskom polju bez kolapsa samo ako su joj unutarnji tlakovi dovoljno veliki, što se može pojaviti u anizotropnom fluidu. Kao i u kasnijem radu Herdeira i Radua, kojeg smo već spominjali, ključna je razlika simetrije metrike i polja materije.

Stabilnost argumentiraju pokazujući da dobiveno rješenje može nastati sfernosimetričnim gravitacijskim kolapsom, iako napominju da bi prihvatljiviji argument bio kad bi uspjeli pokazati da početna perturbacija ne raste beskonačno s vremenom.Ključno u zaobilaženju ranijeg teorema o kratkoj kosi je da pretpostavka o nepozitivnosti traga tenzora energije i impulsa ne vrijedi za anizotropni fluid.

Hod u [176] ispituje moguću duljinu kose oko rotirajućih crnih rupa i zaključuje da mogu imati ekstremno kratku stacionarnu konfiguraciju skalarnih polja. Konkretno, radi se o analitičkom rješenju Klein-Gordon-Kerr-Newman valne jednadžbe za linearizirano skalarno polje u režimu velikih masa polja. U [177] postavlja pitanje fizikalnog objašnjenja za poznatu donju granicu duljine kose $3r_H/2$ i ističe da fotonsfera, granica područja gdje može postojati stacionarna sfernosimetrična konfiguracija i gdje ne može, Schwarzschildove crne rupe odgovara točno toj vrijednosti. Dokazuje teorem koji kaže da asimptotsko ponašanje polja ne može početi prije fotonsfere. Pritom ima iste pretpostavke kao Núñez et al., a funkcija analogna funkciji 5.81 je $r^4 T^r_r$. Uz malo drugačiju definiciju duljine kose dokazuje da mora biti dulja od radijusa fotonsfere r_γ. Također daje dokaz u prilog prijedlogu da uvijek vrijedi:

$$\frac{M - m\left(r_\gamma\right)}{m\left(r_\gamma\right) - m\left(r_H\right)} \geqslant 1,$$

gdje je M ukupna masa definirana u asimptotskoj beskonačnosti, $M - m\left(r_\gamma\right)$ je masa kose izvan fotonsfere, a $m\left(r_\gamma\right) - m\left(r_H\right)$ je masa kose između horizonta i fotonsfere. Drugim riječima, područje izvan fotonsfere uvijek sadrži barem 50% ukupne mase kose. Analitički provjerava predloženu granicu za velike EYM crne rupe, za koje je taj omjer 2.08, i numerički za EYM, EYMH, EYMD, ENAP i ES crne rupe i sve ju poštuju.

S obzirom na istaknutu važnost razlike simetrije materije i pozadinskog prostor-vremena nekih rješenja u idućem poglavlju se bavimo restrikcijama na oblik polja zadanima simetrijom pozadinskog prostor-vremena.

6 (Ne)nasljeđivanje simetrije

Pretpostavimo da prostor-vrijeme ima izometriju generiranu Killingovim vektorskim poljem ξ^a,

$$\pounds_\xi g_{ab} = 0. \tag{6.82}$$

Ako za polje materije ψ vrijedi

$$\pounds_\xi \psi = 0$$

kažemo da ono nasljeđuje tu simetriju[28]. Za elektromagnetsko polje vrijedi

$$\pounds_\xi F_{ab} = b * F_{ab},$$

gdje je b konstantna funkcija ako je F_{ab} nesvjetlosno, tj. ako vrijedi $F_{ab}F^{ab} \neq 0$ i $F_{ab} * F^{ab} \neq 0.$ [178–183]. Proširenje tog rezultata na prostor-vrijeme sa crnom rupom je dano u [184]. Nasljeđivanje simetrije skalarnih polja je dokazano za neke specijalne slučajeve [185–188] i može se pokazati da ako je simetrija nasljeđena na početnoj hiperplohi bit će nasljeđena kroz cijelo prostor-vrijeme [189, 190]. Najopćenitiju analizu za skalarna polja se može naći u [191] i nju ćemo ovdje izložiti.

Pretpostavljamo da je prostor-vrijeme rješenje gravitacijske jednadžbe polja oblika

$$E_{ab} = 8\pi T_{ab}, \tag{6.83}$$

gdje je E_{ab} neki polinom Riemannovih tenzora i T_{ab} je tenzor energije i impulsa polja materije. Na primjer, u općoj teoriji relativnosti E_{ab} je Einsteinov tenzor

$$E_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab}.$$

Koristeći

$$\pounds_\xi R_{abcd} = \pounds_\xi \epsilon_{abc\dots} = 0, \quad \pounds_\xi \nabla_a = \nabla_a \pounds_\xi,$$

iz (6.82) i (6.83) slijedi

$$\pounds_\xi T_{ab} = 0. \tag{6.84}$$

Pitanje je, dakle, što možemo zaključiti o simetriji polja iz (6.84).

[28]Koristimo apstraktnu indeksnu notaciju čija je prednost da nismo vezani za određeni koordinatni sustav. Kratak opis i definicije korištenih operacija se mogu naći u dodatku D.

6.1 Realno skalarno polje

Tenzor energije i impulsa realnog skalarnog polja ϕ općenitog potencijala $V(\phi)$ je

$$T_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - \left(\frac{1}{2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi + V(\phi)\right) g_{ab}. \tag{6.85}$$

Kao i u poglavlju 4 izrazit ćemo potencijal preko kontrakcija tenzora energije i impulsa i dimenzije prostor-vremena D:

$$V(\phi) = -\frac{T}{D} \pm \frac{D-2}{2D}\sqrt{\frac{DT_{ab}T^{ab} - T^2}{D-1}},$$

iz čega, koristeći (6.84), imamo

$$0 = \pounds_\xi V(\phi) = \frac{dV}{d\phi}\pounds_\xi\phi.$$

Dakle, kada god je $V'(\phi) \neq 0$ simetrija je nasljeđena. Da bi nešto mogli reći o simetriji polja kada $V'(\phi) = 0$ (npr. bezmaseno polje čiji je potencijal jednak nuli) napisat ćemo T_{ab} u obliku

$$T_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi + \frac{T+2V}{D-2}g_{ab}$$

i uvesti veličinu

$$T(\xi)_a \equiv T_{ab}\xi^b = (\pounds_\xi\phi)(d\phi)_a + \frac{T+2V}{D-2}\xi_a.$$

Djelujući na nju Liejevom derivacijom i koristeći pretpostavku o simetriji (6.84) i $V'(\phi) = 0$ (što povlači $\pounds_\xi V(\phi) = 0$) dobivamo

$$0 = \pounds_\xi T(\xi) = (\pounds_\xi\pounds_\xi\phi)\, d\phi + (\pounds_\xi\phi)\, d(\pounds_\xi\phi).$$

Još jedna kontrakcija sa ξ^a nam daje

$$0 = i_\xi\pounds_\xi T(\xi) = (\pounds_\xi\pounds_\xi\phi)(\pounds_\xi\phi) + (\pounds_\xi\phi)(\pounds_\xi\pounds_\xi\phi) = \frac{1}{2}\pounds_\xi\left((\pounds_\xi\phi)^2\right).$$

Slijedi da je $\pounds_\xi\phi$ konstanta duž orbite od ξ^a ($\pounds_\xi\phi = a,\ \pounds_\xi a = 0$), tj. ϕ je linearna funkcija od ζ, parametra orbite Killingovog vektora ξ^a. Wymanovo rješenje iz 1981. je upravo bezmaseno skalarno polje sa linearnom ovisnošću o vremenu u statičnom prostor-vremenu [192].

6.2 Kompleksno skalarno polje

Dvije su uobičajene parametrizacije kompleksnog skalarnog polja;

Kartezijeva $\psi = \rho + i\,\sigma$

polarna $\psi = Ae^{i\alpha}$.

Pretpostavljamo da je polje netrivijalno i definiramo

$$\dot{f} \equiv \pounds_\xi f, \quad \ddot{f} \equiv \pounds_\xi \left(\pounds_\xi f\right)$$

za svaku skalarnu funkciju f. Nasljeđenost simetrije polja odgovara $\dot{\rho} = \dot{\sigma} = 0$ ili $\dot{A} = \dot{\alpha} = 0$. Ako barem neka od funkcija $\left\{\dot{\rho}, \dot{\sigma}, \dot{A}, \dot{\alpha}\right\}$ iščezava kažemo da je simetrija djelomično naslijeđena. Tenzor energije i impulsa kompleksnog skalarnog polja je

$$T_{ab} = \nabla_{(a}\psi\nabla_{b)}\psi^* - \frac{1}{2}\left(\nabla_c\psi\nabla^c\psi^* + V\left(\psi^*\psi\right)\right)g_{ab}. \tag{6.86}$$

Sada ne možemo izraziti potencijal preko kontrakcija od T_{ab}. Napisat ćemo (6.86) u obliku

$$T_{ab} = \nabla_a\rho\nabla_b\rho + \nabla_a\sigma\nabla_b\sigma + \frac{T+V}{D-2}g_{ab}$$

$$= \nabla_a A\nabla_b A + A^2\nabla_a\alpha\nabla_b\alpha + \frac{T+V}{D-2}g_{ab}.$$

Ideja je u obje parametrizacije izvući informacije iz nekih kontrakcija jednadžbe (6.84) sa Killingovim vektorom ξ^a. Prvo ćemo rastaviti

$$\pounds_\xi T\left(\xi\right) = 0 \tag{6.87}$$

na projekciju duž ξ^a,

$$0 = i_\xi \pounds_\xi T\left(\xi\right) = \pounds_\xi\left(T_{ab}\xi^a\xi^b\right), \tag{6.88}$$

i na vanjski produkt sa ξ^a,

$$0 = \xi \wedge \pounds_\xi T\left(\xi\right) = \pounds_\xi\left(\xi \wedge T\left(\xi\right)\right).$$

6.2.1 Kartezijeva parametrizacija

Koristeći kontrakciju

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = \dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{T+V}{D-2}N,$$

gdje je $N \equiv \xi_a\xi^a$ norma od ξ^a, i (6.88) imamo

$$\pounds_\xi\left(\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{T+V}{D-2}N\right) = \pounds_\xi\left(\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{N}{D-2}V\right) = 0. \tag{6.89}$$

Dakle, duž orbita od ξ^a vrijedi

$$\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{N}{D-2} V = \upsilon, \qquad \pounds_\xi \upsilon = 0. \tag{6.90}$$

Više informacija možemo dobiti postavljajući neke uvjete, npr. jaki energijski uvjet, iz kojeg slijedi $\upsilon \geqslant 0$ u domeni gdje je $t^a = \xi^a$ vremenski.

Za konkretan slučaj ćemo pretpostaviti $D = 4$ i uobičajeni maseni potencijal

$$V = \mu^2 \psi^* \psi = \mu^2 \left(\rho^2 + \sigma^2\right), \tag{6.91}$$

gdje je μ masa skalarnog polja. (6.90) postaje

$$\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{N}{2} \mu^2 \left(\rho^2 + \sigma^2\right) = \upsilon. \tag{6.92}$$

Pretpostavimo li djelomično nasljeđivanje simetrije, npr. $\dot{\sigma} = 0,$ na nekoj otvorenoj okolini invarijantnoj na djelovanje Killingovog vektora ξ^a, $O_\xi \subset M,$ možemo integrirati (6.92) duž orbita od ξ^a u toj okolini. (6.92) se svodi na

$$\dot{\rho}^2 + \kappa \rho^2 = \lambda, \qquad \kappa = \frac{N}{2} \mu^2, \quad \lambda = \upsilon - \kappa \sigma^2, \tag{6.93}$$

gdje $\pounds_\xi \kappa = \pounds_\xi \lambda = 0.$ (6.93) ima tri tipa rješenja; linearno, oscilatorno i eksponencijalno (vidi dodatak E za potpun skup rješenja), od kojih je samo jedno omeđeno ili oscilatorno, a da simetrija nije nasljeđena (tip II);

$$\rho = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\kappa}\,(\zeta - \zeta_0)\right), \quad \kappa,\, \lambda > 0.$$

Pobliže razmatranje tog rješenja daje vrlo stroge uvjete na ξ^a, naime, mora biti prostorno Killingovo vektorsko polje konstantne norme i ortogonalno na hiperplohu. Analogan rezultat slijedi za pretpostavku $\dot{\rho} = 0.$

U slučaju kada $\dot{\rho},\, \dot{\sigma} \neq 0$ možemo pretpostaviti neka ograničenja, primjerice $\sigma = b\rho,$ $\dot{b} = 0$ što nas vodi opet na istu klasu rješenja, a odabir $b = konst.$ (što odgovara $\alpha = konst.$) svugdje možemo zaključiti da su $\dot{\rho}$ i,$\dot{\sigma}$ konstante. S obzirom da za ovakav odabir parametara tenzor energije i impulsa (6.86) kompleksnog skalarnog polja $\psi = \rho + i\,\sigma$ odgovara tenzoru energije i impulsa (6.85) realnog polja

$$\phi = \rho\sqrt{1 + b^2},$$

možemo konstruirati rješenja sa ψ iz poznatih rješenja sa $\phi.$

6.2.2 Polarna parametrizacija

Umjesto (6.89) sada imamo

$$\pounds_\xi \left(\dot{A}^2 + A^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{N}{D-2} V\left(A^2\right) \right) = 0$$

iz čega slijedi da duž orbita od ξ^a vrijedi

$$\dot{A}^2 + A^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{N}{D-2} V\left(A^2\right) = \lambda, \qquad \pounds_\xi \lambda = 0. \tag{6.94}$$

Opet, ako vrijedi jaki energijski uvjet u $D = 4$ imamo $\lambda \geqslant 0$ za vremenski ξ^a. Pretpostavimo li dalje djelomičnu nasljeđenost simetrije u obliku $\dot{A} = 0$, iz (6.94) odmah slijedi $\ddot{\alpha} = 0$, tj. α je linearna funkcija Killingovog parametra ζ. Iz (6.87) tada dobivamo

$$A^2 \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = 0.$$

Po početnoj pretpostavci je $A \neq 0$, dakle $\dot{\alpha}$ je konstanta unutar O_ξ. Ovakva, lokalizirana Einstein-Klein-Gordon rješenja odgovaraju poznatim rješenjima u kontekstu bozonskih zvijezda, kao kandidata za kompaktne astrofizičke objekte [193–196].S druge strane, pretpostavimo li $\dot{\alpha} = 0$, $D = 4$ i $V = \mu^2 \psi^* \psi$ dobivamo opet diferencijalnu jednadžbu (6.93) sa zamjenom $\rho \to A$ i istim zaključcima kao ranije; jedino rješenje sa nenasljeđenom simetrijom i omeđenom ili periodičnom amplitudom A je

$$A = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\kappa}\,(\zeta - \zeta_0)\right), \quad \kappa,\, \lambda > 0$$

i ξ^a mora biti prostorno Killingovo vektorsko polje konstantne norme i ortogonalno na hiperplohu.

6.3 Stacionarno prostor-vrijeme sa crnom rupom

S obzirom da nas zanimaju stacionarne crne rupe, sada ćemo se okrenuti upravo takvom prostor-vremenu. Killingov vektor stacionarnog prostor-vremena označimo sa $k^a = (\partial/\partial t)^a$, a osnosimetričnog $m^a = (\partial/\partial\varphi)^a$. Pretpostavljamo da m^a ima kompaktne orbite i prostornog je tipa u okolini crne rupe $\mathcal{E}$. Ako je k^a ortogonalan na hiperplohu, $k \wedge dk = 0$, kažemo da je prostor-vrijeme statično.

Ako je prostor-vrijeme stacionarno tada $\pounds_k A = 0$ povlači $\pounds_k \alpha = konst.$ Ako je $k^a k_a < 0$ u cijeloj $\mathcal{E}$ (kao u slučaju statičnog prostor-vremena) i potencijal je (6.91), tada $\pounds_k \alpha = 0$ povlači ili $\pounds_k A = 0$ ili je A tipa I u odnosu na parametar t ako je $\mu = 0$, odnosno tipa III ako je $\mu > 0$.

Slično, ako je prostor-vrijeme osnosimetrično $\pounds_m A = 0$ povlači $\pounds_m \alpha = konst.$ S obzirom da vrijedi $m^a m_a > 0$, za potencijal (6.91) i pretpostavku $\pounds_m \alpha = 0$ dobivamo da je ili $\pounds_m A = 0$ ili je A tipa II za parametar φ ako je $\mu > 0$ i m^a ortogonalan na hiperplohu i konstantne norme (tip I rješenje za $\mu = 0$ je isključeno zbog kompaktnosti orbita od m^a). Analogno vrijedi zamijenom parametara A i α sa ρ i σ. Primijetimo da za svako rješenje tipa II u stacionarno osnosimetričnom prostor-vremenu imamo $\pounds_k A = 0$ (tj. $\pounds_k \rho = 0$ ili $\pounds_k \sigma = 0$).

Prisutnost crne rupe može zadati dodatni uvjet na skalarno polje. Na Killingovom horizontu $H[\xi]$ (površina $\xi^a \xi_a = 0$) imamo ([5], poglavlje 12)

$$R_{ab}\xi^a\xi^b \overset{H}{=} 0,$$

što, korištenjem Einsteinovih jednadžbi, daje

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \overset{H}{=} 0. \tag{6.95}$$

Tom se jednakošću može dokazati konstantnost električnog skalarnog i magnetskog skalarnog potencijala na svakoj povezanoj komponenti Killingovog horizonta [197, 198] i nužno nasljeđivanje simetrije na $H[\xi]$ bezmasenog realnog skalarnog polja ϕ kanonskog tenzora energije i impulsa. Na primjer, ako je prostor-vrijeme statično sa pripadnim $H[k]$, ili stacionarno sa $H[\chi]$, gdje je χ^a linearna kombinacija k^a i kutnog Killingovog vektora kompaktnih orbita, imamo $\pounds_k \phi = 0$. Dakle, pretpostavke o stacionarnosti i osnoj simetriji polja u Bekensteinovim dokazima su zapravo suvišne u statičnom i stacionarnim osnosimetričnim slučajevima.
Za kompleksno skalarno polje jednadžba (6.95) povlači

$$\pounds_\xi \rho \overset{H}{=} 0 \overset{H}{=} \pounds_\xi \sigma, \quad \pounds_\xi A \overset{H}{=} 0 \overset{H}{=} A \pounds_\xi \alpha.$$

Ako polje ne iščezava na $H[\xi]$ možemo zaključiti $\pounds_\xi \alpha \overset{H}{=} 0$.

Stacionarno prostor-vrijeme sa rotirajućom crnom rupom tipično ima ergopodručje gdje je $k^a k_a > 0$. U tom području potencijal (6.91) sa $\mu \neq 0$ i $\pounds_k \alpha = 0$ daju ili $\pounds_k A = 0$ ili A je tipa II u odnosu na parametar t, ali k^a mora biti ortogonalan na hiperplohu, tj. prostor-vrijeme je statično i nema ergopodručja. Dakle, za odabrani potencijal iščezavanje$\pounds_k \alpha = 0$, $\pounds_k \rho = 0$ ili $\pounds_k \sigma = 0$ povlači $\pounds_k \psi = 0$, barem u ergopodručju.

Prisjetimo se rješenja Herdeira i Radua iz poglavlja 5.2.1 na stranici 34. Prostor-vrijeme je stacionarno i osnosimetrično sa Killingovim horizontom $H[\chi]$, gdje je $\chi^a = k^a + \Omega_H m^a$ i konstanta Ω_H predstavlja kutnu brzinu horizonta. U ansatzu za skalarno polje (5.79) imaju $\pounds_k A = \pounds_m A = 0$ iz čega odmah slijedi $\pounds_k \alpha,\ \pounds_m \alpha = konst.$

Sumirajmo ukratko rezultate ovog poglavlja za skalarna polja. Pretpostavili smo da postoji izometrija generirana Killingovim vektorom ξ^a i da je prostor-vrijeme rješenje jednadžbi oblika (6.83) iz čega slijedi (6.84), što je glavna jednadžba iz koje dalje izvlačimo informacije. Za *realno skalarno polje* potencijal polja možemo pisati preko kontrakcija tenzora energije i impulsa i primjenom Liejeve derivacije zaključujemo da je simetrija nasljeđena kada vrijedi $V'(\phi) \neq 0$. Kada imamo $V'(\phi) = 0$, iz kontrakcije T_{ab} sa Killingovim vektorom i primjenom Liejeve derivacije zaključujemo da je polje

ϕ linearna funkcija Killingovog parametra orbite. U slučaju *kompleksnog skalarnog polja* ψ takav postupak nije moguć. Prikazali smo polje u dvije parametrizacije, polarnoj i Kartezijevoj. Kontrakcijama T_{ab} sa Killingovim vektorima i primjenom Liejeve derivacije smo ovaj put dobili diferencijalnu jednadžbu za funkcije polja. Radi jednostavnosti, pretpostavili smo djelomičnu nasljeđenost simetrije i analizirali svaki slučaj posebno. Nasljeđenost simetrije u amplitudi polja povlači linearnu ovisnost o parametru orbite u fazi polja. Dodatna pretpostavka da je potencijal uobičajeni maseni (6.91) i da je simetrija nasljeđena u fazi polja daje nekoliko tipova rješenja pripadne diferencijalne jednadžbe, od kojih je jedno nedivergirajuće, a sa nenasljeđenom simetrijom (tip II) uz uvjet da je ξ^a prostornog tipa, konstantne norme i ortogonalan na hiperplohu. (Analogni zaključci vrijede za funkcije Kartezijeve parametrizacije.) Zatim smo primijenili općenite rezultate na stacionarno prostor-vrijeme sa crnom rupom i vidjeli da postojanje Killingovog horizonta zadaje dodatne uvjete na simetriju polja. Na kraju smo se okrenuli HR kosi i vidjeli kako iz pretpostavke o amplitudi odmah slijedi da faza mora biti upravo takva kakvu su i pretpostavili.

Zaključujemo da je razlika u simetrijama polja i metrike moguća i može, kao što smo vidjeli, rezultirati postojanjem kose. Ipak, simetrija polja je upravljana simetrijom prostor-vremena i za konkretan odabrani potencijal, rješenja sa nenasljeđenom simetrijom su vrlo strogo određena. Rezultati vrijede u slučaju djelomičnog nasljeđivanja, s obzirom da sasvim općenit slučaj nije razrađen (osim u spomenutom slučaju posebno odabrane proporcionalnosti funkcija ρ i σ, tj. A i α).

7 Eksperimentalna provjera

Koristeći teleskope koji mjere u području infracrvenih valnih duljina, analizirane su orbite zvijezda naše galaksije vrlo blizu centra Sagitarius A* (Sgr A*) i jak su dokaz da se radi o supermasivnoj crnoj rupi čija je masa otprilike $4 \cdot 10^6 M_\odot$, gdje je $M_\odot$ masa Sunca. Teorijsko predviđanje je da velika zakrivljenost prostor-vremena blizu crne rupe stvara tamnu sjenu okruženu sjajnim fotonskim prstenom i oblik sjene je približno kružan. Opažanje sjene i njenog oblika je novi test za opću teoriju relativnosti (vidi sliku 7.1). Dijametar sjene je proporcionalan masi crne rupe i skoro neovisan o njenom zamahu. 2000. godine Falcke, Melia i Agol [199] pokazuju da je sjena Sgr A* observabilna u submilimetarskim valnim duljinama, pod pretpostavkom da je akrecijski disk optički tanak u tom dijelu spektra. Autori stoga tvrde da je realno očekivanje slikanja horizonta Sgr A* u narednih nekoliko godina.

Zbog obrnute proporcionalnosti kutne razlučivosti i dijametra teleskopa, za razlučivanje sjene Sgr A* potreban je teleskop dijametra približnog Zemljinom. *Event Horizon Telescope* (EHT) je projekt u kojem se koristi tehnika istovremenog prikupljanja podataka iz teleskopa diljem Zemlje (VLBI[29]) [200] i efektivno se ostvaruje teleskop dijametra jednakog razmaku najudaljenijih teleskopa. Početni podaci su potvrdili očekivanje da se radi o masivnoj crnoj rupi, a daljnjim prikupljanjem i analizom podataka rade se precizne slike u različitim (pretežno submilimetarskim) valnim duljinama.

Osim Sgr A*, EHT ispituje i M87, izvor radio mlazova, i očekuju se odgovori na neka pitanja vezana za kosu crnih rupa jer se sjena „ćelave” crne rupe razlikuje od sjene u prisustvu kose. U [201] autori se okreću Kerrovoj crnoj rupi sa skalarnom kosom čija se sjena drastično razlikuje od sjene Kerrove crne rupe. Općenito predviđanje je manja sjena od one Kerrove istih asimptotskih naboja.

Posljedica pretpostavke da crne rupe nemaju kosu je da se svi viši multipolni momenti gravitacijskog polja (sjetimo se rasprave iz II.poglavlja) neutralne crne rupe mogu izraziti kao funkcije M i J. Konkretno, kvadrupolni moment q_2, najniži koji će se mjeriti, zadovoljava

$$q_2 = -\frac{J^2}{M}.$$

Observabilna provjera ove relacije je još jedno ispitivanje postojanja kose oko Sgr A*. Razni predloženi testovi NHC-a se mogu grupirati u dvije grupe: ispitivanje svojstava prostor-vremena u području daleko i blizu od horizonta. Primjer za prvu grupu je precizno opažanje orbitalne dinamike zvijezda oko Sgr A*. Testovi svojstava jakog gravitacijskog polja crne rupe se temelje na gravitacijskim valovima generiranima upadanjem objekata zvjezdanih masa u crnu rupu ili na elektromagnetskom zračenju emitiranom iz akrecijskog diska. U modeliranju se uglavnom modificira Kerrova metrika parametarskim deformacijama. Pod [202, 203] navodimo još neke od radova

[29] *Very Large Baseline Interferometry*

na temu testiranja teorijskih predviđanja o poljima oko crne rupe.

Slika 7.1: Opća teorija relativnosti predviđa da je sjena ćelave crne rupe kružna (sredina), a u prisustvu kose može biti izduljena (lijevo i desno)

Preuzeto sa

http://www.eventhorizontelescope.org/science/general_relativity.html,17.8.2016.

8 Rasprava i zaključak

Hipoteza da crne rupe nemaju kosu kaže da su crne rupe u konačnom stanju u potpunosti opisane sa tri parametra; masom, zamahom i električnim nabojem, koji su definirani integralima u prostornoj beskonačnosti. Svako dodatno polje koje bi pridonosilo takvom integralu se naziva kosa. Hipoteza je potkrijepljena teoremima jedinstvenosti Israela i Cartera i dokazana je u raznim modelima. Prvi, Bekensteinovi, dokazi su posebno zanimljivi zbog općenitosti primjenjene metode i isticanju važnih uključenih pretpostavki. Prva općepriznata kosa je rješenje Einstein-Yang-Mills sustava SU(2) baždarne grupe, a njeno postojanje je omogućeno neabelovom prirodom interakcije polja, što vodi i na rješenja u sustavima sa drugim baždarnim grupama, kao i u modelima proširenima dodavanjem dilatonskog ili Higgsovog polja. Ako se pretpostavi razlika simetrije polja materije i prostor-vremena, također se mogu naći rješenja. Među zanimljivijima je rješenje Herdeira i Radua, kompleksno skalarno polje usko vezano uz bozonske zvijezde. Treća važna pretpostavka o kojoj ovisi postojanje kose je pretpostavka o vezanju polja i gravitacije. Njena je modifikacija dovela do prve, konformne kose. Još je nekoliko načina zaobilaženja Bekensteinovih dokaza i pronalaženja kose, a uključuju negativnu gustoću energije polja, konačnu kozmološku konstantu, specijalne odabire potencijala, druge teorije gravitacije, divergenciju polja na horizontu ili neku kombinaciju navedenog.

Skoro pedeset godina nakon formuliranja hipoteze o kosi nemamo potpun zadovoljavajući odgovor na njenu održivost. S obzirom na sva nabrojana rješenja i definiciju kose, očito je da crne rupe mogu imati kosu. S druge strane, većina od njih je nestabilna, mikroskopski mala ili egzotična, sa negativnom gustoćom polja ili odstupanjem od opće teorije relativnosti (npr. masivna gravitonska kosa). To nas navodi na zaključak da *hipoteza vrijedi za astrofizičke crne rupe*. U skladu s tim, napomenimo još jedan rezultat. Na početku smo rekli da gledamo gole izolirane crne rupe, tj. one u čijoj okolini nema materije i izvora zračenja. Osim fizikalne pretpostavke da će nakon dovoljno vremena većina materije prijeći horizont ili se izračiti u beskonačnost, razlog takvog modela je ipak uglavnom jednostavnost, jer znamo da su crne rupe u svemiru često dio binarnog sustava ili su povezane s akrecijskim diskom i/ili mlazovima materije. Postavlja se pitanje mijenja li to NH teorem; je li masa i dalje jedini parametar statične crne rupe, točnije, mijenjaju li se njeni doprinosi multipolnim momentima prostor-vremena? Okolna materija iskrivljuje geometriju horizonta plimnim silama i mijenja ukupne momente mjerljive iz beskonačnosti. Gürlebeck [204] dokazuje da se doprinost crne rupe multipolnim momentima koji opisuju gravitacijsko polje u beskonačnosti ne mijenja i zaključuje da ,,iako crna rupa stavi periku, i dalje izgleda ćelavo".

U ovom radu smo saželi rezultate u području istraživanja kose crnih rupa, od njene definicije i prvog pojavljivanja u literaturi do mogućih skorih opažanja. Nakon definiranja kose, prošli smo kroz Bekensteinove dokaze njenog nepostojanja u raznim modelima. Zatim smo naveli pronađena rješenja i istaknuli zašto se prijašnji dokaze ne odnose na njih. Posebno smo izdvojili teorem o duljini kose i proučili nasljeđivanje simetrije skalarnih polja. Na kraju smo se okrenuli eksperimentalnoj provjeri rezultata upoznavši se sa idejom i ciljevima projekta Event Horizon Telescope.

Dodaci

Dodatak A Varijacijski princip

Varijacijski princip kaže da djelovanje

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x$$

poprima ekstremalnu vrijednost u klasičnoj konfiguraciji polja (u rješenju pripadnih jednadžbi polja), odnosno, ne mijenja se u prvom redu variranja polja oko takve konfiguracije. Pripadna promjena polja i njihovih derivacija je

$$\phi_k \to \phi_k + \delta\phi_k, \quad \phi_{k,\mu} \to \phi_{k,\mu} + \delta\phi_{k,\mu}.$$

Transformacija gustoće lagranžijana pritom je

$$\mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu}) \to \mathcal{L}(\phi_k + \delta\phi_k, \phi_{k,\mu} + \delta\phi_{k,\mu}) = \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu} \tag{A.1}$$

.Slijedi:

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu}\right]\sqrt{-g}d^4x = 0.$$

Drugi član u uglatoj zagradi je jednak

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\right)_{,\mu}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_k\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int\limits_{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\sqrt{\gamma}d^3x - \int\limits_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_k\sqrt{-g}d^4x, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili Stokesov teorem:

$$\int\limits_V \nabla_\mu V^\mu \sqrt{|g|}d^nx = \int\limits_{\partial V} n_\mu V^\mu \sqrt{|\gamma|}d^{n-1}x, \tag{A.2}$$

gdje je ∂V rub volumena V, a γ determinanta inducirane metrike na njemu. Integral po rubu ∂V propada jer varijacije polja trnu u beskonačnosti po kojoj se integrira. Dobivamo:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \right)_{,\mu} \right] \delta \phi_k \sqrt{-g} d^4 x = 0 \tag{A.3}$$

Funkcionalna derivacija $\frac{\delta S}{\delta \phi_k}$ je definirana tako da zadovoljava

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta \phi_k} \delta \phi_k d^4 x = 0$$

u kritičnoj točki i iz toga dobivamo jednadžbu gibanja polja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \right)_{,\mu} = 0 \tag{A.4}$$

Dodatak B Očuvana struja

Pogledajmo kako invarijantnost lagranžijana vodi na postojanje očuvane struje. U varijacijskom principu (dodatak A), iz (A.1) imamo

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu}. \tag{B.1}$$

Ako u (B.1) uvrstimo (vidi (A.3))

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} = \frac{\delta S}{\delta\phi_k} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}$$

dobivamo

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\right)_{,\mu} + \frac{\delta S}{\delta\phi_k}\delta\phi_k.$$

Izraz $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k \equiv j^\mu$ se naziva Noetherina struja. I vidimo da vrijedi

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

tj. Noetherina struja je očuvana, ako vrijedi jednadžba gibanja polja (A.4) i lagranžijan je invarijantan na infinitezimalnu transformaciju.

Dodatak C Skalar-tenzor teorije

Skalar-tenzor (ST) teorija je općeniti naziv za teoriju gravitacije u kojoj gravitacijsko polje nije predstavljeno samo metričkim tenzorom $g_{\mu\nu}$, kao u općoj teoriji relativnosti, nego i skalarnim poljem ϕ. Općenito djelovanje je

$$S_{ST} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega\left(\phi\right)}{\phi}\nabla^{\mu}\phi\nabla_{\mu}\phi - V\left(\phi\right) + \mathcal{L}_m\left(g_{\mu\nu}, \psi\right)\right],$$

gdje je *R* Riccijev skalar, a $\mathcal{L}_m\left(g_{\mu\nu}, \psi\right)$ je gustoća lagranžijana polja materije ukupnog označenih sa ψ, minimalno vezanih za gravitaciju. Neki oblik ST teorije je moguće rješenje za dva velika problema kozmologije; inflacija i tamna energija. Pojedine ST teorije se razlikuju po funkcijama $\omega\left(\phi\right)$ i $V\left(\phi\right)$. Prototip ST teorija je Brans-Dicke teorija [205] sa $\omega\left(\phi\right) = konst.$ i $V\left(\phi\right) = 0.$

Hawking [206] je dokazao da su stacionarne crne rupe koje su posljedica gravitacijskog kolapsa mogu biti rješenja Brans-Dickeove teorije ako i samo ako su rješenja i OTR-a. Taj je rezultat poopćen [207] kasnije na općenite ST teorije za stacionarno vakuumsko prostor-vrijeme, osim u slučaju kada;

i) je rješenje linearno nestabilno ili

ii) skalarno poje je neminimalno vezan za gravitaciju i divergira negdje u prostor-vremenu ili

iii) skalarno polje ne zadovoljava WEC.

Ovo vrijedi također i za tzv. $f(R)$ teorije, u kojima se Hilbertovo djelovanje (2.7) zamijenjuje sa

$$\int f\left(R\right)\sqrt{-g}d^Dx.$$

Dodatak D Apstraktna indeksna notacija

Odlika apstraktne indeksne notacije [5] je da se ne uvodi određena baza, već se indeksima naznačuje tip tenzora. Tenzor tipa (*k,l*) se označava slovom sa k kontravarijantnih i l kovarijantnih malih latiničnih slova,

$$T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}.$$

Pritom isto slovo mora predstavljati isto mjesto u indeksima sa obje strane jednadžbe. Vanjski produkt tenzora, recimo T^{ab} i $S^c{}_d$, se piše

$$T^{ab}S^c{}_d.$$

Ako odaberemo koordinatni sustav oznake komponenata pišemo grčkim slovima. Simetrizacija i antisimetrizacija se označavaju oblim i uglatim zagradama, redom, i definiramo:

$$T_{(a_1\ldots a_l)a_{l+1}\ldots} = \frac{1}{l!}\sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)}\ldots a_{\pi(l)}a_{l+1}\ldots}$$

$$T_{[a_1\ldots a_l]a_{l+1}\ldots} = \frac{1}{l!}\sum_{\pi} \delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\ldots a_{\pi(l)}a_{l+1}\ldots},$$

gdje se sumira po svim permutacijama od 1,...l i δ_π je $+1$ za parne i -1 za neparne permutacije.

Potpuno antisimetrični tenzor tipa (*0,l*) se naziva *diferencijalna l-forma*. Nekoliko operacija sa diferencijalnim formama:

1. Vanjski produkt

$$(\alpha\wedge\beta)_{a_1\ldots a_p b_1\ldots b_q} \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!}\alpha_{[a_1\ldots a_p}\beta_{b_1\ldots b_q]}$$

2. Vanjska derivacija

$$(d\omega)_{a_1\ldots a_{p+1}} \equiv (p+1)\,\nabla_{[a_1}\omega_{a_2\ldots a_{p+1}]}$$

3. Kontrakcija s vektorom

$$i_X f \equiv 0, \qquad (i_X\omega)_{a_1\ldots a_{p-1}} \equiv X^b\omega_{ba_1\ldots a_{p-1}}$$

4. Hodgeov operator

$$(*\omega)_{a_{p+1}\ldots a_m} \equiv \frac{1}{p!}\omega_{a_1\ldots a_p}\epsilon^{a_1\ldots a_p}{}_{a_{p+1}\ldots a_m}$$

Također vrijedi teorem

$$£_X d = d£_X$$

i Cartanova formula

$$£_X\omega = (di_X + i_X d)\,\omega$$

iz koje slijedi

$$£_X f = i_X df = X^a\nabla_a f,$$

gdje je f je oznaka za funkciju, tj. *0*-formu.

Dodatak E Diferencijalna jednadžba

Promatramo nelinearnu običnu diferencijalnu jednadžbu

$$(y'(x))^2 + \kappa y(x)^2 = \lambda$$

gdje su κ i λ realne konstante. Podijelit ćemo rješenja na nekoliko slučaja:

- $\kappa = 0$

$\lambda \geqslant 0$ (tip I); $\quad y(x) = \sqrt{\lambda}x + C, \quad C = konst.$

$\lambda < 0$; nema realnih funkcija

- $\kappa > 0$

$\lambda > 0$ (tip II); $\quad y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}\sin\left(\sqrt{\kappa}\,(x - x_0)\right)$

$\lambda = 0$; nema realnih netrivijalnih funkcija; $y(x) = 0$

$\lambda < 0$; nema realnih funkcija

- $\kappa < 0$

$\lambda > 0$ (tip IIIa); $\quad y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{|\kappa|}}\sinh\left(\sqrt{|\kappa|}\,(x - x_0)\right)$

$\lambda = 0$ (tip IIIb); $\quad y(x) = Ce^{\pm\sqrt{|\kappa|}x}, \quad C = konst.$

$\lambda < 0$ (tip IIIc); $\quad y(x) = \frac{|\lambda|}{2}e^{\pm\sqrt{|\kappa|}(x-x_0)} + \frac{1}{2|\kappa|}e^{\mp\sqrt{|\kappa|}(x-x_0)}.$

Dodatak F Tablice sa rezultatima za skalarna polja

OZNAKE: V je potencijal polja materije, ϕ je oznaka za realna, a ψ za kompleksna skalarna polja,

$$V_{mas} = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 = \frac{\mu^2}{2}|\psi|^2; \qquad |\psi|^2 \equiv \psi^*\psi,$$

$\mathcal{L}$ je gustoća lagranžijana sustava.
Ako ne piše drugačije, podrazumijeva se $D = 4$ dimenzije prostor-vremena, a navedena simetrija se odnosi i na metriku i na skalarna polja.

$$\Lambda > 0$$

$\mathcal{L}$	NH - teorem	KOSA
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V$	$\cdot$ ako vrijedi DEC, $V = 0$ ili konveksan, sfernosimetrično [140, 148] bez korištenja Einsteinovih jednadžbi: $\cdot$ V konveksan, statično [141] $\cdot V$ konveksan, stacionarno, komutativnost Killingovih vektora [147]	$\cdot$ V-dvostruka jama, sfernosimetrično [140, 148]
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V - \frac{R}{12}\phi^2$	$\cdot$ $V = 0$ ili V_{mas}, sfernosimetrično [142]	$\cdot$ $V = \alpha\phi^4$, sfernosimetrično, $0 < M < \sqrt{3/16\Lambda}$, RNdS geometrija, nabijena ili neutralna crna rupa [143]
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{\xi}{2}R\phi^2$	$\cdot$ pretpostavka: ϕ regularan, sfernosimetrično: $0 < \xi$, $\xi \neq 1/6$ [145] $\xi \neq 0$, ξ_c, $D \geqslant 4$ [146]	

Tablica F.1: Pronađene kose i dokazani teoremi za skalarna polja i $\Lambda > 0$

$\Lambda = 0$

$\mathcal{L}$	NH - teorem	KOSA
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$	· ϕ nužno divergira na sfernosimetričnom horizontu [27]	
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V_{mas}$	· sfernosimetrično [25]	
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{R}{12}\phi^2$	· pod pretpostavkom da je polje omeđeno na $\mathcal{H}$ i geometrija neekstremalna [117] · $D \neq 4$, sfernosimetrično [113–116]	· BBMB, divergira na $\mathcal{H}$ [109, 110]
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V$	· skup polja nenegativne ukupne gustoće energije, sfernosimetrično [34] · V pozitivno semidefinitan, statično [123]	· V negativno definitnitan: više kosa, npr. [124–126]
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V - \frac{\xi}{2}R\phi^2$	· ξ proizvoljan, $V = \lambda\phi^4$, $\lambda > 0$, statično [121] · $V = 0$, D dimenzija, sfernosimetrično, $\xi \neq 1/6$ (uvjeti na $\lvert\phi\rvert$!) [118]; ST poopćenje na el. nabijenu crnu rupu [120]	
$\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\psi^*\nabla^\mu\psi - V$	· V pozitivno semidefinitan, $\phi \propto \mathrm{e}^{-i\omega t}$, sfernosimetrično [127]	· V_{mas}, stacionarno prostor-vrijeme, $\psi = \phi(r,\theta)\,\mathrm{e}^{i(m\varphi-\omega t)}$ [128, 132]; skalar-tenzor poopćenje [131]
$f(\phi)\,R - h(\phi)\,\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ $f(\phi)\,,\ h(\phi) > 0$	· pod pretpostavkom da je ϕ omeđen i $D > 3$ [119]	
$-\frac{1}{2}[(D^\alpha\psi)^*\,D_\alpha\psi + \xi R\lvert\psi\rvert^2 + V$ $+\frac{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{8\pi}],\quad D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha$	· sfernosimetrično, V regularan, pozitivno semidefinitan: $\xi \leqslant 0, 1/2 \leqslant \xi, e = 0$ ξ proizvoljan, $e,\ A_\alpha \neq 0$ [122]	
$P(\phi, \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi)$	· stacionarno, osnosimetrično, široka klasa teorija sa nekanoskim skalarnim poljem [208]	
Horndeski-Galileon	· sfernosimetrično [209]	· linearno scalar-Gauss–Bonnet vezanje, sfernosimetrično [210] · još nekoliko kosa; ovisnost polja o vremenu, npr. [211–213]

Tablica F.2: Pronađene kose i dokazani teoremi za skalarna polja i $\Lambda = 0$

$\Lambda < 0$

$\mathcal{L}$	NH - teorem	KOSA
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V$	$\cdot$ $V = 0$ ili konveksan, sfernosimetrično, pretpostavka: ϕ regularan [148] $\cdot$ V sa lokalnim min. u nuli ili neg. lokalnim ekstremom, statično i ako vrijedi PET, D dimenzija [214]	
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V - \frac{R}{12}\phi^2$		$\cdot$ $V = 0$ ili V_{mas}, sfernosimetrično [142]
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{\xi}{2}R\phi^2$	$\cdot$ pretpostavka: ϕ regularan, $\xi < 0$, sfernosimetrično [145]	$\cdot$ sfernosimetrično: [145] $0 < \xi < 1/6$ stabilna, $1/6 < \xi < 3/16$ nestabilna $\cdot$ $D \geqslant 4$, ϕ nema čvorova [105] $0 < \xi \leqslant \xi_c$ stabilna, $\xi_c < \xi$ nestabilna
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$		$\cdot$ $V \propto \cosh^4(c\phi)$, sfernosimetrično [150]
$\frac{R-2\Lambda}{16\pi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V$	$\cdot$ V konveksan, statično [141] ili stacionarno sa komutirajućim Killingovim vektorima [147]	

Tablica F.3: Pronađene kose i dokazani teoremi za skalarna polja i $\Lambda < 0$

Literatura

[1] Penrose, R. *Gravitational collapse: The role of general relativity.* // Riv. Nuovo Cim. 1 (1969), str. 252-276

[2] Ruffini, R.; Wheeler, J. A. *Introducing the black hole.* // Physics Today. Vol. 24, 12 (1971), str. 30-41

[3] Einstein, A. *Zur Electrodynamik bewegter Körper.* // Ann. Physik. Vol. 322, 10 (1905), str. 891-921

[4] Einstein, A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. // Ann. Physik. Vol. 49, 7 (1916), 769-822

[5] Wald, R. M. *General Relativity.* 1st ed. Chicago, London : The university of Chicago Press, 1984.

[6] Schwarzschild, K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 7 (1916), str. 189-196 (prijevod: Antoci, S.; Loinger, A. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory* // Gen. Rel. Grav. Vol. 35, 5 (2003), str. 951-959

[7] Reissner, H. *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie.* // Ann. Physik Vol. 50, 9 (1619), str. 106–120

[8] Nordström, G. *On the energy of the gravitational field in Einstein's theory.* // Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Vol. 20 (1918), str. 1238-1245

[9] Kerr, R. P. *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 11, 5 (1963), str. 237-238

[10] Newman, E. T. et al. *Metric of a rotating, charged mass.* // J. Math. Phys. Vol. 6, 6 (1965), str. 918-919

[11] Boyer, R. H.; Lindquist, R. W. *Maximal analytic extension of the Kerr metric.* // J. Math. Phys. Vol. 8, 2 (1967), str. 265-281

[12] Arnowitt, R.; Deser, S.; Misner, C. W. *Republication of: The dynamics of general relativity.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 40, 9 (2008), str. 1997-2027

[13] Schoen, R.; Yau, S. *On proof of the positive mass conjecture in general relativity.* // Commun. Math. Phys. 65 (1979), str. 47-76

[14] Schoen, R.; Yau, S. *Proof of the positive mass theorem. II.* // Commun. Math. Phys. 79 (1981), str. 231-260

[15] Witten, E. *A new proof of the positive energy theorem.* // Commun. Math. Phys. Vol. 80, 3 (1981), str. 381-402

[16] Einstein, A. *The foundations of the general theory of relativity.* // The collected papers of Albert Einstein, Berlin Vol. 6, 30 (1997), str. 146-200

[17] Carroll, S. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 1st ed. San Francisco: Addison Wesley, 2004.

[18] Padmanabhan, T. *Gravitation. Foundations and frontiers.* 1st ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

[19] Weinberg, S. *Gravitation and cosmology: Principles and appications of general theory of relativity.* 1st ed. New York: John Wiley&Sons, Inc, 1972.

[20] Israel, W. *Event horizons in static vacuum space-times.* // Phys. Rev. Vol. 164, 5 (1967), str. 1776-1779

[21] Israel, W. *Event horizons in static elevtrovac space-times.* // Commun. Math. Phys. Vol. 8 (1968), str. 245-260

[22] Carter, B. *Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 26, 6 (1971), str. 331 -333

[23] Robinson, D. C. *Uniqueness of the Kerr black hole.* // Phys. Rev. Lett 34, 14 (1975), str. 905-906

[24] Thorne, K. S. *Multipole expansions of gravitational radiation.* // Rev. of Modern Phys. Vol. 52, 2 (1980), str. 299-338

[25] Bekenstein, J. D. *Nonexistence of baryon number for static black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 5, 6 (1972), str. 1239-1246

[26] Vishveshwara, C. V. *Generalization of the Schwarzschild Surface to arbitrary static and stationary metrics.* // J. Math. Phys. Vol. 9, 8 (1968), str. 1319-1322

[27] Chase, J. E. *Event horizons in static scalar-vacuum space-times.* // Commun. math. phys. Vol. 19 (1970), str. 276-288

[28] Bekenstein, J. D. *Transcendence of the law of baryon-number conservation in black-hole physics.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 28, 7 (1972), str. 452-455

[29] Bekenstein, J. D. *Nonexistence of baryon number for black holes. II.* // Phys. Rev. D Vol. 5, 10 (1972), str. 2403-2412

[30] Hartle, J. B. *Long-range neutrino forces exerted by Kerr black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 3, 12 (1971), str. 2938-2940

[31] Teitelboim, C. *Nonmeasurability of the lepton number of a black hole.* // Lett. Al Nuovo Cim. Vol. 3, 10 (1972), str. 397-400

[32] Hawking, S. W. *Black holes in general relativity.* // Commun. Math. Phys. Vol. 25 (1972), str. 152-166

[33] Kruskal, M. D. *Maximal extension of Schwarzschild metric.* // Phys. Rev. Vol. 119, 5 (1960), str. 1743-1745

[34] Bekenstein, J. D. *Novel „no-scalar-hair” theorem for black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 51, 12 (1995), str. R6608-R6611

[35] Positive-definite matrix, Wikipedia (4.8.2016), `https://en.wikipedia.org/wiki/Positive-definite_matrix`, 15.8.2016.

[36] Bartnik, R.; McKinnon, J. *Particlelike solutions of the Einstein-Yang-Mills equations.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 61 (1988), str. 141-144

[37] Yasskin, P. B. *Solutions for gravity coupled to masless gauge fields.* // Phys. Rev. D Vol. 12, 8 (1975), str. 2212-2217

[38] Galt'sov, D. V.; Ershov, A. A. *Non-abelian baldness of colored black holes.* // Phys. Lett. A Vol. 138, 4/5 (1989), str. 160-164

[39] Bizon, P.; Popp, O. T. *No-hair theorem for spherical monopoles and dyons in SU(2) Einstein Yang-Mas theory.* // Class. Quant. Grav. Vol. 92 (1992), str. 193-205

[40] Bizon, P. *Colored black holes.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 64, 24 (1990), str. 2844-2847

[41] Künzle, H. P.; Masood ul Alam, A. K. M. *Spherically symmetric static SU(2) Einstein-Yang-Mills fields.* // J. Math. Phys. Vol. 31, 928 (1990), str. 928-935

[42] Volkov, M. S.; Gal'tsov, D. V. *Non-abelian Einstein-Yang-Mills black holes.* // JETP Lett. Vol. 50, 7 (1989) 346-350

[43] Volkov, M. S.; Gal'tsov, D. V. *Black holes in Einstein-Yang-Mills theory.* // Sov. J. Nucl. Phys. Vol. 51, 4 (1990) 747-753

[44] Künzle, H. P. *SU(n)-Einstein-Yang-Mills fields with spherical symmetry.* // Class. Quantum Grav. 8 (1991), str. 2289-2297

[45] Künzle, H. P. *Analysis of the static spherically symmetric SU(n)-Einstein-Yang-Mills equations.* // Commun. Math. Phys. 162 (1994), str. 371 -397

[46] Kleihaus, B.; Kunz, J. *Static black-hole solutions with axial symmetry.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 79, 9 (1997), str. 1595-1598

[47] Kleihaus, B.; Kunz, J. *Static axially symmetric Einstein-Yang-Mills-Dilaton solutions: II. Black hole solutions.* // Phys. Rev. D Vol. 57, 10 (1998), str. 6138-6157

[48] Volkov, M. S.; Straumann, N. *Slowly rotating non-abelian black holes.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 79, 8 (1997), str. 1428-1431

[49] Kleihaus, B.; Kunz, J. *Rotating hairy blach holes.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 86, 17 (2001), str. 3704-3707

[50] Brodbeck, O.; Heusler, M.; Straumann, N.; Volkov, M. S. *Rotating solitons and nonrotating, nonstatic black holes.* // Phys. Rev. Lett. 79, 22 (1997), str. 4310-4313

[51] Gal'tsov, D. V.; Volkov, M. S. *Charged non-abelian SU(3) Einstein-Yang-Mills black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 274, 2 (1992), str. 173-178

[52] Kleihaus, B.; Kunz, J.; Sood, A. *SU(3) Einstein-Yang-Mills sphalerons and black holes.* // Phys. Lett. B 372 (1996), str. 204-2 11

[53] Kleihaus, B. et al. *Sequences of globally regular and black hole solutions in SU(4) EYM theory.* // Phys. Rev. D Vol. 58, 8 (1998), str. 084006(16)

[54] Kleihaus, B.; Kunz, J.; Sood, A. *Charged SU(N) Einstein-Yang-Mills black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 418, 3/4 (1998), str. 284-293

[55] Donets, E.E.; Gal'tsov, D.V. *Stringy sphalerons and non-abelian black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 302, 4 (1993), str. 411-418

[56] Lavrelashvili, G.; Maison, D. *Regular and black hole solutions of Einstein-Yang-Mills dilaton theory.* // Nucl. Phys. B 410 (1993) 407-422

[57] Torii, T.; Maeda, K. *Black holes with non-Abelian hair and their thermodynamical properties*, // Phys. Rev. D Vol. 48, 4 (1993), str. 1643-1651

[58] Kleihaus, B.; Kunz,J.; Sood, A. *SU(3) Einstein-Yang-Mills dilaton sphalerons and black holes.* // Phys. Lett. B 372 (1996) 204-211

[59] Kleihaus, B.; Kunz, J.; Sood, A. *Sequences of Einstein-Yang-Mills dilaton black hole.* // Phys. Rev. D Vol. 54, 8 (1996), str. 5070-5092

[60] Kanti, P.; K. Tamvakis, K. *Colored black holes in higher curvature string gravity.* // Phys. Lett. B 392 (1997), str. 30-38

[61] O'Neill, C. M. *Einstein-Yang-Mills theory with a massive dilaton and axion: String-inspired regular and black hole solutions.* // Phys. Rev. D Vol. 50, 2 (1994) 865-887

[62] Torii, T.; Yajima, H.; Maeda, K. *Dilatonic black holes with Gauss-Bonnet term.* // Phys. Rev. D Vol. 55 (1997), str. 739-753

[63] Donets, E.E.; Gal'tsov, D.V. *Charged stringy black holes with non-abelian hair.* // Phys. Lett. B Vol. 312, 4 (1993), str. 391-397

[64] 't Hooft, M. *Magnetic monopoles in unified gauge theories.* // Nucl. Phys. B 79 (1974), str.276-284

[65] Polyakov, A. M. *Particle spectrum in the quantum field theory.* // JETP Lett. 20 (1974), str. 194-195

[66] Aichelburg, P. C.; Bizon, P. *Magnetically charged black holes and their stability.* // Phys. Rev. D Vol. 48, 2 (1993), str.607-615

[67] Lee, K.; Nair, V. P.; Weinberg, E. J. *Black holes in magnetic monopoles.* // Phys. Rev. D Vol. 45, 8 (1992), str. 2751-2761

[68] Ortiz, M. E.*Curved-space magnetic monopoles.* // Phys. Rev. D Vol. 45, 8 (1992), str. R2586-R2589

[69] Breitenlohner, P.; Forgács, P.; Maison, D. *Gravitating monopole solutions.* // Nucl. Phys. B 383 (1992), str. 357-376

[70] Hartmann, B.; Kleihaus, B.; Kunz, J. *Axially symmetric monopoles and black holes in Einstein-Yang-Mills-Higgs theory.* // Phys. Rev. D Vol. 65, 2 (2001), str. 024027(22)

[71] Greene, B. R.; Mathur, S. D.; O'Neill, C. M. *Eluding the no-hair conjecture: Black holes in spontaneously broken gauge theories.* // Phys. Rev. D Vol. 47, 6 (1993), str. 2242-2259

[72] Ridgway, S. A.; Weinberg, E. J. *Static black hole solutions without rotational symmetry.* // Phys. Rev. D Vol. 52, 6 (1995), str. 3440-3456

[73] Ridgway, S. A.; Weinberg, E. J. *Are all static black hole solutions spherically symmetric?.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 27, 10 (1995), str. 1017-1021

[74] Weinberg, E. J. *Magnetically charged black holes with hair.* (1995), `http://arxiv.org/abs/gr-qc/9503032`, 1.7.2016.

[75] Kleihaus, B. et al. *Black holes with Yang-Mills hair.* // AIP Conf. Proc. 453, 1 (1998), str. 478-487

[76] Luckock, H. C.; Moss, I. *Black holes have skyrmion hair.* // Phys. Lett B 176, 3/4 (1986), str. 341-345

[77] Skyrme, T. H. R. *A non-linear field theory.* // Proc. R. Soc. Lond. A 260 (1961), str. 127-138

[78] Droz, S.; Heusler, M.; Straumann, N. *New black hole solutions with hair.* // Phys. Lett. B Vol. 268, 3/4 (1991), str. 371-376

[79] Bizon, P.; Chmaj, T. *Gravitating skyrmions.* // Phys. Lett. B Vol. 297, 1/2 (1992), str. 55-62

[80] Sawado, N.; Shiiki, N. *Axially symmetric black hole skyrmions.* (2003), `https://arxiv.org/abs/gr-qc/0307115`, 21.8.2016.

[81] Sawado, N.; Shiiki, N.; Maeda, K.; Torii, T. *Regular and black hole skyrmions with axisymmetry.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 36, 6 (2004), str. 1361-1371

[82] Maeda, K. et al. *Stability of non-abelian black holes and catastrophe theory.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 72, 4 (1994), str. 450-453

[83] Tachizawa, T.; Maeda, K.; Torii, T. *Non-Abelian black holes and catastrophe theory: II. Charged type.* // Phys. Rev. D Vol. 51, 8 (1995), str. 4054-4064

[84] Poston, T.; Stewart, I. *Catastrophe theory and it's applications.* 1st ed. London : Pitman Verlag, 1978.

[85] Kusmartsev, F. V. *Application of catastrophe theory to molecules and solitons.* // Phys. Rep. Vol. 183, 1 (1989), str. 1-35

[86] Brodbeck, O.; Straumann, N. *Instability proof for Einstein-Yang-Mills solitons and black holes with arbitrary gauge groups.* // J. Math. Phys. Vol. 37, 3 (1994), str. 1414-1433

[87] Straumann, N.; Zhou, Z. H. *Instability of a colored black hole solution.* // Phys. Lett. B Vol. 243, 1/2 (1990), str. 33-35

[88] Volkov, M. S. et al. *The number of sphaleron instabilities of the Bartnik-McKinnon solitons and non-Abelian black holes.* // Phys. Lett. B 349 (1995), str. 438-442

[89] Volkov, M. S.; Gal'tsov, D. V. *Odd-parity negative modes of Einstein-Yang-Mills black holes and sphalerons.* // Phys. Lett. 341 (1995), str. 279-285

[90] Zhou, Z. H. *Instability of SU(2) Einstein-Yang-Mills solitons and nonabelian black holes.* // Helv. Phys. Acta 65 (1992), str. 767-819

[91] Zhou, Z. H.; Straumann, N. *Nonlinear perturbations of Einstein-Yang-Mills solitons and non-Abelian black holes.* // Nucl. Phys. B 360 (1991), str. 180-196

[92] Donets, E.E.; Gal'tsov, D. V. *Stringy sphalerons and non-abelian black holes.* // Phys. Lett. B 302, 4 (1993), str. 411-418

[93] Gal'tsov, D. V.; Volkov, M. S. *Instability of Einstein-Yang-Mills black holes.* // Phys. Lett. A 162, 2 (1992), str. 144-148

[94] Lavrelashvili, V.; Maison, D. *Regular and black hole solutions of Einstein-Yang-Mills dilaton theory.* // Nucl. Phys. B 410 (1993) 407-422

[95] Carmeli, M.; Kuzmenko, T. *Value of the cosmological constant: theory versus experiment.* // AIP Conf. Proc. 586 (2001), str. 316-318

[96] Torii, T.; Maeda, K.; Tachizawa, T. *Cosmic colored black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 52, 8 (1995), str. 4272-4276

[97] Volkov, M. S. et al. *Cosmological analogues of Bartnik-McKinnon solutions.* // Phys. Rev. D Vol. 54, 12 (1996), str. 7243-7251

[98] Brodbeck, O. et al. *Stability analysis of new soltions of the EYM system with cosmological constant.* // Phys. Rev. D Vol. 54, 12 (1996), str. 7338-7352

[99] Maldacena, J. *The large-N limit of superconformal field theories and supergravity.* // Int. Theor. Phys. Vol. 38, 4 (1999), str. 1113-1133

[100] Witten, E. *Anti de Sitter space and holography.* // Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), str. 253-291

[101] Winstanley, E. *Existence of stable hairy black holes in su(2) Einstein–Yang–Mills theory with a negative cosmological constant.* // Class. Quantum Grav. 16 (1999), str. 1963–1978

[102] Winstanley, E. *Classical Yang-Mills Black Hole Hair in anti-de Sitter Space.* // Lect. Notes Phys. Vol. 769 (2009), str. 49-87

[103] Baxter, J. E. *On the stability of soliton and hairy black hole solutions of su(N) Einstein-Yang-Mills theory with a negative cosmological constant.* // J. Math. Phys. Vol. 57, 2 (2016), str. 022506(26)

[104] Van der Bij, J. J.; Radu, E. *New hairy black holes with negative cosmological constant*. // Phys. Lett. B Vol. 536 (2002), str. 107-113

[105] Radu, E.; Winstanley, E. *Static axially symmetric solutions of Einstein-Yang-Mills equations with a negative cosmological constant: Black hole solutions.* // Phys. Rev. D Vol. 70, 8 (2004), str. 084023(20)

[106] Bjoraker, J.; Hosotani, Y. *Monopoles, dyons and black holes in the four-dimensional Einstein-Yang-Mills theory.* // Phys. Rev. D Vol. 62, 4 (2000), str. 043513(15)

[107] Winstanley, E. *Existence of stable hairy black holes in su(2) Einstein-Yang-Mills theory with a negative cosmological constant.* // Class. Quantum Grav. 16 (1999), str. 1963–1978

[108] Mann, R. B.; Radu, E.; Tchrakian, D. H. *Non-Abelian solutions in AdS4 and d 11 supergravity.* // Phys. Rev. D Vol. 74, 6 (2006), str. 4015(24)

[109] Bocharova, N. M.; Bronnikov, K. A.; Melnikov, V. N. *An exact solution of the system of Einstein equations and mass-free scalar field.* // Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron. 6 (1970), str. 706

[110] Bekenstein, J. D. *Exact solutions of Einstein-conformal scalar equations.* // Annals of Physics Vol. 82, 2 (1974), str. 535-547

[111] Bekenstein, J. D. *Black holes with scalar charge.* // Annals of Physics Vol. 91, 1 (1975), str. 75-82

[112] Bronnikov, K. A.; Kireyev, Y. N. *Instability of black holes with scalar charge.* // Phys. Lett. A Vol. 67, 2 (1978), str. 95-96

[113] Klimčik, C. *Search for the conformal scalar hair at arbitrary D.* // J. Math. Phys. Vol. 34, 5 (1993), str. 1914-1926

[114] Xanthopoulos, B. C.; Dialynas, T. E. *Einstein gravity coupled to a massless conformal scalar field in arbitrary space time dimensions.* // J. Math. Phys. Vol. 33, 4 (1992), str. 1463-1471

[115] Xanthopoulos, B. C.; Zannias, T. *The uniqueness of the Bekenstein black hole.* // J. Math. Phys. Vol. 32, 7 (1991), str. 1875-1880

[116] Accioly, A. J. et al. *Classical equivalence of $\lambda R\phi^2$ theories.* // Class. Quant. Grav. Vol. 10 (1993), str. L215-L219

[117] Zannias, T. *Black holes cannot support conformal scalar hair.* // J. Math. Phys. Vol. 36, 12 (1995), str. 6970-6980

[118] Saa, A. *Searching for nonminimally coupled scalar hairs.* // Phys. Rev. D Vol. 53, 12 (1996), str. 7377-7380

[119] Saa, A. *New no-scalar-hair theorem for black holes.* // J. Math. Phys. Vol. 37, 5 (1996), str. 2346-2351

[120] Banerjee, N.; Sen S. *No scalar hair theorem for a charged spherical black hole.* // Phys. Rev. D Vol. 58, 10 (1998), str. 104024(6)

[121] Ayón-Beato, E. *'No-scalar-hair' theorems for nonminimally coupled fields with quartic self-interaction.* // Class. Quantum Grav. 19 (2002), str. 5465–5472

[122] Mayo, A. E.; Bekenstein, J. D. *No hair for spherical black holes: Charged and nonminimally coupled scalar field with self-interaction.* // Phys. Rev. D Vol. 54, 8 (1996), str. 5059-5069

[123] Sudarsky, D. *A simple proof of a no-hair theorem in Einstein-Higgs theory.* // Class. Quantum Grav. 12, 2 (1995), str. 579-584

[124] Dennhardt, H.; Lechtenfeld, O. *Scalar deformations of Schwarzschild holes and their stability.* // Int. J. Mod. Phys. A Vol. 13, 5 (1998), str. 741-764

[125] Bechmann, O.; Lechtenfeld, O. *Exact black-hole solution with self-interacting scalar field.* // Class. Quant. Grav. Vol. 12, 6 (1995), str. 1473-1481

[126] Kleihaus, B.; Kunz, J.; Radu, E.; Subagyo, B. *Axially symmetric static scalar solitons and black holes with scalar hair.* // Phys. Lett. B Vol. 725, 4-5 (2013), str. 489-494

[127] Peña, I.; Sudarsky, D. *Do collapsed boson stars result in new types of black holes?.* // Class. Quantum Grav. Vol. 14 (1997), str. 313(3)

[128] Herdeiro, C. A. R.; Radu, E. *Kerr black holes with scalar hair.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 112, 22 (2014), str. 22110(4)

[129] Herdeiro, C. A. R.; Radu, E. *A new spin on black hole hair.* // Int. J. Mod. Phys. D Vol. 23, 12 (2014), str. 1442014-1442018

[130] Herdeiro, C. A. R.; Radu, E.; Rúnarsson, H. *Kerr black holes with self-interacting scalar hair: hairier but not heavier.* // Phys. Rev. D Vol. 92 (2015), str. 084059-084066

[131] Kleihaus, B.; Kunz, J.; Yazadjiev, S. *Scalarized hairy black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 744 (2015), str. 406-412

[132] Herdeiro, C. A. R.; Radu, E. *Construction and physical properties of Kerr black holes with scalar hair.* // Class.Quantum Grav. Vol. 32, 14 (2015), str. 14400(45)

[133] Gibbons, G. W. *Antigravitating black hole solitons with scalar hair in N=4 supergravity.* // Nucl. Phys. B 207 (1982), str. 337-349

[134] Alexeyev, S. O.; Pomazanov, M. V. *Black hole solutions with dilatonic hair in higher curvature gravity.* // Phys. Rev. D Vol. 55, 4 (1997), str. 2110-2118

[135] Kanti, P. et al. *Dilatonic black holes in higher curvature string gravity.* // Phys. Rev. D Vol. 54, 8 (1996), str. 5049-5058

[136] Gibbons, G. W.; Maeda, K. *Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilatonic fields.* // Nucl. Phys. B 298 (1988), str. 741-775

[137] Garfinkle, d.; Horowitz, G. T.; Strominger, A. *Charged black holes in string theory.* // Phys. Rev. D Vol. 43, 10 (1991), str. 3140-3143

[138] Sen, A. *Rotating charged black hole solution in heterotic string theory.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 69, 7 (1992), str. 1006-1009

[139] Horowitz, G. T. *Dark side of string theory : Black holes and black strings.* (1992), http://arxiv.org/abs/hep-th/9210119v1, 1.7.2016.

[140] Torii, T.; Maeda, K.; Narita, M. *Toward the no-scalar-hair conjecture in asymptotically de Sitter spacetime.* // Phys. Rev. D Vol. 59, 6 (1998), str. 064027(8)

[141] Bhattacharya, S.; Lahiri, A. *Black-hole no-hair theorems for a positive cosmological constant.* // Phys. Rev. Lett Vol. 99, 20 (2007), str. 201101(4)

[142] Winstanley, E. *On the existence of conformally coupled scalar field hair for black holes in (anti-)de Sitter space.* // Found. Phys. Vol. 33, 1 (2003), str. 111-143

[143] Martínez, C.; Troncoso, R.; Zanelli, J. *De Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four dimensions.* // Phys. Rev. D Vol. 67, 2 (2003), str. 024008(3)

[144] Dotti, G.; Gleiser, R.; Martínez, C. *Static black hole solutions with a self-interacting conformally coupled scalar field.* // Phys. Rev. D Vol. 77, 10 (2008), str. 104035(13)

[145] Winstanley, E. *Dressing a black hole with non-minimally coupled scalar field hair.* // Class.Quantum Grav. 22 (2005), str. 2233–2247

[146] Hosler, D.; Winstanley, E. *Higher-dimensional solitons and black holes with a nonminimally coupled scalar field.* // Phys. Rev. D Vol. 80, 10 (2009), str. 104010(16)

[147] Bhattacharya, S.; Lahiri, A. *No hair theorems for stationary axisymmetric black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 83, 12 (2011), str. 124017(7)

[148] Torii, T.; Maeda, K.; Narita, M. *Scalar hair on the black hole in asymptotically anti–de Sitter spacetime.* // Phys. Rev. D Vol. 64, 9 (2001), str. 044007(9)

[149] Martínez, C.; Troncoso, R.; Zanelli, J. *Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field.* // Phys. Rev. D Vol. 70, 8 (2004), str. 084035(6)

[150] Martínez, C.; Troncoso, R. *Electrically charged black hole with scalar hair.* // Phys. Rev. D Vol. 74, 6 (2006), str. 064007(8)

[151] Breitenlohner, P.; Freedman, D. Z. *Stability in gauged extended supergravity.* // Annals of Phys. Vol. 144, 2-4(1982), str. 249-281

[152] Breitenlohner, P.; Freedman, D. Z. *Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity.* // Phys. Lett. Vol. 115, 3 (1982), str. 197-201

[153] Nielsen, N. K.; Olesen, P. *Vortex-line models for dual strings.* // Nucl. Phys. B 61 (1973), str. 45-61

[154] Achúcarri, A.; Gregory, R.; Kuijken, K. *Abelian Higgs hair for black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 51, 10 (1995), str. 5729-5742

[155] Ghezelbash, A. M.; Mann, R. B. *Abelian Higgs hair for rotating and charged black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 65, 12 (2002), str. 124022(15)

[156] Bekenstein, J. D. *Black hole hair: 25 years after* // Second Sakharov Conference in Physics, Moscow / edited by I. M. Dremin, A. M. Semikhatov. Singapore : World Scientific, 1997. Str. 216-219

[157] Bekenstein, J. D. *Black holes: Classical properties, thermodynamics and heuristic quantization* // 9th Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, 1998. / http://arxiv.org/abs/gr-qc/9808028v3,15.8.2016.

[158] Ayón-Beato, E. *„No-hair" theorem for spontaneously broken Abelian models in static black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 62, 10 (2000), str. 104004(7)

[159] Radu, H.; Shnir, Y.; Tchrakian, D. H. *Scalar hairy black holes and solitons in a gravitating Goldstone model.* // Phys. Lett. B Vol. 703, 3 (2011), str. 386–393

[160] Barriola, M.; Vilenkin, A. *Gravitational field of a global monopole.* // Phys. Rev. Lett. 63, 4 (1989), str. 341-343

[161] Bhattacharya, S.; Lahiri, A. *Massive spin-2 and spin-1/2 no hair theorems for stationary axisymmetric black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 86, 8 (2012), str. 084038(8)

[162] Bhattacharya, S. *Note on black hole no hair theorems for massive forms and spin-1/2 fields.* // Phys. Rev. D Vol. 88, 4 (2013), str. 044053(11)

[163] Brito, R.; Cardoso, V.; Pani, P. *Black holes with massive graviton hair.* // Phys. Rev. D Vol. 88, 6 (2013), str. 064006(6)

[164] Chandrasekhar, S. International series of monographs on physics 69. *The Mathematical Theory of Black Holes.* 1st ed. Oxford : Clarendon press, 1985.

[165] Ayón-Beato, E. *Improving the „no-hair" theorem for the Proca field.* // Developments in Math. and Exp. Physics Vol. A: Cosmology and Gravitation / edited by A. Macias, F. Uribe, and E. Diaz: Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2002), str. 81-88

[166] Herdeiro, C. A. R.; Radu, E.; Rúnarsson, H. *Kerr black holes with Proca hair.* // Class. Quan. Grav. 33, 15 (2016), str. 154001(34)

[167] Zilhão, M.; Witek, H.; Cardoso, V. *Nonlinear interactions between black holes and Proca fields.* // Class. Quan. Grav. Vol. 32, 23 (2015), str. 234003(21)

[168] Krauss, L. M.; Wilczek, F. *Discrete gauge symmetry in continuum theories.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 62, 11 (1989), str. 1221-1223

[169] Coleman, S.; Preskill, J.; Wilczek, F. *Quantum hair on black holes.* // Nucl. Phys. B 378 (1992), str. 175-246

[170] Campbell, B. A.; Kaloper, N.; Olive, K. A. *Axion hair for dyon black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 263, 3/4 (1991), str. 364-370

[171] Coleman, S. et al. *Axion hair for Kerr black holes.* // Phys. Lett. B Vol. 251, 1 (1990), str. 34-38

[172] Bowick, M. J. et al. *Axionic black holes and an Aharonov-Bohm effect for strings.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 61, 25 (1988), str. 2823-2826

[173] Allen, T. J.; Bowick, M. J.; Lahiri, A. *Axionic black holes from massive axions.* // Phys. Lett. B Vol. 237, 1 (1990), 47-51

[174] Núñez, D.; Quevedo, H.; Sudarsky, D. *Black holes have no short hair.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 76, 4 (1996), str. 571-574

[175] Brown, J. D.; Husain, V. *Black holes with short hair.* // Int. J. Mod. Phys. D 6, 5 (1997), str. 563-573

[176] Hod, S. *Rotating black holes can have short bristles.* // Phys. Lett. B 739 (2014), str. 196

[177] Hod, S. *Hairy black holes and null circular geodesics.* // Phys. Rev. D 84, 12 (2011), str. 124030(5)

[178] Woolley, M. L. *The structure of groups of motions admitted by Einstein-Maxwell space-times.* // Comm. Math. Phys. Vol. 31, 1 (1973), str. 75–81

[179] Woolley, M. L. *On the role of the Killing tensor in the Einstein-Maxwell theory.* // Comm. Math. Phys. Vol. 33, 2 (1973), str. 135–144

[180] Müller zum Hagen, H.; Robinson, D. C.; Seifert, H. J. *Black holes in static electrovac space-times.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 5, 1 (1974), str. 61–72,

[181] Michalski, H.; Wainwright, J. *Killing vector fields and the Einstein-Maxwell field equations in General relativity.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 6, 3 (1975), str. 289–318

[182] Wainwright, J.; Yaremovicz, P. E. A. *Killing vector fields and the Einstein-Maxwell field equations with perfect fluid source.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 7, 4 (1976), str. 345–359

[183] Wainwright, J.; Yaremovicz, P. E. A. *Symmetries and the Einstein-Maxwell field equations. The null field case.* // Gen. Rel. Grav. Vol. 7, 7 (1976), str. 595–608

[184] Tod, P. *Conditions for nonexistence of static or stationary, Einstein-Maxwell, non-inheriting black-holes.* // Gen. Rel. Grav., Vol. 39, 2 (2007), str. 111–127

[185] Hoenselaers, C. *On the effect of motions on energy momentum tensors.* // Prog. Theor. Phys. Vol. 59, 5 (1978), str. 1518–1521

[186] Bičák, J.; Scholtz, M.; Tod P. *On asymptotically flat solutions of Einstein's equations periodic in time I. Vacuum and electrovacuum solutions.* // Class. Quantum Grav. Vol. 27, 5 (2010), str. 055007(23)

[187] Bičák, J.; Scholtz, M.; Tod P. *On asymptotically flat solutions of Einstein's equations periodic in time II. Spacetimes with scalar-field sources.* // Class. Quantum Grav. Vol. 27, 17 (2010), str. 175011(29)

[188] Graham, A. A. H.; Jha, R. *Stationary black holes with time-dependent scalar fields.* // Phys. Rev. D Vol. 90, 4 (2014), str. 041501(5)

[189] Rácz, I. *On the existence of Killing vector fields.* // Class. Quant. Grav. Vol. 16, 6 (1999), str. 1695–1703

[190] Rácz, I. *Symmetries of space-time and their relation to initial value problems.* // Class. Quant. Grav. Vol. 18 (2001), str. 5103–5114

[191] Smolić, I. *Symmetry inheritance of scalar fields.* // Class. Quant. Grav. Vol. 32, 14 (2015), str. 145010(19)

[192] Wyman, M. *Static spherically symmetric scalar fields in general relativity.* // Phys. Rev. D Vol. 24, 4 (1981), str. 839–841

[193] Bonazzola, S.; Pacini, F. *Equilibrium of a large assembly of particles in general relativity.* // Phys. Rev. Vol. 148, 4 (1966), str. 1269–1270

[194] Kaup, D. J. *Klein-Gordon Geon.* // Phys. Rev. Vol. 172, 5 (1968), str. 1331–1342

[195] Ruffini, R.; Bonazzola, S. *Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state.* // Phys. Rev. Vol. 187, 5 (1969), str. 1767–1783

[196] Schunck, F. E.; Mielke, E. W. *General relativistic boson stars.* // Class. Quant. Grav. Vol. 20, 20 (2003), str. R301-R356

[197] Carter, B. *Black hole equilibrium states*, in *Black Holes*. 4th ed. New York : Gordon and Breach, 1973.

[198] Smolić, I. *Killing horizons as equipotential hypersurfaces.* // Class. Quant. Grav. Vol. 29, 20 (2012), str. 207002(6)

[199] Falcke, H.; Melia, F.; Agol, E. *Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center.* // J. of Astro. 528, 1 (2000), str. L13-L16

[200] VLBI Reconstruction dataset, `http://vlbiimaging.csail.mit.edu/`, 4.5.2016.

[201] Cunha, V. P.; Herdeiro, A. R.; Radu, E.; Rúnarsson, H. F. *Shadows of Kerr blach holes with scalar hair.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 115, 21 (2015), str. 211102(5)

[202] Will, C. M. *Testing the general relativistic „no-hair" theorems using the galactic center black hole Saggitarius A*.* // The Astro. J. Vol. 674, 1 (2008), str. L25-L28

[203] Broderick, A. E. et al. *Testing the No-Hair Theorem with Event Horizon Telescope Observations of Sagittarius A*.* // The Astro. J. Vol. 781, 1 (2013), 14 str.

[204] Gürlebeck, N. *No hair theorem for black holes in astrophysical environments.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 114, 15 (2015), str. 151102(5)

[205] Brans, C. H.; Dicke, R. H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation.* // Phys. Rev. Vol. 124, 3 (1961), str. 925-935

[206] Hawking, S. W. *Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation.* // Commun. Math. Phys. Vol. 25, 12 (1972), str. 167-171

[207] Sotiriou, T. P.; Faraoni, V. *Black holes in scalar-tensor gravity.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 108, 8 (2012), str. 081103(4)

[208] Graham, A. A. H.; Jha, R. *Nonexistence of black holes with noncanonical scalar fields.* // Phys. Rev. D Vol. 89, 8 (2014), str. 084056(6)

[209] Hui, L.; Nicolis, A. *A no-hair theorem for the galileon.* // Phys. Rev. Lett. Vol. 110, 24 (2013) 241104(4)

[210] Sotiriou, T. P.; Zhou, S. *Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity : An explicit example.* // Phys. Rev. D Vol. 90, 12 (2014), str. 124063(17)

[211] Babichev, E.; Charmousis, C. *Dressing a black hole with a time-dependent Galileon.* // JHEP Vol. 8, 106 (2014), str. (10)

[212] Charmousis, C. et al. *Black holes in bi-scalar extensions of Horndeski theories.* // JHEP Vol. 7, 85 (2014), str. (22)

[213] Charmousis, C.; Iosifidis, D. *Self tuning scalar tensor black holes.* // J. of Phys.: Conference series Vol. 600, 1 (2015), str. 012003(14)

[214] Hertog, T. *Towards a novel no-hair theorem for black holes.* // Phys. Rev. D Vol. 74, 8 (2006), str. 084008(13)

[215] Skákala, J.; Shankaranarayanan, S. *Black hole hair in Lovelock gravity.* // Phys. Rev. D Vol. 89, 10 (2014), str. 104003(6)