Opisana i upisana kružnica trokuta

Perković, Marijana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marijana Perković

OPISANA I UPISANA KRUŽNICA TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se raznim svojstvima kružnica trokuta. Upisana i opisana kružnica trokuta su već dobro poznate kružnice o kojima se uči od 6. razreda osnovne škole. Osim opisane i upisane kružnice, osvrnut ćemo se i na pripisane kružnice trokuta te kružnicu devet točaka. U prvom poglavlju su dane definicije i osnovna svojstva kružnica trokuta koje ćemo koristiti u cijelom radu. Drugo poglavlje je posvećeno konstrukcijama trokuta u kojima je jedan od zadanih elemenata polumjer opisane ili upisane kružnice ili položaj središta tih kružnica. U ovom poglavlju dokazat ćemo i nemogućnost izvođenja nekih konstrukcija ravnalom i šestarom. Za potrebe rješavanja problema kada konstrukcija nije moguća, dan je kratak pregled osnovnih teorema o postojanju konstruktibilnih rješenja jednadžbe. Pošto se na matematičkim natjecanjima često pojavljuju zadaci koji su povezani s upisanom ili opisanom kružnicom trokuta, u trećem poglavlju ćemo izdvojiti nekoliko zadataka s matematičkih natjecanja u Republici Hrvatskoj. U zadnjem poglavlju ćemo prikazati neke nejednakosti vezane uz upisanu i opisanu kružnicu trokuta.

Poglavlje 1

Kružnice trokuta

U ovom ćemo poglavlju iznijeti definicije i osnovna svojstva nekoliko vrsta kružnica koje su na izvjestan način povezane s trokutom.

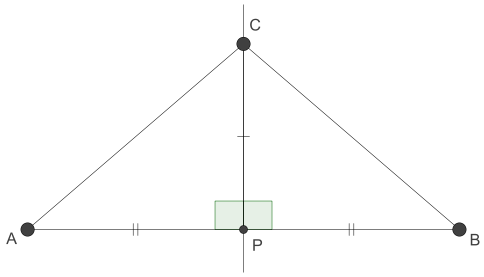
1.1 Simetrala dužine i simetrala kuta

Navedimo definicije dva objekta na čijim svojstvima se temelje definicije i egzistencija kružnica trokuta. To su simetrala dužine i simetrala kuta.

Definicija 1.1.1. *Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

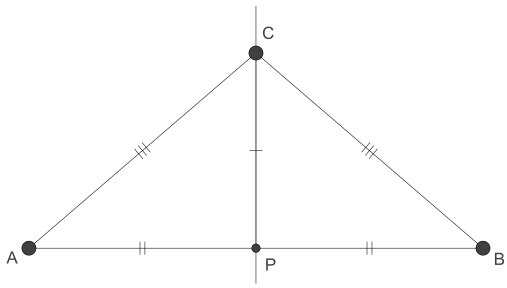
Propozicija 1.1.2. *Točka C je na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.*

Dokaz. Neka je C točka koja pripada simetrali dužine $\overline{AB}$, a P polovište dužine $\overline{AB}$. Promotrimo trokute APC i PBC na slici 1.1. Znamo da je $|AP| = |PB|$, $\overline{PC}$ je zajednička stranica trokuta APC i PBC te $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC = 90^\circ$. Trokuti APC i PBC su stoga sukladni prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta. Iz te sukladnosti slijedi da su i stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ sukladne, što je i trebalo dokazati.



Slika 1.1: Sukladnost trokuta prema S-K-S poučku

Dokažimo drugi smjer. Neka je C točka sa svojstvom $|AC| = |BC|$. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Promotrimo trokute APC i PBC na slici 1.2. Znamo da je $|AC| = |BC|$, $|AP| = |PB|$, a $\overline{PC}$ je zajednička stranica tih trokuta. Trokuti APC i PBC su stoga sukladni prema S-S-S poučku o sukladnosti trokuta. Slijedi $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$, a ti kutovi su sukuti pa vrijedi $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC = 90°$. Dakle, pravci PC i AB su okomiti i PC prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$, pa je PC simetrala dužine $\overline{AB}$. Zaključujemo da točka C pripada simetrali dužine $\overline{AB}$.



Slika 1.2: Sukladnost trokuta prema S-S-S poučku

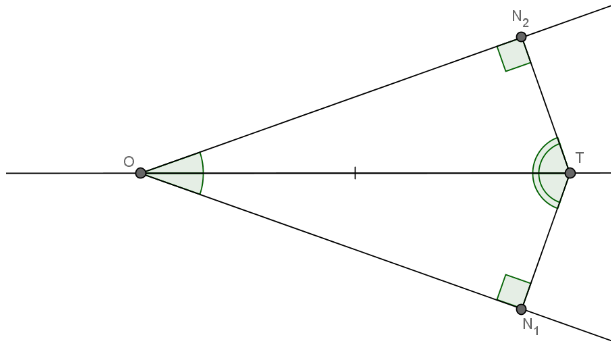
□

Definicija 1.1.3. *Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.*

Propozicija 1.1.4. *[9, str. 217.] Unutarnja točka kuta je na simetrali tog kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

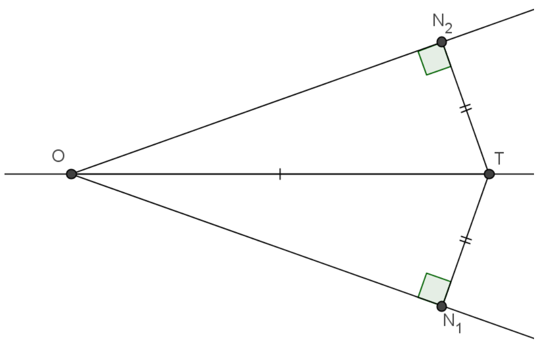
Dokaz. Neka je točka T unutarnja točka kuta s vrhom O na simetrali tog kuta. Spustimo iz T okomice na krakove kuta s nožištima N_1 i N_2. Promotrimo trokute OTN_1 i OTN_2 na slici 1.3. Znamo da je $\sphericalangle ON_1T = \sphericalangle ON_2T = 90°$ i $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$, pa zato vrijedi i $\sphericalangle OTN_1 = \sphericalangle OTN_2$, a $\overline{OT}$ je zajednička stranica tih trokuta. Trokuti OTN_1 i OTN_2 su stoga sukladni prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta.

Iz te sukladnosti slijedi da je $|TN_1| = |TN_2|$ što je i trebalo dokazati.



Slika 1.3: Sukladnost trokuta prema K-S-K poučku

Dokažimo drugi smjer. Neka je T točka sa svojstvom $|TN_1| = |TN_2|$ gdje su N_1 i N_2 nožišta okomica spuštenih iz točke T na krakove kuta s vrhom u O. Promotrimo trokute OTN_1 i OTN_2 na slici 1.4. Znamo da je $|TN_1| = |TN_2|$, $\sphericalangle ON_1T = \sphericalangle ON_2T = 90°$ i $\overline{OT}$ je zajednička stranica tih trokuta. Trokuti OTN_1 i OTN_2 su stoga sukladni prema S-S-K$^>$ poučku o sukladnosti trokuta. Slijedi $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$, pa točka T pripada simetrali kuta $\sphericalangle N_1ON_2$.



Slika 1.4: Sukladnost trokuta prema S-S-K$^>$ poučku

□

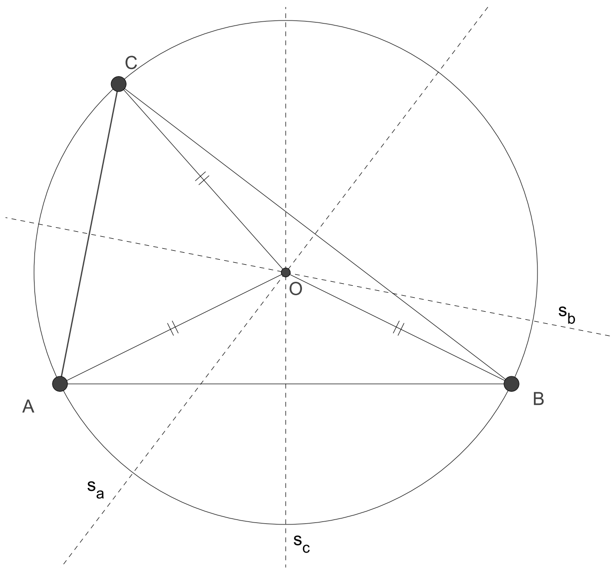
1.2 Opisana kružnica trokuta

Definicija 1.2.1. *Kružnicu koja prolazi vrhovima trokuta zovemo opisanom kružnicom trokuta.*

Teorem 1.2.2. *[9, str. 216.]*

Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice.

Dokaz. Neka je ABC dani trokut, a s_a i s_b simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ te neka se one sijeku u točki O (slika 1.5). Prema Propoziciji 1.1.2 slijedi $|OB| = |OC|$ i $|OC| = |OA|$. Stoga vrijedi $|OB| = |OA|$, pa se točka O nalazi i na simetrali s_c stranice $\overline{AB}$. Zaključujemo da je točka O jednako udaljena od točaka A, B, C pa je O središte tom trokutu opisane kružnice.



Slika 1.5: Središte trokutu opisane kružnice

Obrnuto, ako kružnica prolazi svim vrhovima trokuta, onda je njezino središte O jednako udaljeno od vrhova pa O pripada simetralama stranica.

□

Teorem 1.2.3. *[8, str.67.]*
Polumjer R trokutu ABC opisane kružnice jednak je

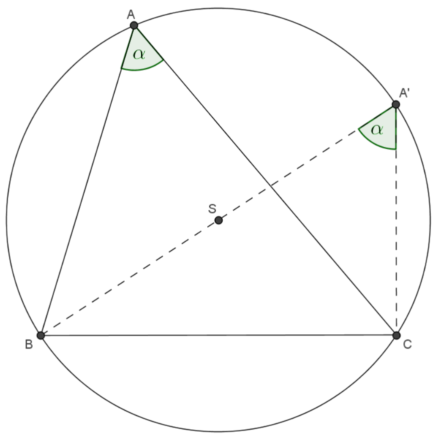
$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \tag{1.1}$$

i

$$R = \frac{abc}{4P} \tag{1.2}$$

gdje je P površina trokuta ABC.

Dokaz. Promotrimo sliku 1.6. Neka je R polumjer trokutu opisane kružnice, a $|BC| = a$.



Slika 1.6: Obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$

Na slici vidimo da je $\overline{BA'} = 2R$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA'C = \alpha$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$). Trokut $A'BC$ je pravokutan jer je $\sphericalangle BCA'$ kut nad promjerom kružnice, pa vrijedi $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$.

Dakle, vrijedi $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Analogno, $R = \dfrac{b}{2\sin\beta} = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$, dakle vrijedi jednakost (1.1).
Formula za površinu trokuta je

$$P = \frac{cv_c}{2} = \frac{b\sin\alpha}{2}.$$

Slijedi $\sin\alpha = \dfrac{2P}{bc}$. Uvrštavanjem u jednakost $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ izravno dobivamo jednakost (1.2).

□

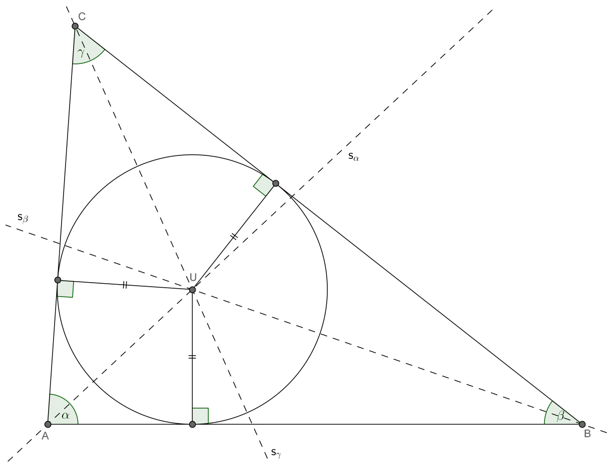
1.3 Upisana kružnica trokuta

Definicija 1.3.1. *Kružnicu koja dira svaku od stranica danog trokuta ABC s unutrašnje strane zovemo tom trokutu upisanom kružnicom.*

Teorem 1.3.2. *[9, str. 217.]*

Sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte tom trokutu upisane kružnice.

Dokaz. Neka je U sjecište simetrala s_α i s_β unutarnjih kutova α i β trokuta ABC (slika 1.7).



Slika 1.7: Središte trokutu upisane kružnice

Prema Propoziciji 1.1.4, točka U jednako je udaljena od krakova kuta α i krakova kuta β. Stoga je U jednako udaljena i od krakova kuta γ. Prema Propoziciji 1.1.4, treća simetrala s_γ također prolazi točkom U. Točka U u kojoj se sijeku simetrale kutova trokuta je središte kružnice koja dira sve tri stranice trokuta, odnosno kružnice upisane trokutu ABC.

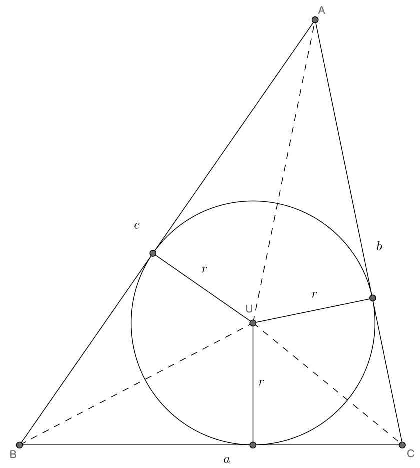
□

Teorem 1.3.3. *[8, str. 68.]*

Polumjer r upisane kružnice trokuta ABC dan je s

$$r = \frac{P}{s}$$

gdje je P površina, a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ *poluopseg danog trokuta.*



Slika 1.8: Središte trokutu upisane kružnice

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te njemu upisana kružnica sa središtem u točki U.

Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta BCU, CAU i ABU, odnosno:

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} = rs.$$

Slijedi $r = \frac{P}{s}$, što je trebalo i dokazati.

□

S pojmom upisane kružnice trokuta povezana je i poznata Heronova formula. Postoje različiti načini izvoda Heronove formule, no navest ćemo jedan koji je povezan s pojmom upisane kružnice.

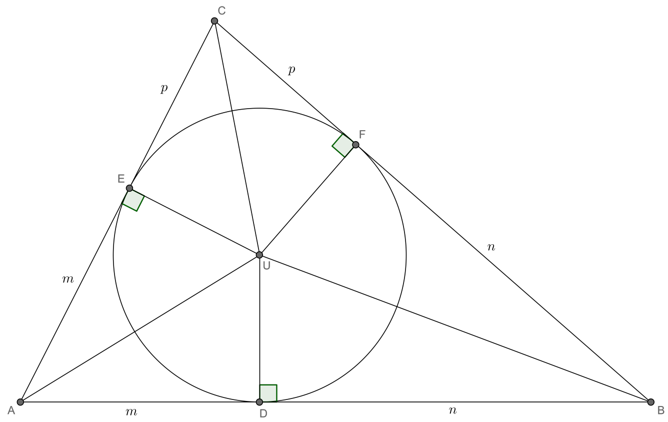
Teorem 1.3.4. *[2, str. 212.] (Heronova formula)*

Ako stranice trokuta imaju duljine a, b, c, tada je površina tog trokuta dana sa

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je s poluopseg trokuta, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Dokaz. Neka je U središte kružnice upisane trokutu ABC. Uvodimo pomoćne veličine m, n, p kao na slici 1.9.



Slika 1.9: Površina trokuta

Dakle, $a = p + n, b = p + m, c = m + n, s = m + n + p$.
Ako kut pri vrhu C označimo s γ, iz trokuta CEU je:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + p^2}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

Možemo pisati:

$$\sin\gamma = \sin 2\cdot\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2rp}{\sqrt{r^2 + p^2}}.$$

Uvrstimo li izraze za a, b i $sin\gamma$ u formulu za površinu trokuta dobivamo

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}(p+n)(p+m)\frac{2rp}{r^2 + p^2}. \tag{1.3}$$

Iz Teorema 1.3.3 slijedi

$$P = rs, \tag{1.4}$$

pri čemu je s poluopseg danog trokuta. Stoga iz jednakosti (1.3) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(p+n)(p+m)\frac{2rp}{r^2+p^2} &= rs \\
p(p+n)(p+m) &= s(r^2+p^2) \\
mnp + p^2(m+n+p) &= sr^2 + sp^2 \\
mnp + sp^2 &= sr^2 + sp^2 \\
mnp &= sr^2 \\
smnp &= s^2r^2.
\end{aligned}$$

Iskoristimo li jednakost (1.4), dobivamo:

$$P^2 = smnp. \tag{1.5}$$

Sjetimo se da je $a = p + n, b = p + m, c = m + n, s = m + n + p$.
Ako izrazimo pomoćne veličine m, n, p koristeći duljine stranica a, b, c i poluopseg s, imamo: $m = s - a, n = s - b, p = s - c$. Uvrštavanjem u jednakost (1.5) dobivamo da je $P^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$, odnosno:

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

□

Sljedeći teorem ima važnu ulogu u geometriji te postoje razni dokazi teorema. Ovdje ćemo navesti jedan dokaz za koji je potreban samo Pitagorin poučak.

Teorem 1.3.5. *[1, str. 132.] (Eulerov teorem)*
Udaljenost središta O opisane kružnice i središta U upisane kružnice danog trokuta ABC dana je s

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

pri čemu je R polumjer trokutu opisane kružnice, a r polumjer trokutu upisane kružnice.

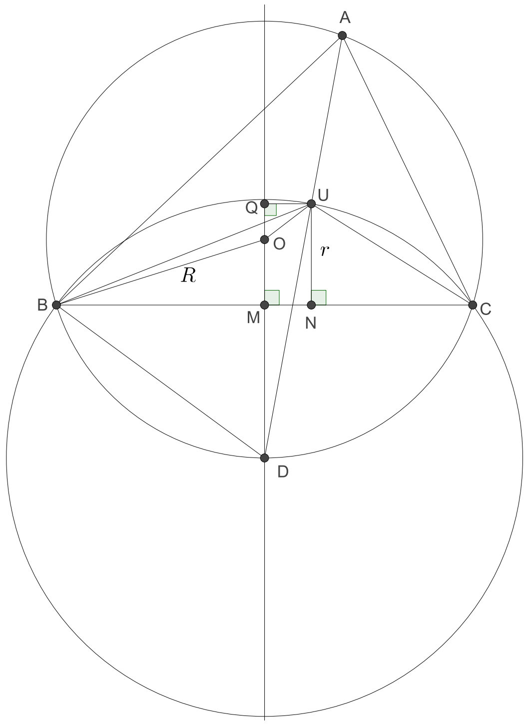
Dokaz. Promotrimo sliku 1.10. Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC, a točka Q ortogonalna projekcija točke U na pravac OD. Kružnica opisana trokutu BCU ima središte u točki D.

Budući da je $|DB| = |DU|$, vrijedi

$$|OB|^2 - |OU|^2 = |OB|^2 - |DB|^2 + |DU|^2 - |OU|^2.$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokute BMO, BDM, DUQ, OUQ, vrijedi:

$$\begin{aligned}
|OB|^2 - |OU|^2 &= (|OM|^2 + |BM|^2) - (|DM|^2 + |BM|^2) + (|UQ|^2 + |QD|^2) - |OU|^2 \\
&= |OM|^2 - |DM|^2 + |QD|^2 - (|OU|^2 - |UQ|^2) \\
&= |OM|^2 - |DM|^2 + |QD|^2 - |OQ|^2 \\
&= (|OM| - |DM|)(|OM| + |DM|) + (|QD| - |OQ|)(|QD| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| - |DM|) + |OD|(|QD| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| - |DM| + |QD| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| - |DM| + (|DM| + |MQ|) + |OQ|) \\
&= |OD|((|OM| + |OQ|) - |DM| + |DM| + |MQ|)) \\
&= |OD| \cdot 2 \cdot |MQ|.
\end{aligned}$$



Slika 1.10: Udaljenost središta upisane i opisane kružnice

Dobili smo:

$$|OB|^2 - |OU|^2 = |OD| \cdot 2 \cdot |MQ|,$$

odnosno jer je $|OB| = |OD| = R, |MQ| = |NI| = r$ (jer je $MNUQ$ pravokutnik), vrijedi:

$$R^2 - |OU|^2 = R \cdot 2 \cdot r,$$

te konačno:

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr.$$

□

Posljedica ovog teorema je nejednakost koja se u literaturi naziva i Eulerova nejednakost, a važna je u području geometrijskih nejednakosti:

Korolar 1.3.6. *Polumjer opisane kružnice danog trokuta ne može biti manji od promjera upisane kružnice,*

$$R \geq 2r.$$

1.4 Pripisane kružnice trokuta

Osim opisane i upisane kružnice koje su standardni školski pojmovi, uz trokut se vezuju i tri manje poznate, takozvane pripisane kružnice.

Definicija 1.4.1. *Kružnicu k_a koja dira stranicu a trokuta s vanjske strane i produžetke ostalih dviju stranica b i c, zovemo pripisanom kružnicom k_a uz stranicu a. Analogno definiramo pripisane kružnice k_b i k_c uz stranice b i c.*

Teorem 1.4.2. *[8, str. 68.]*
Polumjeri r_a, r_b, r_c pripisanih kružnica trokuta ABC dani su s

$$r_a = \frac{P}{s-a};\ r_b = \frac{P}{s-b};\ r_c = \frac{P}{s-c},$$

gdje je P površina trokuta ABC, a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg danog trokuta.

Dokaz. Promotrimo trokute ABU_a, ACU_a, BCU_a na slici 1.11.
Površinu trokuta ABC možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} P &= P(ABU_a) + P(ACU_a) - P(BCU_a) \\ &= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} \\ &= \frac{r_a}{2}(c+b-a) \\ &= r_a(s-a). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$P = r_a(s-a),$$

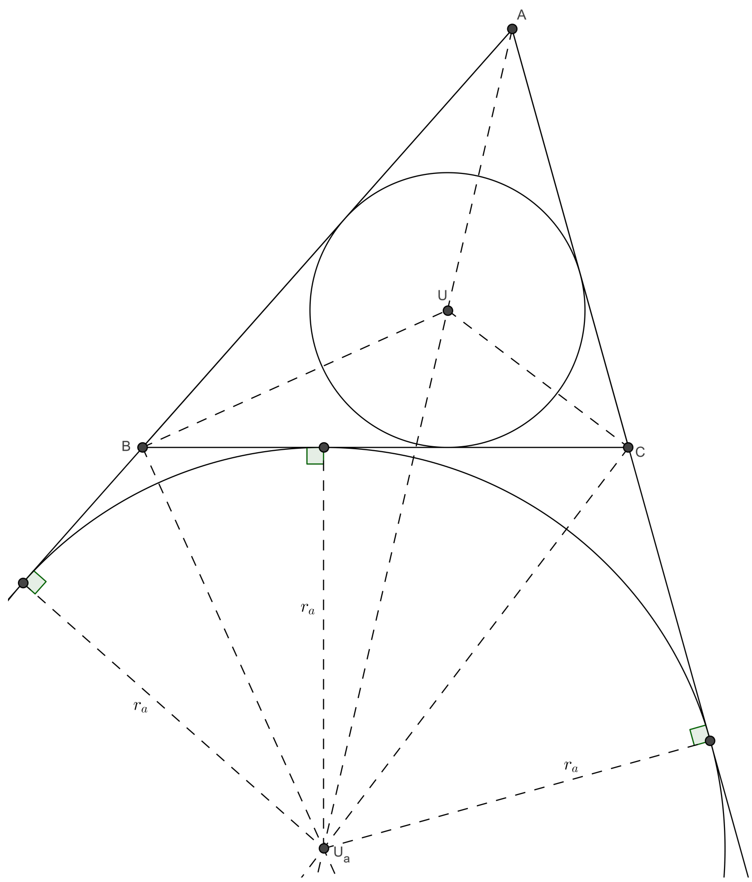
odakle slijedi

$$r_a = \frac{P}{s-a}.$$

Na isti način dobijemo analogne izraze za r_b i r_c. □

Teorem 1.4.3. *[8, str. 72.]*
Zbroj polumjera pripisanih kružnica nekog trokuta jednak je zbroju četverostrukog polumjera opisane kružnice i polumjera upisane kružnice tog trokuta, tj.

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$



Slika 1.11: Kružnica k_a pripisana trokutu ABC

Dokaz. Iskoristimo li Teoreme 1.4.2 i 1.3.4, imamo:

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{s(s-b)(s-c)}{P}.$$

Analogno,

$$r_b = \frac{s(s-a)(s-c)}{P},$$

$$r_c = \frac{s(s-a)(s-b)}{P}.$$

Prema Teoremu 1.3.3 vrijedi:

$$r = \frac{P}{s}.$$

Zbrajanjem, odnosno oduzimanjem gornjih jednakosti dobivamo:

$$r_a + r_b = \frac{s(s-c)c}{P},$$

$$r_c - r = \frac{(s-a)(s-b)c}{P}.$$

Zbrajanjem posljednjih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{c[s(s-c)+(s-b)(s-a)]}{P} \\ &= \frac{c[s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab]}{P} \\ &= \frac{c[2s^2 - s(a+b+c) + ab]}{P} \\ &= \frac{abc}{P}. \end{aligned}$$

Primjenom jednakosti (1.2) iz Teorema 1.2.3, dobivamo:

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{P} = 4R,$$

odnosno:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

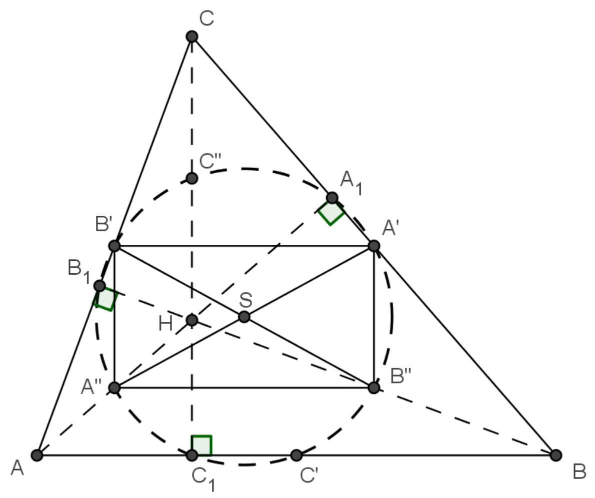
□

1.5 Kružnica devet točaka

Teorem 1.5.1. *[4, str. 61.]*

Neka su u trokutu ABC točke A', B', C' polovišta stranica, točke A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$, gdje je H ortocentar, a točke A_1, B_1, C_1 nožišta visina. Svih devet točaka $A', B', C', A'', B'', C''$,$A_1, B_1, C_1$ leže na istoj kružnici.

Dokaz. Kako su A' i B' polovišta stranica trokuta ABC, uočavamo da je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta ABC, pa vrijedi $|AB'| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A'B' \| AB$. No, tako je i $\overline{A''B''}$ srednjica trokuta ABH te vrijedi $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A''B'' \| AB$. Zaključujemo da je $A'B'A''B''$ paralelogram, pa se $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ međusobno raspolavljaju. Označimo njihov presjek sa S.



Slika 1.12: Kružnica devet točaka

Promotrimo trokut AHC. Točke A'' i B' su polovišta stranica tog trokuta, pa je $\overline{A''B'}$ srednjica tog trokuta. Stoga je $A''B'||CH$, pa slijedi $A''B' \perp AB$, a time i $A''B' \perp A''B''$. Dakle, $\sphericalangle B'A"B" = 90°$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu sa središtem u točki S, polumjera $\frac{1}{2}|A'A''|$.
Analogno se dokazuje da je $A'C'A''C''$ pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu jednakog središta i polumjera kao i pravokutniku $A'B'A''B''$.
Dakle, točke $A', B', C', A'', B'', C''$ leže na istoj kružnici, koju ćemo označiti s k.
Trokut $A'A''A_1$ je pravokutan s hipotenuzom $\overline{A'A''}$, pa je kružnica opisana tom trokutu upravo kružnica k. Dakle, točka A_1 također leži na kružnici k. Analogno se dokazuje da i točke B_1 i C_1 leže na kružnici k. □

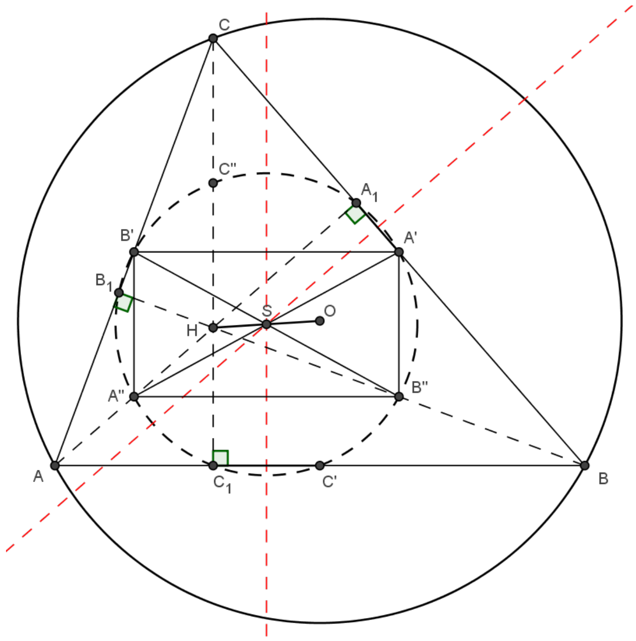
Kružnica iz prethodnog teorema se naziva kružnica devet točaka, a u literaturi se koriste i nazivi Eulerova kružnica ili Feuerbachova kružnica. Detaljno obrazloženje tih naziva kroz povijesni pregled je dano u članku Zdenke Kolar-Begović i Ane Tonković (vidi [5]). Naime, švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.-1783.) je 1765. godine dokazao da šest točaka (polovišta stranica trokuta i nožišta visina) leže na jednoj kružnici. U članku Brianchona[1] i Ponceleta[2] (1820. godine) navodi se da i polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta leže na Eulerovoj kružnici te se pojavljuje prvi dokaz o koncikličnosti tih devet točaka. Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach (1800.-1834.) dao je niz

[1]Charles Julien Brianchon (1783.-1864.)- francuski matematičar
[2]Jean-Victor Poncelet (1788.-1867.)- francuski matematičar

važnih tvrdnji vezanih uz Eulerovu kružnicu, a najvažnija je Teorem 1.5.4. Neki autori su stoga Feuerbachu pripisivali otkriće te kružnice pa se javio i naziv Feuerbachova kružnica.

Teorem 1.5.2. *[8, str. 128.]*

Središte S kružnice devet točaka je polovište dužine $\overline{HO}$, gdje je H ortocentar, a O središte opisane kružnice danog trokuta ABC.



Slika 1.13: Središte kružnice devet točaka

Dokaz. Promotrimo sliku 1.13. Kako su $\overline{A'A_1}$ i $\overline{C'C_1}$ tetive kružnice devet točaka, to simetrale tih tetiva raspolavljaju dužinu $\overline{HO}$, pa je njezino polovište S središte te kružnice.

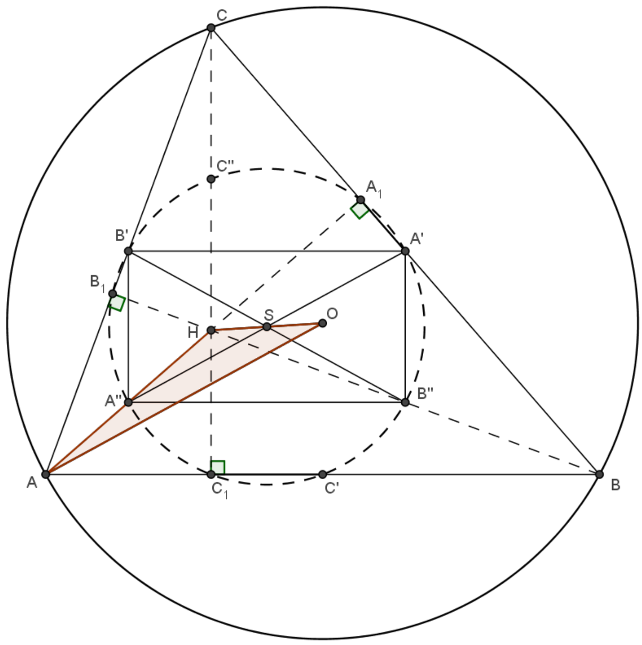
□

Teorem 1.5.3. *[8, str. 129.]*

Polumjer kružnice devet točaka jednak je polovini polumjera R opisane kružnice danog trokuta.

Dokaz. Na slici 1.14 istaknimo trokut AOH. S obzirom da je točka S polovište dužine $\overline{HO}$, a točka A" polovište dužine $\overline{AH}$, dužina $\overline{A"S}$ je srednjica trokuta AOH. Stoga vrijedi da je $|A"S| = \frac{1}{2}|AO|$, odnosno polumjer kružnice devet točaka jednak je polovini polumjera opisane kružnice trokuta ABC.

□



Slika 1.14: Polumjer kružnice devet točaka

Teorem 1.5.4. *[8, str. 130.] (Feuerbachov teorem)*
Kružnica devet točaka dira upisanu i sve tri pripisane kružnice danog trokuta ABC. Pri tome upisana kružnica dira kružnicu devet točaka iznutra, dok je ostale pripisane kružnice diraju izvana.

Dokaz. Za dani trokut ABC promotrimo trokut UOH kojemu su vrhovi: središte upisane kružnice U, središte opisane kružnice O i ortocentar H (slika 1.15). S obzirom da je S polovište stranice OH trokuta UOH, dužina $\overline{US}$ je težišnica tog trokuta.
Za dužinu $\overline{US}$ vrijedi

$$|US|^2 = \frac{1}{2}|UH|^2 + \frac{1}{2}|OU|^2 - \frac{1}{4}|OH|^2. \tag{1.6}$$

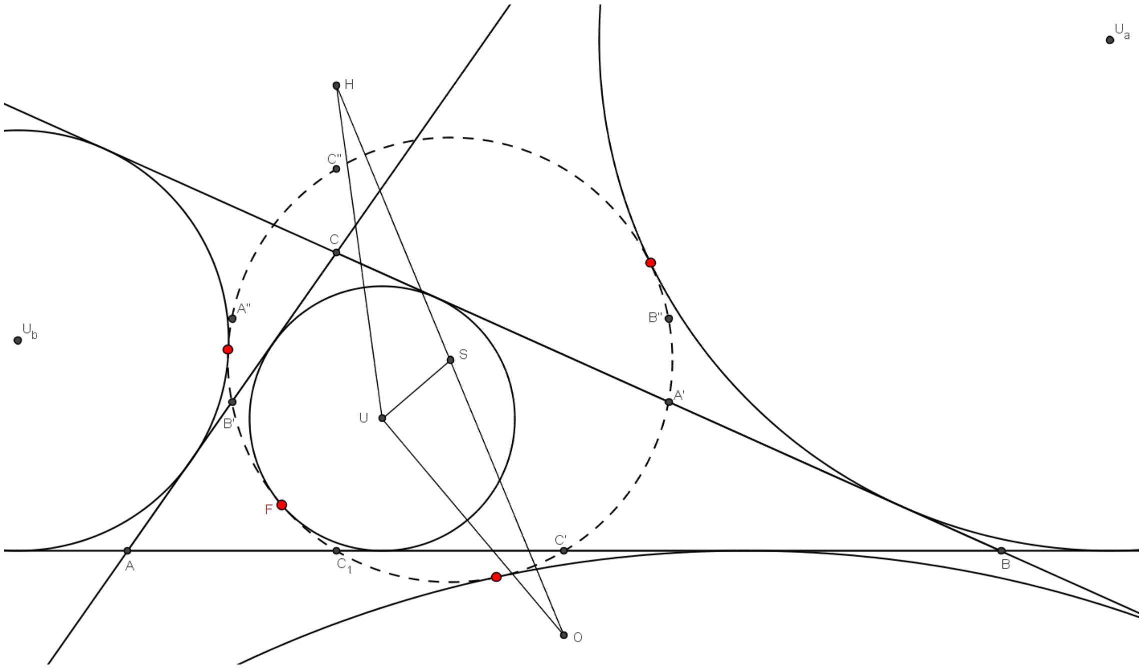
Na temelju Teorema 1.3.5, udaljenosti središta U upisane kružnice do ortocentra H te udaljenosti središta O opisane kružnice do ortocentra H imamo

$$\begin{aligned}
|UO|^2 &= R^2 - 2Rr,\\
|UH|^2 &= 4R^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),\\
|OH|^2 &= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ove tri jednakosti u jednakost 1.6 dobivamo

$$|US| = \frac{R}{2} - r.$$

Udaljenost središta U upisane kružnice od središta S kružnice devet točaka je dakle jednaka razlici polumjera $\frac{R}{2}$ kružnice devet točaka i polumjera r upisane kružnice. To dokazuje da upisana kružnica dodiruje kružnicu devet točaka iznutra.



Slika 1.15: Feuerbachov teorem

Analogno, promatranjem trokuta U_aOH, U_bOH i U_cOH bismo dobili

$$\begin{aligned} |U_aS| &= \frac{R}{2} + r_a, \\ |U_bS| &= \frac{R}{2} + r_b, \\ |U_cS| &= \frac{R}{2} + r_c, \end{aligned}$$

što dokazuje da pripisane kružnice dodiruju kružnicu devet točaka izvana. □

Točka F u kojoj upisana kružnica dira kružnicu devet točaka se naziva Feuerbachova točka tog trokuta.

Poglavlje 2

Konstruktivni zadaci

U ovom ćemo poglavlju razmotriti konstrukcije trokuta u kojima je jedan od zadanih elemenata polumjer opisane ili upisane kružnice trokuta ili položaj središta tih kružnica. Radi se o takozvanim euklidskim konstrukcijama, tj. o konstrukcijama koje se izvode pomoću jednobridnog ravnala i šestara proizvoljnog polumjera.

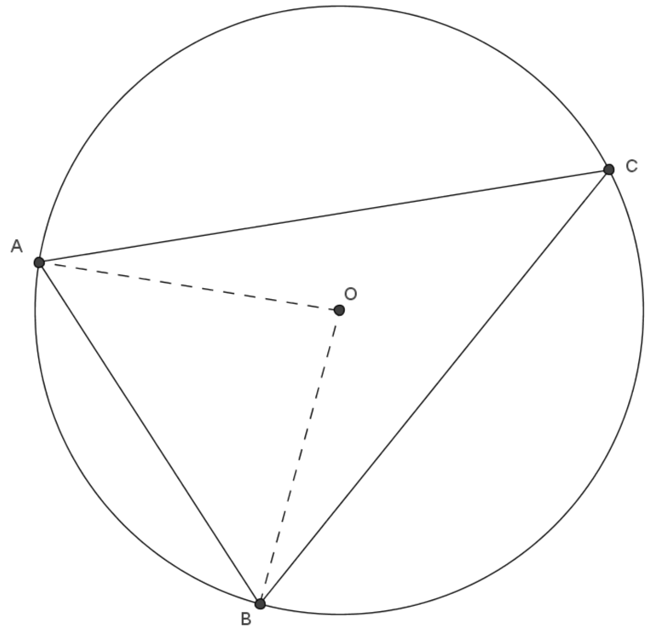
2.1 Položajni zadaci

U ovom ćemo potpoglavlju dati konstrukciju trokuta ako su zadani položaji nekih istaknutih točaka trokuta. Preciznije, dvije od zadanih točaka su vrh trokuta i središte opisane kružnice dok će treća točka biti vrh trokuta, ortocentar, težište, središte upisane kružnice ili središte Feuerbachove kružnice.

Primjer 2.1.1. *Konstruirajte trokut ABC ako mu je zadan položaj vrha A, središta opisane kružnice O i vrha B.*
Rješenje:

Analiza. Pretpostavimo da je $|AO| = |BO|$ te promotrimo sliku 2.1.
Možemo konstruirati kružnicu koja prolazi točkama A i B i ima središte u točki O. Spajanjem točaka A i B dobivamo stranicu trokuta $\overline{AB}$. Nemamo više informacija o trokutu ABC, pa točka C može biti bilo koja točka kružnice, različita od A i B.

Konstrukcija:
1. $k(O, |OA|)$
2. $\overline{AB}$
3. $C \in k, C \neq \{A, B\}$
4. Trokut ABC.



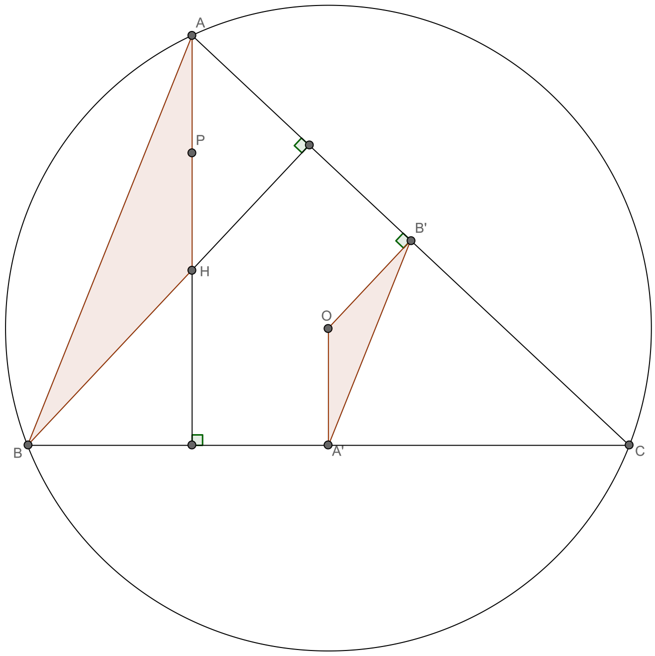
Slika 2.1: Analiza

Dokaz. Očit iz analize.

Rasprava. U ovom slučaju smo pretpostavili da je $|AO| = |BO|$ i stoga postoji beskonačno mnogo rješenja. No, ako je $|AO| \neq |BO|$, tada ne možemo konstruirati kružnicu sa središtem u O koja prolazi točkama A i B. Zaključujemo da u tom slučaju ne postoji rješenje zadatka.

Primjer 2.1.2. *[8, str. 99.] Konstruirajte trokut ABC ako mu je zadan položaj vrha A, ortocentra H i središta opisane kružnice O.*
Rješenje:

Analiza. Promotrimo sliku 2.2.
Trokuti ABH i $A'B'O$ su slični jer imaju paralelne stranice. Kako je $A'B'$ srednjica trokuta ABC, vrijedi $|AB| = 2|A'B'|$. Iz sličnosti trokuta slijedi $|AH| = 2|OA'|$. Stoga lako konstruiramo točku A', a potom i stranicu $\overline{BC}$ koja prolazi točkom A' i okomita je na AH.

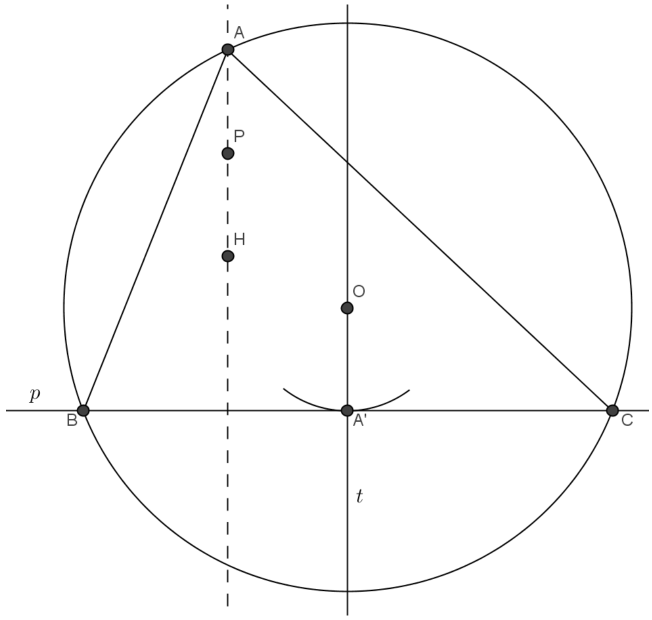


Slika 2.2: Analiza

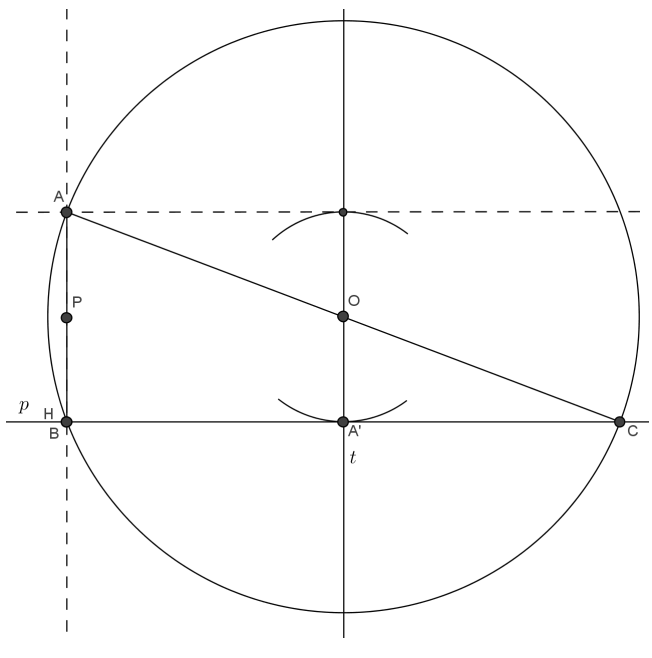
Konstrukcija:
1. $k(O, |OA|)$
2. Pravac AH
3. Pravac t kroz O paralelan s AH
4. $t \cap k(O, \frac{1}{2}|AH|) = A'$
5. Pravac p kroz A' okomit na pravac AH
6. $p \cap k(O, R) = \{B, C\}$.

Dokaz. Očit iz analize.

Rasprava. U ovom slučaju postoje dva rješenja jer pravac t u presjeku s $k(O, \frac{1}{2}|AH|)$ daje dvije točke. Naime, na slici 2.3 jedna točka je A', a druga bi bila simetrična s obzirom na točku O. No, ako se ortocentar H nalazi na kružnici opisanoj trokutu ABC, onda je trokut ABC pravokutan. Na slici 2.4 vidimo da tada postoji samo jedno rješenje. Samo točkom A' možemo povući pravac BC, jer bi se u suprotnom točke A i B preklopile.



Slika 2.3: Konstrukcija



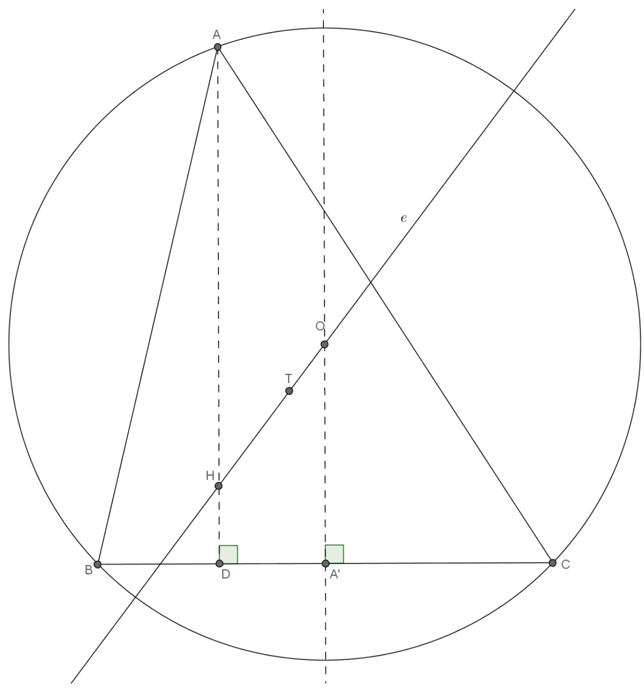
Slika 2.4: Poseban slučaj

Primjer 2.1.3. *Konstruirajte trokut ABC ako mu je zadan položaj vrha A, središta opisane kružnice O i težište T.*
Rješenje:

Analiza. Možemo konstruirati kružnicu sa središtem u točki O koja prolazi točkom A. Na slici 2.5 je prikazan i ortocentar H danog trokuta te Eulerov pravac e. Prisjetimo se, udaljenost ortocentra H i težišta T dvostruko je veća od udaljenosti težišta T i središta opisane kružnice, odnosno

$$|HT| = 2 \cdot |TO|.$$

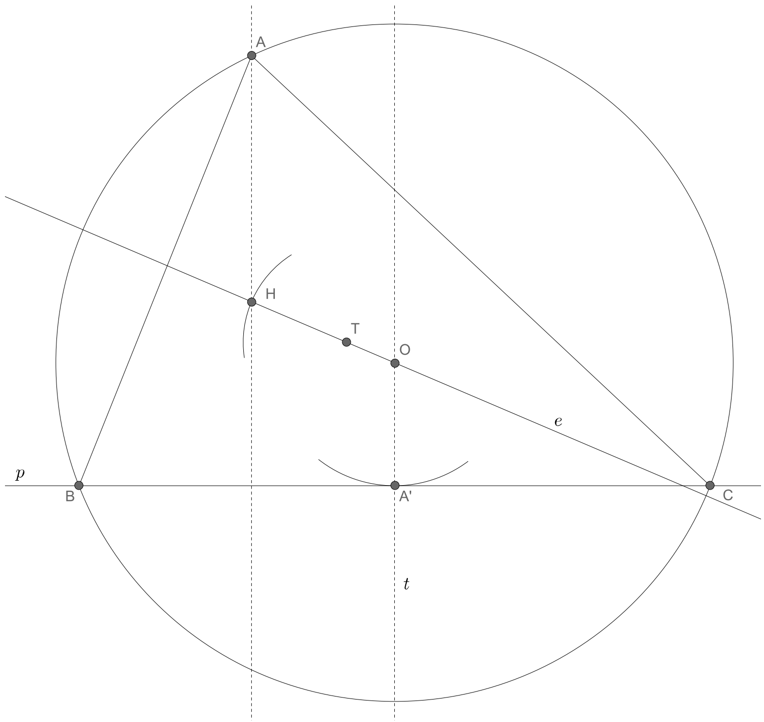
Stoga, povučemo pravac e točkama O i T, te konstruiramo točku H tako da je $|HT| = 2 \cdot |TO|$. Povučemo pravac AH te pravac paralelan tom pravcu kroz točku O. Kao i u prethodnom primjeru, konstruiramo dužinu $\overline{OA'}$ tako da je $|AH| = 2|OA'|$. Tada stranica $\overline{BC}$ prolazi kroz A' i okomita je na OA'.



Slika 2.5: Analiza

Konstrukcija:

1. $k(O, |OA|)$
2. Pravac e točkama O i T
3. $H \in e$ tako da $|HT| = 2 \cdot |TO|$
4. Pravac AH
5. Pravac t kroz O paralelan s AH
6. $t \cap k(O, \frac{1}{2}|AH|) = A'$
7. Pravac p kroz A' okomit na pravac AH
8. $p \cap k(O, R) = \{B, C\}$.



Slika 2.6: Konstrukcija

Dokaz. Očit iz analize.

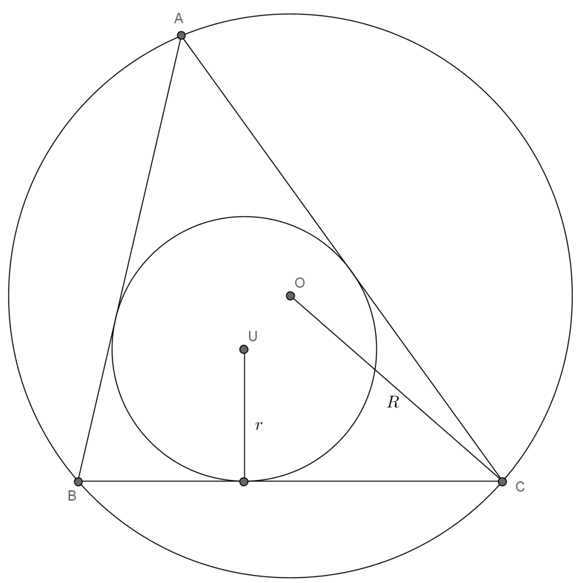
Rasprava. Analogno prethodnom primjeru, jedno ili dva rješenja.

Primjer 2.1.4. *Konstruirajte trokut ABC ako mu je zadan položaj vrha A, središta opisane kružnice O i središta upisane kružnice U.*
Rješenje:

Analiza. Ovaj zadatak ćemo riješiti algebarskom metodom, odnosno prvo ćemo izračunati potrebne duljine, a potom konstruirati.
Prema Teoremu 1.3.5 vrijedi

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

pri čemu su r i R polumjeri upisane i opisane kružnice trokuta, redom. S obzirom da imamo zadan položaj vrha A, središta opisane kružnice O i središte upisane kružnice U, u prethodnoj jednakosti nam nije poznat samo polumjer r (slika 2.7).



Slika 2.7: Analiza

Stoga jednakost zapišimo ovako

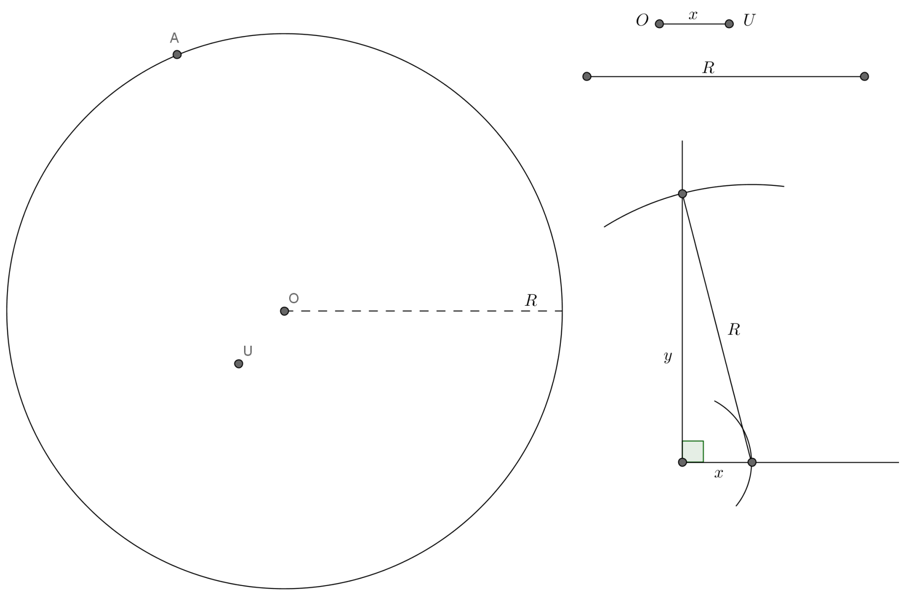
$$\left(\sqrt{2Rr}\right)^2 = R^2 - |OU|^2.$$

Uvedimo oznake $y = \sqrt{2Rr}$ i $x = |OU|$. Tada imamo $y^2 = R^2 - x^2$ te primjenom Pitagorinog poučka možemo dobiti duljinu y. Potom imamo

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2Rr} \\ y^2 &= 2Rr \\ r &= \frac{y^2}{2R} = \frac{y \cdot y}{2R}, \end{aligned}$$

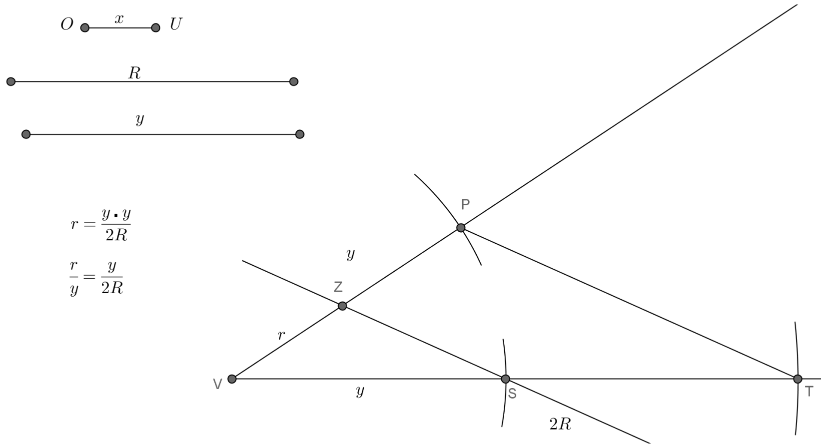
pa polumjer r upisane kružnice možemo dobiti konstrukcijom četvrte proporcionale.
Sada možemo konstruirati kružnicu k_u sa središtem u točki U polumjera r. Iz točke A povučemo tangente na kružnicu k_u te tako dobivamo točke B i C kao presjek tangenti s kružnicom $k(O, R)$.

Konstrukcija:
1. $k(O, |OA|)$
2. Određivanje duljine y (Pitagorin poučak)



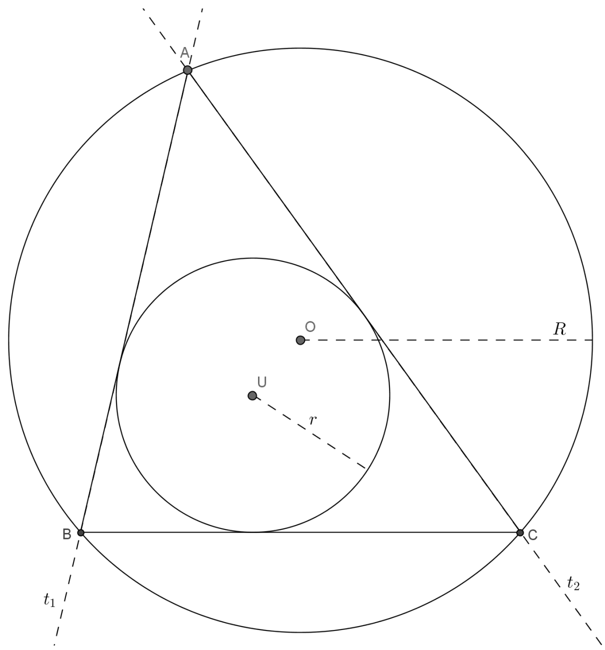
Slika 2.8: Konstrukcija 1. i 2. korak

3. Određivanje r - konstrukcija četvrte proporcionale:
Na proizvoljan kut s vrhom V nanesemo $y = |VS| = |VP|, 2R = |VT|$. Paralela s $\overline{PT}$ kroz S siječe drugi krak u Z. Dobivamo $r = |VZ|$.



Slika 2.9: Konstrukcija četvrte proporcionale

4. $k_u(U, r)$
5. Tangente t_1 i t_2 iz A na k_u
6. t_1, t_2 sijeku $k(O, R)$ u B i C.



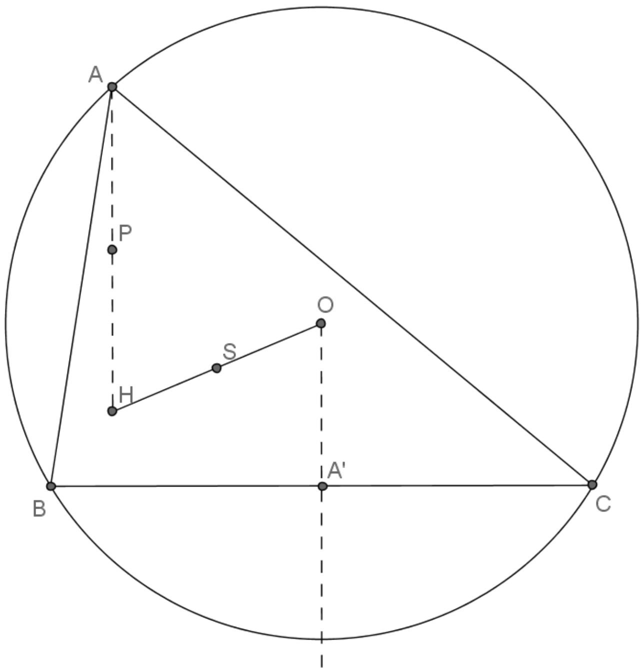
Slika 2.10: Konstrukcija

Dokaz. Jasan iz analize.

Rasprava. U ovom slučaju smo pretpostavili $|OU| < |OA|$ i tada imamo jedno rješenje. Ako je $|OU| = |OA|$ ili $|OU| > |OA|$, onda nema rješenja.

Primjer 2.1.5. *[8, str. 132.] Konstruirajte trokut ABC ako mu je zadan položaj vrha A, središte opisane kružnice O i središte Feuerbachove kružnice S.*
Rješenje:

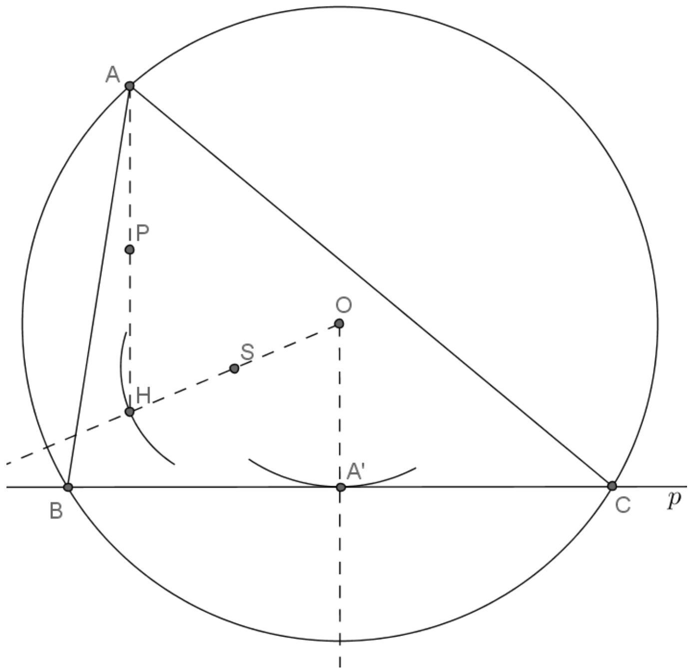
Analiza. Promotrimo sliku 2.11.



Slika 2.11: Analiza

Opišemo kružnicu oko točke O polumjera $|OA|$. Zatim odredimo ortocentar H tako da je S polovište dužine $\overline{OH}$ (vidi Teorem 1.5.2). Dalje konstruiramo kao i u prethodnim primjerima, odredimo polovište P dužine $\overline{AH}$ te konstruiramo dužinu $\overline{OA'}$ tako da je paralelna s $\overline{AH}$ i $|OA'| = |AP|$. Tada stranica $\overline{BC}$ prolazi kroz A' i okomita je na OA'.

Konstrukcija:
1. $k(O, |OA|)$
2. H tako da $|OH| = 2|OS|$
3. P polovište od $\overline{AH}$
4. A' tako da $|OA'| = |AP|$ i $OA' \parallel AH$
5. pravac p okomit na OA'
6. $p \cap k(O, |OA|) = \{B, C\}$



Slika 2.12: Konstrukcija

Dokaz. Prema analizi i Teoremu 1.5.2.

Rasprava. Kao i u prethodnom primjeru, moguće je jedno ili dva rješenja.

2.2 Metrički zadaci

U ovom potpoglavlju opisat ćemo konstrukcije trokuta u kojima je bar jedna veličina duljina neke dužine ili veličina kuta. Drugim riječima, razmotrit ćemo takozvane metričke zadatke.
Promotrimo prvo konstrukcije trokuta kad je jedan od danih elemenata polumjer R opisane kružnice, a ostala dva dana elementa su stranice, kutovi, težišnice, visine ili simetrale kutova trokuta. Sve kombinacije takvih elemenata su dane u prvom stupcu tablice, u drugom stupcu imamo je li konstrukcija elementarno izvediva ili nije, a u trećem stupcu je metoda koja se koristi pri rješavanju.

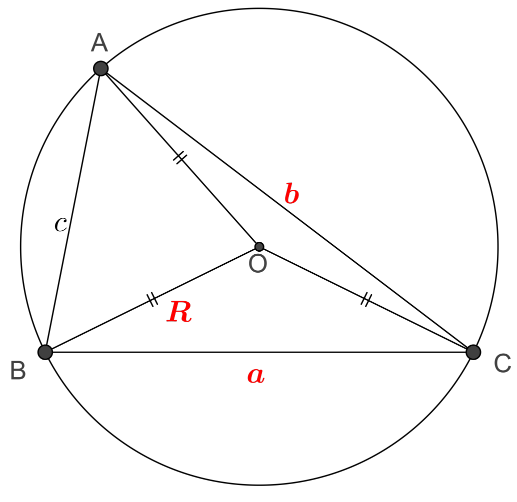
	Zadani elementi	Rješivost	Metoda
1.	a,b,R	da	presjek geom. mjesta točaka
2.	a,α,R	da	presjek geom. mjesta točaka
3.	a,β,R	da	presjek geom. mjesta točaka
4.	a,v_a,R	da	presjek geom. mjesta točaka
5.	a,v_b,R	da	presjek geom. mjesta točaka
6.	a,t_a,R	da	presjek geom. mjesta točaka
7.	a,t_b,R	da	presjek geom. mjesta točaka
8.	a,s_α,R	da	algebarska
9.	a,s_β,R	ne	
10.	a,r,R	da	presjek geom. mjesta točaka
11.	α,β,R	da	presjek geom. mjesta točaka
12.	α,v_a,R	da	presjek geom. mjesta točaka
13.	α,v_b,R	da	presjek geom. mjesta točaka
14.	α,t_a,R	da	presjek geom. mjesta točaka
15.	α,t_b,R	da	presjek geom. mjesta točaka
16.	α,s_α,R	da	presjek geom. mjesta točaka
17.	α,s_β,R	ne	
18.	α,r,R	da	presjek geom. mjesta točaka
19.	v_a,v_b,R	ne	
20.	v_a,t_a,R	da	presjek geom. mjesta točaka
21.	v_a,t_b,R	ne	
22.	v_a,s_α,R	da	algebarska

23.	v_a, s_β, R	ne	
24.	v_a, r, R	da	algebarska
25.	t_a, t_b, R	ne	
26.	a, b, R	da	presjek geom. mjesta točaka
27.	t_a, s_β, R	ne	
28.	t_a, r, R	ne	
29.	s_α, s_β, R	ne	
30.	s_α, r, R	ne	

U nastavku ćemo dati cjelovito rješenje nekih zadataka, a u preostalima analizu konstrukcije.

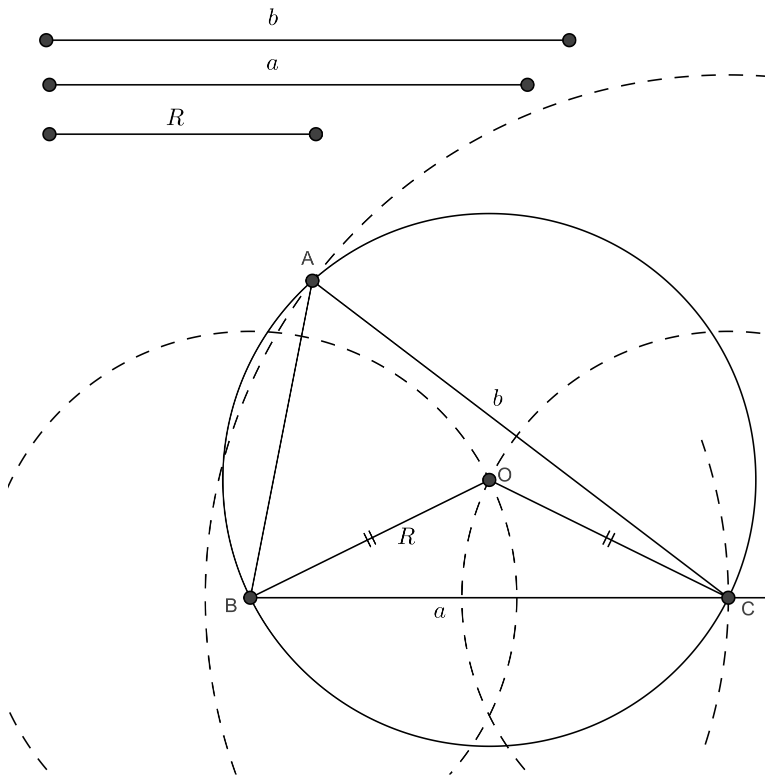
Primjer 2.2.1. *[10, str. 164.] Konstruirajte trokut kojemu su zadane duljine dviju stranica a i b te polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

Analiza. Sa skice (slika 2.13) vidimo da lako konstruiramo vrhove B i C traženog trokuta. Treći vrh A mora zadovoljavati dva uvjeta:
1) Točke A, B, C leže na jednoj kružnici
2) Točka A je udaljena od točke C za duljinu b.



Slika 2.13: Analiza

Konstrukcija:
1. Stranica $\overline{BC}$: B, polupravac s početkom u B, $k(B, a)$, C je presjek polupravca i $k(B, a)$
2. $k(B, R) \cap k(C, R) = \{O\}$
3. $k(O, R) \cap k(C, b) = \{A\}$.



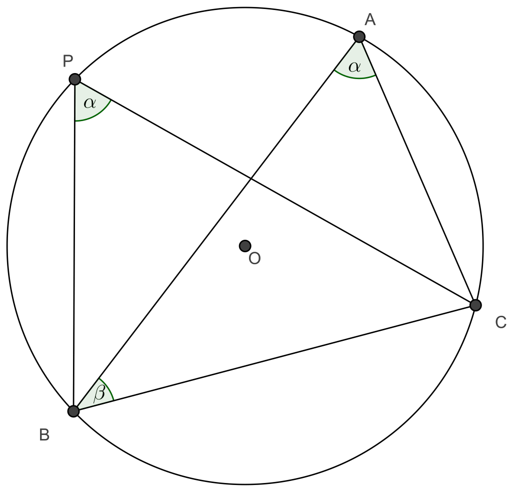
Slika 2.14: Konstrukcija

Dokaz. Na temelju analize, dokaz je očit.

Rasprava. Kada bi duljina stranice a bila jednaka $2R$, tada bi presjek kružnica polumjera R iz točaka B i C bilo polovište stranice a. Stoga, da bi postojao trokut ABC, duljina stranice b ne može biti veća ili jednaka $2R$ (ako je jednaka $2R$, $B = A$). Dakle, uvjet rješivosti ovog zadatka je $a \leq 2R$ i $b < 2R$.
Zadatak ima jedno ili dva rješenja. Ako je $a = 2R$ ili $b = 2R$ ili $a = b < 2R$, zadatak ima jedno rješenje. Kada je $a < 2R$ ili $b < 2R$ i $a \neq b$, postoje dva rješenja.

Primjer 2.2.2. *[8, str. 82.] Konstruirajte trokut ABC kojemu su zadana dva kuta α i β i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

Analiza. Na skici (slika 2.15) vidimo da u kružnici polumjera R najprije konstruiramo bilo koji obodni kut jednak danom kutu α ($\sphericalangle BPC$). Dobivena tetiva $\overline{BC}$ je stranica traženog trokuta. Sada se konstruira obodni kut α nad $\overline{BC}$ (vrh A) za koji je kut uz vrh B jednak kutu β.

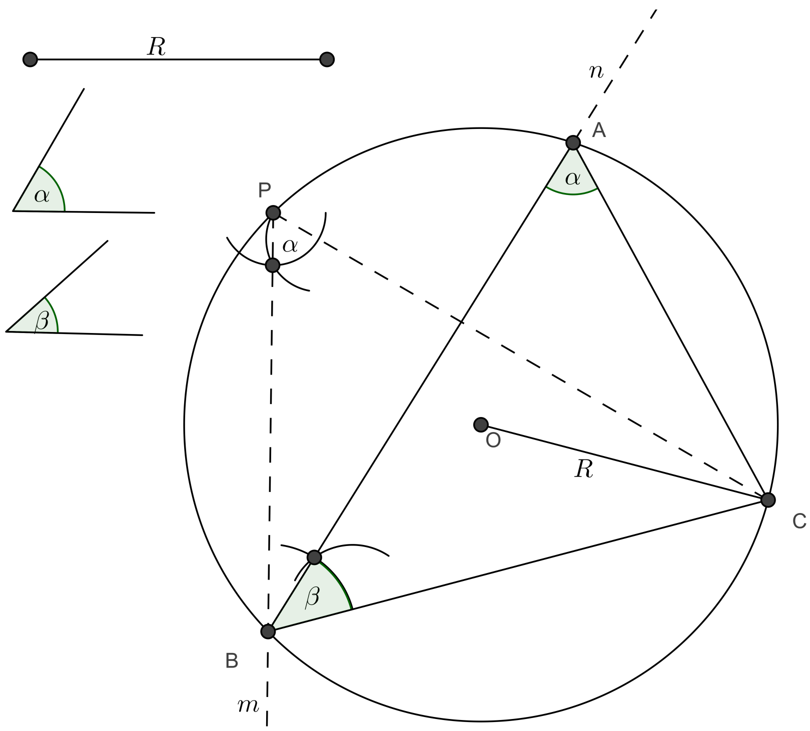


Slika 2.15: Analiza

Konstrukcija:
1. $k(O, R)$, $\overline{PC}$, α pri vrhu P, $m \cap k(O, R) = \{B\}$, $\overline{BC}$
2. β pri vrhu B
3. $n \cap k(O, R) = \{A\}$.

Dokaz. Očit iz analize.

Rasprava. Uvjet rješivosti ovog zadatka je $\alpha + \beta < 180°$ jer je zbroj svih kutova u trokutu jednak 180°.

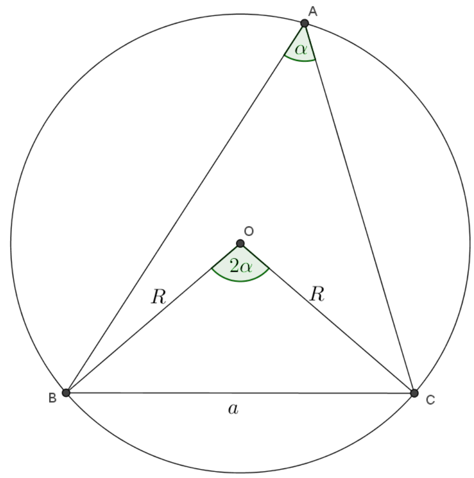


Slika 2.16: Konstrukcija

U sljedećim primjerima prikazat ćemo samo analizu i skicu. Primjeri su redom iz navedene tablice, no samo oni čija je konstrukcija elementarno izvediva.

Primjer 2.2.3. *[10, str. 171.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, kut α nasuprot stranice a i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

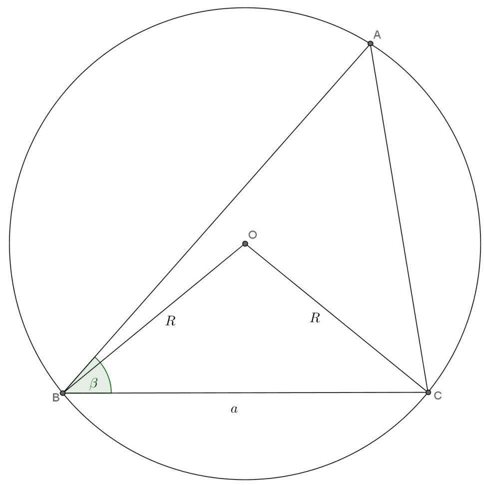
Analiza. Konstrukciju bismo započeli stranicom $\overline{BC}$. U presjeku kružnica polumjera R iz vrhova B i C, dobili bismo središte opisane kružnice O. Uočimo (slika 2.17) da tako dobivamo središnji kut nad tetivom $\overline{BC}$ veličine 2α. Stoga, svaki obodni kut nad tetivom $\overline{BC}$ je veličine α pa imamo beskonačno mnogo trokuta sa stranicom duljine a, kutom α i polumjerom R opisane kružnice. Zaključujemo da je zadana veličina kuta α višak te nedostaje treći uvjet za jednoznačnu konstrukciju trokuta ABC.



Slika 2.17: Skica

Primjer 2.2.4. *[10, str. 176.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, kut β i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

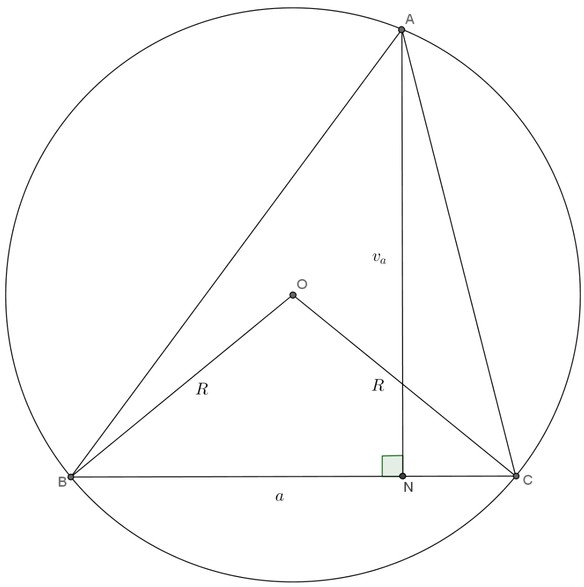
Analiza. Na slici 2.18 vidimo da ovaj zadatak započinjemo konstrukcijom trokuta OBC ($|BC| = a, |BO| = |CO| = R$) kao i u prethodnom primjeru. Potom konstruiramo kružnicu k sa središtem u točki O polumjera R. Preostaje konstruirati kut β pri vrhu B, a krak kuta u presjeku s kružnicom k daje vrh A.



Slika 2.18: Skica

Primjer 2.2.5. *[10, str. 180.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, visina v_a iz vrha A i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

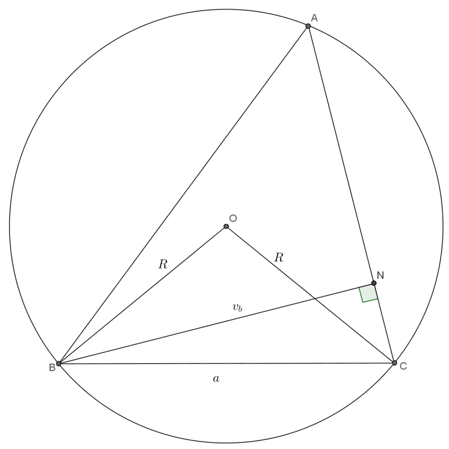
Analiza. Konstrukcija i u ovom primjeru započinje trokutom OBC. Nakon konstrukcije kružnice k sa središtem u O polumjera R, konstruiramo pravac paralelan pravcu BC na udaljenosti v_a od BC. Taj pravac i kružnica k se sijeku u točki A (slika 2.19).



Slika 2.19: Skica

Primjer 2.2.6. *[10, str. 187.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, duljina visine v_b iz vrha B i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

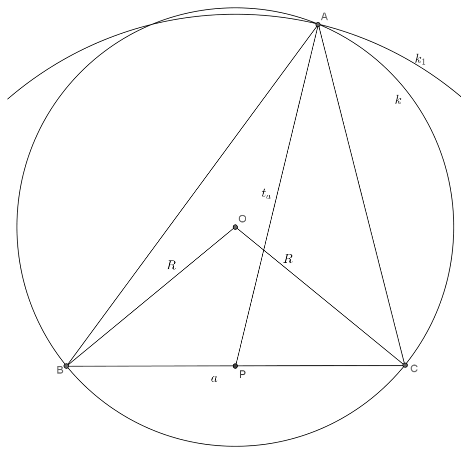
Analiza. Najprije bismo konstruirali trokut BCN. Naime, kružnica sa središtem u polovištu stranice $\overline{BC}$ polumjera $\frac{1}{2}a$ i kružnica sa središtem u B polumjera v_b sijeku se u točki N (jer je kut nad promjerom kružnice pravi). Nastavljamo konstrukcijom trokuta OBC. Kružnica k sa središtem u O polumjera R i pravac CN se sijeku u točki A (slika 2.20).



Slika 2.20: Skica

Primjer 2.2.7. *[10, str. 188.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, duljina težišnice t_a iz vrha A i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

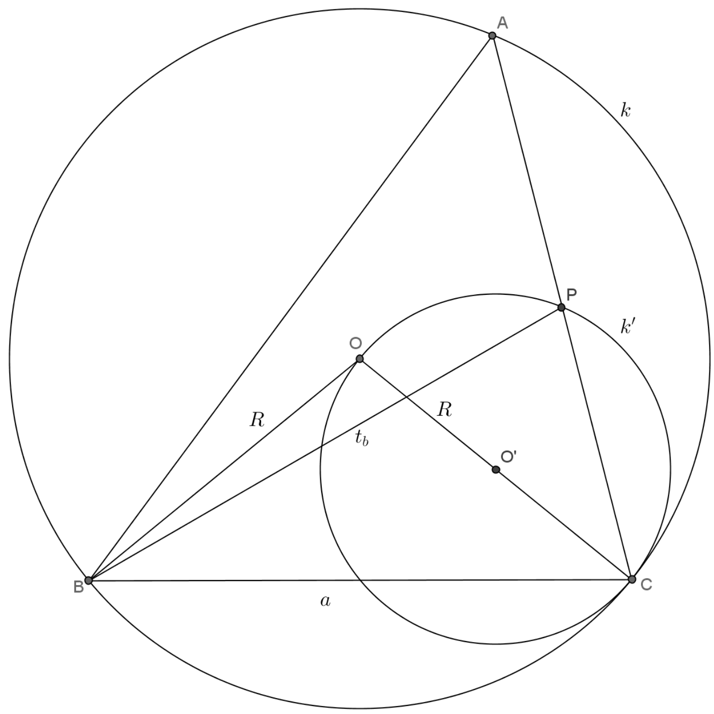
Analiza. Zadatak započinjemo konstrukcijom trokuta OBC ($|BC| = a, |BO| = |CO| = R$) i kružnice k sa središtem u O polumjera R. Znamo da težišnica t_a spaja vrh A s polovištem P nasuprotne stranice. Stoga konstruiramo kružnicu k_1 sa središtem u P polumjera t_a. Kružnice k i k_1 se sijeku u točki A(slika 2.21).



Slika 2.21: Skica

Primjer 2.2.8. *[10, str. 190.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, duljina težišnice t_b iz vrha B i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

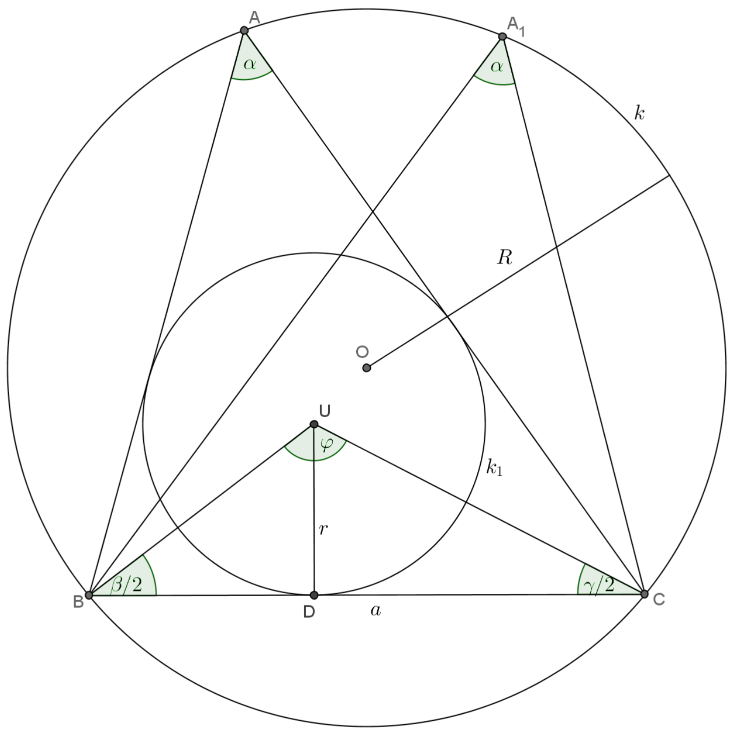
Analiza. Zadatak započinjemo konstrukcijom trokuta OBC ($|BC| = a, |BO| = |CO| = R$) i kružnice k sa središtem u O polumjera R.
Znamo da težišnica t_b spaja vrh B s polovištem P nasuprotne stranice. Uočimo da točka P leži na kružnici k' sa središtem u polovištu O' dužine $\overline{OC}$, polumjera $\frac{1}{2}R$. Kružnica sa središtem u točki B polumjera t_b siječe kružnicu k' u točki P. Pravac CP siječe kružnicu k u točki A (slika 2.22).



Slika 2.22: Skica

Primjer 2.2.9. *[7, str. 41.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, polumjer r upisane kružnice i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

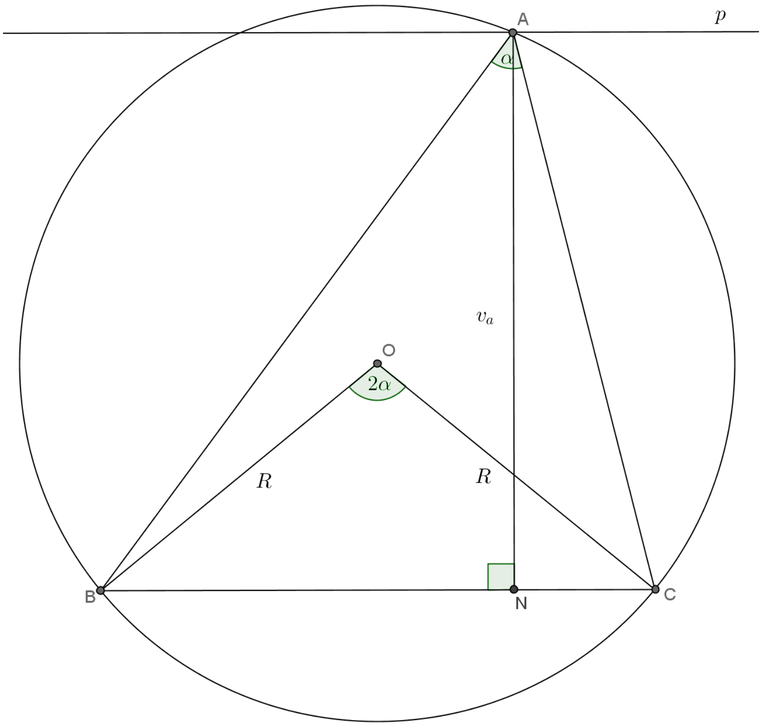
Analiza. Konstruiramo kružnicu k sa središtem u O polumjera R i jednu njezinu tetivu $\overline{BC}$ duljine a. Uzmemo bilo koju točku A_1 na kružnici k i konstruiramo trokut A_1BC te kut pri vrhu A_1 označimo s α. Konstruiramo trokut UBC kojemu je visina r, $|BC| = a$, $\sphericalangle CUB = \varphi = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Potom konstruiramo kružnicu $k_1(U, r)$ te tangente iz B i C na kružnicu k_1. Tangente se sijeku u točki A koja je treći vrh trokuta ABC (slika 2.23).



Slika 2.23: Skica

Primjer 2.2.10. *[10, str. 199.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadan kut α, duljina visine v_a iz vrha A i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

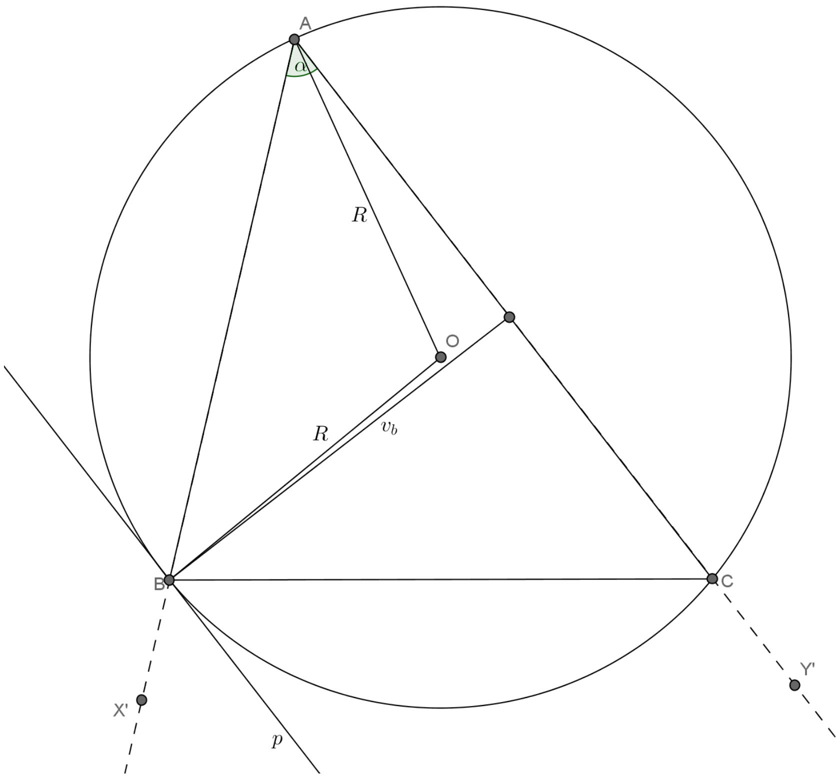
Analiza. Konstruiramo kružnicu k sa središtem u O polumjera R. Zatim konstruiramo trokut OBC takav da je $|BO| = |CO| = R$ i $\sphericalangle BOC = 2\alpha$. Pravac p paralelan s pravcem BC na udaljenosti v_a od BC siječe kružnicu k u točki A (slika 2.24).



Slika 2.24: Skica

Primjer 2.2.11. *[10, str. 205.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadan kut α, duljina visine v_b iz vrha B i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

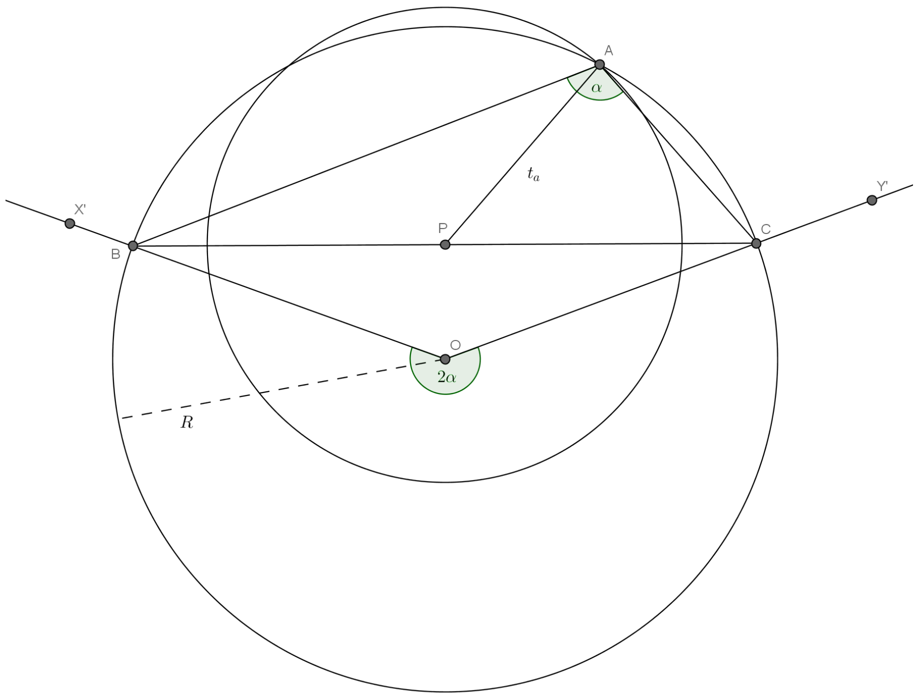
Analiza. Konstrukciju započinjemo pomoćnim kutom $\sphericalangle X'AY'$ mjere α. Zatim povučemo pravac p paralelan pravcu AY' na udaljenosti v_b od AY'. Pravac p siječe drugi krak kuta u točki B. Tako dobivamo stranicu $\overline{AB}$. Sada konstruiramo trokut ABO tako da $|AO| = |BO| = R$. Uočimo da postoje takva dva trokuta, no mi ćemo prikazati samo jedan na skici. Dalje konstruiramo kružnicu $k(O, R)$ i točku C dobivamo kao presjek kružnice k i AY' (slika 2.25).



Slika 2.25: Skica

Primjer 2.2.12. *[10, str. 208.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadan kut α, duljina težišnice t_a iz vrha A i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

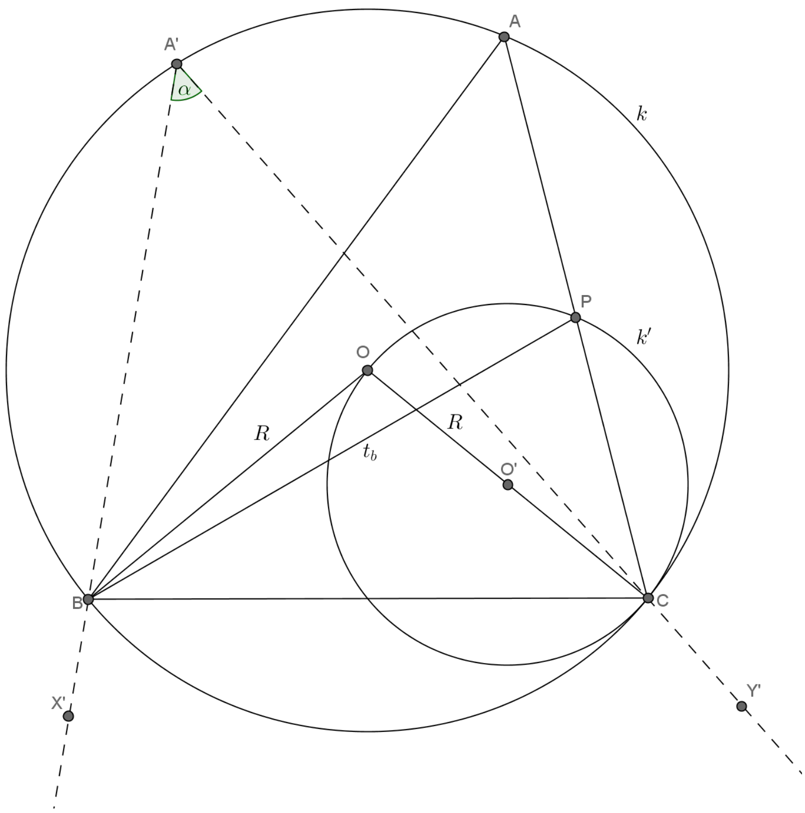
Analiza. Konstrukciju započinjemo pomoćnim kutom $\sphericalangle X'OY'$ mjere 2α. Konstruiramo kružnicu $k(O, R)$ te točke B i C dobivamo kao presjek kružnice k i OX', OY' redom. Tako dobivamo stranicu $\overline{BC}$.
Imamo zadanu duljinu težišnice t_a iz vrha A, pa od stranice $\overline{BC}$ odredimo polovište P i konstruiramo kružnicu $k_1(P, t_a)$. Kružnice k i k_1 se sijeku u točki A (jedno, dva ili nema rješenja) (slika 2.26).



Slika 2.26: Skica

Primjer 2.2.13. *[10, str. 211.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadan kut α, duljina težišnice t_b iz vrha B i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

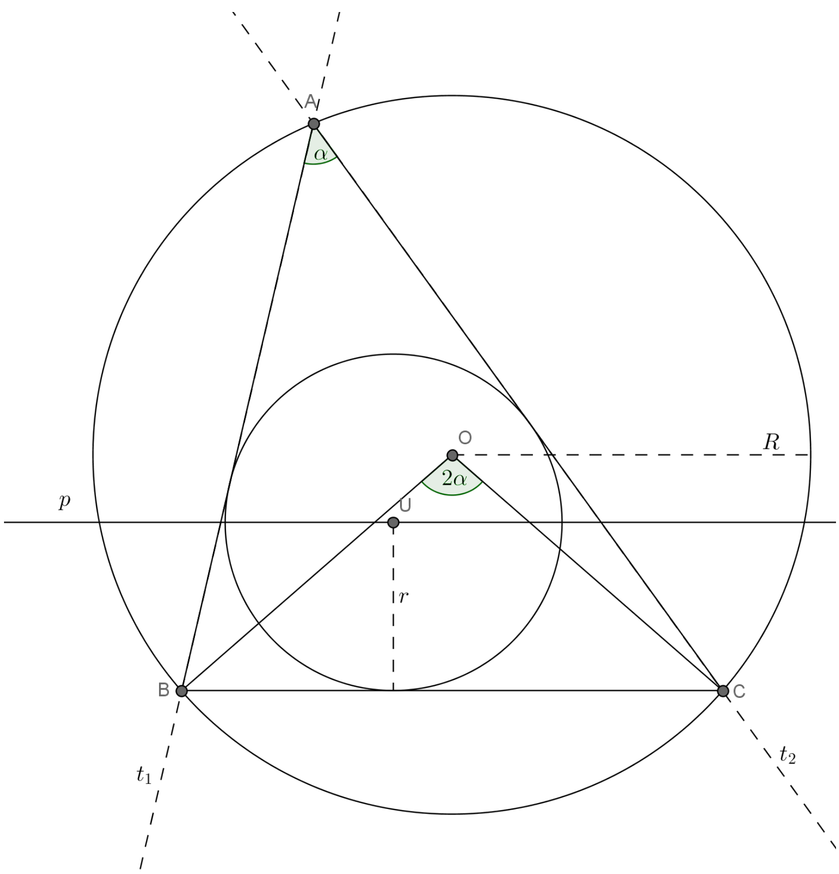
Analiza. Zadatak započinjemo konstrukcijom kružnice $k(O, R)$. Na kružnici izaberemo točku A' te konstruiramo pomoćni kut $\sphericalangle X'A'Y'$ mjere α. Kružnica $k(O, R)$ siječe krakove kuta u točkama B i C. Tako dobivamo stranicu $\overline{BC}$.
Nastavljamo konstrukcijom trokuta OBC ($|BC| = a, |BO| = |CO| = R$).
Znamo da težišnica t_b spaja vrh B s polovištem P nasuprotne stranice. Uočimo da točka P leži na kružnici k' sa središtem u polovištu O' dužine $\overline{OC}$, polumjera $\frac{1}{2}R$. Kružnica sa središtem u točki B polumjera t_b siječe kružnicu k' u točki P. Pravac BCP siječe kružnicu k u točki A (slika 2.27).



Slika 2.27: Skica

Primjer 2.2.14. *[10, str. 217.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadan kut α, polumjer r upisane kružnice i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

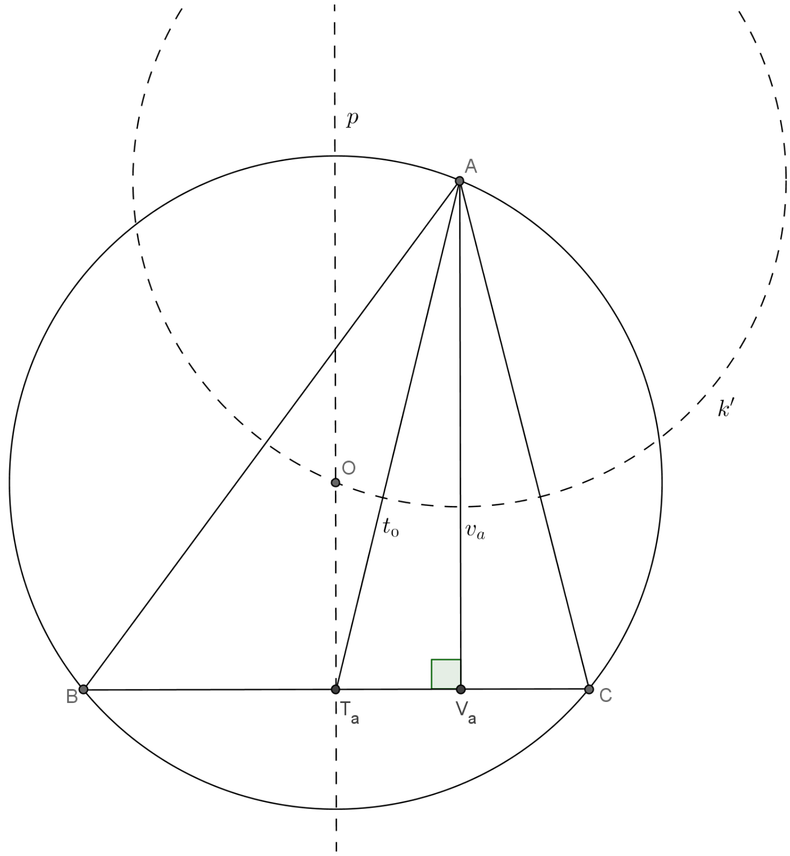
Analiza. Zadatak započinjemo konstrukcijom trokuta BCO tako da je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ i $|BO| = |CO| = R$. Konstruiramo pravac p paralelan s BC na udaljenosti r od pravca BC. Slično kao i u Primjeru 2.1.4, primjenom Pitagorinog poučka odredimo duljinu x u jednakosti $x^2 = R^2 - y^2$, pri čemu je $y = \sqrt{2Rr}$ i $x = |OU|$.
Tako odredimo udaljenost središta upisane i opisane kružnice, pa sada konstruiramo kružnicu $k'(O, |OU|)$. Presjek kružnice k' i pravca p je točka U. Konstruiramo kružnicu $k_u(U, r)$. Tangente t_1 i t_2 iz B i C na k_u sijeku se u točki A.



Slika 2.28: Skica

Primjer 2.2.15. *[10, str. 222.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadna duljina visine v_a iz vrha A, duljina težišnice t_a iz vrha A i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

Analiza. Zadatak započinjemo konstrukcijom trokuta AT_aV_a tako da je $\sphericalangle AV_aT_a = 90°$, $|AV_a| = v_a$ i $|AT_a| = t_a$.
Konstruiramo pravac p točkom T_a okomit na pravac T_aV_a. Zatim konstruiramo kružnicu $k'(A, R)$. Kružnica k' i pravac p sijeku se u točki O. Konstruiramo kružnicu $k(O, R)$ i dopunimo trokut ABC.



Slika 2.29: Skica

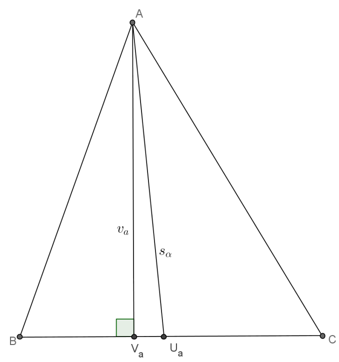
Primjer 2.2.16. *[11] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadna duljina visine v_a iz vrha A, simetrala s_α kuta α i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

Analiza. Ovaj zadatak riješit ćemo algebarskom metodom. U tu svrhu uvedimo oznake: $x = b^2 + c^2 - a^2$ i $y = 2bc$, te nađimo algebarske veze elemenata x, y, v_a, s_α i R.

Budući da za površinu trokuta ABC vrijedi $P = \frac{av_a}{2}$, ali i $P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$, slijedi da je

$$\begin{aligned} bc\sin\alpha &= av_a \\ bc\frac{a}{2R} &= av_a \\ y &= 4Rv_a, \end{aligned}$$

pri čemu je korištena relacija $a = 2R\sin\alpha$.



Nađimo odgovarajući algebarski izraz i za x. Prema teoremu o simetrali kuta u trokutu (slika) vrijedi

$$\frac{|U_aC|}{|U_aB|} = \frac{b}{c}, \quad \text{tj.} \quad |U_aC| = \frac{b}{c}|U_aB|.$$

Iz $|U_aB| + |U_aC| = a$ i $|U_aC| = \frac{b}{c}|U_aB|$ slijedi da je $|U_aB| = \frac{ac}{b+c}$. Kosinusov teorem u trokutu ABU_a glasi

$$s_\alpha^2 = |U_aB|^2 + c^2 - 2c|U_aB|\cos\beta,$$

pa uvrštavanjem u tu formulu izraza $|U_aB| = \frac{ac}{b+c}$ i $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ dobivamo

$$s_\alpha^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2).$$

Izrazimo li iz te jednakosti a^2 dobivamo

$$a^2 = \frac{(bc - s_\alpha^2)(b+c)^2}{bc}.$$

Izjednačimo li opet dvije formule za površinu trokuta i kvadriramo ih dobivamo:

$$\frac{a^2 v_a^2}{4} = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

a uvrstimo li u tu jednakost izraz za a^2 imamo:

$$\frac{v_a^2(y-2s_\alpha^2)}{4y}(b+c)^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16}$$

$$4v_a^2(y-2s_\alpha^2) = y\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}(a^2-(b-c)^2)$$

$$4v_a^2(y-2s_\alpha^2) = y\frac{s_\alpha^2}{bc}(-x+y)$$

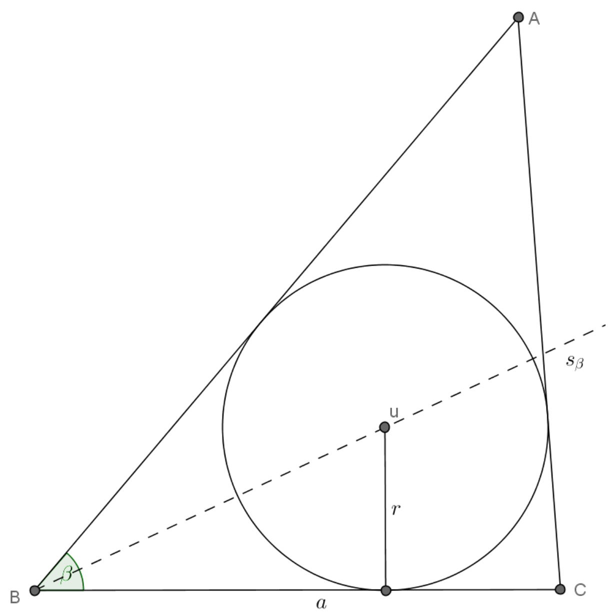
$$x = y + 4v_a^2 - \frac{2v_a^2 y}{s_\alpha^2}.$$

Dakle, i x je elementarno konstruktibilan iz danih elemenata. I konačno, opet izjednačavajući Heronovu formulu za površinu trokuta i formulu $P = \frac{av_a}{2}$ dobivamo da je $a^2 = \frac{y^2-x^2}{4v_a^2}$, te je i a konstruktibilan iz danih elemenata. No tada možemo konstruirati i stranice b i c čime je analiza gotova.

Pogledajmo jedan zadatak koji se ne nalazi u tablici jer nije vezan uz opisanu kružnicu trokuta, a u kojemu imamo zadano: a, β, r.

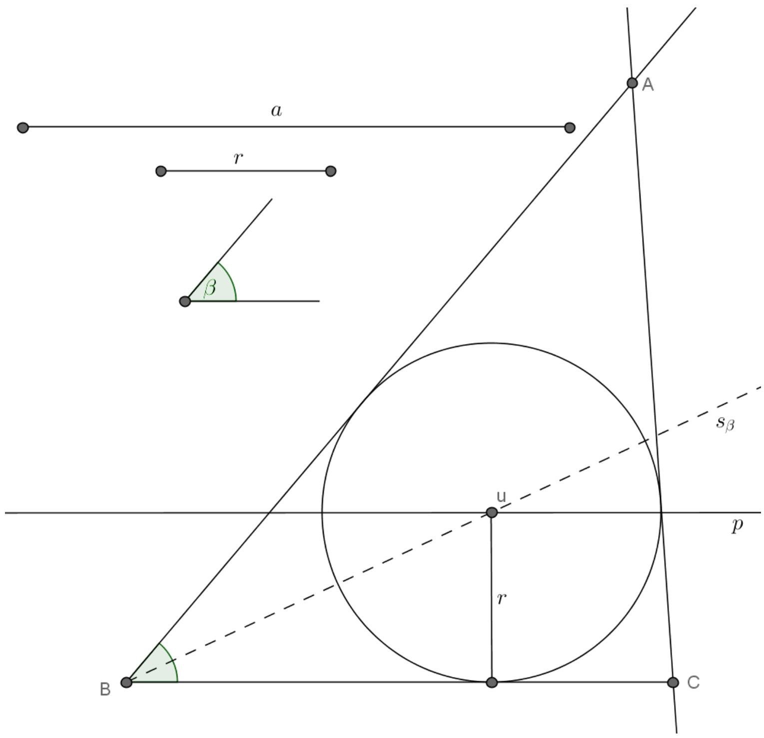
Primjer 2.2.17. *[9, str. 314.] Konstruirajte trokut ABC kojemu je zadana duljina stranice a, kut β i polumjer r upisane kružnice.*
Rješenje:

Analiza. Na slici 2.30 vidimo da lako možemo konstruirati stranicu a i kut β. Prema Teoremu 1.3.2 znamo da središte trokutu upisane kružnice leži na simetrali kuta. S obzirom da je točka U udaljena za r od stranice a, presjek pravca paralelnog stranici a i udaljenog za r te simetrale kuta β će biti upravo točka U. Potom konstruiramo kružnicu sa središtem u točki U polumjera r. Konačno, tangenta iz točke C na kružnicu k u presjeku s krakom kuta β daje točku A.



Slika 2.30: Analiza

Konstrukcija:
1. Stranica $\overline{BC}$, $|BC| = a$
2. Kut iz B mjere β i simetrala s_β tog kuta
3. Pravac p takav da $p \| BC$, $d(p, BC) = r$
4. $p \cap s_\beta = \{U\}$
5. $k(U, r)$
6. Tangenta na k iz C siječe krak kuta iz B u točki A.



Slika 2.31: Konstrukcija

Dokaz. Očit iz analize i Teorema 1.3.2.

Rasprava. Zadatak ima jedno rješenje, što vidimo u samoj konstrukciji.

2.3 Primjeri nemogućih konstrukcija

Navedimo prvo teoreme koje ćemo koristiti pri rješavanju konstruktivnih problema.

Definicija 2.3.1. *Ako se korijeni algebarske jednadžbe s racionalnim koeficijentima mogu elementarno konstruirati, onda kažemo da je ta jednadžba rješiva u kvadratnim radikalima.*

Teorem 2.3.2. *[9, str. 353.]*
Jednadžba trećeg reda s racionalnim koeficijentima rješiva je u kvadratnim radikalima ako i samo ako ima racionalni korijen.

Teorem 2.3.3. *[9, str. 358.]*
Jednadžba četvrtog stupnja

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \; a, b, c, d \in \boldsymbol{Q} \tag{2.1}$$

rješiva je u kvadratnim radikalima ako i samo ako je u kvadratnim radikalima rješiva njezina rezolventa

$$(ay - c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)\left(y^2 - d\right). \tag{2.2}$$

Iz Teorema 2.3.2 i 2.3.3 dobivamo kriterij za konstruktibilnost korijena jednadžbe četvrtog stupnja:

Korolar 2.3.4. *[9, str. 358.]*
Korijeni jednadžbe (2.1) *se mogu elementarno konstruirati ako i samo ako njezina rezolventa* (2.2) *ima racionalni korijen.*

Primjer 2.3.5. *Nije moguće konstruirati šestarom i ravnalom trokut kojemu je zadan kut α, težišnica iz vrha B i polumjer r upisane kružnice.*
Rješenje:

Promotrimo veličine

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \; t_b = \sqrt{14}, \; r = 1.$$

Pokazat ćemo da trokut s tim veličinama postoji, ali je nemoguće konstruirati stranicu b. S obzirom da je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A, prema Pitagorinom teoremu vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.3}$$

Prema Teoremu 1.3.3 vrijedi

$$P = r \cdot s,$$

gdje je P površina trokuta ABC, a s njegov poluopseg.
Primijenimo li Heronovu formulu (Teorem 1.3.4), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= rs \\
\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot &= r^2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{4} \\
\frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2] &= r^2(a+b+c)^2 \\
\frac{1}{4}[b^2+c^2+2bc-a^2][a^2-b^2-c^2+2bc] &= r^2(a+b+c)^2.
\end{aligned}$$

Supstituirajući u gornju jednakost $a^2 = b^2 + c^2$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(2bc)(2bc) &= r^2(a+b+c)^2 \\
r^2(a+b+c)^2 &= b^2c^2
\end{aligned}$$

i konačno:

$$r(a+b+c) = bc. \tag{2.4}$$

Za težišnicu t_b vrijedi

$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},$$

odnosno

$$2a^2 - b^2 + 2c^2 = 4t_b^2.$$

U gornju jednakost uvrstimo $t_b = \sqrt{14}$ i $a^2 = b^2 + c^2$.
Dobivamo

$$b^2 + 4c^2 = 56.$$

Uvedimo supstituciju $w = b - 2$.
Dobivamo

$$(w+2)^2 + 4c^2 = 56.$$

U jednakost (2.5) uvrstimo $r = 1$, izrazimo a te uvrstimo u jednakost (2.3). Dobivamo

$$\begin{aligned}
a + b + c &= bc \\
a &= bc - b - c \\
(bc - b - c)^2 &= b^2 + c^2 \\
b^2c^2 + b^2 + c^2 - 2b^2c - 2bc^2 + 2bc &= b^2 + c^2 \\
b^2c^2 - 2b^2c - 2bc^2 + 2bc &= 0 \\
bc - 2b - 2c + 2 &= 0 \\
c(b - 2) &= 2b - 2 \\
c &= \frac{2b - 2}{b - 2} \\
c &= \frac{2(b - 2) + 2}{b - 2} \\
c &= \frac{2w + 2}{w}.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući taj izraz za c u $(w + 2)^2 + 4c^2 = 56$ imamo

$$\begin{aligned}
(w + 2)^2 + 4\left(\frac{2w + 2}{w}\right)^2 &= 56 \\
w^2 + 4w + 4 + \frac{16w^2 + 32w + 16}{w^2} &= 56 \\
w^4 + 4w^3 - 36w^2 + 32w + 16 &= 0.
\end{aligned}$$

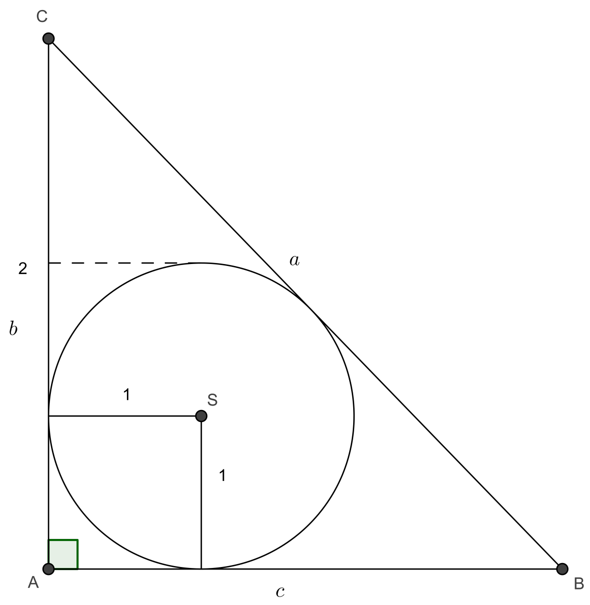
Definiramo polinom f ovako:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 32x + 16.$$

Za polinom f vrijedi $f(0) = 16 > 0$ i $f(2) = -16 < 0$. S obzirom da je polinom f neprekidna funkcija koja u 0 poprima pozitivnu vrijednost, a u 2 poprima negativnu vrijednost, zaključujemo da postoji $u \in \langle 0, 2\rangle$ za koji je $f(u) = 0$.
Upotrijebimo vrijednost u za stranicu b:

$$b = w + 2 = u + 2 > 0 + 2 = 2.$$

Trokut s elementima $\alpha = \frac{\pi}{2}, r = 1, b > 2$ je moguće konstruirati. Promotrimo sliku 2.32.



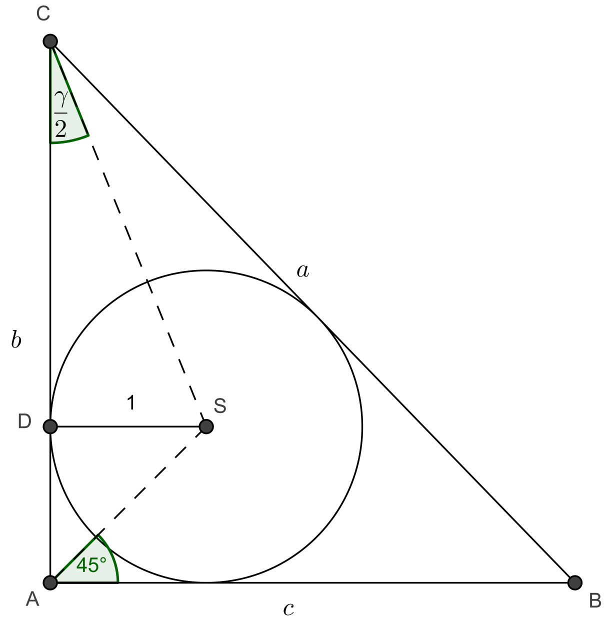
Slika 2.32: Trokut ABC

Konstruirali bismo pravi kut, a zatim kružnicu polumjera $r = 1$ koja dira krakove pravog kuta. Nanošenjem duljine $b > 2$ na vertikalni krak, dobili bismo točku C. Tangenta iz točke C na kružnicu siječe horizontalni krak kuta u vrhu B.
Preostaje nam provjeriti ima li taj trokut težišnicu iz vrha B duljine $\sqrt{14}$.
Dopunimo prethodnu sliku kao na slici 2.33.
S obzirom da je $\sphericalangle DAS = \frac{\alpha}{2} = 45°$ i $\sphericalangle ADS = 90°$, slijedi da je trokut ADS jednakokračan, pa je $|DS| = |AD| = r = 1$.
Iz trokuta CDS imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{|DS|}{|DC|} = \frac{r}{|AC| - |AD|} = \frac{1}{u+2-1} = \frac{1}{u+1}.$$

Nadalje,

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{2}{u+1}}{1 - \frac{1}{(u+1)^2}} = \frac{2(u+1)}{u(u+2)}.$$



Slika 2.33: Trokut ABC

Iz trokuta ABC imamo

$$\begin{aligned} c &= b\,\mathrm{tg}\,\gamma = (u+2)\cdot\frac{2(u+1)}{u(u+2)} = \frac{2(u+1)}{u} \\ a^2 &= b^2+c^2 = (u+2)^2+\frac{4(u+1)^2}{u^2}, \end{aligned}$$

te uvrštavanjem u $4t_b^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2$ imamo

$$\begin{aligned} 4t_b^2 &= 2(u+2)^2 + 2\cdot\frac{4(u+1)^2}{u^2} - (u+2)^2 + 2\cdot\frac{4(u+1)^2}{u^2} \\ &= (u+2)^2 + 4\cdot\frac{4(u+1)^2}{u^2} \\ &= \frac{u^2(u^2+4u+4)+16(u+1)^2}{u^2}. \end{aligned}$$

Tako dobivamo

$$4t_b = \frac{u^4+4u^3+20u^2+32u+16}{u^2}. \tag{2.5}$$

Budući da je u nultočka polinoma f, slijedi da je

$$u^4 + 4u^3 - 36u^2 + 32u + 16 = 0,$$

pa je

$$u^4 + 4u^3 + 20u^2 + 32u + 16 = 56u^2.$$

To uvrstimo u jednadžbu (2.5) te dobivamo

$$4t_b^2 = \frac{56u^2}{u^2} = 56$$

odnosno $t_b = \sqrt{14}$.
Dakle, trokut ABC postoji i ima sve zadane elemente.
Sada pokažimo da se u ne može konstruirati. U tom slučaju se niti b ne može konstruirati, što će značiti da je trokut nerješiv.
S obzirom da je f polinom četvrtog stupnja, prema Teoremu 2.3.3 jednadžba četvrtog stupnja rješiva je u kvadratnim radikalima ako i samo ako je u kvadratnim radikalima rješiva njezina rezolventa

$$(ay - c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)\left(y^2 - d\right),$$

pri čemu je $a = 4, b = -36, c = 32, d = 16$.
Rezolventa je stoga

$$y^3 + 18y^2 + 16y - 192 = 0.$$

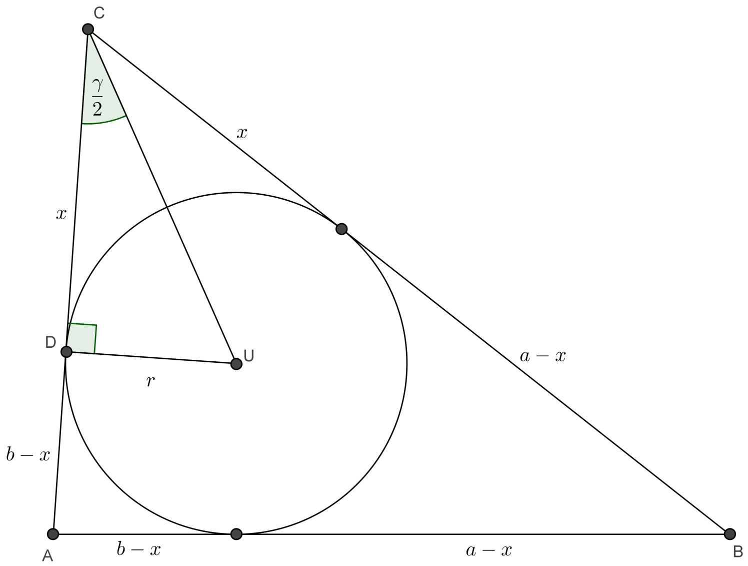
Supstitucijom $t = y + 4$ dobivamo

$$t^3 + 6t^2 - 80t - 32 = 0.$$

Kandidati za racionalna rješenja te jednadžbe su $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$.
Uvrštavanjem u jednadžbu zaključujemo da ova jednadžba nema racionalnih rješenja, pa prema Teoremu 2.3.2 nije rješiva u kvadratnim radikalima.
Prema Korolaru 2.3.4, trokut ABC nije moguće elementarno konstruirati.

Primjer 2.3.6. *[9, str. 355.] Nije moguće konstruirati šestarom i ravnalom trokut kojemu su zadane dvije stranice a i b te polumjer r upisane kružnice.*
Rješenje:

Uvedimo oznake kao na slici 2.34.



Slika 2.34: Trokut ABC

Uočimo $c = b - x + a - x = a + b - 2x$, pa slijedi $x = \frac{a+b-c}{2}$. Neka je s poluopseg trokuta. Tada je $x = a + b - s$. Iz pravokutnog trokuta CDU slijedi

$$r = (a + b - s)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \tag{2.6}$$

S obzirom da je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{ab\sin\gamma}{2s},$$

slijedi

$$s = \frac{ab\sin\gamma}{2r}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (2.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
r &= \left(a+b-\frac{ab\sin\gamma}{2r}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\\
r &= \left(a+b-\frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2r}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\\
r &= \left(a+b-\frac{ab}{r}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$r(a+b)\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}-(r^2+ab)\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+r(a+b)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-r^2=0. \tag{2.7}$$

Pokažimo da postoji jedinstveni trokut za koji je $r = 1, a = 2, b = 3$. Uvrštavanjem u jednadžbu (2.7) dobivamo

$$5\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}-7\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+5\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-1=0.$$

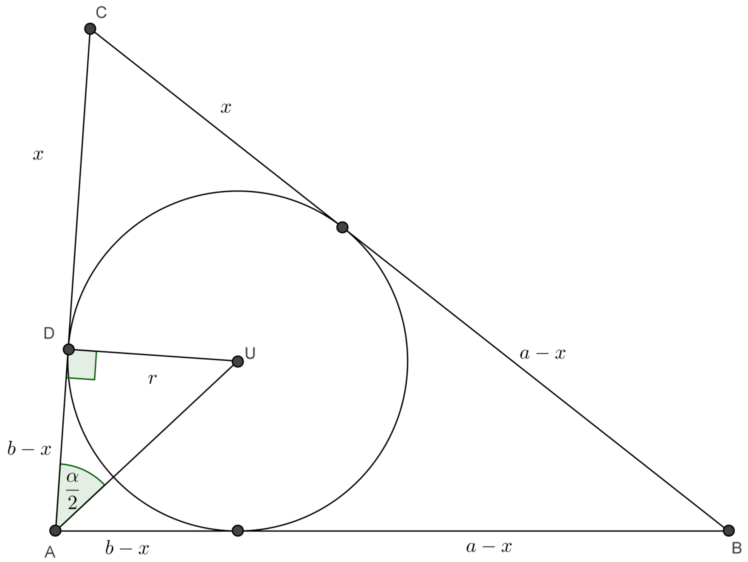
Definiramo polinom f ovako:

$$f(x)=5x^3-7x^2+5x-1.$$

Za polinom f vrijedi $f(0) = -1 < 0$ i $f(1) = 2 > 0$. S obzirom da je polinom f neprekidna funkcija koja u 0 poprima negativnu vrijednost, a u 2 poprima pozitivnu vrijednost, zaključujemo da postoji jedinstveno realno rješenje $0 < x < 1$, odnosno $0 < \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < 1$. Stoga je $0° < \gamma < 90°$, što znači da takav trokut postoji. No, ta jednadžba nema racionalni korijen pa prema Teoremu 2.3.2 taj trokut nije moguće elementarno konstruirati.

Primjer 2.3.7. *[9, str. 356.] Nije moguće elementarno konstruirati trokut kojemu je zadan poluopseg s, polumjer r upisane kružnice i polumjer R opisane kružnice.*
Rješenje:

Uvedimo oznake kao na slici 2.35.



Slika 2.35: Trokut ABC

Uočimo $c = b - x + a - x = a + b - 2x$, pa slijedi $x = \dfrac{a+b-c}{2}$. Neka je s poluopseg trokuta. Tada je $x = a + b - s$. Iz pravokutnog trokuta ADU slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{b-x}{r} \\
r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} &= b-x \\
r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} &= b-a-b+s \\
s-a &= r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Primjenom poučka o sinusu i prelaskom na polovične kutove dobivamo

$$a = 2R\sin\alpha = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Stoga imamo

$$\frac{s-a}{a} = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Uvrštavanjem $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ dobivamo

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{ar}{4R(s-a)}. \tag{2.8}$$

S druge strane, iz $r = (s-a)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ slijedi

$$\frac{r}{a} = \frac{(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Uvrštavanjem $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ dobivamo

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a(s-a)}{4rR}. \tag{2.9}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.8) i (2.9) dobivamo

$$a^3 - 2sa^2 + (s^2 + r^2 + 4rR)a - 4rRs = 0. \tag{2.10}$$

Uzmimo $s = 6, R = 2, r = 1$. Uvrštavanjem u jednadžbu (2.10) dobivamo

$$a^3 - 12a^2 + 45a - 48 = 0.$$

Definiramo polinom f ovako:

$$f(a) = a^3 - 12a^2 + 45a - 48.$$

Za polinom f vrijedi $f(1) < 0$ i $f(2) > 0$. S obzirom da je polinom f neprekidna funkcija koja u 1 poprima negativnu vrijednost, a u 2 poprima pozitivnu vrijednost, zaključujemo da postoji korijen te jednadžbe za koji je $1 < a < 2$, što znači da takav trokut postoji. No, jednadžba $a^3 - 12a^2 + 45a - 48 = 0$ nema racionalni korijen, pa prema Teoremu 2.3.2 taj trokut nije moguće elementarno konstruirati.

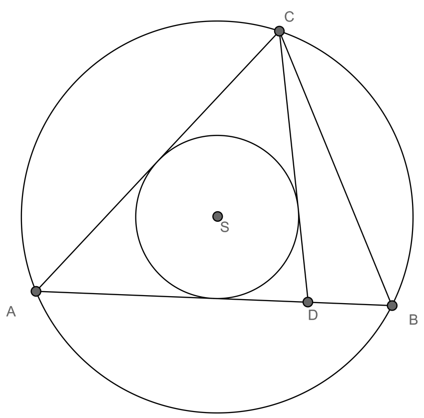
Poglavlje 3

Zadaci s matematičkih natjecanja

U ovom poglavlju prezentirali smo nekoliko zadataka koji su se prošlih godina pojavili na matematičkim natjecanjima u Republici Hrvatskoj, a koji su povezani s upisanom ili opisanom kružnicom trokuta. Ovi se zadaci mogu naći na web stranici [12].

3.1 Osnovnoškolska natjecanja

Primjer 3.1.1. *(Državno natjecanje, 7. razred, 2016.)*
Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?
Rješenje:



Slika 3.1: Trokut ABC

Neka je S središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC i neka je $\sphericalangle ABC = \beta$. Kutovi $\sphericalangle ASC$ i $\sphericalangle ABC$ su središnji i pripadni obodni kut nad tetivom $\overline{AC}$. Na temelju poučka o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $\sphericalangle ASC = 2\beta$. Iz trokuta ASC, koji je jednakokračan jer je $|SA| = |SC|$, može se zaključiti da je

$$\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Pravac AS je simetrala unutarnjeg kuta trokuta $ADC(ABC)$ pri vrhu A pa je

$$\alpha = \sphericalangle CAB = 2 \cdot (90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta.$$

Na isti način vrijedi

$$\sphericalangle ACD = 2 \cdot (90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta.$$

Pravac CD je simetrala kuta trokuta pri vrhu C pa je

$$\gamma = \sphericalangle ACB = 2 \cdot (180^\circ - 2\beta) = 360^\circ - 4\beta.$$

Iz zbroja kutova trokuta ABC slijedi

$$\beta + (180^\circ - 2\beta) + (360^\circ - 4\beta) = 180^\circ$$

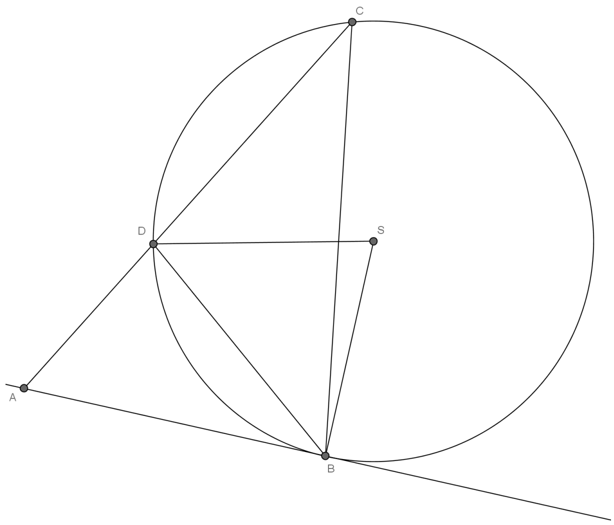
iz čega dobivamo: $\beta = 72^\circ, \alpha = 36^\circ, \gamma = 72^\circ$.
Dakle, trokut ABC je jednakokračan s kutovima veličina 72^o, 72^o i 36^o.

Primjer 3.1.2. *(Državno natjecanje, 8. razred, 2015.)*
Neka je D točka na stranici AC trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokaži da je pravac BD simetrala kuta $\sphericalangle CBA$.
Rješenje:

Promotrimo sliku 3.2. Kako je $|BD| = |CD|$, onda je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBD$.
Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\sphericalangle DSB = 2\sphericalangle DCB = 2\phi$.
Budući da je $|DS| = |BS| = r$, trokut BSD je jednakokračan pa slijedi

$$\sphericalangle BDS = \sphericalangle SBD = \frac{180^\circ - 2\phi}{2} = 90^\circ - \phi.$$

S obzirom da je pravac AB tangenta opisane kružnica trokuta BCD, vrijedi $\sphericalangle SBA = 90^\circ$. Dalje je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle SBA - \sphericalangle SBD = 90^\circ - (90^\circ - \phi) = \phi$ što znači da je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBA$, a time je tvrdnja dokazana.



Slika 3.2: Trokut ABC

3.2 Srednjoškolska natjecanja

Primjer 3.2.1. *(Državno natjecanje, 2. razred, 2017.)*
Unutar trokuta ABC nalaze se točke S i T. Udaljenosti točke S od pravaca AB, BC i CA su redom 10, 7 i 4. Udaljenosti točke T od tih pravaca su redom 4, 10 i 16. Odredi polumjer trokutu ABC upisane kružnice.
Rješenje:

Uvedimo oznake $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$. Neka je s poluopseg, a r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.
Podijelimo trokut ABC na tri manja trokuta tako da točku S spojimo s vrhovima A, B i C.

Zbrajanjem površina trokuta ABS, BCS i CAS dobivamo površinu trokuta ABC, pa vrijedi

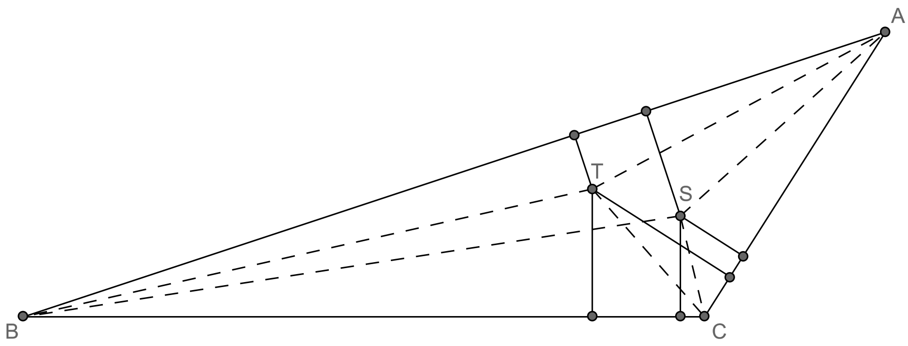
$$2P = 10c + 7a + 4b.$$

Analogno, zbrajanjem površina trokuta ABT, BCT i CAT dobivamo

$$2P = 4c + 10a + 16b.$$

Prvu jednakost pomnožimo s 2 i zbrojimo s drugom. Dobivamo

$$6P = 24(a + b + c) = 48s.$$



Slika 3.3: Trokut ABC

Slijedi

$$P = 8s.$$

Prema Teoremu 1.3.3 je $P = rs$, pa zaključujemo da je polumjer r upisane kružnice trokutu ABC jednak 8.

Primjer 3.2.2. *(Školsko natjecanje, 1. razred SŠ, 2015.)*
Neka je U središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od $10°$. Ako je $\sphericalangle AUB = 120°$, odredi kutove trokuta ABC.
Rješenje:

Označimo $\gamma = \sphericalangle ACB$. Neka je N nožište visine iz vrha C.

Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle BCN = \dfrac{\gamma}{2} - 10°$.
Trokut BCN je pravokutan, pa je

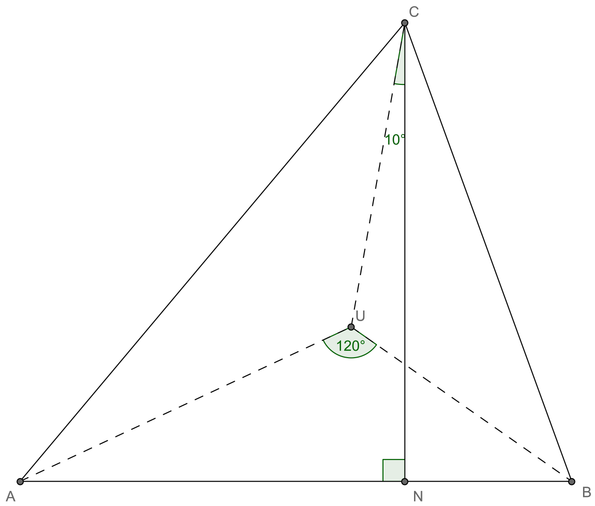
$$\sphericalangle CBN = \sphericalangle CBA = 90° - \left(\frac{\gamma}{2} - 10°\right) = 100° - \frac{\gamma}{2}.$$

U trokutu ABC vrijedi

$$\sphericalangle CAB = 180° - \gamma - \left(100° - \frac{\gamma}{2}\right) = 80° - \frac{\gamma}{2}.$$

S obzirom da je U središte trokutu upisane kružnice, pravci AU i BU su simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ redom. Iz toga slijedi

$$\sphericalangle ABU = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = 50° - \frac{\gamma}{4},$$



Slika 3.4: Trokut ABC

$$\sphericalangle BAU = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 40^\circ - \frac{\gamma}{4}.$$

Iz zbroja kutova u trokutu ABU slijedi

$$40^\circ - \frac{\gamma}{4} + 50^\circ - \frac{\gamma}{4} + 120^\circ = 180^\circ,$$

odakle je

$$\gamma = 60^\circ.$$

Konačno,

$$\sphericalangle CBA = 100^\circ - \frac{\gamma}{2} = 70^\circ,$$
$$\sphericalangle CAB = 80^\circ - \frac{\gamma}{2} = 50^\circ.$$

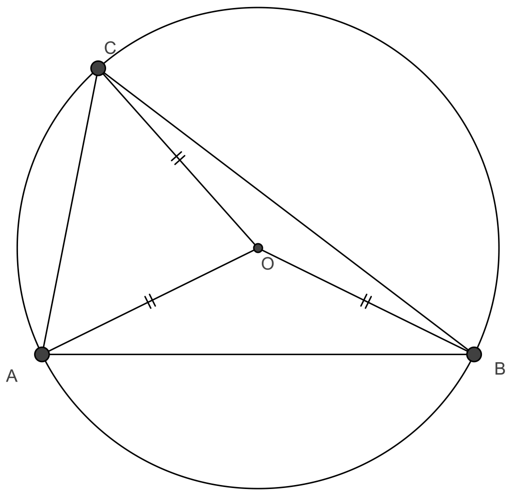
Primjer 3.2.3. *(Školsko natjecanje, 1. razred, 2010.)*
Ortocentar jednakokračnog trokuta nalazi se u jednom od vrhova trokuta. Ako su duljine krakova $3\sqrt{2}$*cm, kolika je duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice?*
Rješenje:

S obzirom da se ortocentar trokuta nalazi u jednom od vrhova trokuta, zaključujemo da je zadani trokut pravokutan.
Znamo da je polumjer opisane kružnice pravokutnom trokutu polovica hipotenuze, pa izračunajmo prvo duljinu hipotenuze primjenom Pitagorinog poučka

$$c = \sqrt{2 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Stoga
$$R = \frac{1}{2}c = 3.$$
Polumjer opisane kružnice pravokutnom trokutu je $R = 3$ cm.

Primjer 3.2.4. *(Državno natjecanje, 4. razred, 2017.)*
Površina trokuta ABC je $P = 3 + \sqrt{3}$. Izračunajte površinu kruga opisanog trokutu ABC, ako su duljine lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CA}$ redom u omjeru $5 : 3 : 4$.
Rješenje:



Slika 3.5: Trokut ABC

Duljine lukova su u omjeru $l_1 : l_2 : l_3 = 5 : 3 : 4$, tj. $l_1 = 5k, l_2 = 3k, l_3 = 4k$.
Iz $l_1 + l_2 + l_3 = 2\pi$ slijedi $k = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, pa imamo
$$l_1 = \frac{5\pi}{6},\ l_2 = \frac{\pi}{2},\ l_3 = \frac{2\pi}{3}.$$
Stoga vrijedi $\sphericalangle ASB = 150^\circ$, $\sphericalangle BSC = 90^\circ$, $\sphericalangle ASC = 120^\circ$. Prema Talesovom poučku obodni kut je dvostruko manji od središnjeg kuta nad istom tetivom. Tada je
$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ,\ \beta = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Duljine stranica računamo koristeći poučak o sinusima:

$$\begin{aligned} a &= 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2} \\ b &= 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Površina trokuta je $P = \dfrac{1}{2}ab\sin 75^\circ$. Računamo $sin 75^\circ = sin(45^\circ + 30^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. Uvrstimo u formulu za površinu

$$P = \frac{1}{2}ab\sin 75^\circ = \frac{1}{2}R\sqrt{2}R\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3}).$$

Ako je $P = 3 + \sqrt{3}$, onda imamo

$$\frac{R^2\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}.$$

Iz toga slijedi $R^2 = 4$.
Površina kruga opisanog trokutu ABC je $P = R^2\pi = 4\pi$.

Poglavlje 4

Nejednakosti vezane uz kružnice trokuta

U ovom poglavlju ćemo iznijeti neke geometrijske nejednakosti vezane uz kružnice trokuta. U radu smo već naveli jednu vrlo važnu nejednakost, koja je jedna od najstarijih. Radi se o takozvanoj Eulerovoj nejednakosti: $R \geq 2r$, koja je poznata od 1765. godine.

Teorem 4.0.1. *[3, str. 52.] Za polumjer r upisane kružnice trokuta i poluopseg s trokuta vrijedi*

$$s^2 \geq 27r^2.$$

Jednakost vrijedi samo za jednakostraničan trokut.

Dokaz. Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti imamo

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Iskoristimo Heronovu formulu (Teorem 1.3.4). Imamo

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = r^2 s,$$

pri čemu je P površina danog trokuta iz čega slijedi

$$\frac{s}{3} \geq \sqrt[3]{r^2 s},$$

te konačno

$$s^2 \geq 27r^2$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorem 4.0.2. *[3, str. 53.] Za polumjere r i R upisane i opisane kružnice trokuta i poluopseg s trokuta vrijedi*

$$2s^2 \geq 27Rr.$$

Dokaz. Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti imamo

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc,$$

a iz Teorema 1.2.3 slijedi

$$abc = 4RP = 4Rrs.$$

U prvu nejednakost uvrstimo $abc = 4Rrs$ pa dobivamo

$$8s^3 \geq 27 \cdot 4Rrs,$$

odnosno

$$2s^2 \geq 27Rr.$$

□

Teorem 4.0.3. *[3, str. 52.]*

Za polumjere r i R upisane i opisane kružnice trokuta i stranice a, b, c vrijedi

$$36r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Jednakost vrijedi samo za jednakostraničan trokut.

Dokaz. Znamo

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2} \geq \frac{a+b+c}{3},$$

a iz Teorema 4.0.1 slijedi:

$$\begin{aligned} s &\geq \sqrt{27}r \\ \frac{a+b+c}{2} &\geq 3\sqrt{3}r \\ a+b+c &\geq 6\sqrt{3}r. \end{aligned}$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2} &\geq 2\sqrt{3}r \\ \frac{a^2+b^2+c^2}{3} &\geq 12r^2 \\ a^2+b^2+c^2 &\geq 36r^2. \end{aligned}$$

□

Tako smo dokazali prvu nejednakost. Druga nejednakost slijedi iz

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = |OH|^2 \geq 0.$$

Teorem 4.0.4. *[3, str. 53.]*
Za polumjere r i R upisane i opisane kružnice trokuta i stranice a, b, c vrijedi

$$\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Dokaz. S obzirom da je

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{2s}{abc} = \frac{1}{2Rr},$$

navedena nejednakost je ekvivalentna sljedećoj

$$\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Prva jednakost vrijedi ako $R^2 \geq 2Rr$, a druga ako $2Rr \geq 4r^2$, odnosno ako $R \geq 2r$ što je istina. Stoga zaista vrijedi početna nejednakost. □

Teorem 4.0.5. *[3, str. 53.]*
Za polumjer R opisane kružnice trokuta i stranice a, b, c vrijedi

$$abc \leq (R\sqrt{3})^3.$$

Jednakost vrijedi samo za jednakostraničan trokut.

Dokaz. Prema aritmetičko-geometrijskoj nejednakosti imamo

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Vrijedi

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

a iz Teorema 4.0.3 znamo

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Stoga

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{3} &\leq 9R^2\\ \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} &\leq 3R\\ a+b+c &\leq 3\sqrt{3}R.\end{aligned}$$

Primijenimo prethodnu nejednakost na aritmetičko-geometrijsku nejednakost. Dobivamo

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{3\sqrt{3}R}{3},$$

odnosno

$$abc \leq (R\sqrt{3})^3,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Teorem 4.0.6. *[3, str. 49.]*
Za polumjere r i R upisane i opisane kružnice trokuta i poluopseg s trokuta vrijedi

$$6r(4R+r) \leq 2s^2 \leq 2(2R+r)^2 + R^2.$$

Jednakost vrijedi samo za jednakostraničan trokut.

Dokaz. S obzirom da je $r = \frac{P}{s}$ i $R = \frac{abc}{4P}$, imamo

$$r(4R+r) = \frac{P}{s}\left(4\cdot\frac{abc}{4P} + \frac{P}{s}\right) = \frac{abc}{s} + \frac{P^2}{s^2} = \frac{1}{3}s^2 - Q \leq \frac{1}{3}s^2,$$

pri čemu je $Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$.
Iz toga slijedi

$$6r(4R+r) \leq 2s^2$$

pa prva nejednakost vrijedi.
Iz Teorema 4.0.3 slijedi

$$(2R+r)^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{9R^2}{2} + r(4R+r) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + r(4R+r) = s^2,$$

iz čega slijedi $2s^2 \leq 2(2R+r)^2 + R^2$. Tako je dokazana i druga nejednakost. □

Bibliografija

[1] Š. Arslanagić, *Još jedan dokaz Eulerovog teorema*, MiŠ, 10 (2009), 132-133.

[2] J. Beban-Brkić, D. Jovičić, *Različiti dokazi Heronove formule*, MiŠ, 9 (2008), 212.

[3] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1968.

[4] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija, skripta*, http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf, (svibanj 2017.)

[5] Z. Kolar-Begović, A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list, 9 (2009), 21-30.

[6] Z. Kurnik, *Konstruktivne metode*, MiŠ, 6 (2005), 195-201.

[7] A. Marić, *Planimetrija*, Element, Zagreb, 1996.

[8] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1992.

[9] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[10] J. Švrček i dr., *Geometrie Trojuhelnika*, Praha, 1992.

[11] S. Varošanec, *Konstrukcije trokuta kojemu je zadan polumjer opisane kružnice*, Zbornik radova Prvog kongresa nastavnika matematike, Zagreb 5.-7. srpnja 2000., HMD, Zagreb, 379-382.

[12] *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj*, http://www.matematika.hr/natjecanja (lipanj, 2017.)

Sažetak

U ovom su radu najprije prikazana osnovna svojstva nekoliko vrsta kružnica koje su povezane s trokutom. S pojmom upisane kružnice povezana je i poznata Heronova formula koja je dokazana koristeći svojstva vezana uz polumjer upisane kružnice trokuta. Važnu ulogu u geometriji ima i Eulerov teorem koji govori o udaljenosti središta opisane kružnice i središta upisane kružnice trokuta. U radu je dan njegov dokaz te je korišten u rješavanju mnogih zadataka. Kružnica devet točaka je također povezana s pojmom upisane i opisane kružnice trokuta te je dan niz važnih tvrdnji vezanih uz kružnicu devet točaka, od kojih je najvažnija Feuerbachov teorem. Nadalje, dane su konstrukcije trokuta u kojima je jedan od zadanih elemenata polumjer opisane ili upisane kružnice trokuta ili položaj središta tih kružnica, ali i dokazana nemogućnost izvodljivosti nekih konstrukcija ravnalom i šestarom. U završnom dijelu rada dane su neke nejednakosti vezane uz duljine stranica te upisanu i opisanu kružnicu trokuta.

Summary

In this thesis, the basic properties of several types of circles related to triangle are presented first. The incircle is related to the well-known Heron's formula which has been proven using the properties of the inradius. Euler's formula is one of the most important theorems of geometry, which relates the circumradius, the inradius and the distance between the circumcenter and the incenter of a triangle. We proved Euler's formula and we used it in solving many tasks. Every triangle has a nine point circle which is connected to it's inscribed circle and circumscribed circle. Important properties of nine-point circle are given, including the most important Feuerbach's theorem. Furthermore, there are given constructions of a triangle given by the circumradius, the inradius or the center position of these circles. We also proved the impossibility of some constructions using a compass and a straightedge. In the last chapter, theorems on geometric inequalities for the sides and the radii of a triangle are obtained.

Životopis

Rođena sam 28. veljače 1992. godine u Doboju. Svoje obrazovanje sam počela 1998. godine u Osnovnoj školi Milke Trnine u Križu. Osmi razred sam završila 2006. godine, te upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivan Švear u Ivanić Gradu, odjel u Križu.
Po završetku opće gimnazije 2010. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Smjer mijenjam 2011. godine upisujući studij Matematika; nastavnički smjer. Završetkom studija 2014. godine stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Te godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji ove godine završavam.