

Numeričke simulacije Navier-Stokes-Fourierovog sustava

Rudan, Petar

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:523808>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu
PMF - Matematički odjel

Petar Rudan

Numeričke simulacije
Navier-Stokes-Fourierovog sustava

Diplomski rad

Srpanj 2017., Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
PMF - Matematički odjel

Petar Rudan

Numeričke simulacije
Navier-Stokes-Fourierovog sustava

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Boris Muha
Srpanj 2017., Zagreb

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik

2. _____ , član

3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____

2. _____

3. _____

Sadržaj

Uvod	iii
I Jednadžbe mehanike kontinuuma	1
1 Uvod	1
2 Jednadžbe mehanike fluida	2
2.1 Zakon očuvanja mase	2
2.2 Zakon očuvanja impulsa	3
2.3 Zakon promjene mehaničke energije	5
2.4 Zakon očuvanja energije	7
2.5 Zakon entropije	8
2.6 Navier-Stokes-Fourierov sustav	8
II Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi	10
1 Uvod	10
2 Metoda konačnih volumena	10
3 Metoda konačnih elemenata	12
III Autodesk Computational Fluid Dynamics	16
1 Autodesk CFD	16
2 Opis zadavanja i rješavanja problema	17
2.1 Geometrija	17
2.2 Zadavanje materijala	18
2.3 Postavljanje rubnih i inicijalnih uvjeta	19
2.4 Mreža	20
2.5 Stacionarni i evolucijski problemi	21
2.6 Fizikalni uvjeti	22
2.7 Vizualizacija i analiza rješenja	23
IV Primjeri	26
1 Uvod	26
2 Poiseuilleov tok	26
3 Womersleyjev tok	31
4 Provođenje topline	34
5 Vanjski kompresibilni tok	36

V Model krušne peći	40
1 Opis problema	40
2 Model	41
3 Rezultati	45
3.1 Stacionarni problem	45
3.2 Evolucijski problem	48
Zaključak	50
Sazetak	52
Summary	53
Zivotopis	54

Uvod

Navier-Stokes-Fourierov sustav jednadžbi opisuje kretanje kompresibilnog, viskozno fluida koji provodi toplinu. Sama matematička teorija Navier-Stokes-Fourierovog sustava je vrlo zahtjevna, te nepotpuna. Više o Navier-Stokes-Fourierovom sustavu može se pogledati u [6]. Dokaz globalne regularnosti rješenja inkompresibilnog Navier-Stokesovog sustava spada pod Milenijske probleme Clay Instituta, što dovoljno govori o zahtjevnosti teorijske analize. Više o formulaciji problema može se pročitati u [2]. Tema rada su numeričke simulacije Navier-Stokes-Fourierovog sustava u Autodesk Computational Fluid Dynamics-u (CFD), često korištenom alatu za računalnu mehaniku fluida u industriji.

U prvom dijelu rada je izložena klasična teorija mehanike kontinuuma, gdje će biti pojašnjeno kako iz zakona sačuvanja dolazimo do jednadžbi mehanike kontinuuma. Zatim, pomoću primjera, slijedi opis diskretizacije i numeričkog rješavanja, kako bi se lakše moglo razumjeti na koji način dobivamo rješenja u CFD-u. Treće poglavlje posvećujemo kratkom opisu funkcionalnosti alata, tj. pojašnjavanju kako postaviti fizikalni problem, riješiti ga, te ga potom vizualizirati. Sam alat ne dopušta prikaz jednadžbi koje rješava, pa je potrebno uvjeriti se da stvarno radi dobro ukoliko mu je zadana ispravna geometrija, rubni i početni uvjeti, te ostala fizikalna svojstva. U četvrtom poglavlju alat ćemo isprobati na različitim stacionarnim i evolucijskim primjerima, te na primjerima kod kojih znamo izračunati egzaktno rješenje, ali i na primjerima gdje ono nije eksplicitno dano i gdje je nužno ostaloniti na numeričku konvergenciju. U posljednjem poglavlju je predstavljena simulacija realnog fizikalnog problema, za koji imamo eksperimentalna mjerenja.

Prvo poglavlje se većim dijelom oslanja na knjigu [3] i predavanja [5], a za drugo poglavlje je korištena knjiga [4]. Praktični dio, tj. poglavlja III, IV i V su originalna. Zbog slabe dokumentiranosti alata, treće poglavlje služi kao priručnik za lakše korištenje.

Poglavlje I

Jednadžbe mehanike kontinuuma

1 Uvod

U ovom poglavlju dan je kratki uvod u jednadžbe mehanike fluida, te uvod u jednadžbe zakona sačuvanja. Promatramo preslikavanje $x = \Phi(X, t)$ koje materijalnoj točki X u trenutku t pridružuje prostornu lokaciju. Definiramo skup $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kao **referentnu konfiguraciju**, tj. skup na kojem se nalazimo u trenutku $t = 0$, odnosno na početku promatranja kretanja čestice (materijalne točke). Brzinu kretanja čestice i akceleraciju čestice (materijalne točke) definiramo na sljedeći način:

$$\tilde{v}(X, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(X, t), \quad (1.1)$$

$$\tilde{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(X, t). \quad (1.2)$$

Ovako definirana brzina i akceleracija je označena s tildom, jer nisu od interesa kao funkcije materijalne točke X , već kao funkcije proizvoljne prostorne točke x i vremena t . Označimo s $\Omega_t := \Phi_t(\Omega)$. Sada za $(x, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}$ definiramo brzinu v i akceleraciju a zamjenom varijabli na sljedeći način:

$$v(x, t) = \tilde{v}(X, t)|_{X=\Phi_t^{-1}(x)}, \quad a(x, t) = \tilde{a}(X, t)|_{X=\Phi_t^{-1}(x)}.$$

Uočimo da je $v(x, t)$ brzina one materijalne točke koja se u trenutku t nalazi u položaju x . Sada vrijedi:

$$v(\Phi_t(X), t) = \tilde{v}(X, t) = \frac{d}{dt}\Phi_t(X).$$

Trajektoriju (ili putanju gibanja) čestice označavamo kao preslikavanje $t \mapsto x(t)$, pa onda brzinu v možemo zapisati kao:

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t), t). \quad (1.3)$$

Također, promatramo i krivulje σ koje zadovoljavaju jednadžbu $\frac{d}{dt}x(\sigma) = v(x(\sigma), t)$, te ih nazivamo **strujnice**.

Napomena 1.1. U slučaju stacionarnog gibanja, gibanje ne ovisi o vremenu, što nam daje da se strujnice podudaraju s krivuljom gibanja čestice.

Vratimo se na brzinu kretanja materijalne čestice. Brzinu smo definirali kao

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t), t), \quad (1.4)$$

iz toga proizlazi:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Phi}{dt}(X, t)\right) = \frac{d}{dt}(v(\Phi_t(X), t)) = \\ &= (\nabla v)(\Phi_t) \frac{d\Phi_t(X)}{dt} + \frac{dv}{dt}(\Phi_t(X), t) = (\nabla v)(x, t) \cdot v(x, t) + \frac{dv}{dt}(x, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

dobivamo

$$a = (\nabla v)v + \frac{dv}{dt}. \quad (1.6)$$

U sljedećem poglavlju izvedene su jednačbe mehanike fluida. Računi i izvodi uglavnom su preuzeti iz knjige [3] i predavanja [5].

2 Jednačbe mehanike fluida

2.1 Zakon očuvanja mase

Promotrimo materijalne čestice koje se nalaze u $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kojeg nazivamo dijelom kontinuuma. Masu tijela na Ω računamo preko njegove gustoće ρ . Vrijedi:

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho dx. \quad (2.7)$$

Gustoća ρ je funkcija koja ovisi o prostoru i vremenu $\rho = \rho(x, t)$. Zakon sačuvanja mase kaže sljedeće: **Brzina promjene mase u Ω jednaka je brzini ulaska mase u Ω - brzina izlaska mase iz Ω .** Brzina promjene mase u Ω je

$$\frac{d}{dt}m(\Omega) \quad (2.8)$$

što nam daje da je **brzina promjene mase** $= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx$. Zbog zakona sačuvanja mase slijedi da je

$$\frac{d}{dt}m(\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx = 0. \quad (2.9)$$

Ako domenu Ω promatramo kao domenu gdje s jedne strane čestice ulaze, a s druge izlaze, onda rub domene Ω možemo zapisati:

$$\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-. \quad (2.10)$$

Brzina kojom masa prolazi kroz rub Ω^+ i Ω^- je dana s $\rho v \cdot \vec{n} dS$, gdje je

- v -brzina,
- ρ -gustoća,
- \vec{n} -jedinična normala na plohu, tj. na rub,
- dS -površinski element ruba

Možemo zapisati:

$$\begin{aligned} \text{BRZINA ULASKA MASE U } \Omega &= - \int_{\Omega^+} \rho v \cdot \vec{n} dS, \\ \text{BRZINA IZLASKA MASE IZ } \Omega &= \int_{\Omega^-} \rho v \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \text{ Sada iz}$$

$$\frac{d}{dt} m(\Omega) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx,$$

slijedi da

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx = - \int_{\partial\Omega^+} \rho v \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial\Omega^-} \rho v \cdot \vec{n} dS.$$

Iz toga proizlazi:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx + \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (2.11)$$

Primijenimo na taj izraz Teorem o divergenciji i dobivamo:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right) dx = 0. \quad (2.12)$$

Kako dana jednakost mora vrijediti za svaki kontrolni volumen Ω , slijedi da podintegralni izraz mora biti jednak 0. Dakle, dobivamo prvu jednadžbu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0. \quad (2.13)$$

Ta jednadžba, dobivena iz zakona očuvanja mase, naziva se **JEDNADŽBA KONTINUITETA**.

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ -brzina promjene mase u jedinici vremena,
- $-\text{div}(\rho v)$ -brzina povećanja mase uslijed konvekcije mase.

2.2 Zakon očuvanja impulsa

Brzina promjene impulsa jednaka je sili koja djeluje na tijelo, odnosno:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad (2.14)$$

Impuls je zadan gustoćom impulsa ρv . Slijedi da je $\int_{\Omega} \rho v dx$ impuls nekog kontrolnog volumena Ω . Koristeći drugi Newtonov zakon dobivamo da je **BRZINA POVEĆANJA IMPULSA U Ω JEDNAKA JE BRZINI ULASKA IMPULSA**

U Ω MINUS BRZINA IZLASKA PLUS DJELOVANJE VANJSKE SILE NA Ω . Pošto je impuls dan s izrazom $\int_{\Omega} \rho v dx$, slijedi da je brzina povećanja impulsa dana s

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v dx. \quad (2.15)$$

Kod zakona očuvanja mase, vrijedi da je

$$-\int_{\partial\Omega^-} \rho v \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial\Omega^+} \rho v \cdot \vec{n} dS = -\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot \vec{n} dS. \quad (2.16)$$

Tim se integralom izražava brzina transporta mase, no to se zaključivanje može prenijeti za bilo koju veličinu koja je zadana svojom volumnom gustoćom. Za transport neke veličine \mathbf{E} kroz volumen Ω vrijedi:

$$-\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}(v \cdot \vec{n}) dS \quad (2.17)$$

Primjenom prethodne formule na gustoću impulsa dobivamo da je razlika brzine ulaska i brzine izlaska impulsa konvektivnim putem dana:

$$-\int_{\partial\Omega} \rho v(v \cdot \vec{n}) dS, \quad (2.18)$$

a razlika brzine ulaska i brzine izlaska impulsa molekularnim transportom je dana:

$$-\int_{\partial\Omega} \Phi dS. \quad (2.19)$$

$-\Phi$ je kontaktna sila i nužno linearno ovisi o vektoru jedinične normale \vec{n} , što proizlazi iz Cauchyjevog teorema, te možemo pisati:

$$-\Phi = \mathbb{T}\vec{n}$$

gdje je \mathbb{T} tenzor naprezanja. Oblik tenzora naprezanja je dan pomoću konstitutivnih zakona. Tenzor naprezanja u fluidu se uzima u obliku:

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \tilde{\mathbb{T}}.$$

Dio $-p\mathbb{I}$ predstavlja silu kojom fluid djeluje u svim smjerovima, tj. tlak. Drugi dio predstavlja efekt kohezijskih sila među molekulama.

$$\tilde{\mathbb{T}} = \mu(\nabla v + (\nabla v)^{\tau}) + (\kappa - \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div}(v)\mathbb{I},$$

a koeficijenti μ i κ su pozitivne veličine koje opisuju viskoznost fluida.

$$\mathbb{T}\vec{n} + \rho v(v \cdot \vec{n}) = -p\vec{n} + \mathbb{T}' + \rho v(v \cdot \vec{n}). \quad (2.20)$$

Ukoliko označimo silu po jedinici mase koja djeluje na fluid s f , onda je ukupna sila koja djeluje na kontrolni volumen Ω jednaka $\int_{\Omega} \rho f dx$. Sada iz te jednakosti slijedi da je

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v (v \cdot \vec{n}) dx = - \int_{\partial\Omega} \rho v (v \cdot \vec{n}) dS - \int_{\partial\Omega} \mathbb{T} \vec{n} dS + \int_{\Omega} \rho f dx. \quad (2.21)$$

Koristeći Teorem o divergenciji, tu jednakost možemo zapisati kao

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho v \otimes v - \mathbb{T}) dx = \int_{\Omega} \rho f dx. \quad (2.22)$$

Iz toga dolazimo do **diferencijalne jednačbe gibanja fluida**:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v - \mathbb{T}) dx = \int_{\Omega} \rho f dx. \quad (2.23)$$

Koristeći komponentne dijelove tenzora \mathbb{T} , odnosno $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{T}'$ dobivamo formulaciju jednačbe gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p = \operatorname{div}(\mathbb{T}') \quad (2.24)$$

Iz zakona sačuvanja impulsa slijedi zakon sačuvanja momenta impulsa koji je dan s formulom:

$$\frac{d}{dt} (r \times mv) = r \times F, \quad (2.25)$$

gdje je r radijvektor položaja materijalne točke, a F sila koja na nju djeluje. Iz toga proizlazi jednačba

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v \right) = \operatorname{div} \mathbb{T} + \rho f. \quad (2.26)$$

2.3 Zakon promjene mehaničke energije

Iz zakona očuvanja impulsa možemo izvesti zakon promjene mehaničke energije. Diferencijalnu jednačbu gibanja

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v - \mathbb{T}) dx = \rho f \quad (2.27)$$

množimo s brzinom v te dobivamo sljedeću jednačbu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \cdot v + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) \cdot v = \operatorname{div}(\mathbb{T}) \cdot v + \rho f \cdot v. \quad (2.28)$$

Iz jednačbe kontinuiteta slijedi

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \cdot v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho |v|^2) + \frac{1}{2} |v|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho |v|^2) - \frac{1}{2} |v|^2 \operatorname{div}(\rho v), \quad (2.29)$$

te

$$\operatorname{div}(\rho v \otimes v) \cdot v = \operatorname{div}(\rho v)|v|^2 + \rho v \cdot \nabla\left(\frac{|v|^2}{2}\right). \quad (2.30)$$

Sada zbrajanjem ovih dvaju izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \cdot v + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) \cdot v \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\rho|v|^2) + \operatorname{div}(\rho v) \frac{|v|^2}{2} + \rho v \cdot \nabla\left(\frac{|v|^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\rho|v|^2) + \operatorname{div}\left(\rho \frac{|v|^2}{2} \cdot v\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zbog simetričnosti tenzora naprezanja \mathbb{T} i ako uvažimo da je $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{T}'$, slijedi:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\rho|v|^2) + \operatorname{div}\left(\rho \frac{|v|^2}{2} \cdot v\right) + \operatorname{div}(pv) - \operatorname{div}(\mathbb{T}'v) = p \operatorname{div} v - \mathbb{T}' : \nabla v + \rho f v. \quad (2.32)$$

Primijetimo, ako je vanjska sila potencijalna, tj. $f = -\nabla\eta$, tada primjenom jednadžbe kontinuiteta dobivamo:

$$\rho f \cdot v = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) - \operatorname{div}(\rho\eta v). \quad (2.33)$$

Sada ćemo s e_m označiti gustoću ukupne mehaničke energije koja je dana s

$$e_m = \frac{|v|^2}{2} + \eta.$$

Jednadžba se svodi na sljedeći oblik:

$$\rho \dot{e}_m + \operatorname{div}(pv - \mathbb{T}'v) = p \operatorname{div} v - \mathbb{T}' : \nabla v, \quad (2.34)$$

gdje su:

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_m)$ -brzina povećanja ukupne mehaničke energije,
- $-\operatorname{div}(\rho e_m v)$ -brzina dodavanja ukupne mehaničke energije konvektivnim transportom,
- $\operatorname{div}(\mathbb{T}'v)$ -brzina kojom viskozne sile vrše rad nad fluidom,
- $-p \operatorname{div} v$ -brzina reverzibilne konverzije kinetičke energije u unutarnju energiju kompresijom,
- $\mathbb{T}' : \nabla v$ - brzina inverzibilne konverzije kinetičke energije u unutarnju energiju viskoznom disipacijom.

2.4 Zakon očuvanja energije

Ukupna energija koju tijelo V emitira je zbroj njene potencijalne energije, kinetičke energije i unutarnje energije. Unutarnja energija U tijela V je dana sljedećoj jednakosti:

$$U(V) = \int_{V_t} \rho(x, t)u(x, t)dx, \quad (2.35)$$

gdje je $u(x, t)$ masena gustoća energije $U(x, t)$. Na isti ćemo način definirati unutarnju energiju kontrolnog volumena Ω koji se u trenutku t nalazi u trajektoriji gibanja:

$$U(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(x, t)u(x, t)dx \quad (2.36)$$

Uzmemo li u obzir i transport toplinske energije kondukcijom, dobivamo da je ukupna energija kontrolnog volumena dana s:

$$\int_{\Omega} \rho\left(\frac{1}{2}|v|^2 + u\right)dx, \quad (2.37)$$

gdje je u unutarnja gustoća energije. Brzina povećanja ukupne energije konvektivnim transportom:

$$- \int_{\partial\Omega} \rho\left(\frac{1}{2}|v|^2 + u\right)v \cdot \vec{n}dS,$$

a brzina povećanja unutarnje energije molekularnim transportom je dana s:

$$- \int_{\partial\Omega} q \cdot \vec{n}dS,$$

gdje je q kontaktno polje toplinskog fluksa. Brzina vršenja rada na sustavu molekularnim mehanizmima je dana s:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbb{T}\vec{n} \cdot v dS,$$

a brzina vršenja rada na sustavu vanjskim silama je dana s:

$$\int_{\Omega} (\rho f \cdot v + r)dx,$$

gdje je r gustoća volumnog toplinskog fluksa. Time smo dobili zakon sačuvanja energije koji glasi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{1}{2}|v|^2 + u\right)dx + \int_{\partial\Omega} q \cdot \vec{n}dS + \int_{\partial\Omega} \rho\left(\frac{1}{2}|v|^2 + u\right)v \cdot \vec{n}dS = \\ \int_{\partial\Omega} \mathbb{T}\vec{n} \cdot v dS + \int_{\Omega} (\rho f \cdot v + r)dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Uzimajući u obzir da je $pq' = -\operatorname{div}(\mathbf{q})$, prvi zakon termodinamike, Fourierov zakon, dobivamo jednadžbu za toplinu koja je s ostatkom sustava vezana kroz brzinu v :

$$\rho c_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) - k \Delta \theta = r \quad (2.39)$$

2.5 Zakon entropije

Izrazit ćemo entropiju sustava S preko njene gustoće po jedinici mase η :

$$S = \int_{\Omega} \rho \eta dx, \quad (2.40)$$

η možemo zvati i specifična entropija. Označimo sa σ produkciju entropije. Imamo sljedeći izraz:

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{\Omega} \sigma dx.$$

Označimo entropijski fluks s \mathbf{J}_{fluks} , te sljedećom jednakosti imamo zadanu promjenu entropije:

$$\frac{dS}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}_{fluks} \cdot \vec{n} dS.$$

Sada imamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \eta dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}_{fluks} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \sigma dx \quad (2.41)$$

Uzimajući u obzir Fourierov zakon, dobivamo:

$$\mathbf{J}_{fluks} = \rho \eta v + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} = \rho \eta v - \frac{k}{\theta} \nabla \theta. \quad (2.42)$$

2.6 Navier-Stokes-Fourierov sustav

Navier-Stokes-Fourierov sustav opisuje kretanje kompresibilnog, viskozno fluida koji provodi toplinu. Promatramo fluid na ograničenoj domeni Ω i kako se rješenje mijenja evolucijski u vremenskom intervalu $(0, T)$. Nepoznanice za koje promatramo sustav su:

- $\rho = \rho(t, x)$ - gustoća mase,
- $v = v(t, x)$ - polje brzine,
- $\theta = \theta(t, x)$ - apsolutna temperatura,
- $t \in (0, T)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Sustav je opisan pomoću sljedećih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla_x p(\rho, \theta) &= \operatorname{div}_x \mathbb{S}(\theta, \nabla_x v) \\ \partial_t(\rho \cdot s(\rho, \theta)) + \operatorname{div}_x(\rho s(\rho, \theta)v) + \operatorname{div}_x\left(\frac{q(\theta, \nabla_x \theta)}{\theta}\right) &= \sigma, \\ u|_{\partial\Omega} = q \cdot n|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$de - \theta ds = \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

gdje su nepoznanice koje nas zanimaju: tlak $p(x, t)$, brzina $v(x, t)$ i temperatura $\theta(x, t)$. Sada navodimo i pojašnjenje simbola iz ovog sustava jednažbi:

- $p = p(\rho, \theta)$ - tlak,
- $s = s(\rho, \theta)$ -specifična entropija,
- σ - količina proizvedene entropije,
- \mathbb{S} - viskozni stres tenzor, odnosno tenzor naprezanja koji sadrži informacije o viskoznosti fluida,
- q - toplinski tok.

Prepostavljamo da je viskozni tenzor naprezanja opisan pomoću Newtonovog zakona:

$$\mathbb{S}(\theta, \nabla_x v) = \mu(\theta)\mathbb{T}(\nabla_x v) + \eta(\theta)\text{div}_x v\mathbb{I},$$

te da toplinski tok q zadovoljava Fourierov zakon:

$$q = -\kappa(\theta)\nabla_x \theta. \quad (2.44)$$

Uz pretpostavku da su sve veličine dovoljno glatke veličina proizvedene entropije zadovoljava

$$\sigma = \frac{1}{\theta}(\mathbb{S}(\theta, \nabla_x v) : \nabla_x v - \frac{q(\theta, \nabla_x \theta)\nabla_x \theta}{\theta}). \quad (2.45)$$

Dani sustav jednažbi, uz prethodne jednakosti nazivamo **Navier-Stokes-Fourierov sustav**.

Navier-Stokes-Fourierov sustav je opskrbljen i sljedećim inicijalnim uvjetima:

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0,$$

$$\rho v(0, \cdot) = \rho_0 v_0,$$

$$\rho s(\rho, \theta)(0, \cdot) = \rho_0 s(\rho_0, \theta_0),$$

gdje su $\rho_0 \geq 0$, $\theta_0 > 0$, te rubnim uvjetima zadanim na rubu domene Ω , tj. na $\partial\Omega$:

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \cdot n|_{\partial\Omega} = 0,$$

gdje je n jedinična normala na $\partial\Omega$.

Poglavlje II

Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi

1 Uvod

Jednačbe mehanike kontinuuma su uglavnom nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe za koje u velikoj većini slučajeva ne postoji formula koja nam daje egzaktno rješenje. Zato je aproksimacija tih rješenja uglavnom najbolje što možemo dobiti. Za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi postoje razne diskretizacije metode. Neke od tih metoda su:

- Metoda konačnih razlika
- Metoda konačnih volumena
- Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih volumena bazirana je na topološkim zakonima, odnosno aproksimacijama zakona sačuvanja što je čini jednostavnom za rješavanje. S druge strane, metoda konačnih elemenata je značajno fleksibilnija metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Prednost metode konačnih elemenata je da prostorna diskretizacija može biti proizvoljna uz manje kvalitativnih ograničenja. Za razliku od prethodne dvije metode, metoda konačnih diferencija temelji se na aproksimiranju derivacija konačnim razlikama.

2 Metoda konačnih volumena

Za primjer diskretizacije metode konačnih volumena uzimamo Laplaceovu jednačbu. Uzmimo domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ na kojoj rješavamo zadaću. Za domenu Ω moraju vrijediti sljedeće tvrdnje:

- $\forall \Omega_i$ je zatvoren, poligonalan ograničen skup,

- $Int\Omega_i \cap Int\Omega_j = \emptyset$, za $i \neq j$,
- $\cup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$.

Poddomene Ω_i nazivamo **KONTROLNI (KONAČNI) VOLUMENI**. Za primjer metode konačnih volumena uzet ćemo najjednostavniju eliptičku parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & u & \text{ na } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0, & \text{ na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

Definiramo kontrolne volumene za strukturiranu pravokutnu mrežu:

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega : x \in K\left(a_i, \frac{h}{2}\right) \right\},$$

gdje je a_i čvor pravokutne strukturirane mreže, a h diskretizacijska duljina između susjednih točaka.

$$-\sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Omega_i \cap \Omega_{j_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx \quad (2.2)$$

slijedi:

$$-\sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Omega_i \cap \Omega_{j_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u d\sigma = \int_{\Omega_i} f dx \approx -\sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Omega_i \cap \Omega_{j_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u\left(\frac{a_i + a_{j_k}}{2}\right) h \quad (2.3)$$

možemo zapisati:

$$\begin{aligned} & -\sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Omega_i \cap \Omega_{j_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u\left(\frac{a_i + a_{j_k}}{2}\right) h \approx \\ & \approx -\left[\frac{u(a_{j_1}) - u(a_i)}{h} + \frac{u(a_{j_2}) - u(a_i)}{h} - \frac{u(a_i) - u(a_{j_3})}{h} - \frac{u(a_i) - u(a_{j_4})}{h} \right] h = 4u(a_i) - \sum_{k=1}^4 u(a_{j_k}) \end{aligned}$$

Konačno, sustav izgleda:

$$4u(a_i) - \sum_{k=1}^4 u(a_{j_k}) = f(a_i)h^2. \quad (2.4)$$

Dobiveni sustav je linearan s nepoznicama $u_i = u(a_i)$ i dana matrica je rijetka.

3 Metoda konačnih elemenata

Za primjer diskretizacije konačnim elementima odabiremo stacionarni homogeni Stokesov problem. Detaljniji raspis ovog primjera može se naći u [4]. Sustav je dan na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{Naći } (u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \text{ t.d.} \\ \mu \Delta u + \nabla p = f, \quad u \in \Omega \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \in \Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zbog prelaska na slabu formulaciju sustava, definiramo prostore u kojima tražimo rješenje:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ izmjeriva i } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\} \quad (3.6)$$

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \nabla f \in L^2(\Omega)\} \quad (3.7)$$

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (3.8)$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ za sve } |\alpha| \leq m\}. \quad (3.9)$$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega). \quad (3.10)$$

Napravimo slabu formulaciju i dobivamo sljedeći ekvivalentan sustav:

$$\text{Naći } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ t.d.}$$

$$\begin{aligned} a(u, v) - (p, \operatorname{div} v) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ (q, \operatorname{div} u) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdje je $a(u, v)$ bilinearna forma dana na sljedeći način:

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

i imamo definirani skalarni produkt:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

Za potrebe računa definiramo sljedeće norme:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{s,p,\Omega} = \left\{ \|u\|_{m,p,\Omega}^p + \sum_{|x|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{\|x - y\|^{N+\sigma p}} dx dy \right\}^{1/p},$$

a mi ćemo u daljnjem računu uzeti $p = 2$. Više o L^p prostorima i prostorima Soboljeva, može se naći u [1]. Sada za $\forall h$ definiramo W_h i Q_h , dva konačnodimenzionalna

prostora $W_h \subset H^1(\Omega)^N$, $Q_h \subset L^2(\Omega)$, te pretpostavimo da Q_h sadrži konstantne funkcije. Sada definiramo:

$$X_h = W_h \cap H_0^1(\Omega)^N = \{v_h \in W_h : v_h|_{\Gamma} = 0\}$$

$$M_h = Q_h \cap L_0^2(\Omega) = \{q_h \in Q_h : \int_{\Omega} q_h dx = 0\}$$

Pomoću prostora X_h i M_h , problem (3.6) aproksimiramo pomoću:

$$a(u_h, v_h) - (p_h, \operatorname{div} v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.12)$$

$$(q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \quad (3.13)$$

Pošto je $\operatorname{div} u_h \in L_0^2(\Omega)$, primijetimo da je $(q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \forall q_h \in M_h$ ekvivalentno jednadžbi $(q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \forall q_h \in Q_h$. Sada možemo definirati prostor

$$V_h = \{v_h \in X_h : (q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\} \quad (3.14)$$

Nakon što smo definirali prostor u kojem se ograničavamo na funkcije za koje vrijedi $(q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \forall q_h \in Q_h$, problem svodimo na rješavanje sljedeće zadaće:

$$\text{Naći } u_h \in V_h \text{ t.d.} \quad (3.15)$$

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h$$

Za proučavanje problema (3.10) trebamo poveznicu između neprekidnog i diskretnog prostora. To ćemo ostvariti pomoću sljedećeg Teorema, no prije navodimo hipoteze koje će biti uvjeti Teorema.

Hipoteza 3.1 (Aproksimacijsko svojstvo prostora X_h). *Postoji operator $r_h \in L(H^2(\Omega)^N; W_h) \cap L(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^N; X_h)$ i prirodni broj l t.d. vrijedi:*

$$\|v - r_h v\|_{1,\Omega} \leq C \cdot h^m \|v\|_{m+1,\Omega}, \quad \forall v \in H^{m+1}(\Omega)^N, \quad 1 \leq m \leq l.$$

Hipoteza 3.2 (Aproksimacijsko svojstvo prostora Q_h). *Postoji operator $S_h \in L(L^2(\Omega); Q_h)$ t.d.*

$$\|q - S_h q\|_{0,\Omega} \leq C \cdot h^m \|q\|_{m,\Omega}, \quad \forall q \in H^m(\Omega), \quad 0 \leq m \leq l.$$

Hipoteza 3.3. *Za svaki $q_h \in M_h$ postoji $v_h \in X_h$ t.d.*

$$(q_h, \operatorname{div} v_h) = \|q\|_{0,\Omega}^2$$

$$\|v_h\|_{1,\Omega} \leq c \cdot \|q_h\|_{0,\Omega},$$

gdje je $c > 0$ neovisna o h, q_h i v_h .

Sada možemo izreći teorem.

Teorem 3.1. Uz tvrdnje iz **H1.**, **H2.** i **H3.** problem

$$a(u_h, v_h) - (p_h, \operatorname{div} v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h$$

$$(q_h, \operatorname{div} u_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h$$

ima jedinstveno rješenje $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ i u_h je jedino rješenje od $a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h$. Dodatno, (u_h, p_h) teži rješenju (u, p) početnog problema

$$-\mu \Delta u + \nabla p = f$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

u sljedećem smislu:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{|u_h - u|_{1,\Omega} + \|p_h - p\|_{0,\Omega}\} = 0.$$

Definiramo skalarni produkt prostora $L^2(\Omega)$ za bilinearnu formu $c(\cdot, \cdot)$:

$$c(p, q) = \int_{\Omega} p(x)q(x)dx.$$

Definiramo i "penaliziranu" verziju sustava (3.10):

$$\text{Naći funkciju } u_h^\epsilon \in X_h \text{ t.d.} \tag{3.16}$$

$$a(u_h^\epsilon, v_h) + \frac{1}{\epsilon}(\rho_h(\operatorname{div} u_h^\epsilon), \rho_h(\operatorname{div} v_h)) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h$$

gdje je ρ_h operator ortogonalne projekcije prostora $L^2(\Omega)$ na Q_h . Očito je da postoji poveznica između izračunavanja p_h^ϵ i u_h^ϵ na sljedeći način:

$$p_h^\epsilon = -\frac{1}{\epsilon} \rho_h(\operatorname{div} u_h^\epsilon)$$

Primijetimo da ovakav oblik jednadžbe ima smisla samo ako je izračun člana $\rho_h(\operatorname{div} u_h^\epsilon)$ jednostavan.

Navodimo sljedeći teorem za egzistenciju "penaliziranog" sustava.

Teorem 3.2. Problem (3.11) ima jedinstveno rješenje u_h^ϵ za sve $\epsilon > 0$. Štoviše, ako vrijedi **H3.** tada $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$ dovoljno male vrijedi:

$$\|u_h - u_h^\epsilon\|_{1,\Omega} + \left\| p_h + \frac{1}{\epsilon} \rho_h(\operatorname{div} u_h^\epsilon) \right\|_{0,\Omega} \leq C \cdot \epsilon \|f\|_{-1,\Omega}$$

gdje je konstanta $C > 0$ neovisna o h i ϵ .

Sada definiramo niz $(u_h^n, p_h^n) \in X_h \times M_h$, rješenje sustava:

$$a(u_h^n, v_h) - (\operatorname{div} v_h, p_h^n) = 0, \quad \forall v_h \in X_h \tag{3.17}$$

$$(\operatorname{div} u_h^n, q_h) = -(p_h^{n-1}, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h$$

Sljedeći teorem nam osigurava konvergenciju:

Teorem 3.3. *Pod uvjetima od **H3.**, za sve prirodne brojeve $M > 1$ i za sve $\epsilon \leq \epsilon_0$ dovoljno male, vrijedi:*

$$|u_h^\epsilon - u_h - \sum_{n=1}^M \epsilon^n u_h^n|_{1,\Omega} + \left\| \frac{1}{\epsilon} \rho_h(\operatorname{div} u_h^\epsilon) + p_h + \sum_{n=1}^M M \epsilon^n p_h^n \right\|_{0,\Omega} \leq K_M \epsilon^{M+1} \|f\|_{-1,\Omega}$$

gdje je K_M konstanta neovisna o h i ϵ .

Poglavlje III

Autodesk Computational Fluid Dynamics



1 Autodesk CFD

Autodesk Computational Fluid Dynamics (CFD) je industrijski komercijalni računalni alat za izradu numeričkih simulacija na području mehanike fluida. Ovaj konkretni računalni alat je široko rasprostranjen u raznim industrijama. Primjenjuje se u automobilskim i avio industrijama gdje je cilj optimizirati oblik pojedinih komponenti za bolju aerodinamiku. Također, primjenu pronalazimo u industrijama gdje su bitne unutarnji tokovi fluida, recimo proizvodnja plinskih i vodovodnih cijevi, proizvodnja

klima uređaja i motora s unutarnjim izgaranjem. Što se tiče projektiranja zgrada, kuća i ostalih stambenih i poslovnih prostora, CFD je korišten za simulaciju energetske učinkovitosti. Za izradu ovog diplomskog rada korišten je Autodesk CFD 2016 koji je besplatan za studente kroz dvogodišnju edukacijsku licencu.

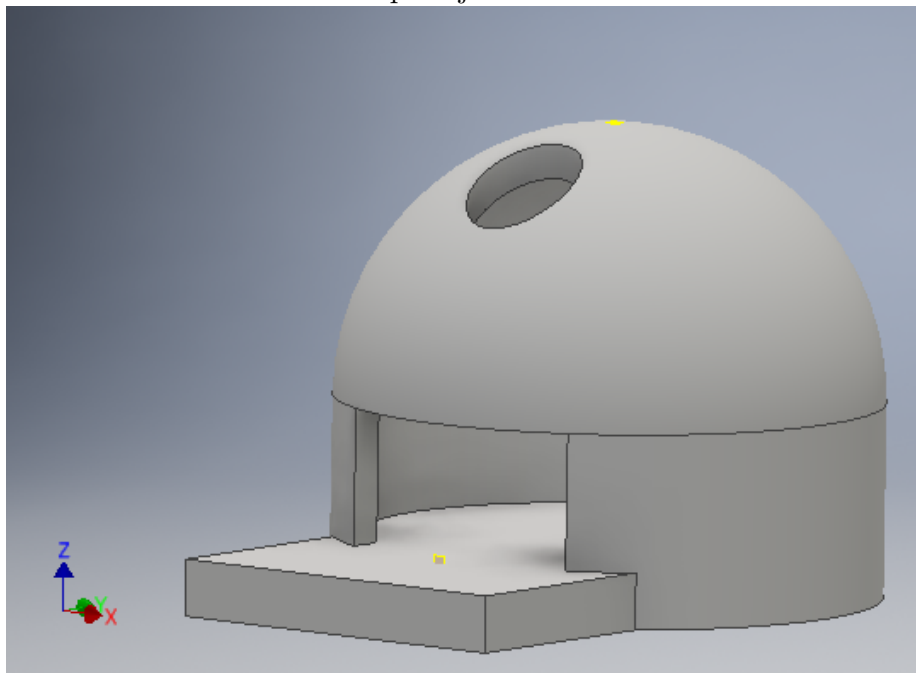
Cilj ovog poglavlja je pomoći čitatelju u boljem razumijevanju Autodesk CFD-a. Osnovne stvari kao što su npr. zadavanje rubnih uvjeta, zadavanje broja iteracija, odabir tipa jednadžbi itd. bi se trebale moći lako koristiti nakon što se pročita dano poglavlje.

2 Opis zadavanja i rješavanja problema

2.1 Geometrija

Prednost ovakvih računalnih alata je lakša konstrukcija domene i referentnog tijela, odnosno volumena nego u znanstvenim alatima ili programima. Autodesk nudi čitav spektar alata za izradu geometrije baziranih na AutoCAD-u, a u konkretnom slučaju odabramo Autodesk Inventor. Osim same izrade dvodimenzionalne i trodimenzionalne geometrije, Autodesk Inventor ima i mogućnost brze simulacije elastičnosti i aerodinamičnosti modela. Gotovi model izgleda kao na sljedećoj slici.

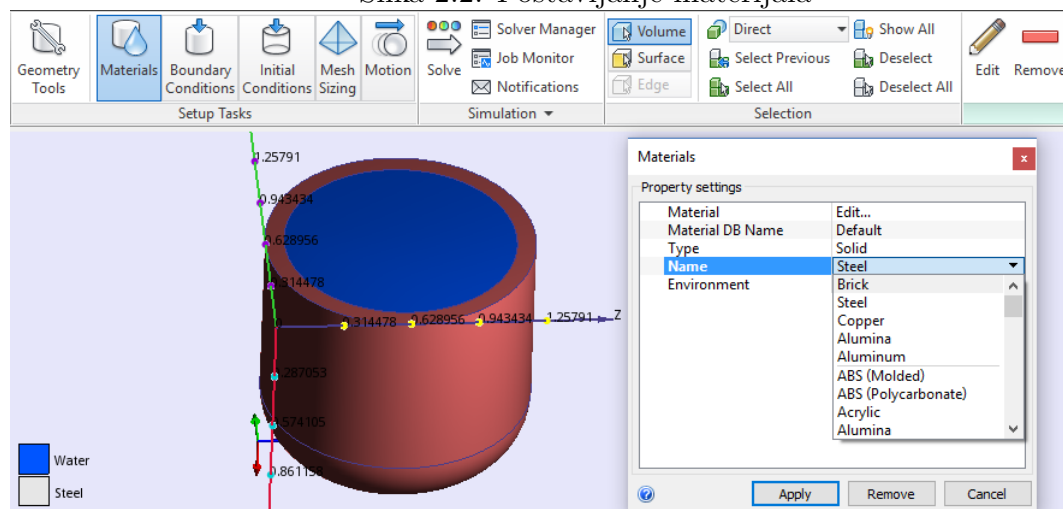
Slika 2.1. Model napravljen u Autodesk Inventoru



2.2 Zadavanje materijala

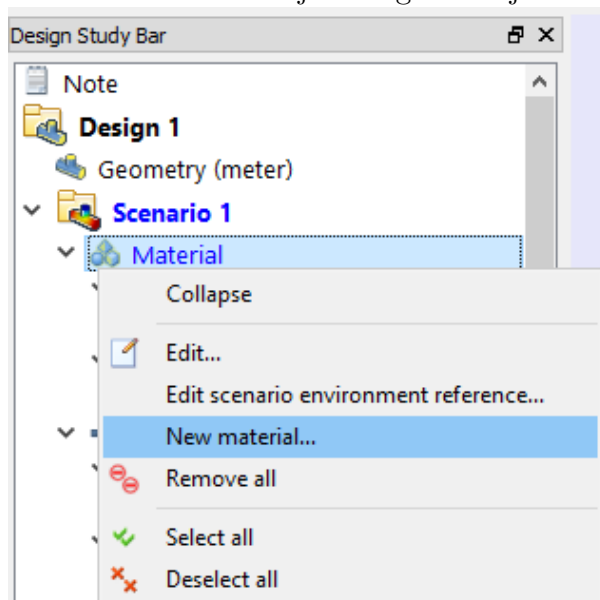
Nakon što smo napravili geometriju i učitali je u Autodesk CFD-u, najprije moramo odrediti materijal pojedinog dijela geometrije. To radimo na način da odaberemo površinu ili volumen i odaberemo jedan od ponuđenih materijala.

Slika 2.2. Postavljanje materijala



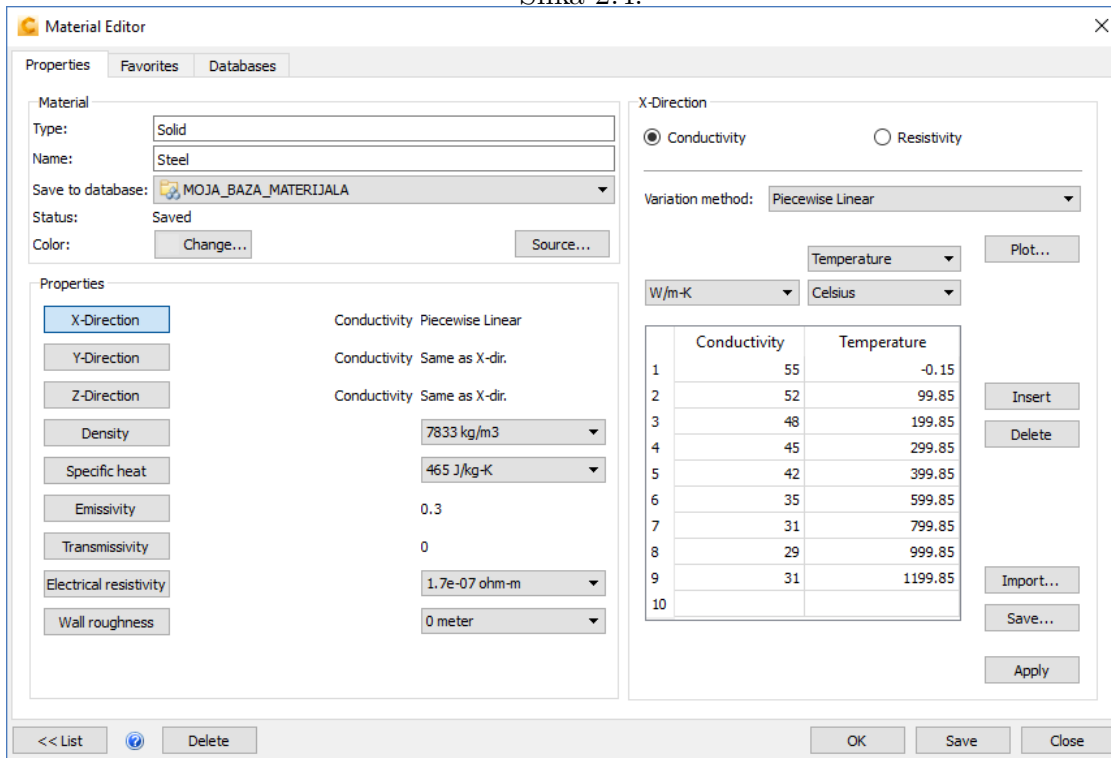
Osim predefiniране baze podataka koja sadrži razne tipove materijala, od fluida do krutih materijala, možemo napraviti i svoje materijal, te svoju bazu materijala. Postupak je prikazan na iduće dvije slike:

Slika 2.3. Kreiranje novog materijala



Odabirom sljedećih fizikalnih svojstava materijala, napravili smo novi materijal.

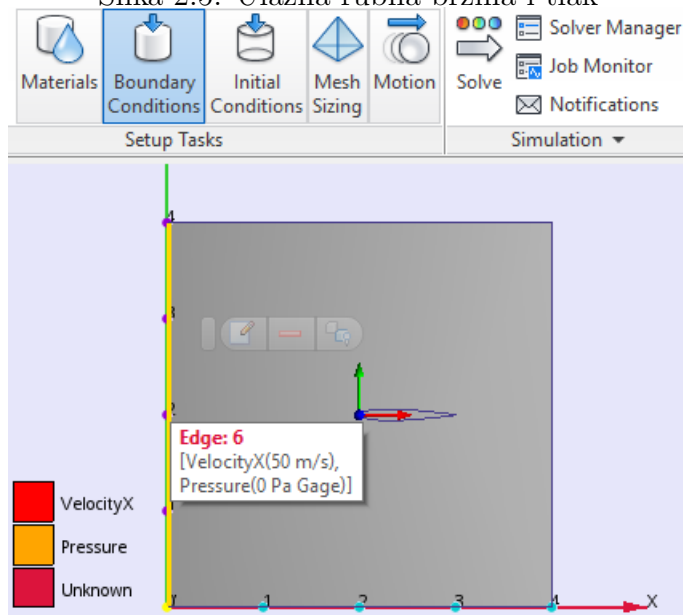
Slika 2.4.



2.3 Postavljanje rubnih i inicijalnih uvjeta

Sada možemo postaviti rubne uvjete. Odaberemo rub te postavimo rubni uvjet. Na istom rubu moguće je postaviti više rubnih uvjeta.

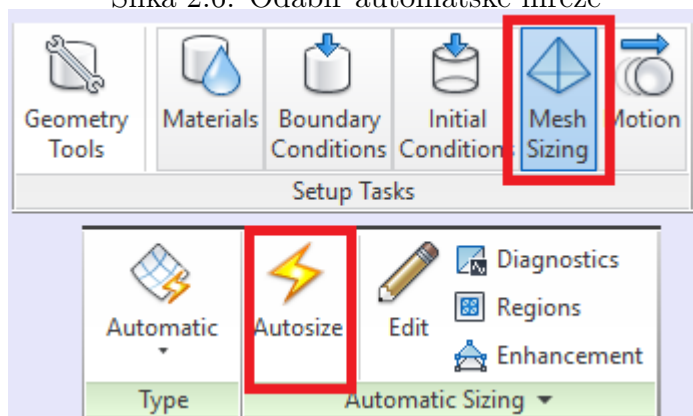
Slika 2.5. Ulazna rubna brzina i tlak



2.4 Mreža

Autodesk CFD nudi automatsko postavljanje mreže koje se dobije odabirom sljedeće naredbe:

Slika 2.6. Odabir automatske mreže

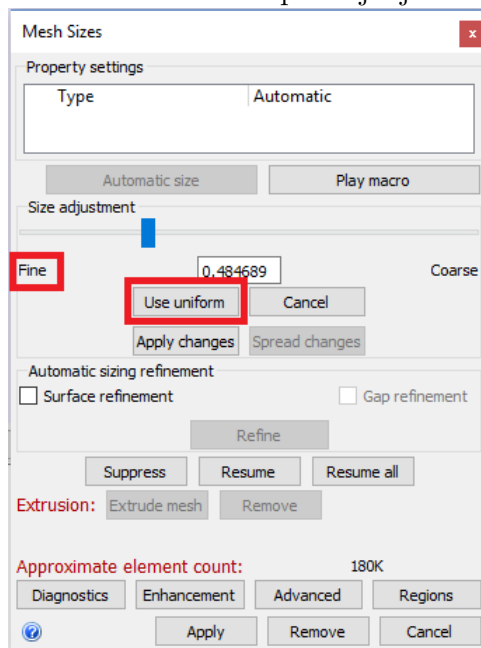


Profinjenje mreže se može raditi na dva načina:

- uniformno profinjenje
- lokalno profinjenje

A to se može odabrati na sljedeći način:

Slika 2.7. Uniformno profinjenje mreže

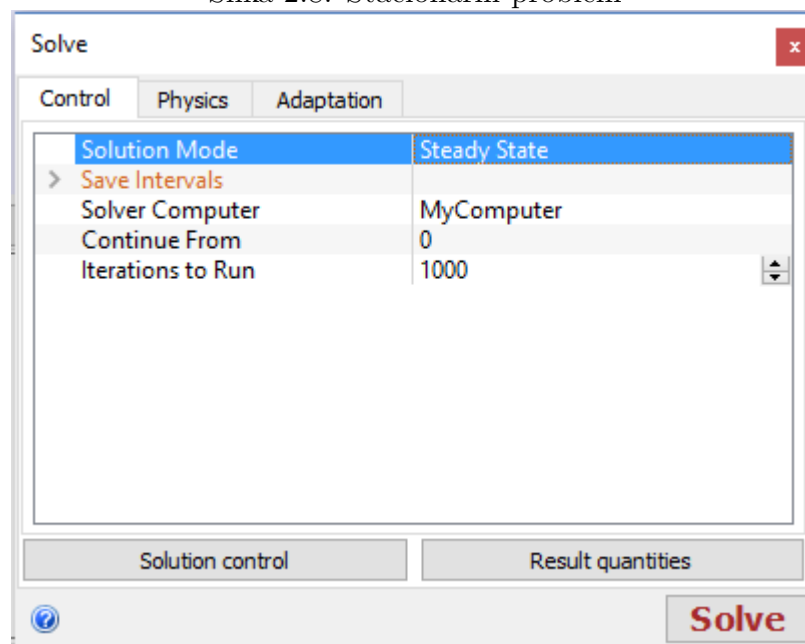


Ako želimo samo lokalno profinjenje, tada je dovoljno odabrati "Apply changes" nakon što smo odabrali površinu ili volumen na kojem želimo progustiti mrežu. Na kraju samo odabremo "Apply" i mreža je napravljena.

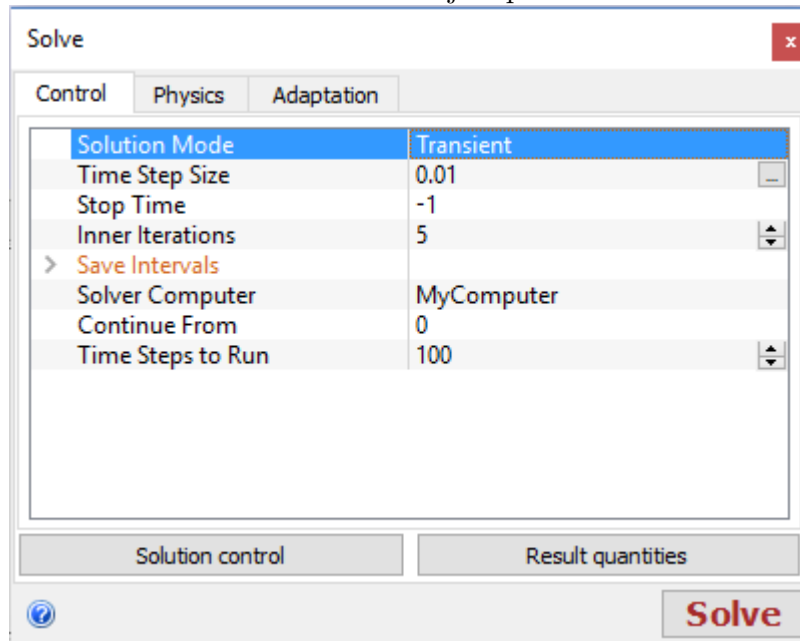
2.5 Stacionarni i evolucijski problemi

Kod rješavanja zadaća moguće je odabrati između stacionarnog i evolucijskog problema. Odabirom na "Steady state" ili "Transient" odabiremo promatramo li problem u vremenu ili ne. Pošto su jednačbe koje CFD rješava nelinearne, rješavaju se iterativnim algoritmima. Zato je potrebno zadati broj iteracija kod rješavanja zadaće. Kod stacionarnog problema dovoljno je samo odabrati maksimalan broj iteracija, dok je kod evolucijskog problema potrebno odabrati Δt -veličina vremenskog koraka, T -zadnje vrijeme, te broj unutarnjih iteracija, tj. maksimalan broj iteracija koji će se izvršiti unutar svakog vremenskog koraka. Odabir je prikazan na sljedećim slikama:

Slika 2.8. Stacionarni problem



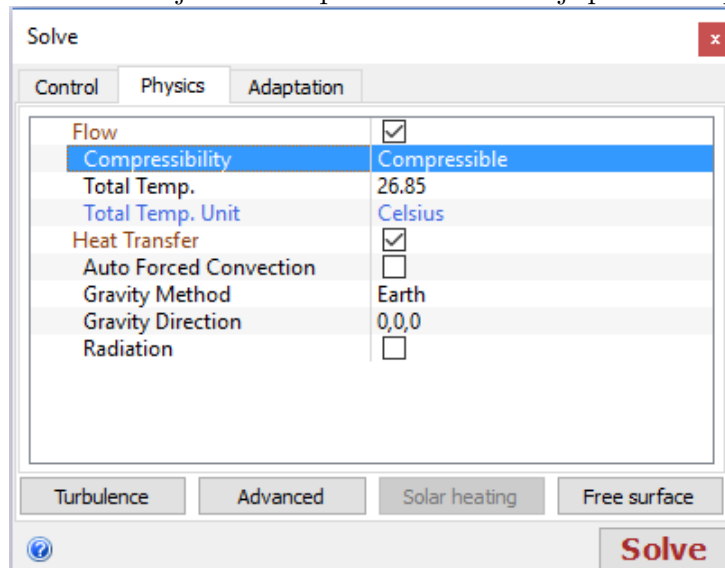
Slika 2.9. Evolucijski problem



2.6 Fizikalni uvjeti

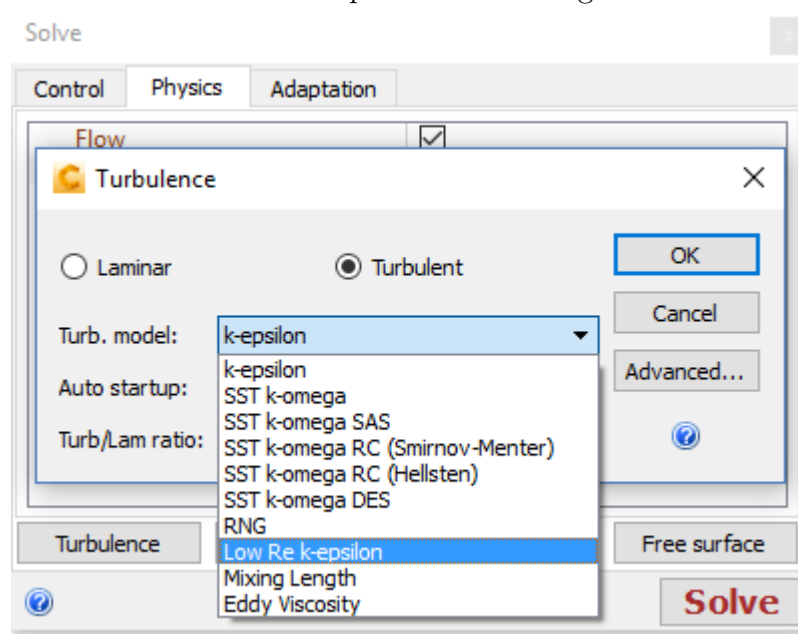
Prilikom rješavanja problema nemamo uvid u jednadžbu koju CFD rješava, ali odabirom nekih parametara možemo odrediti radi li se o prijenosu topline ili toku, te radi li se o kompresibilnom ili inkompresibilnom fluidu.

Slika 2.10. Primjer za kompresibilni fluid koji prenosi toplinu



Što se tiče toka fluida, moguće je odabrati radi li se o turbulentnom ili laminarnom toku, te ako je u pitanju turbulentan tok, koji model se koristi.

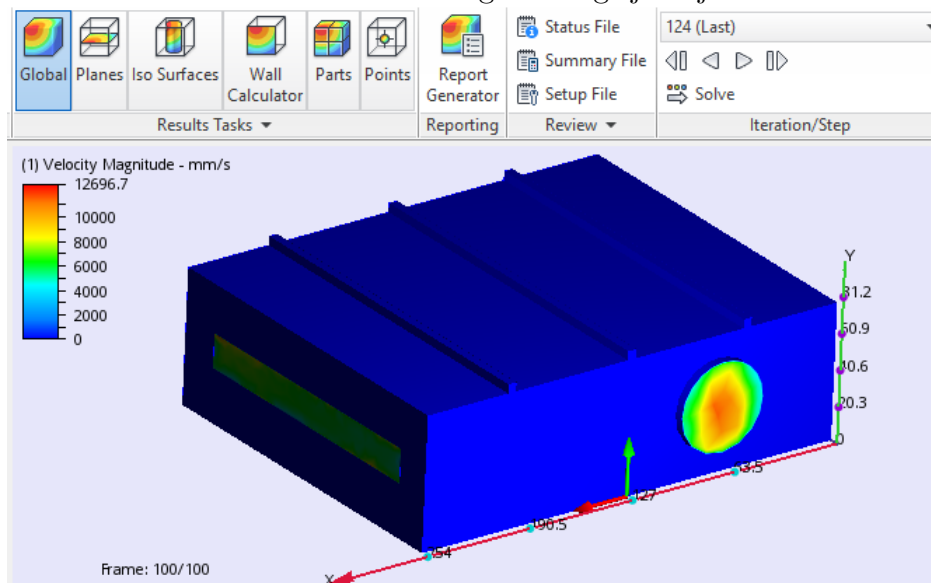
Slika 2.11. Tipovi turbulentnog toka



2.7 Vizualizacija i analiza rješenja

Nakon što je problem riješen, tj. nakon što je problem iskonvergirao u rješenje, trebamo ga vizualizirati. Postoje razni načini da se vizualiziraju određene veličine. Nakon što se program izvršio, nalazimo se u sekciji "Global" gdje vidimo globalno rješenje.

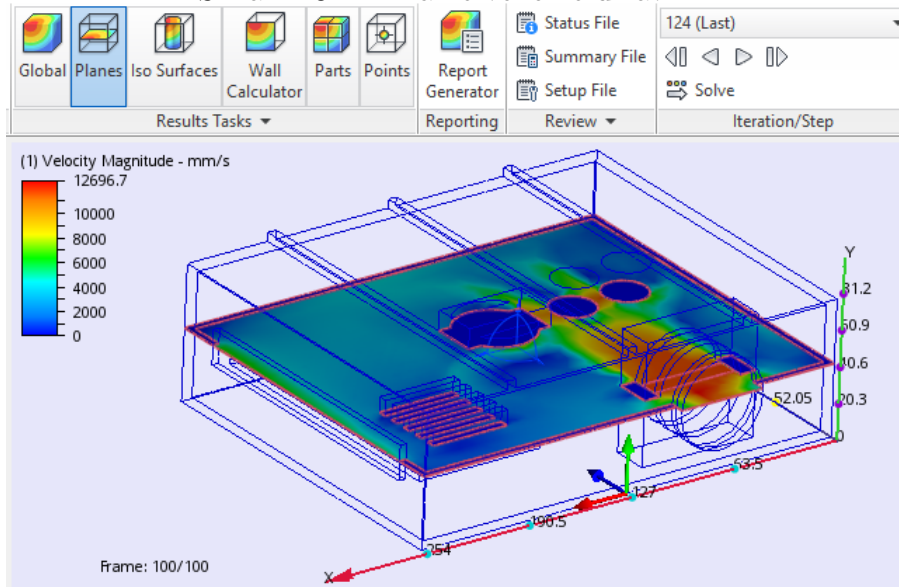
Slika 2.12. Prikaz globalnog rješenja



Želimo li pogledati kako izgleda rješenje unutar geometrije, odaberemo sekciju

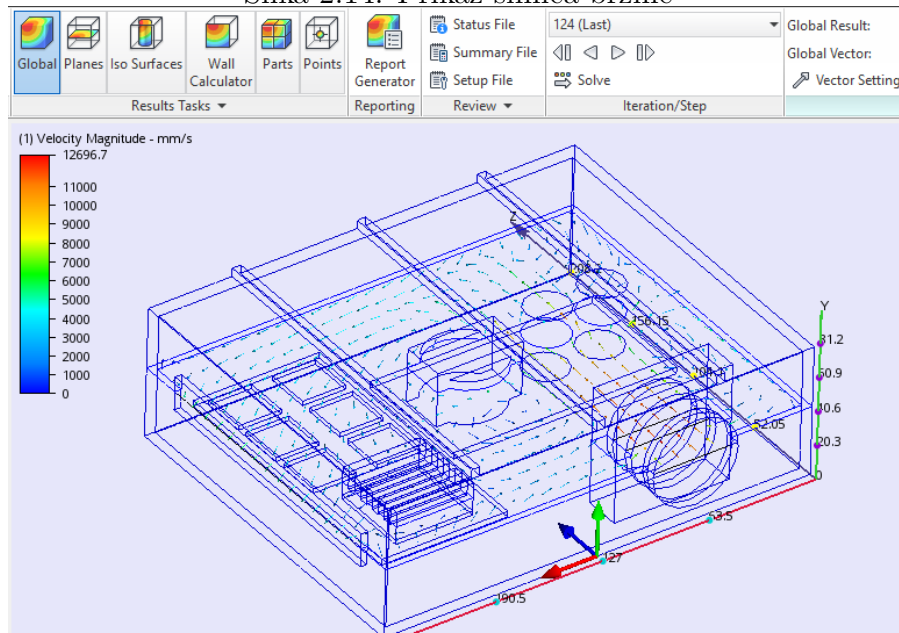
”Planes” koja prikazuje odabranu fizikalnu veličinu u ravnini koju odaberemo.

Slika 2.13. Fizikalne veličine u ravnini



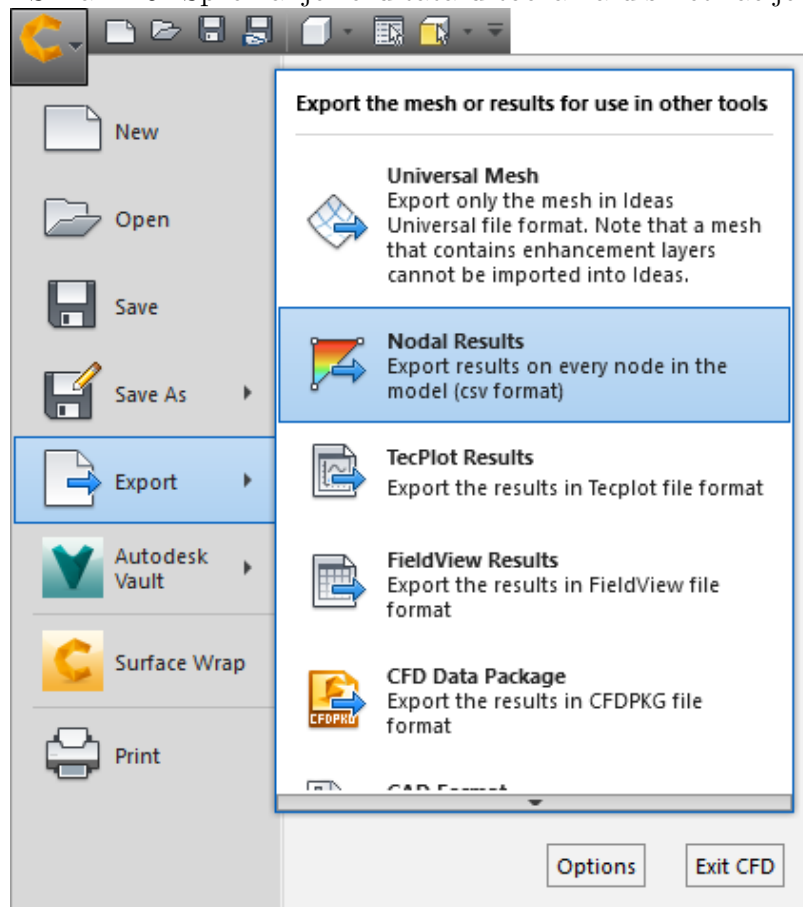
Također, ako promatramo brzinu fluida, moguće je odabrati i prikaz silnica te tako vizualiziramo i smjer brzine.

Slika 2.14. Prikaz silnica brzine



Rezultati se spremaju na sljedeći način:

Slika 2.15. Spremanje rezultata u točkama diskretizacije



Rezultat spremljen pomoću naredbe "Nodal Results" je .csv datoteka koja sadrži sve veličine koje su se računale u svim točkama diskretizacije.

Poglavlje IV

Primjeri

1 Uvod

Svrha ovog poglavlja je isprobati Autodesk CFD na raznim primjerima, te provjeriti radi li dobro. Pošto nemamo pristup jednadžbama koje alat rješava, kao i metodama koje koristi, želimo se uvjeriti da ispravno rješava zadane probleme. Tako će neki od primjera biti jednadžbe kojima znamo egzaktno rješenje, dok ćemo za druge trebati provjeriti numeričku konvergenciju te tako pokazati da rješenje doista konvergira. Rješavat ćemo stacionarne zadaće, ali i evolucijsku, te ćemo u probleme uključiti i probleme s kompresibilnim, inkompresibilnim tokom, ali i toplinom.

2 Poiseuilleov tok

U ovom poglavlju rješavamo stacionarnu Navier-Stokesovu jednadžbu u cilindru, odnosno Poiseuilleov tok. Problem je dan na sljedeći način:

$$\Omega = K(0, \frac{1}{2}) \times [0, 10] \subset \mathbb{R}^3.$$

Označimo ulazni i izlazni dio domene s:

$$\Gamma_{in} = K(0, \frac{1}{2}) \times 0$$

$$\Gamma_{out} = K(0, \frac{1}{2}) \times 10$$

U toj domeni rješavamo sljedeći rubni problem:

$$\nabla u \cdot u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 u, \text{ u } \Omega$$

$$\operatorname{div} u = 0, \text{ u } \Omega \tag{2.1}$$

$$p_{\Gamma_{in}} = 40 \text{ Pa}, \quad p_{\Gamma_{out}} = 0 \text{ Pa}.$$

$$v(x, y, z) = 0, \text{ na } \partial\Omega \setminus \{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}\}$$

Prelaskom na polarne koordinate dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot u_r + \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \nabla u \cdot u_\theta + \frac{u_\theta \cdot u_r}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \nabla u \cdot u_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

a jednačina $\operatorname{div} u = 0$ prelazi u

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Tražimo tlak za koji pretpostavljamo da je linearna funkcija po aksijalnoj komponenti, tj. po z komponenti, pa vrijedi da je $\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0$, pa vidimo da i brzina $u_r = u_\theta = 0$ zadovoljava prve dvije jednačine. Sada slijedi da je

$$\nabla u \cdot u_z = u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.4)$$

pa iz toga slijedi:

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} P + \mu \nabla^2 u_z \quad (2.5)$$

Iz jednačine kontinuiteta slijedi da je $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, pa vrijedi:

$$\nabla^2 u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{P}{\mu}, \quad (2.6)$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{P}{\nu} r. \quad (2.7)$$

Integriramo po r dva puta i dobivamo:

$$u_z = -\frac{P}{4\nu} r^2 + c_1 \ln(r) + c_2, \quad (2.8)$$

a koristeći rubne uvjete $u_z(r=0) < \infty$ i $u_z = 0$ za $r = a$ slijedi

$$u_z = \frac{P}{4\nu} (a^2 - r^2), \quad (2.9)$$

gdje je $\nu = \rho \cdot \mu$, a $P = -\frac{\partial p}{\partial z}$. Za naš cilindar duljine $L = 10m$ s radijusom $r = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$ i tlakom na lijevom rubu $P_1 = 40Pa$ i $P_2 = 0Pa$ na desnom rubu, slijedi da je brzina po z -osi dana s:

$$u_z(r) = \frac{1}{4} - r^2, \quad r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad (2.10)$$

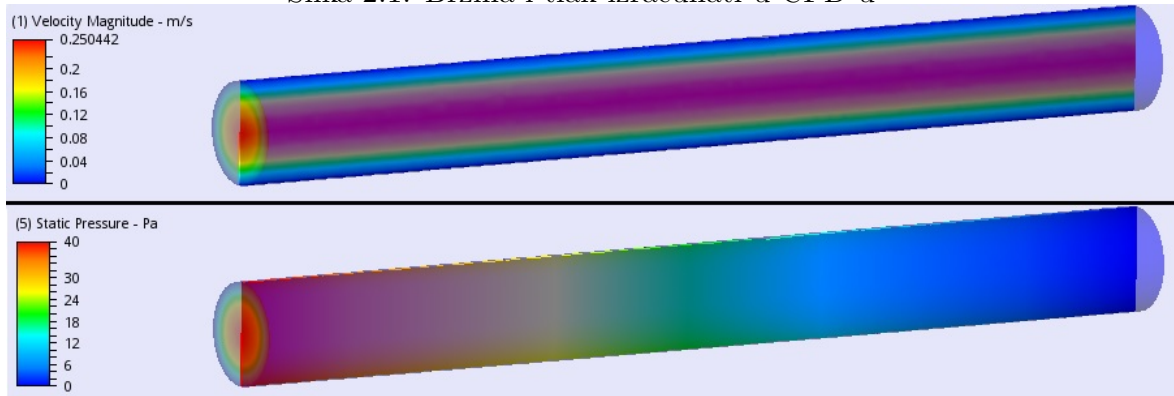
što nam daje brzinu $u_z = 0$ na rubovima cilindra i $u_z = 0.25$ za $r = 0$, gdje je brzina najveća. Tlak je linearna funkcija koja ovisi o z komponenti, te je dana linearnom funkcijom

$$p(z) = 40 - 4z, \quad z \in [0, 10], \quad (2.11)$$

što daje

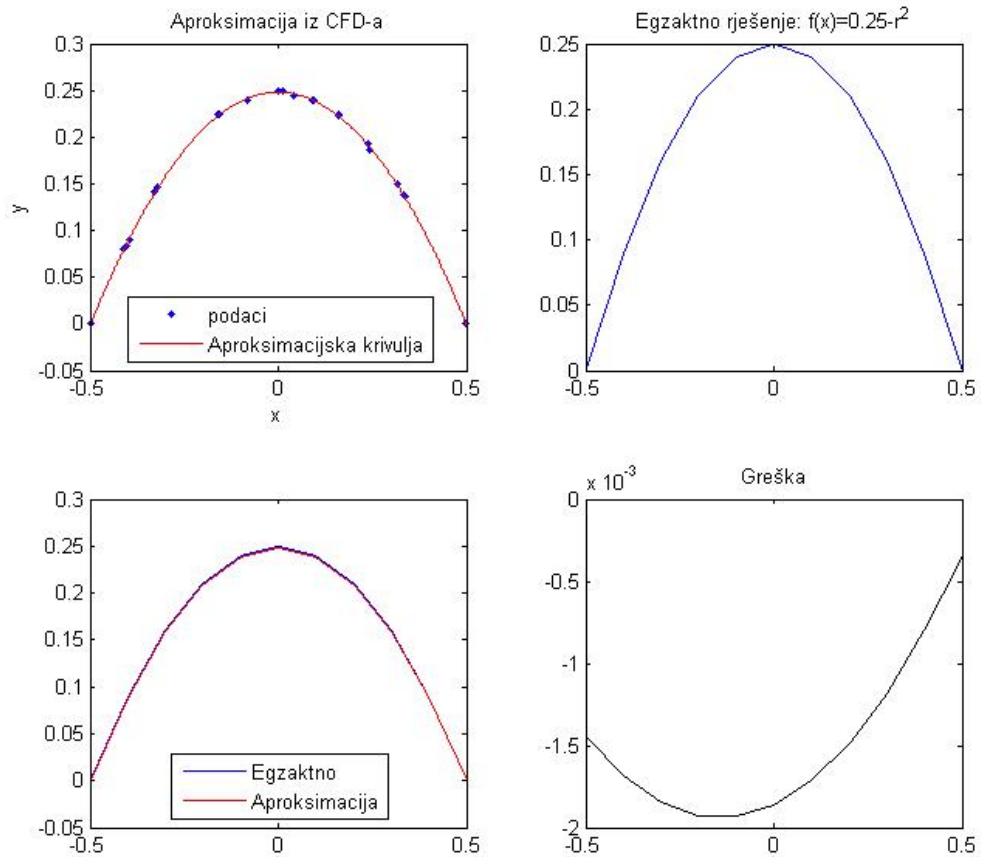
$$P = -\frac{\partial p}{\partial z} = 4. \quad (2.12)$$

Slika 2.1. Brzina i tlak izračunati u CFD-u



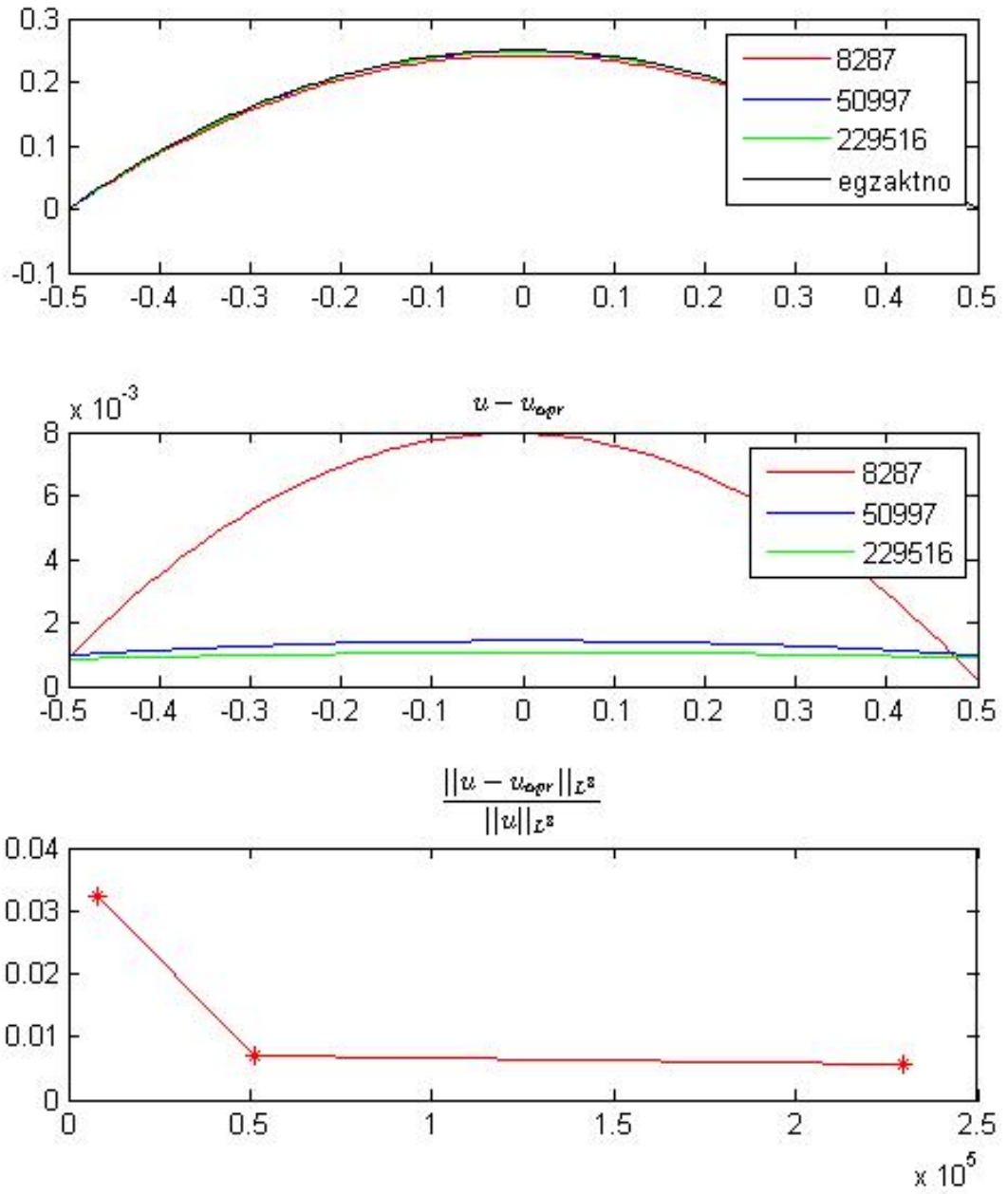
Na sljedećoj slici je grafički prikazana numerička greška:

Slika 2.2. Usporedba egzaktno i numerički dobivene brzine



Na sljedećoj slici se može vidjeti udaljenost numeričkog rješenja od egzaktnog u ovisnosti o broju točaka mreže. Analiza je napravljena za 8287 i 50997 točaka.

Slika 2.3. Usporedba rješenja za različitu gustoću mreže



3 Womersleyjev tok

U ovom poglavlju predstavljamo numeričko rješenje evolucijskog Poiseuilleovog toka, odnosno Womersleyjevog toka. Više o opisu problema, te izvod egzaktnog rješenja može se naći u članku [6].

Domena u kojoj rješavamo biti će kao u prethodnom primjeru:

$$\Omega = K(0, \frac{1}{2}) \times [0, 10]$$

Jednadžba koju rješavamo u cilindru Ω :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v + \nabla p = 0, \text{ u } \Omega, t > 0,$$

$$\operatorname{div} v = 0, \text{ u } \Omega \tag{3.13}$$

$$v = 0, \text{ na } \partial\Omega, t > 0,$$

$$p(x, t)|_{x=0} = p_0(t), \quad p(x, t)|_{x=l} = p_l(t).$$

$$p_0(t) = 40 + 40\sin(t), \quad p_l(t) = 0.$$

Egzaktno rješenje brzine za naš primjer gdje rješavamo problem evolucijskog toka savršenog plina u cilindru duljine $10m$ i radijusa $\frac{1}{2}m$ je dano s:

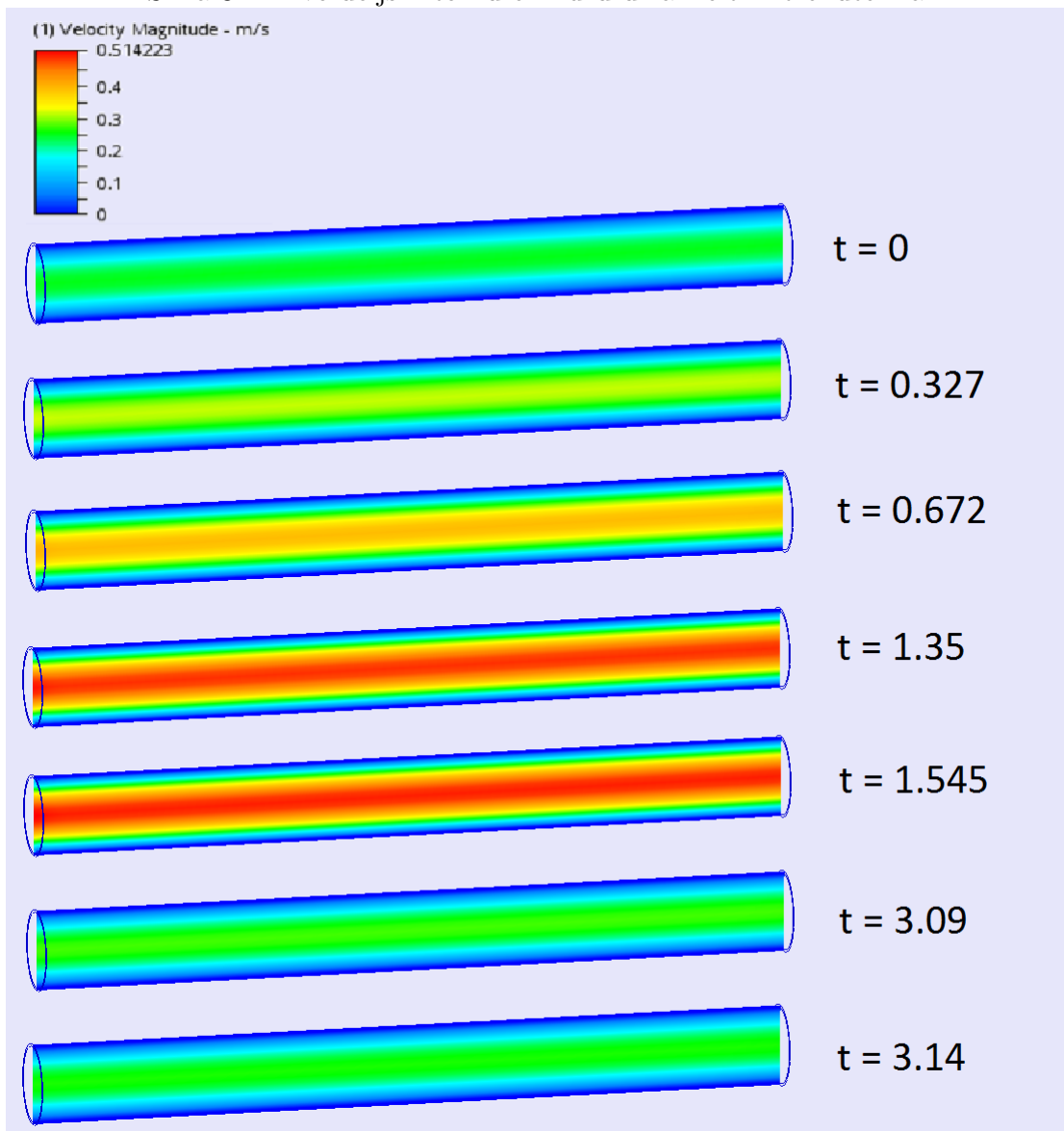
$$u(r, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{p_0(t)}{i}\left[1 - \frac{J_0(ri^{3/2})}{J_0(\frac{1}{2}i^{3/2})}\right]e^{it}\right\}, \tag{3.14}$$

gdje je r udaljenost od centra cilindra, tj. $r \in [0, \frac{1}{2}]$, a J_0 Besselova funkcija prvog reda, nultog stupnja. Time je egzaktno rješenje tlaka dano s:

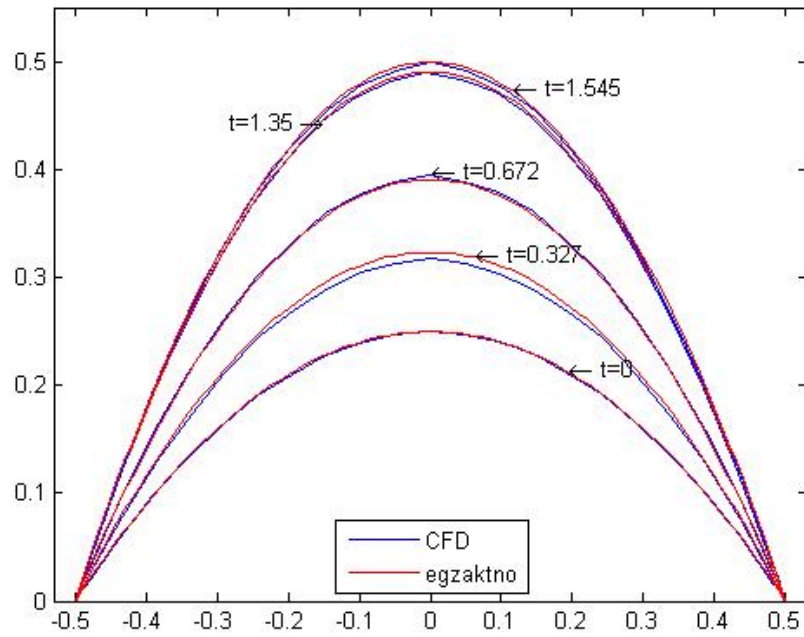
$$p((x, y, z), t) = \frac{p_l(t) - p_0(t)}{10}z + p_0(t). \tag{3.15}$$

Sljedeća slika prikazuje tok u različitim vremenskim trenucima.

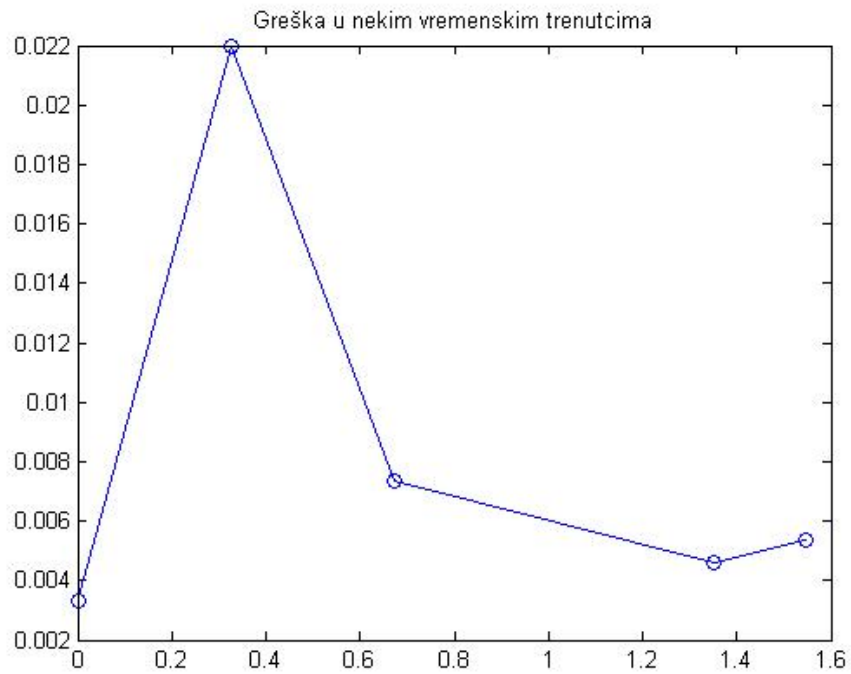
Slika 3.4. Evolucijski tok u cilindru u različitim trenutcima



Slika 3.5. Womersleyjev tok u određenim trenucima



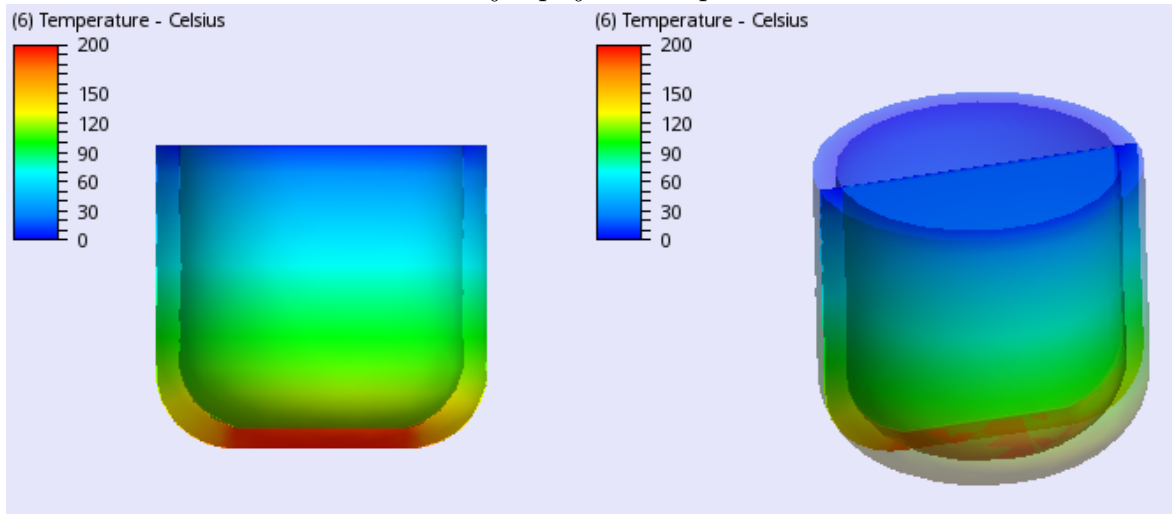
Slika 3.6. Relativna greška u različitim vremenskim trenucima



4 Provođenje topline

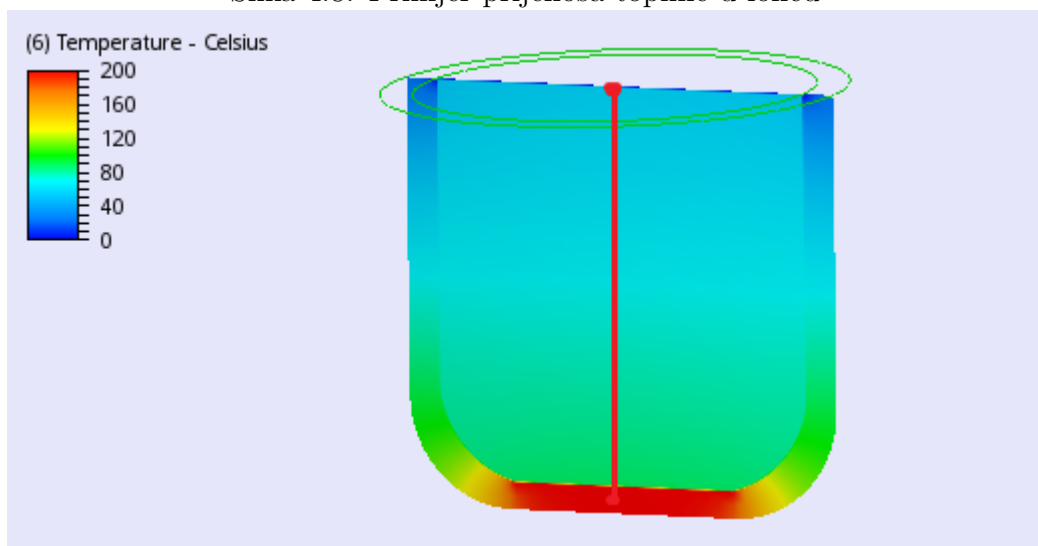
U ovom primjeru rješavamo rubni problem gdje je zadana isključivo toplina. U Autodesk Inventoru napravljena je jednostavna geometrija lonca. S donje strane se lonac zagrijava na 200°C , dok je s gornje strane rubni uvjet od 0°C .

Slika 4.7. Primjer prijenosa topline u loncu



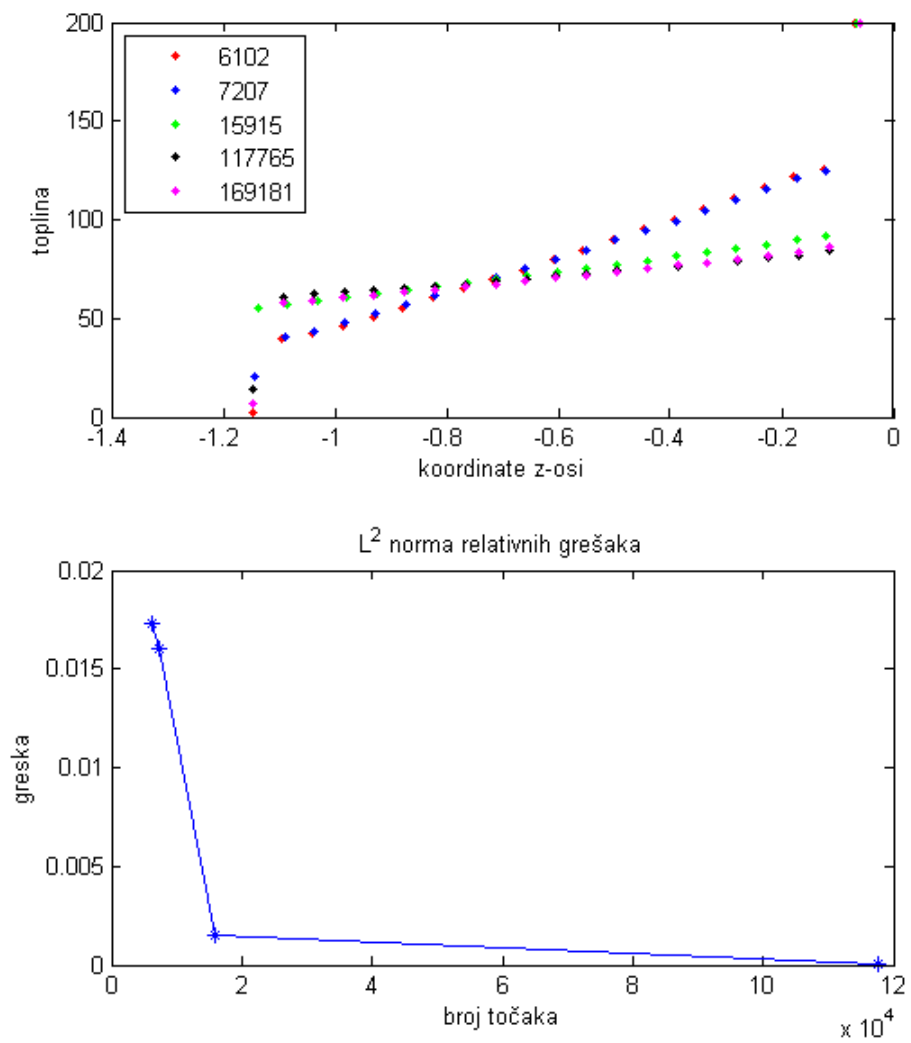
Analiza rješenja napravljena je za različiti broj točaka, te je rješenje s "najgušćom mrežom" uzeto kao egzaktno. Za usporedbu smo gledali vrijednosti na čvorovima koji prolaze kroz sredinu lonca, kao na slici:

Slika 4.8. Primjer prijenosa topline u loncu



Na sljedećoj slici je prikazana konvergencija rješenja:

Slika 4.9. Primjer prijenosa topline u loncu



5 Vanjski kompresibilni tok

Za primjer kompresibilnog toka korištena je dvodimenzionalna domena presjeka avionskog krila NACA0012 čiji je oblik dan sljedećim funkcijama:

$$k_1(t) = 0.17735 \cdot \sqrt{t} - 0.075597 \cdot t - 0.212836 \cdot t^2 + 0.17363 \cdot t^3 - 0.06254 \cdot t^4$$

$$k_2(t) = -0.17735 \cdot \sqrt{t} + 0.075597 \cdot t + 0.212836 \cdot t^2 - 0.17363 \cdot t^3 + 0.06254 \cdot t^4$$

Analiza problema optjecanja oko avionskog krila poznati je problem, a parametrizacija krila preuzeta je s linka u [7]. Problem rješavamo u domeni:

$$\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2],$$

gdje su

$$\Gamma_1 = \{-2\} \times [-2, 2]$$

$$\Gamma_2 = [-2, 2] \times \{2\}$$

$$\Gamma_3 = [-2, 2] \times \{-2\}$$

$$\Gamma_4 = \{(t, k_1(t)) \cup (t, k_2(t)) : t \in (0, 1)\}$$

$$\Gamma_5 = \{2\} \times [-2, 2]$$

Zadani su sljedeći rubni uvjeti:

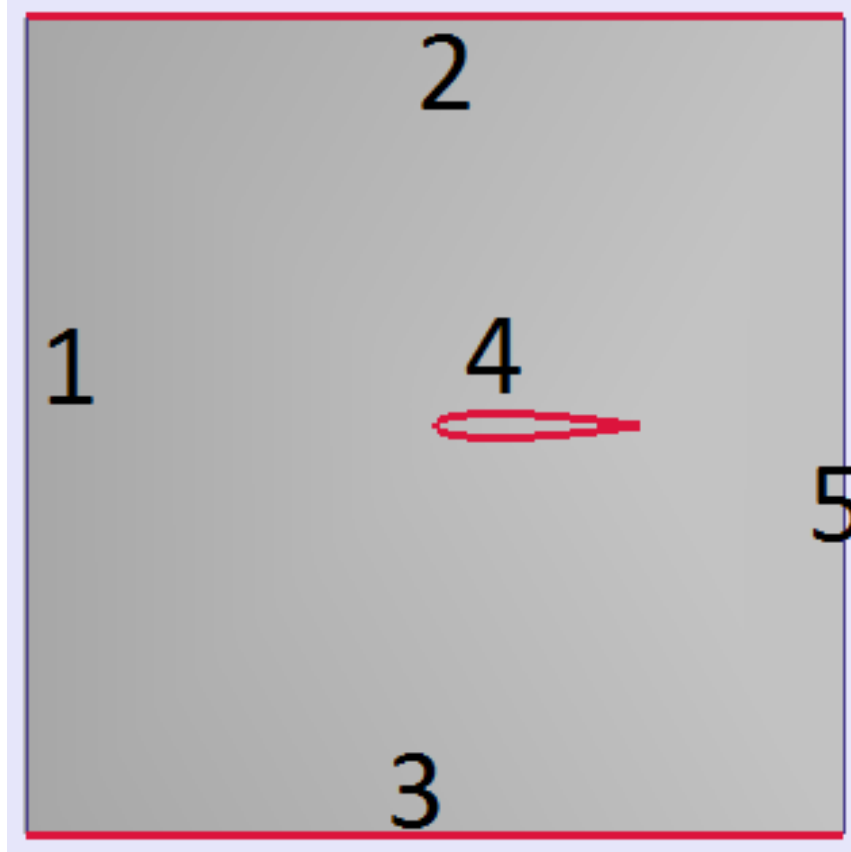
$$v_{\Gamma_1} = v_{\Gamma_2} = v_{\Gamma_3} = 50 \text{ m/s}$$

$$p_{\Gamma_1} = 0 \text{ Pa}$$

$$v_{k_1 \cup k_2} = 0 \text{ m/s}$$

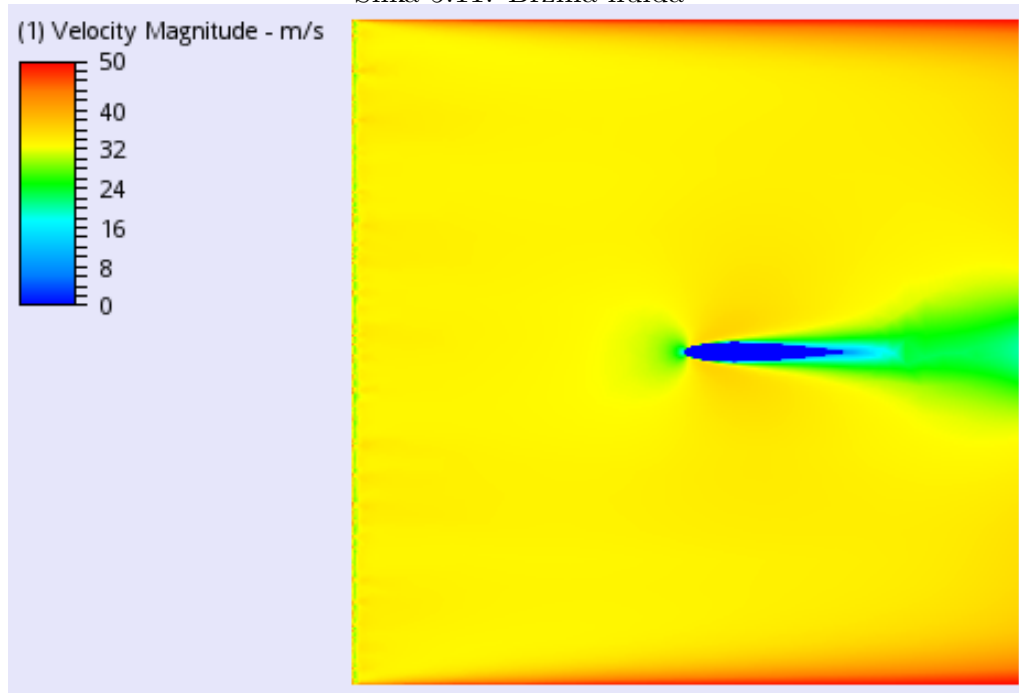
Na rubu Γ_5 je stavljen rubni uvjet "unknown" koji simulira neograničenost domene na tom rubu. Za simulaciju smo odabrali kompresibilan tok.

Slika 5.10. Domena dvodimenzionalnog problema kompresibilnog toka

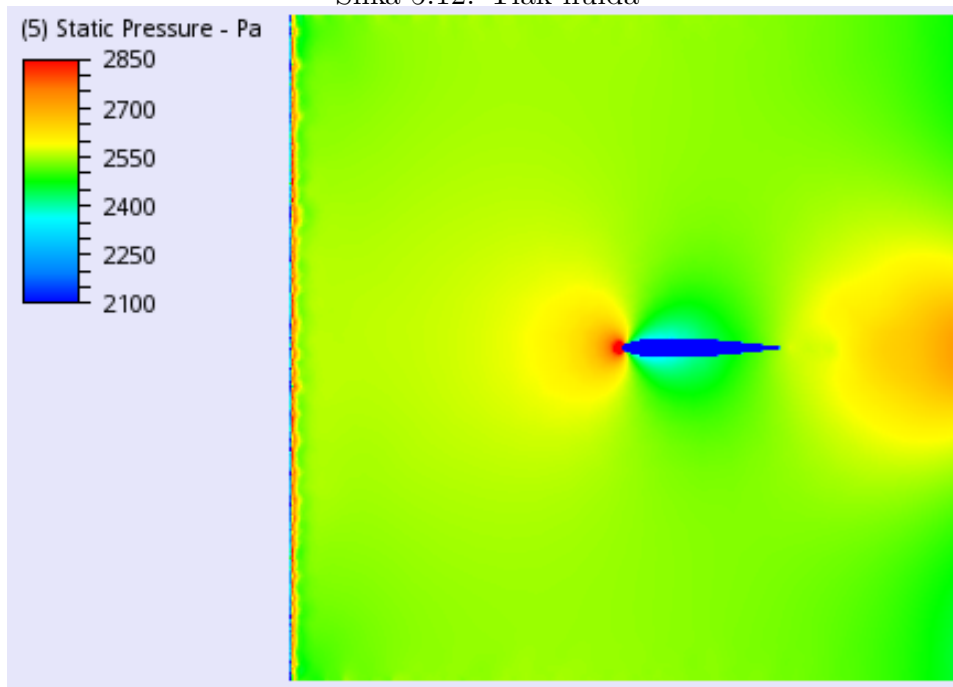


Presjek avionskog krila, odnosno rub s brojem 4 je postavljen na brzinu u svim smjerovima u iznosu od $0 \frac{m}{s}$, odnosno "no-slip" rubni uvjet koji simulira da se fluid lijepi na rub krila. Na sljedećoj slici vidimo brzinu nakon simulacije.

Slika 5.11. Brzina fluida

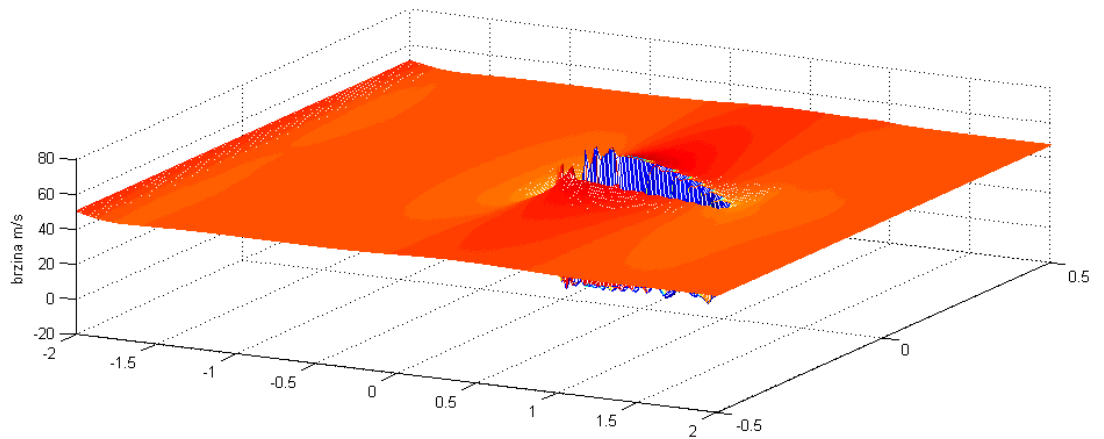


Slika 5.12. Tlak fluida

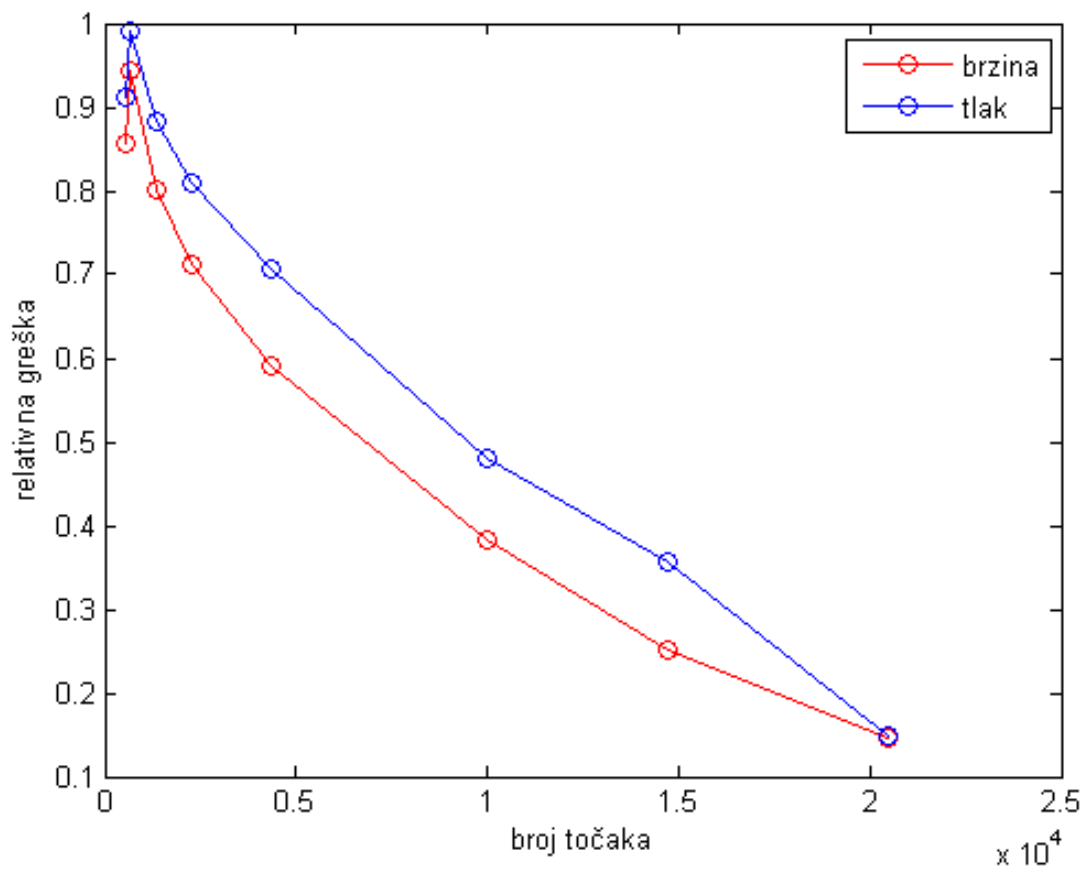


U MATLAB-u smo prikazali brzinu kao treću dimenziju i interpolirali plohe te ih tada uspoređivali po točkama.

Slika 5.13. Brzina predstavlja treću dimenziju



Slika 5.14. Numerička konvergencija s obzirom na broj točaka diskretizacije



Iz prethodne slike možemo zaključiti da Autodesk CFD dobro rješava problem kompresibilnog vanjskog toka.

Poglavlje V

Model krušne peći

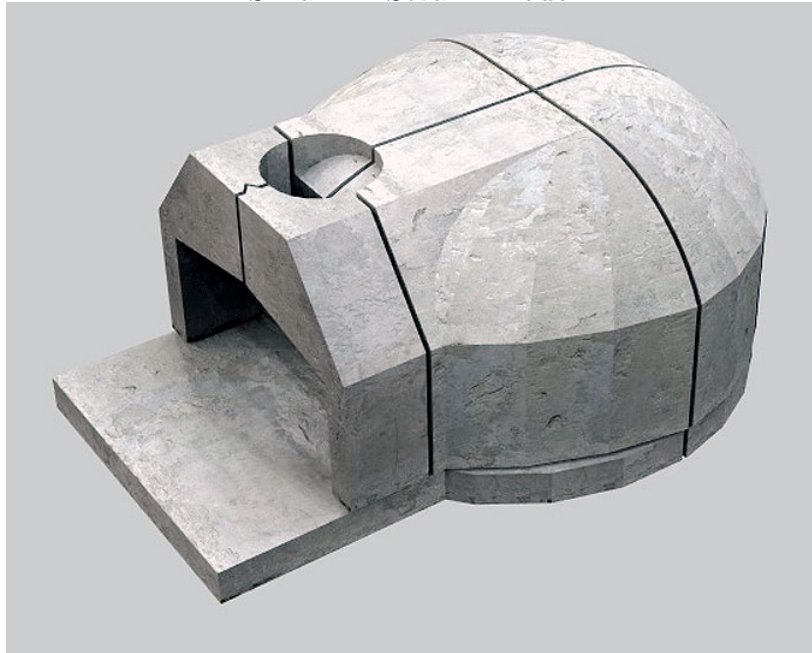
1 Opis problema

U ovom poglavlju predstavljamo simulaciju realnog modela krušne peći. Rezultate nećemo provjeravati, niti ćemo promatrati konvergenciju rješenja profinjavanjem mreže, već simulaciju izvršavamo za samo jednu uniformnu mrežu. Zbog praktičnih ograničenja Autodesk CFD-a, moramo zadati temperaturu na ulaznom rubu, te brzinu na izlaznom rubu. Ukoliko se nigdje ne zada brzina različita od 0, alat ne računa brzinu, te će postavljati brzinu 0 na cijeloj domeni. Brzinu i razliku temperatura znamo iz eksperimentalnih mjerenja.

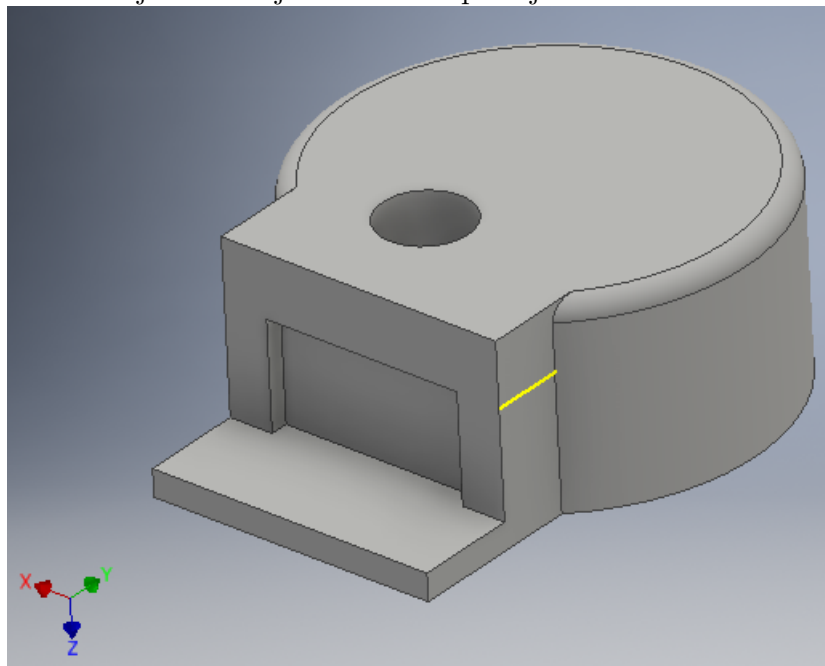
2 Model

Geometrija peći je napravljena u alatu Autodesk Inventor, koji koristi funkcionalnosti AutoCAD-a. Model je zamišljen kao jednostavna rekonstrukcija stvarne krušne peći, koja je dana na sljedećoj slici.

Slika 2.1. Stvarni model

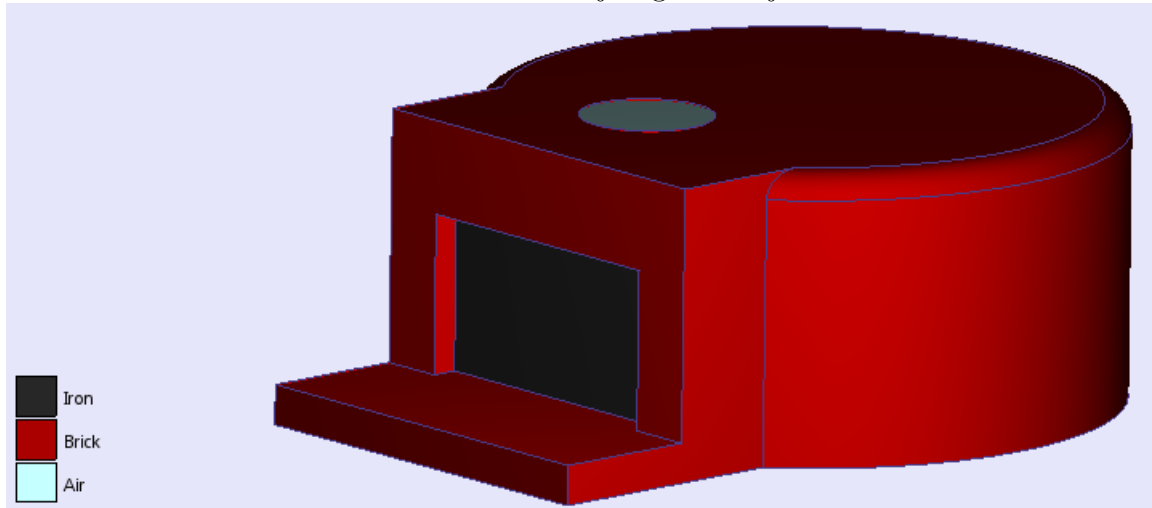


Slika 2.2. Pojednostavljeni model napravljen u Autodesk Inventoru



Peć je napravljena od cigle, te je taj materijal predefniran u bazi čvrstih materijala. Osim cigle od koje je napravljena peć, dodana su vratašca od željeza.

Slika 2.3. Materijali geometrije

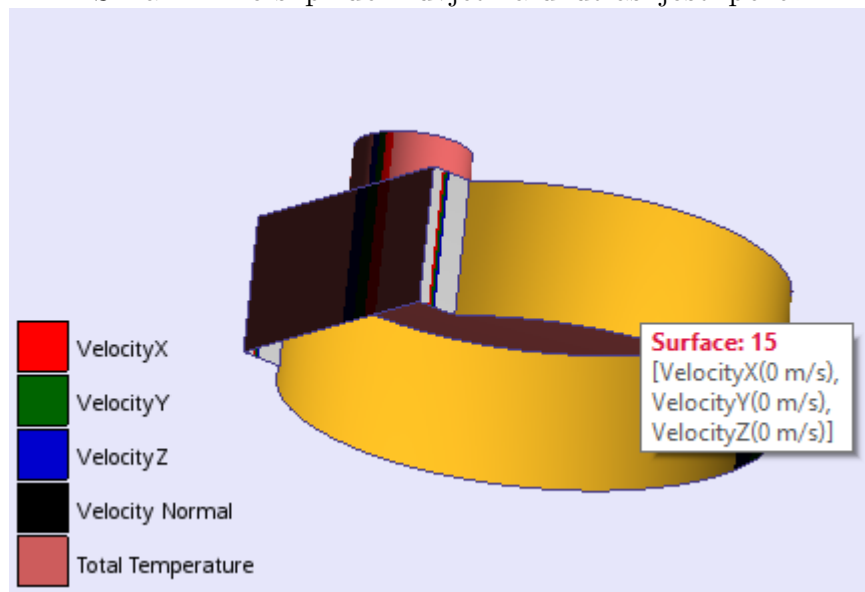


Nas će zanimati koliko je sama geometrija dobra, kako izgleda distribucija topline i kretanje fluida. Eksperimentalna mjerenja iz stvarne peći imamo, te ćemo navesti ona mjerenja koja ćemo koristiti za simulaciju:

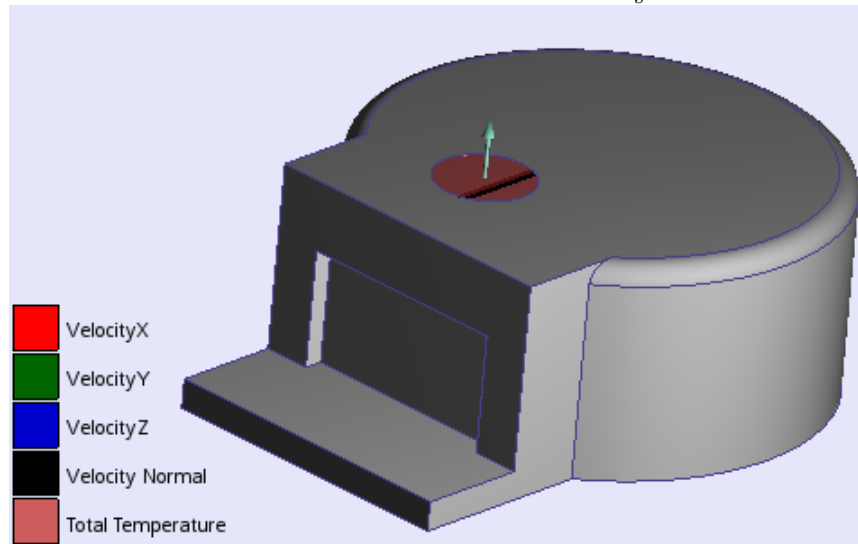
- brzina fluida na izlazu: $1 \frac{m}{s}$
- Razlika temperature na izlazu i "ulazu": 400K, odnosno 400°C

To znači da na izlaz, tj. dimnjak, stavljamo brzinu od $1 \frac{m}{s}$, na unutarnjim rubovima stavljamo takozvani "no-slip" uvjet, odnosno da je brzina jednaka 0 u svim smjerovima.

Slika 2.4. no-slip rubni uvjet na unutrašnjosti peke

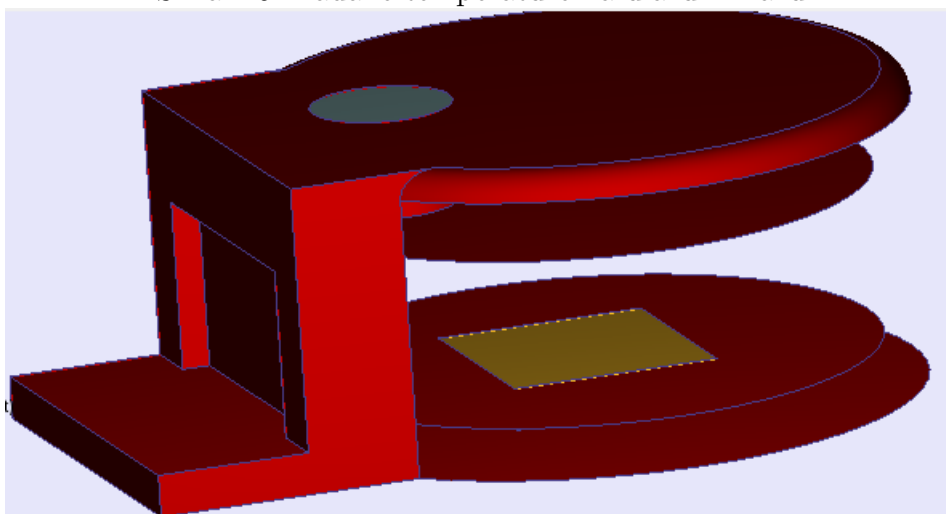


Slika 2.5. Izlazna brzina od $1 \frac{m}{s}$



Temperaturu zadajemo na donjem rubu i na izlazu iz peke (dimnjaku), te ćemo staviti razliku u temperaturama od 400°C , odnosno na donjoj pravokutnoj plohi će biti 430°C , a na izlazu 30°C .

Slika 2.6. Zadane temperature na ulazu i izlazu



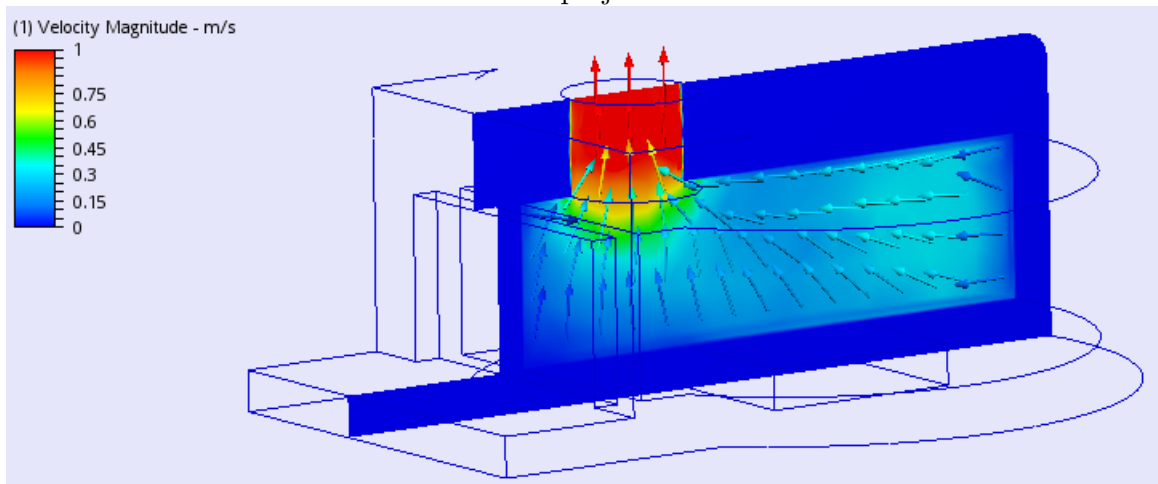
Za simulaciju je odabran stacionarni problem, te je fluid (zrak) odabran kao kompresibilan.

3 Rezultati

3.1 Stacionarni problem

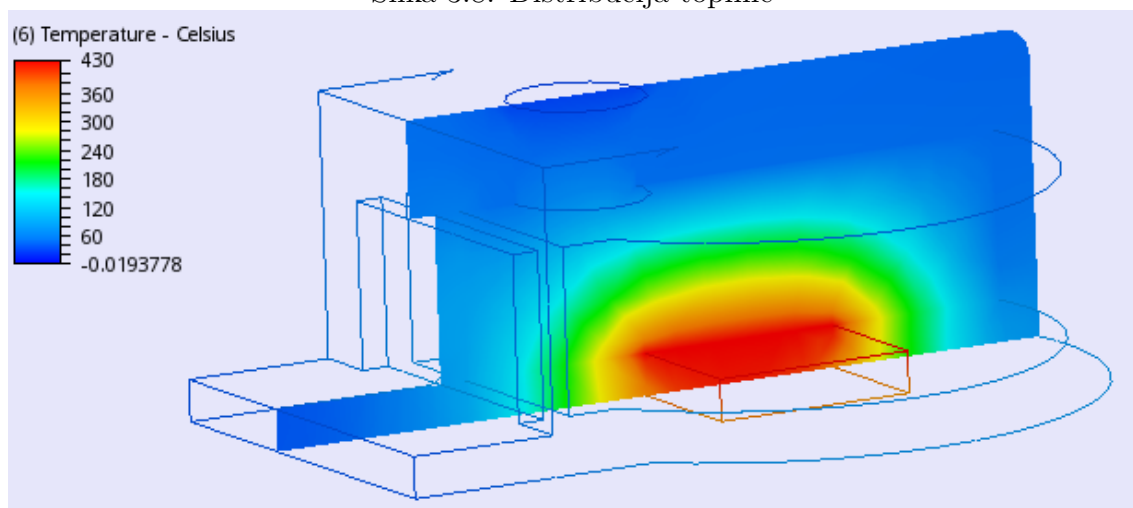
Nakon izvršene simulacije promatramo polje brzine, silnice brzine i temperaturu u peki.

Slika 3.7. Prikaz polja brzine i silnica



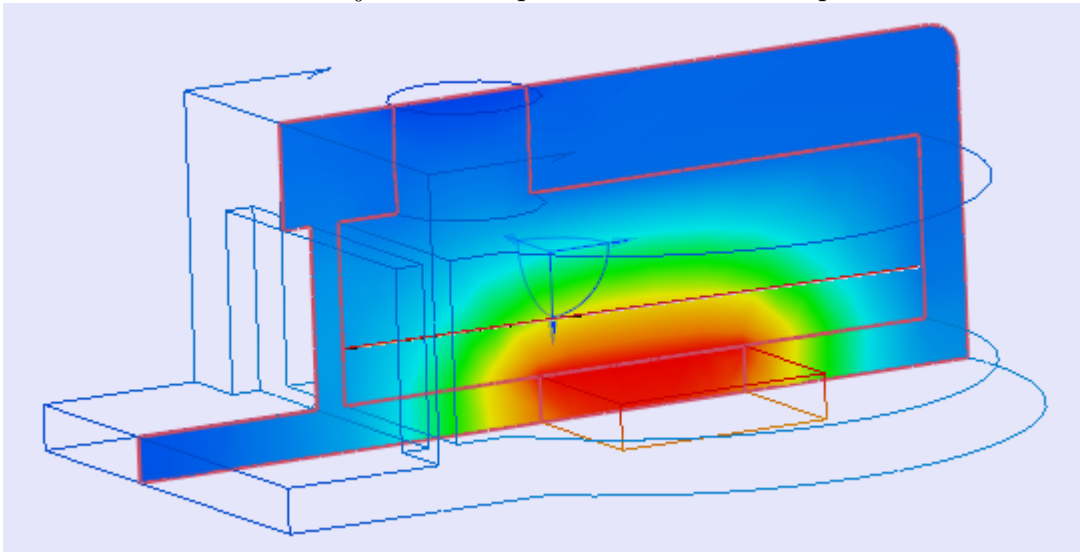
Očekivano, stlačivanje fluida je rezultiralo njegovim ubrzanjem u dimnjaku.

Slika 3.8. Distribucija topline

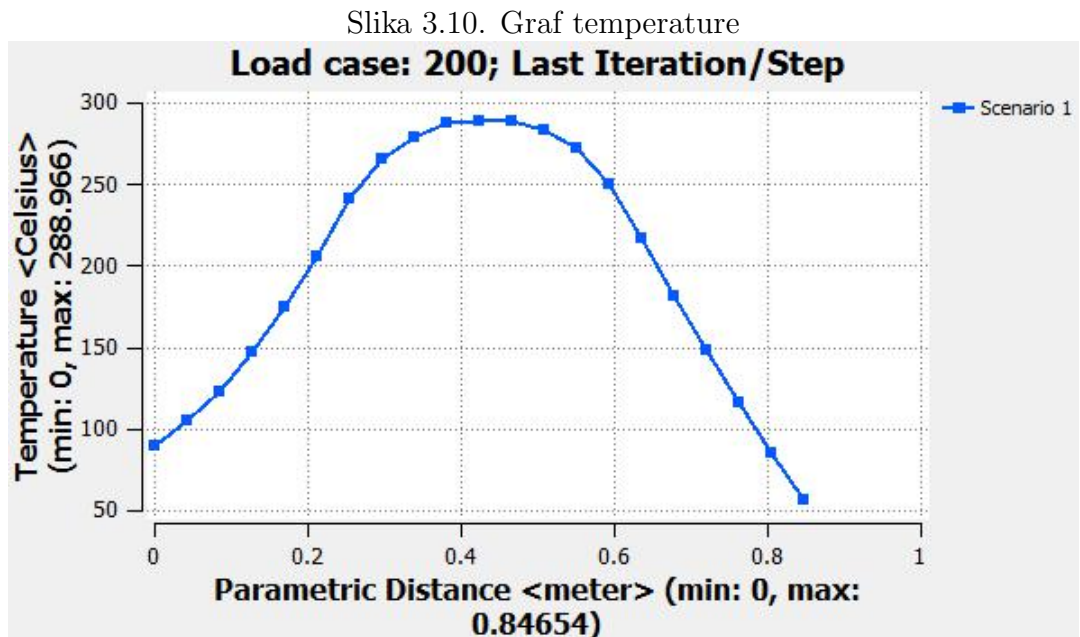


Kako bi provjerili gdje se peka više zagrijala, na samome kraju ili kod željeznih vrata, prikazujemo distribuciju topline na pravcu.

Slika 3.9. Vrijednost temperature na zadanom pravcu

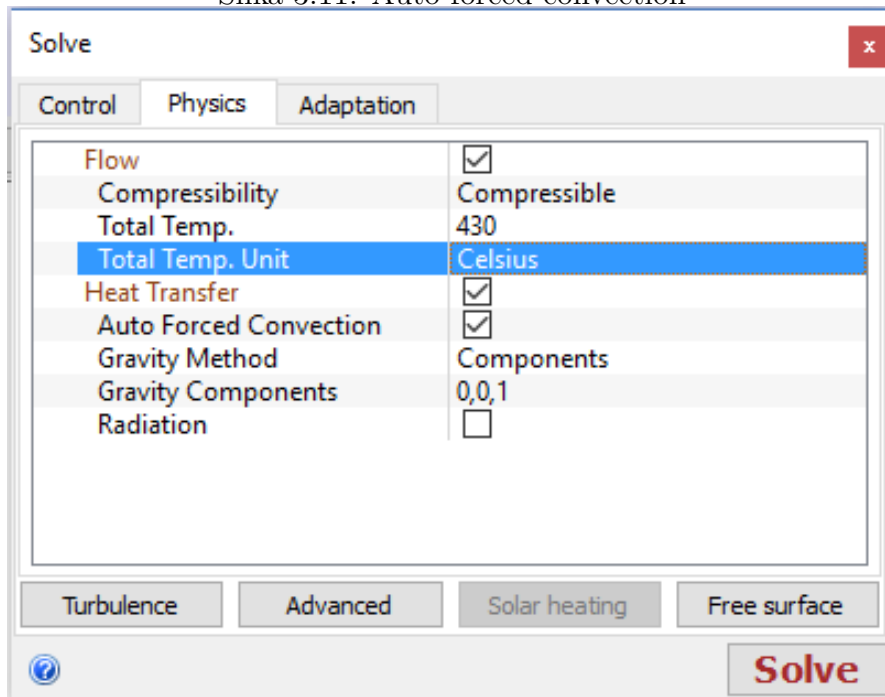


Vrijednosti su dane na sljedećem grafu:



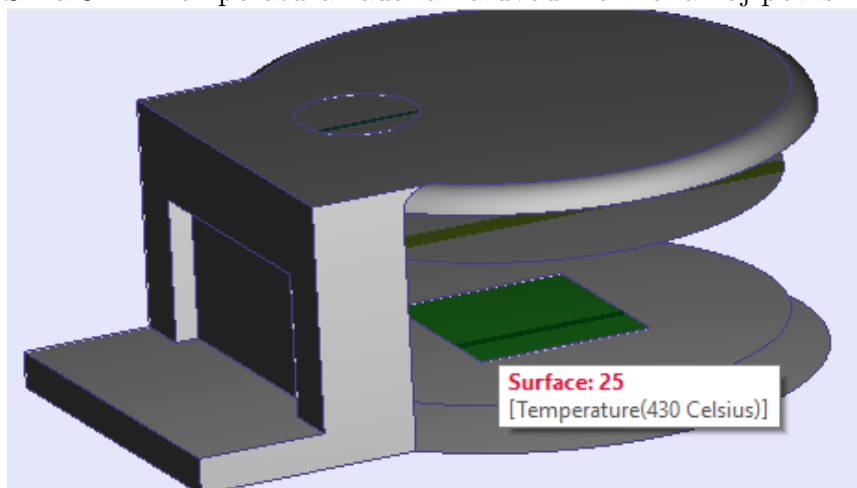
Jedna od metoda rješavanja Navier-Stokes-Fourierovog sustava je "Auto Forced Convection" koja služi za odvojeno rješavanje toka brzine i prijenos topline. Odabirom metode "Auto Forced Convection" CFD prvo rješava problem toka, tj. brzine, a nakon toka problem distribucije temperature. To zadajemo kao na sljedećoj slici:

Slika 3.11. Auto forced convection



Rubni uvjeti za brzinu, tlak i temperaturu su zadani na dvodimenzionalnim ploham, dok je "Film Coefficient" zadan na volumenu peke i predstavlja svojstvo materijala, točnije, propusnost materijala.

Slika 3.12. Temperatura zadana na dvodimenzionalnoj površini



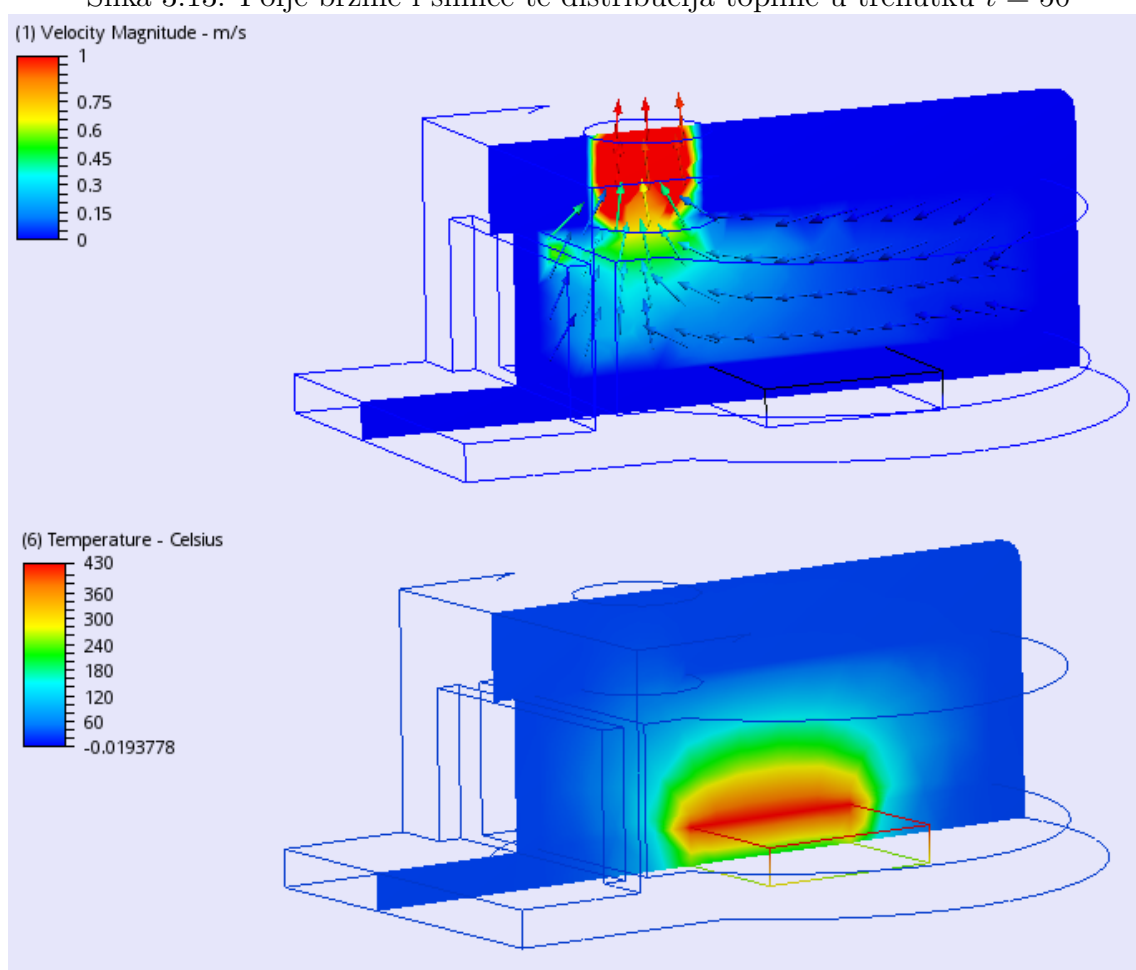
3.2 Evolucijski problem

U ovom poglavlju ispitujemo kako se peka zagrijava, te na koji način se hladi. Rubni uvjet na rubu koji zagrijavamo dan je na sljedeći način:

$$\theta_{in}(t) = \begin{cases} 30 + 80t, & t \leq 50, \\ 430 - 40(t - 50), & 50 < t < 150, \\ 30, & t \geq 150. \end{cases}$$

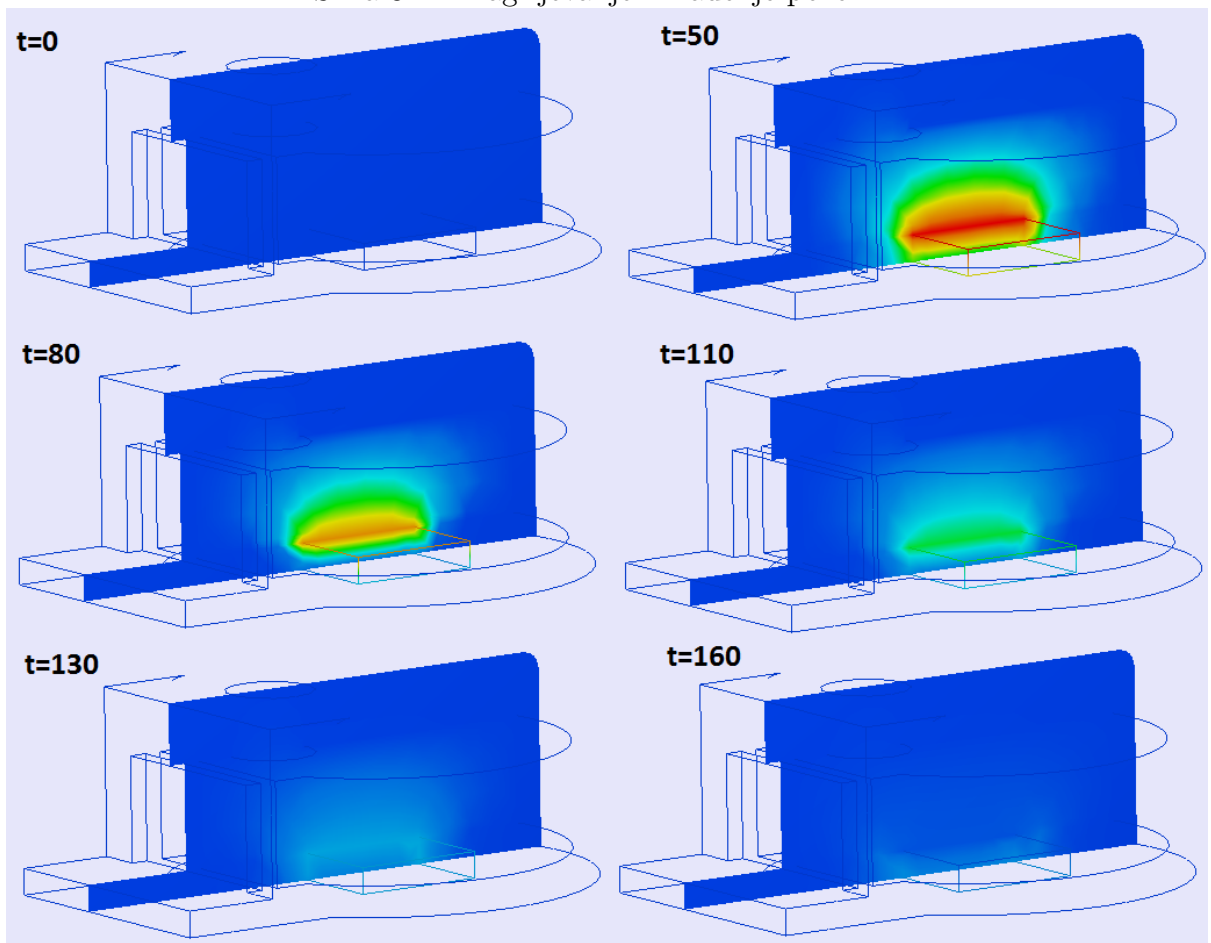
Na izlazu, tj. na dimnjaku je dana konstantna toplina od 30°C. Sljedeća slika pokazuje distribuciju topline i silnice brzine u trenutku $t = 50$ kada je peka maksimalno zagrijana ($t = 0$).

Slika 3.13. Polje brzine i silnice te distribucija topline u trenutku $t = 50$



Kako se linearno smanjivala temperatura na području izvora topline, tako se i peka hladila. Nakon 160 minuta, peka se još nije potpuno ohladila, iako se više ne zagrijava. Iz slike zaključujemo da se cigla oko mjesta zagrijavanja sporije hladi od zraka u peki. Na sljedećoj slici je prikaz zagrijavanja i hlađenja peke u nekim trenucima.

Slika 3.14. Zagrijavanje i hlađenje peke



Zaključak

Nakon korištenja komercijalnog alata Autodesk Computational Fluid Dynamics za numeričke simulacije Navier-Stokes-Fourierovog sustava nailazili smo na razne poteškoće. Zbog sučelja koji ne dopušta pristup algoritmima niti jednadžbama koje CFD koristi, morali smo se uvjeriti da alat radi ono što očekujemo. Slaba dostupnost korisničkih priručnika je također jedan od problema s kojom smo se susretali tijekom pisanja ovog rada. Ipak, nakon niza raznih simulacija uvjerali smo se da alat računa ono što želimo. Jednostavnost izrade geometrije, predefiniranost materijala, postavljanje rubnih uvjeta prednost su Autodesk CFD-a. Simulacija koju smo napravili u posljednjem poglavlju bila bi iznimno zahtjevna za rješavanje u nekom od matematičkih alata, dok je njeno rješavanje u CFD-u bilo prilično jednostavno.

Bibliografija

- [1] Heim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [2] Clay Institute, The Millenium Prize Problem <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf>
- [3] Miloslav Feistauer, Jiri Felcman, and Ivan Straskraba. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford Science Publications, 2003.
- [4] Vivette Girault, Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Method for Navier-Stokes Equations, Theory And Algorithms*. Springer-Verlag, 1980.
- [5] Mladen Jurak, *Jednadžbe mehanike fluida*
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mmtkps/mm_jedn_meh_flu.pdf
- [6] Pierre-Louis Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, Claredon Press, 1998.
- [7] NACA airfoil. https://en.wikipedia.org/wiki/NACA_airfoil
- [8] Antony Novotny, *Lecture Notes on Navier-Stokes-Fourier system, 2012*
http://www.lama.univ-savoie.fr/acary-robert/SMF12/Exposes/EtatsdelaRecherche-Novotny_2012-new.pdf
- [9] J.R. Womersley. *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*. J. Physiol. 127, 553-563, 1955.

Sažetak

Ovaj rad podijeljen je u dva dijela, teorijski i praktični dio. Teorijski dio se sastoji od dva poglavlja i pokriva uvod u jednadžbe mehanike kontinuuma te teoriju numeričkih metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Drugi, praktični, dio se sastoji od uvodnog poglavlja za korištenje Autodesk Computational Fluid Dynamics-a, poglavlja sa primjerima napravljenim u istome te zadnjeg poglavlja gdje radimo numeričke simulacije za stvarni model i analiziramo rezultate.

Summary

This paper is divided into two parts, theoretical and practical part. The theoretical part consists of two chapters and covers the introduction to equations of continuum mechanics and the theory of numerical methods for solving partial differential equations. Practical part consists of introductory three chapters. First is manual for using Autodesk Computational Fluid Dynamics, second contains examples created in Autodesk Computational Fluid Dynamics and last chapter is simulation of real model and analysis of results.

Životopis

Rođen sam 01. srpnja 1992. godine u Zagrebu gdje sam završio osnovnu školu i XVI gimnaziju. 2011. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-Matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. 2015. godine ga završavam te upisujem Diplomski studij Primijenjene matematike. Studij završavam 2017. godine pod mentorstvom doc.dr.sc. Borisa Muhe.