

Efektivni model gluonske materije na konačnoj temperaturi

Leljak, Domagoj

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:799089>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Domagoj Leljak

EFEKTIVNI MODEL GLUONSKE MATERIJE NA
KONAČNOJ TEMPERATURI

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Domagoj Leljak

Diplomski rad

**Efektivni model gluonske materije na
konačnoj temperaturi**

Voditelj diplomskog rada: doc.dr.sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se mentoru, doc.dr.sc. Davoru Horvatiću na pomoći, strpljenju i vodstvu te dr.sc. Sanjinu Beniću na opsežnim komentarima i objašnjenjima.

Hvala prijateljima, obitelji, i Evi na razumijevanju i podršci.

Sažetak

Zadatak ovog diplomskog rada bio je uskladiti podatke za pritisak u ovisnosti o temperaturi u Yang-Mills teoriji s efektivnim modelom. Čestični sadržaj efektivnog modela su konstituentni gluoni i glueballi. Uz to, model sadrži i "interpolirajuće polje" čiji je zadatak kontrolirati čestični sadržaj u ovisnosti o temperaturi. Vrijednost interpolirajućeg polja kontrolira efektivni potencijal koji se sastoji od kvadratičnog i kvartičnog dijela. Pronađeni su koeficijenti ovog potencijala usklađujući pritiske efektivnog modela i Yang-Mills teorije na rešetci. Tako kalibriran model ima potencijal da bude koristan za fenomenologiju kompaktnih zvijezda gdje bi se koristio pri računu jednadžbe stanja na konačnoj gustoći.

Finite temperature effective model of gluonic matter

Abstract

The goal of this diploma thesis was to match the existing Yang-Mills theory temperature-dependent pressure lattice data with an effective mean-field model. Particle constituents of the effective model are constituent gluons and glueballs. Additionally, the model also contains an interpolating bag field whose purpose is to control the particle content in dependence on temperature. Value of the bag field is controlled by an effective potential which comprises of a quadratic and a quartic term. This potential's coefficients are calculated by fitting the effective model pressure to Yang-Mills pressure data. Such calibrated model has potential one can apply in study of phenomenology of compact stars, where it would be used to calculate finite density equation of state.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Kvantna kromodinamika	2
2.1	Asimptotska sloboda	3
2.2	Zatočenje boje (konfinacija)	4
2.3	Fazni dijagram QCD-a	4
3	Simetrije u teoriji polja	7
3.1	Egzaktne simetrije QCD-a	9
3.1.1	Poincaréova simetrija	9
3.1.2	SU(3) lokalna baždarna simetrija	9
3.2	Aproksimativne simetrije QCD-a	10
3.2.1	Kiralna simetrija	10
3.2.2	Konformalna simetrija	11
4	Korišteni alati	13
4.1	Yang-Mills na konačnoj temperaturi	13
4.2	Teorija srednjeg polja	13
5	Model	15
5.1	Postavke modela	15
5.2	Jednadžbe procjepa	16
5.3	Rezultati	16
5.4	Prilagodba na Monte Carlo podatke	21
6	Zaključak	23
	Dodaci	24
A	Termodinamika gluona konačne mase	24
B	Prilagodba programskim jezikom "Julia"	26

1 Uvod

Standardni model je moderna paradigma u svijetu fizike elementarnih čestica, i on bi trebao objašnjavati fenomenologiju svemira u potpunosti. Tri su vrste interakcija od kojih se sastoji: elektromagnetske, opisane kvantnom elektrodinamikom, slabe (prije zvane slabe nuklearne zbog implikacija na nuklearnu fiziku), i jake (nuklearne), opisane kvantnom kromodinamikom. Elektrodinamika i slaba sila uspješno su ujedinjene u ono što je danas poznato kao elektroslabi sektor, koji se drastično razlikuje od kromodinamike, teorije kvarkova i gluona, koja je iznimno problematična zbog svojih neperturbativnih i neabelovskih svojstava. Zbog takve vrste neprodorosti, ona se proučava efektivnim modelima i Monte Carlo računima na "rešetci", a pogotovo u domeni višečestične fenomenologije. U ovom radu predstavljen je klasični model igračke kojemu je namjena računanja gluonskog pritiska, te je napravljena jedna vrsta prilagodbe modela na podatke jednog računa na "rešetci".

U 2. poglavlju dana je šira motivacija za problematiku kromodinamike. Nabrojani su svi stupnjevi slobode i objašnjene su pojave asimptotske slobode (za koju je dobivena Nobelova nagrada) te zatočenja bojom (praktički nerješiv problem).

3. poglavlje bavi se ulogom simetrija u teoriji polja. Nabrojane su simetrije koje posjeduju kromodinamika i povezane sa fenomenologijom koja nastupa kao njihova posljedica.

Ukratko su opisani teorijski alati koji su korišteni za pronalaženje očekivane vrijednosti polja i particijske funkcije u poglavlju 4.

U poglavlju 5. predstavljen je model, i objašnjeni su detalji i funkcije čestičnog sadržaja. Izračunate su jednačbe procjepa, te iz njih izvučene očekivane vrijednosti polja. Model je zatim prilagođen na podatke izvučene iz relevantnog i recentnog rada. Komentirani su rezultati i izvučena je zaključak.

Dodatci sadrže jednostavnu analitičku argumentaciju povezanu s infracrvenom granicom i gluonskim masama, te dio koda koji je napisan u svrhu nalaženja parametara potencijala interpolirajućeg polja.

2 Kvantna kromodinamika

Kvantna kromodinamika (skraćeno QCD, od engl. *quantum chromodynamics*) je baždarna teorija jakih interakcija, jedne od tri fundamentalne sile sadržane u Standardnom modelu. Posebnost QCD-a u odnosu na slabe i elektromagnetske interakcije leži u njegovoj neabelovskoj strukturi, odnosno svojstva nekomutacije generatora baždarne grupe. To se vidi iz njegove gustoće lagranžijana (kolokvijalno, lagranžijana), zapisane u Einsteinovoj konvenciji sumiranja kao:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{\psi}_q^j(x) [i(\gamma_\mu D^\mu)^{jk} - m_q \delta^{jk}] \psi_q(x)^k - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G^{a,\mu\nu}(x) \quad (2.1)$$

gdje su $\bar{\psi}_q$ i ψ_q spinorno antikvarkovsko i kvarkovsko polje okusa q u fundamentalnoj reprezentaciji SU(3) grupe:

$$\psi_q = (\psi_r, \psi_g, \psi_b)^\dagger$$

Indeksi r, g i b (u jednadžbi (1.1) slijepi indeksi j i k) u Diracovim spinorima ψ_r, ψ_g i ψ_b označavaju očuvani naboj QCD-a, nazvan boja zbog prikladnosti. Kvarkovi, dakle, mogu nositi tri boje, crvenu (*red*), zelenu (*green*) i plavu (*blue*). U kvarkovskom modelu ima 6 okusa, i svrstani su u tablicu 2.1.

čestica	broj boja	okusi
kvarkovi $\psi_q^j(x)$	3	u, d, s, c, b, t
gluoni $A_a^\mu(x)t_a$	8	nema

Tablica 2.1: Sastav kvantne kromodinamike

Masa kvarka okusa q je m_q, γ_μ su 4×4 Diracove matrice definirane preko Cliffordove algebre

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

sa ravnom metrikom $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. Operator D^μ je kovarijantna derivacija uvedena radi zahtjeva na baždarnu invarijantnost teorije i definirana preko:

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_s A_a^\mu(x)t_a \quad (2.2)$$

gdje je $A^\mu(x) \equiv A_a^\mu(x)t_a$ polje baždarnog gluona, vezano na kvarkove kroz konstantu g_s , i ono u sebi sadrži Gell-Mannove matrice λ_a u $t_a = \frac{\lambda_a}{2}$, uz $a = 1, \dots, 8$, koje kao 3×3 matrice čine matricnu reprezentaciju SU(3) grupe. Veličina $G_{\mu\nu}^a$ naziva se tenzorom jakosti gluonskog polja, i trag njegovog kvadrata čini Yang-Mills dio lagranžijana:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$$

gdje su f_{abc} strukturne konstante SU(3) grupe definirane preko $[t_a, t_b] = if_{abc}t_c$.

2.1 Asimptotska sloboda

Činjenica da generatori t_a ne komutiraju čini QCD neabelovskom teorijom, i u terminima međudjelovanja čestica, dozvoljava gluonima da međudjeluju jedni s drugima, odnosno i sami nose boju. U kvantnoj elektrodinamici, primjerice, baždarni bozoni ne nose električni naboj, odnosno njeni generatori komutiraju. Fizikalne veličine, kao što su amplitude prijelaza ili udarni presjeci proučavaju se metodama kvantne teorije polja, i to najčešće kroz razvoj u "konstanti" vezanja korištenjem Dysonove formule, koja npr. za Greenovu funkciju dva skalarna polja $\chi(x)$ u interakciji izgleda kao:

$$\langle \Omega | T \{ \chi(x) \chi(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \chi_I(x) \chi_I(y) \exp \left\{ -i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right\} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left\{ -i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right\} \} | 0 \rangle}$$

Ovdje H_I stoji za hamiltonijan interakcije, $\chi_I(x)$ je kvantno polje zapisano u interakcijskog slici, dok su $|\Omega\rangle$ i $|0\rangle$ interakcijski i slobodni vakuum, respektivno. Eksponencijalna funkcija u brojniku može se razviti u red potencija u kojem se svaki član može simbolički prikazati Feynmanovim dijagramom. Oni ne konvergiraju nužno, ali se primjećuje da postoji cijela klasa teorija koje se može "natjerati" da konvergiraju metodom nazvanom renormalizacija. Ona se opravdava fizikalnim argumentom, kaže se da jakost kojom se polja vežu jedna na druga nije jednostavno konstanta vezanja (npr. g_s iz jednadžbe(2.2)), već da ta veličina ovisi o energetske skali na kojoj se proces odvija ili promatra. Tako npr. za kvantnu elektrodinamiku (QED, od engl. *quantum electrodynamics*) jakost vezanja raste gotovo linearno s energijom (ali jako slabo, bezdimenzionalna je i na skali mase elektrona ona iznosi $\alpha_{\text{QED}}(m_e) \approx 1/137$, a na skali Z bozona $\alpha_{\text{QED}}(m_Z) \approx 1/127$, što se povezuje s njenom abelovskom prirodom. Za QCD je slučaj drukčiji, pri niskim energijama kvarkovi i gluoni interagiraju jako, dok se na visokim ponašaju kao slobodne čestice. Funkcionalna ovisnost renormaliziranog vezanja o energetske skali do na jednu dijagramatsku petlju (do drugog reda u računu smetnje) za QCD izgleda kao:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + B\alpha_s(Q_0^2) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)}$$

$$B = \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi}$$

Jakost vezanja se uvijek računa u odnosu na neku referentnu skalu Q_0^2 , i za puni QCD vrijedi $N_c = 3$ i $N_f = 6$. Na skali mase Z bozona, vrijedi perturbativni račun jer $\alpha_s(m_Z) \approx \mathcal{O}(0.1)$, i konstanta s energijom pada zahvaljujući nekomutaciji generatora. No to dovodi do problema prilikom računa na niskim energijama, gdje se govori o neperturbativnom režimu, jer već na skalama usporedivim sa masom protona $\alpha_s(m_p) \approx \mathcal{O}(1)$. To znači da će prilikom istraživanja tog energetskeg režima biti potrebne posebne metode istraživanja, kao što su efektivni modeli i numerički

računi na tzv. "rešetci" (engl. *lattice*). Potonje se odnosi na Monte Carlo simulacije fizikalnih veličina na diskretiziranom prostor-vremenu.

2.2 Zatočenje boje (konfinacija)

Jedan od nerješениh problema SU(3) baždarnе teorije primjedba je da se fizikalni objekt može propagirati samo ako je singlet u prostoru boje, odnosno ako je "neobojan". Kvarkovi i gluoni, koji sami nose boju, nikada nisu primjećeni samostalno (gluona ima 8, a ne 9, jer je baždarna grupa SU(3), a ne U(3), što bi dozvolilo postojanje singletnog gluona kao elementarne čestice). Oni su uvijek zatočeni u objekte koji ne nose boju, zajedno su vezani u hadrone, dok se očekuje eksperimentalna potvrda vezanog stanja gluona, tzv. *glueball* (doslovni prijevod - ljepekolopta) čestice. Kvark-gluon plazma (QGP, od engl. *quark-gluon plasma*) naziv je za donedavno hipotetsko stanje tvari na visokim temperaturama u kojem se kvarkovi i gluoni ponašaju kao asimptotski slobodne čestice. U lipnju 2015. objavljeno je otkriće novog stanja tvari za koje se vjeruje da je QGP, i postignuto je sudaranjem protona sa jezgrama olova na jako visokim energijama. Za kvarkovski sektor fazni prijelaz iz konfiniranih u asimptotski slobodna stanja obično se modelira iz perspektive statističke fizike kiralnim kvarkovskim kondenzatom:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle_{m_q=0} = -T \left. \frac{\partial}{\partial m_q} \log Z \right|_{m_q=0}$$

gdje je Z particijska funkcija QCD-a. Takav kondenzat služi kao parametar uređenja u Landauovom smislu, tj. za kiralni QCD ($m_q = 0 \forall q$) on je nula u simetričnoj fazi, dok s padom temperature on poprima konačnu vrijednost reda veličine $\mathcal{O}(m_p/3)$, i time se fenomenološki objašnjava dinamičko generiranje hardonskih masa unutar kvarkovskog modela - obična tvar je hladna i razrijeđena mješavina hardona, jezgara i vakuuma, dok na višim temperaturama kvarkovi postaju bezmaseni. Kako je parametar uređenja mali u blizini temperature faznog prijelaza, termodinamički potencijal se u njegovoj blizini obično može opisati pomoću reda potencija:

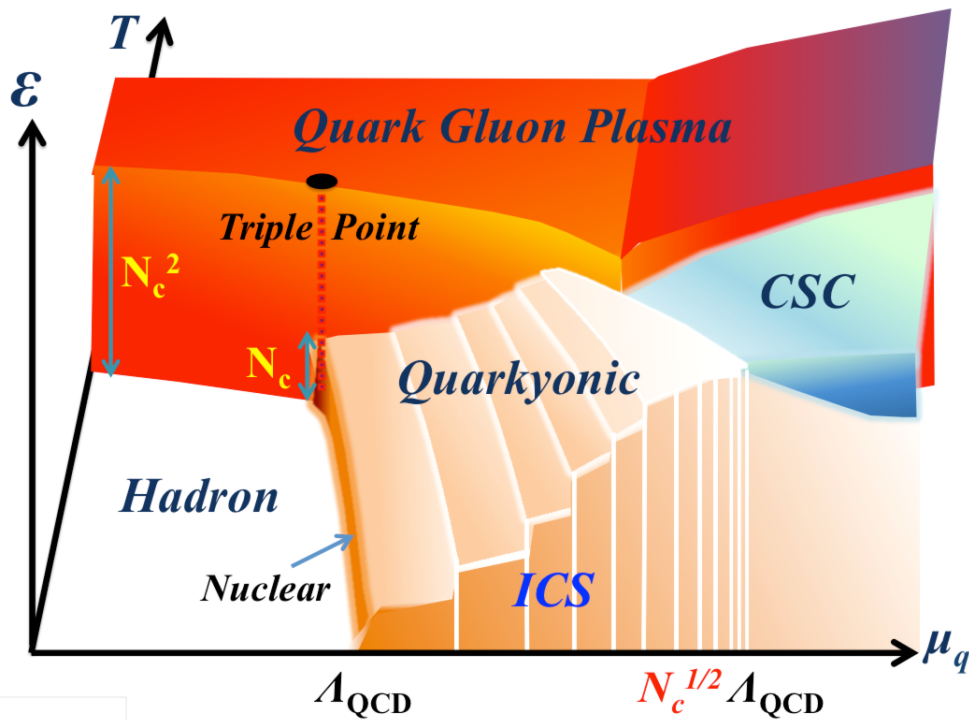
$$\Omega(T) \sim \sum_n c_n(T) \langle \bar{\psi}\psi \rangle^n(T)$$

Problem objašnjavanja mase hadrona koja se generira čak i za bezmasene kvarkove plodno je područje istraživanja i danas, no postavlja se pitanje gluonskog sektora. Pitanje je na koji način gluoni doprinose faznom dijagramu QCD-a. Ispostavlja se da je korisno na to pitanje odgovoriti modelima kojima kao parametar uređenja služi gluonski kondenzat $\langle G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \rangle$.

2.3 Fazni dijagram QCD-a

Fazni dijagram je simbolički prikaz granice između više faza određene vrste tvari u ovisnosti o nekim termodinamičkim veličinama (pritisak, temperatura, volumen...).

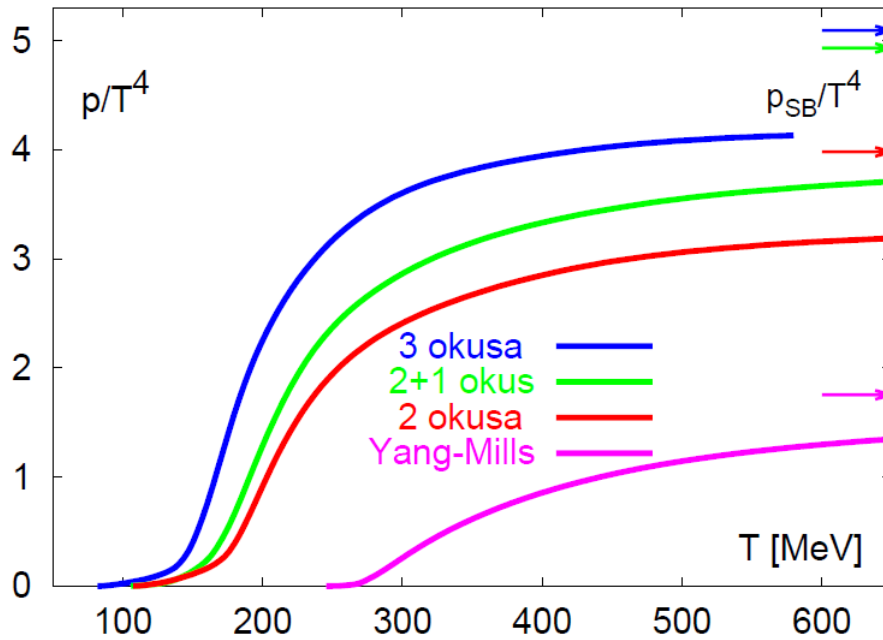
Ta granica, linija ravnoteže, označuje stanja u kojima dvije faze mogu postojati istovremeno. Termodinamičke veličine kojima se opisuju faze QCD-a su temperatura T , barionski kemijski potencijal μ_B , te pritisak p (odnosno gustoća energije ϵ). Niski μ_B implicira kvarkove vezane u hadrone i jezgre, dok se s njegovim rastom očekuje QGP. Za čistu gluonsku materiju $\mu_B = 0$, te se fazni prijelaz može promatrati na " $p(T)-T$ " dijagramu. Tako se može crtati i trodimenzionalni dijagram u ovisnosti sve tri termodinamičke veličine, kao na slici (2.1). Snažno se vjeruje da je cijeli svemir nastao



Slika 2.1: Fazni dijagram QCD-a - blizu vakuuma dominiraju hadronska stanja, dok se za nešto više μ_B formiraju jezgre. Na još višim μ_B prikazana je kvarkionska (engl. *Quarkyonic*) faza, u kojoj su kvarkovi asimptotski slobodni, s mješavinom termalno pobuđenih konfiniranih stanja, i sadržava isprepletene kiralne spirale (ICS, od engl. *interweaving chiral spirals*). Za još viši μ_B postoji i faza sa neiščezavajućim Cooperovim parovima, supravodljiva (CSC, od engl. *color superconductivity*), a postoji i trojna točka (engl. *Triple point*). Na visokim gustoćama energije dominira QGP. Preuzeto iz [1].

tzv. Velikim praskom (engl. *Big Bang*), jako brzim širenjem iz stanja izričito visokih temperatura i gustoća energije, što znači da se nalazio daleko od ishodišta faznog dijagrama i bio je dominiran kvark-gluon plazmom (kroz interval vremena od $\sim 10^{-6}$ sec). Hlađenjem je ulazio u manje simetričnu fazu kvarkova i gluona konfiniranih u hadrone koji su gradivni elementi današnjeg svemira. Činjenica da je njegov nastanak može opisati kao takva vrsta faznog prijelaza dodatna je motivacija za daljnje istraživanje. Simulacije na "rešetci" jedan su od najpopularnijih suvremenih načina za ta istraživanja, jer ne zahtijevaju dodatne parametrizacije. Najveći problem pri takvim računima su ugođavanje volumena prostor-vremena prilikom njegove diskretizacije, te čuveni problem predznaka, povezan sa kemijskim potencijalom. Jedan

takav račun za $\mu_B = 0$ predstavljen je u [2], ovdje na slici 2.2, gdje je za termodinamičku veličinu promatran tlak umjesto gustoće energije (svejedno se može zamisliti kao z -os slike (2.1)), i to za kvarkove i gluone, ali i samo za gluonski sektor. Svrha ovog rada pokušati je opisati efektivnim modelom upravo pritisak izoliranog gluonskog sektora.



Slika 2.2: Monte Carlo račun QCD pritiska sa oznakama Stefan-Boltzmann granice (potpuno slobodni gluonski plin)

3 Simetrije u teoriji polja

Suvremeno proučavanje raznih teorija polja svodi se u velikoj mjeri na proučavanje simetrija koje teorija polja u pitanju ima, i to zahvaljujući prvenstveno Noetherinom, a iz perspektive fizike elementarnih čestica i jednako bitnom Goldstoneovom teoremu. Pod simetrija ovdje se misli na transformaciju polja koja ostavlja akciju teorije invarijantnu na tu istu transformaciju. Pojednostavljeno, Noetherin teorem jamči da svaka kontinuirana transformacija, koja je i simetrijska, za sobom povlači i neku očuvanu veličinu. Takve očuvane veličine, posljedice Noetherinog teorema nazivaju se Noetherinim strujama. Za primjer je dostatno pogledati teoriju koja sadrži jedno skalarno polje $\mathcal{L}(\chi) \equiv \mathcal{L}_\chi$. Transformacija polja $\chi \rightarrow \chi'$ može se zahvaljujući pretpostavci kontinuiranosti prikazati u svom infinitezimalnom obliku kao:

$$\chi \rightarrow \chi'(x) = \chi(x) + \delta\chi(x)$$

Kako su Euler-Lagrange jednadžbe zadovoljene, potisnu li se eksplicitne oznake koordinate x , nakon transformacije lagranžijan dobiva dodatni dio

$$\delta\mathcal{L}_\chi = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}_\chi}{\partial(\partial_\mu\chi)} \delta\chi \right)$$

Ali kako je transformacija simetrijska, po definiciji lagranžijan se mijenja samo za puni diferencijal nekog seta funkcija $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$, te se može pisati, uz $\delta\chi = X(\chi)$:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{uz} \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_\chi}{\partial(\partial_\mu\chi)} X(\chi) - F^\mu(\chi)$$

Noetherina struja predstavljena je s j^μ .

U nekim slučajevima postoje transformacije koje su simetrijske, ali osnovno stanje nije invarijantno na njih. Ovaj fenomen naziva se spontano slamanje simetrije, te se u sustavima sa primjerom spontano slomljene simetrije u spektru mogućih pobuđenja pojavljuju i nove bezmasene skalarnе čestice. Točnije, za svaki generator simetrije koja je spontano slomljena postoji jedan novi bozon, i on se naziva Goldstoneov bozon, prema Jeffereyu Goldstoneu, koji je objasnio bozone koje je Yoichiro Nambu otkrio u kontekstu BCS (Bardeen–Cooper–Schrieffer) supravodljivosti (zato se nekad nazivaju i Nambu-Goldstoneovi bozoni). Ustvari, prvi Goldstoneov model skalarnog polja bio je temelj za Higgsov mehanizam za koji se danas smatra da slamanjem elektroslabe simetrije generira mase čestica Standardnog modela. Prvi Goldstoneov model ima gustoću hamiltonijana:

$$\mathcal{H}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi)$$

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4; \quad \lambda > 0$$

Takva gustoća je invarijantna na inverzije tipa $\varphi \rightarrow -\varphi$. Za klasično polje, φ je

kompleksni broj, i za najniže energetske stanje vrijedi:

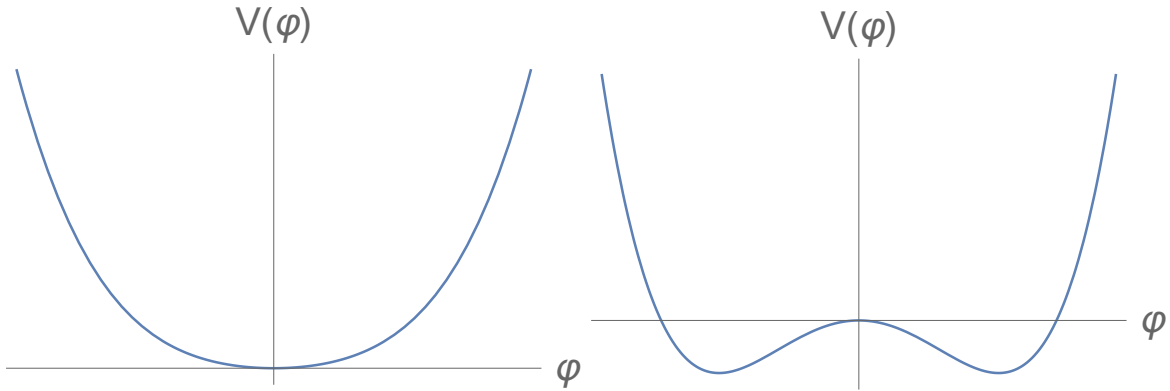
$$\mathcal{H}(\varphi) = V(\varphi)$$

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} = \mu^2 \varphi + \frac{\lambda}{6} \varphi^3$$

Za $\mu^2 > 0$ potencijal ima jedan minimum, u $\varphi = 0$, ali za $\mu^2 < 0$ tamo se nalazi lokalni maksimum, dok su minimumi u $\varphi = \pm \sqrt{\frac{-6\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$, kao na slici (3.1). Tada vakuum nema simetriju hamiltonijana ($\varphi_- \neq \varphi_+$), za koji vrijedi $\mathcal{H}(\varphi_{\pm}) = -3\mu^4/2\lambda$, odnosno nastupa degeneracija. Za $\mu^2 > 0$, μ predstavlja masu polja φ . Za određivanje mase pri $\mu^2 < 0$, korisno je napraviti supstituciju $\varphi' = \varphi - (\pm v)$. Tada vrijedi:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda v^2}{6} \varphi'^2 + \frac{\lambda v}{6} \varphi'^3 + \frac{\lambda}{4!} \varphi'^4 - \frac{\lambda}{24} v^4$$

Tj. parametar $\frac{\lambda v^2}{6}$ je kvadrat mase polja φ' . U punoj kvantnoj teoriji polje φ postaje operator i razmatra se $\langle 0|\varphi|0\rangle$, što postaje parametar uređenja za slamanje simetrije diskretne transformacije $\varphi \rightarrow -\varphi$.



Slika 3.1: Potencijal prvog Goldstoneovog modela za $\mu^2 > 0$ (lijevo) i $\mu^2 < 0$ (desno)

Naravno, simetrija može imati i samo aproksimativnu prirodu, odnosno očuvana veličina može biti jako malena na skali fenomenologije u pitanju, pa su čestice jako lagane i nazivaju se pseudo-Goldstoneovi bozoni, ili pseudo-Nambu-Goldstoneovi bozoni. Jedan od najpoznatijih primjera spontanog slamanja simetrije je upravo kiralni QCD sa tri okusa (u , d i s), koji generira 8 pseudoskalarnih mezona, od kojih je najlakši pion, i to zahvaljujući tome da su kiralna i okusna simetrija ustvari aproksimativne, odnosno mase kvarkova su neiščezavajuće i različite. Iako kvarkovski sektor QCD-a zauzima posebno mjesto istraživanja, glavni fokus ovog rada je gluonski sektor i model zatočenja gluona u *glueballe*. Za čisti Yang-Mills lagranžijan *glueball* se može prikazati kao Goldstoneov bozon nazvan dilaton (od engl. *dilatation* - širenje), zbog povezanosti sa konformalnom simetrijom.

3.1 Egzaktne simetrije QCD-a

3.1.1 Poincaréova simetrija

Sve teorije polja moraju poštivati Einsteinovu specijalnu relativnost. Kada se kaže da je teorija polja relativistička, misli se na to da ima Poincaréovu simetriju, i ona obuhvaća translacije $x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon^\mu$. Očuvana struja u ovom slučaju je tenzor energije i impulsa:

$$(j^\mu)_\nu \equiv T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (3.1)$$

Sva polja u teoriji označena su sa ϕ_a . Očuvani naboji su redom impuls i energija.

$$H \equiv P^0 = \int d^3x T^{00}(x)$$

$$\vec{P} \equiv P^i = \int d^3x T^{0i}(x)$$

Postoje također i rotacije, opisane zahtjevom invarijantnosti na Lorentzove transformacije, odnosno rotacije koordinate tipa:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A'_\mu^a(x') = \Lambda_\nu^\mu A_\mu^a(x)$$

$$\psi_q(x) \rightarrow \psi'_q(x') = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi_q(x)$$

Reprezentacija Lorentzove transformacije u bispinornom prostoru dana je sa $\Lambda_{\frac{1}{2}}$. Očuvani naboji Lorentzovih transformacija su angularni momenti i potisci (engl. *boost*). Postoji suptilnost. U relativističkoj kvantnoj teoriji očuvan je samo ukupni angularni moment, dok su u nerelativističkoj nužno zasebno očuvani i orbitalni i angularni moment.

3.1.2 SU(3) lokalna baždarna simetrija

Za QCD se kaže da je teorija polja sa SU(3) baždarnom simetrijom, jer je invarijantna na lokalne transformacije tipa:

$$U(\theta(x)) = e^{ig_s \theta^a(x) t^a}$$

$$\psi_q(x) \rightarrow \psi'_q(x) = U \psi_q(x) = e^{ig_s \theta^a(x) t^a} \psi_q(x)$$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A'_\mu^a(x) = U A_\mu^a(x) U^\dagger + \frac{i}{g_s} U \partial_\mu(x) U^\dagger$$

Postoji Noetherina struja:

$$j_a^{\mu\psi_q} = \bar{\psi}_q \gamma^\mu t_a \psi_q \quad (\text{a})$$

$$j_a^{\mu A} = f_{abc} G_b^{\mu\nu} A_{c,\nu} \quad (\text{b})$$

$$\partial_\mu (j_a^{\mu\psi_q} + j_a^{\mu A}) = 0$$

Pod (a) je označena Noetherina stuja za polja materije, a pod (b) ona za baždarna polja. Očuvani naboj naziva se boja.

3.2 Aproksimativne simetrije QCD-a

3.2.1 Kiralna simetrija

Ako se uzmu u obzir samo 3 laka kvarkovska okusa ($N_f = 3$), primjećuje se da postoje energije na kojima su njihove mase relativno zanemarive. To motivira razmatranje kiralnog limesa u kojem $m_q = 0$. Korisno je definirati kiralne projektore, preko:

$$P_R \psi_{q,R} \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_q \quad P_L \psi_{q,L} \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_q$$

$$\psi_q = \psi_{q,R} + \psi_{q,L}$$

Ako se lagranžijan QCD-a raspiše preko ovakvih kiralnih, lijevo-desnih ($L - R$) stanja vidi se zašto se bezmaseni limes zove i kiralni - u njemu je lagranžijan simetričan na transformacije unutar $SU(N_f = 3)_L \otimes SU(N_f = 3)_R$ grupe, odnosno lijeva i desna stanja su razvezana:

$$\psi_{q,L} \rightarrow \psi'_{q,L} = e^{i\theta_L^a t^a} \psi_q$$

$$\psi_{q,R} \rightarrow \psi'_{q,R} = e^{i\theta_R^a t^a} \psi_q$$

Za specifične parametre $\theta_L^a = \theta_R^a = \theta^a$ nalazi se dijagonalna podgrupa simetrije okusa. Očuvana vektorska struja okusa je:

$$j_a^\mu = \bar{\psi}_q \gamma^\mu t_a \psi_q = j_{a,L}^\mu + j_{a,R}^\mu$$

Slična, ali pseudovektorska struja, dobiva se za $\theta_L^a = -\theta_R^a = -\Theta^a$:

$$j_{5a}^\mu = \bar{\psi}_q \gamma^\mu \gamma_5 t_a \psi_q = -j_{a,L}^\mu + j_{a,R}^\mu$$

Postoji još jedna struja, za koju se ispostavlja da je anomalna u kiralnom limesu (sačuvana klasično, ali kvantno slomljena), koja dolazi od transformacije

$$\psi_q \rightarrow \psi'_q = e^{i\alpha \gamma_5} \psi_q$$

i ona glasi:

$$j_5^\mu = \bar{\psi}_q \gamma^\mu \gamma_5 \psi_q$$

Iako se radi o kvarkovskom sektoru, koji nije razmatran u ovom radu, proučavanje kiralne simetrije dovelo je do ogromnih napredaka u razlučivanju perturbativnosti QCD-a, pomoću npr. prije spomenutog kiralnog kondenzata, za koji se sada vidi da vrijedi $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \langle \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L \rangle$, tj. on iščezava kada se lijeva i desna stanja ne miješaju (na visokim energijama, odnosno temperaturama, kada su njihove mase zanemarive). Ovakve struje karakteristika su modela baziranih na Nambu-Jona-Lasinio modelu, i linearnom sigma modelu, kao što su nedavni radovi [6] ili [3], u kojem se osim dilatona koristi i interpolirajuće polje koje regulira čestični sadržaj u modelu, ali opet, u kvarkovskom sektoru. Takvo polje i njegov efektivni potencijal uvedeni su i u ovom radu, ali za baždarni sektor, i iako se takvo polje ne može ograničiti unutarnjim simetrijama (kao što može npr. Polyakova petlja), ono je uspješno u dinamičkom generiranju veličina kao što su mase čestica.

3.2.2 Konformalna simetrija

Klasično, QCD akcija je invarijantna na transformacije skale tipa:

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow e^{-\lambda}x \\
 A_\mu^a(x) &\rightarrow e^{-\lambda}A_\mu^a(e^{-\lambda}x) \\
 \psi_f(x) &\rightarrow e^{-3\lambda/2}\psi_f(e^{-\lambda}x) \\
 \mathcal{L}(x) &\rightarrow e^{-4\lambda}\mathcal{L}(e^{-\lambda}x)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Koncept invarijantnosti teorije na skalu (njem. *eichinvarianz*) uveo je Weyl 1918. godine u namjeri pokušaja unifikacije teorija elektromagnetizma i gravitacije. Vektorska Noetherina struja povezana s ovom simetrijom

$$\mathcal{D}^\mu = T^{\mu\nu}x_\nu$$

naziva se strujom dilatacije. $T^{\mu\nu}$ je tenzor energije i impulsa i on je očuvan:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Očuvanje energije i momenta je posljedica translacijske invarijantnosti i ne ovisi o tome je li teorija invarijantna na skalu. U teorijama koje imaju simetriju invarijantnosti na skalu trag tenzora energije i impulsa iščezava:

$$\partial_\mu \mathcal{D}^\mu = (\partial_\mu T^{\mu\nu})x_\nu + T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 0$$

Međutim, na kvantnoj razini invarijantnost skale je slomljena. Naime, transformacijama prostorne skale posredno se transformira i energetska skala, i to, sukladno oznakama u (3.2), kao $\mu \rightarrow e^\lambda\mu$, pa teorija na drugoj energetskoj skali sadrži drugu renormaliziranu konstantu vezanja, i to pri infinitezimalnim transformacijama skale:

$$g_s \rightarrow g_s + \lambda\beta(g_s)$$

gdje je $\beta(g_s)$ QCD beta funkcija. Gustoća lagranžijana mijenja se kao:

$$\mathcal{L} \rightarrow \lambda\beta(g_s)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_s}$$

Tako, kad se uključe kvantne korekcije divergencija struje dilatacije (klasično očuvane, Noetherine struje), odnosno trag tenzora energije i impulsa postaje:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu = T^\mu{}_\mu = \frac{\beta(g_s)}{2g_s}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \left\{ \left(1 + \mu\frac{d}{d\mu}\right)m_f\bar{\psi}_f\psi_f \right\}$$

Ovdje dio u vitičastoj zagradi dolazi od masenog kvarkovskog sektora, i nije bitan za čistu Yang-Mills teoriju. Na razini srednjeg polja, neiščezavanje traga tenzora momenta energije i impulsa može se modelirati uvođenjem novog skalarnog - izoskalarnog dilatonskog polja χ [4], čiji se lagranžijan u najjednostavnijem obliku može prikazati kao zbroj kinetičkog dijela i efektivnog potencijala:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V_\chi$$

Oblik potencijala eksplicitno se dobije računanjem traga tenzora energije i impulsa, te zahtjevom da je proporcionalan sa χ^4 kroz bezdimenzionalnu konstantu $-B$, što je posljedica dimenzionalnosti skalarnog polja.

$$T^\mu{}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_\chi}{\partial \chi} \chi + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_\chi}{\partial (\partial^\mu \chi)} \partial_\mu \chi - 4 \mathcal{L}_\chi = 4V_\chi - \frac{\partial V_\chi}{\partial \chi} \chi = -B\chi^4$$

Rješavanjem diferencijalne jednačbe u zadnjoj jednakosti, uz zahtijevanje rubnog uvjeta $V_\chi(0) = 0$ dobiva se:

$$V_\chi = \frac{1}{4} B \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^4 \left[\ln \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^4 - 1 \right] \quad (3.3)$$

Dani potencijal ima minimum za $\chi = \chi_0$, i tamo $V_\chi(\chi_0) = \mathcal{E} = -\frac{B}{4}$, što predstavlja gustoću energije vakuuma, i usprkos tome što je lagranžijan kiralno simetričan on generira masu dilatona kroz mehanizam sličan onom Higgsovom, i u terminima QCD-a poistovijećuje se sa skalarnim 0^+ *glueballom*, s obzirom na to da je povezan sa gluonskim kondenzatom, odnosno neiščezavajućim tragom tenzora energije i impulsa.

4 Korišteni alati

4.1 Yang-Mills na konačnoj temperaturi

Analiza termodinamičkih veličina se vrši tako da se primjeti da se integrali po putevima (iz primjerice korelacijskih funkcija) u potpunosti mogu zamijeniti particijskim funkcijama, poznatim iz statističke fizike, ako se prijeđe u domenu tzv. imaginarnog vremena

$$e^{-\beta H} \leftrightarrow e^{iHt}$$

to jest, zamjenom vremena sa inverzom temperature pomnoženim imaginarnom jedinicom $t = i\beta = \frac{i}{T}$. Zbog toga se definira imaginarno vrijeme $\tau = it$, u kojemu fermionska i bozonska polja teorija tada postaju antiperiodička i periodička, redom, i to s periodom β :

$$\text{gluon} \rightarrow A_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) = A_\mu(\vec{x}, \tau)$$

$$\text{kvark} \rightarrow \psi_q(\vec{x}, \tau + \beta) = -\psi_q(\vec{x}, \tau)$$

Zahvaljujući tome, vremenska komponenta impulsa može se diskretizirati, i tada radeći Fourierov transformat, taj dio integrala particijske funkcije prelazi u sumu:

$$\text{gluon} : p_4 \rightarrow \omega_n = (2n + 1)\pi T$$

$$\text{kvark} : p_4 \rightarrow \omega_n = 2n\pi T$$

$$p \rightarrow p_n = (\omega_n, \vec{p})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$$

Ovdje se implicitno prešlo na Euklidsku konvenciju u kojoj $p_4 \equiv ip_0$. Može se napisati particijska funkcija za čistu Yang-Mills teoriju:

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}] = \text{Tr} \int \mathcal{D}[A] e^{-s[A]}$$

$$S[A] = \int_0^\beta dx_4 \int d^3\vec{x} \mathcal{L}_{\text{YM}}^{\text{Euc.}}$$

Trag operatora koji sadrži derivacije računa se prebacivanjem u prostor impulsa raspisivanjem Fourierovih komponenti polja:

$$A_\mu(\vec{x}, \tau) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} + \omega_n \tau)} A_\mu(\vec{p})$$

te integriranjem po koordinatnom prostoru.

4.2 Teorija srednjeg polja

Pod teorija srednjeg polja misli se naprosto da se kvantna polja zamijene svojim očekivanim vrijednostima, odnosno klasičnim poljima:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \sigma$$

U modelu koji je promatran u ovom radu to je implicitno, pošto je promatrano polje zapravo već očekivana vrijednost, i to traga tenzora energije i impulsa:

$$\chi \equiv \left\langle \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \right\rangle$$

5 Model

Sastavna polja modela su efektivno gluonsko polje A_μ , dilatonsko polje χ te interpolirajuće polje b (od engl. *bag*, vreća), koje nema svoj kinematički doprinos, odnosno ne predstavlja stvarnu česticu, tako da:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\text{int}} - V_b - V_\chi$$

gdje:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= -\frac{1}{4} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \\ \mathcal{L}_\chi &= \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \frac{1}{2} G_A^2 \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

Dilatonski potencijal dan je jednadžbom (3.3), dok je potencijal b polja sličan klasičnom goldstoneovom modelu:

$$V_b = -\frac{k_b^2}{2} b^2 + \frac{\lambda_b}{4} b^4$$

5.1 Postavke modela

Ukupni termodinamički potencijal iznosi:

$$\Omega = \Omega_A + \Omega_\chi + V_\chi + V_b \quad (5.1)$$

Dilatonsko polje χ u modelu predstavlja *glueball* (točnije, gluonski kondenzat - $\langle \chi \rangle \sim \langle G^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \rangle$), i on ovdje služi kao parametar uređenja za slamanje invarijantnosti skale. Konstanta $\chi_0 = \langle \chi \rangle_{T=0}$ je očekivana vrijednost dilatonskog polja u vakuumu, a B konstanta vreće, i oni su fiksirani gustoćom energije vakuuma \mathcal{E} i masom *glueballa* \mathcal{M}_χ . U ovom modelu pola gustoće energija vakuuma predano je b a pola χ polju:

$$\frac{3k_b^4}{4\lambda} = \frac{B}{4} = \frac{\mathcal{E}}{2}; \quad \mathcal{M}_\chi^2 = \frac{\partial^2 V_\chi}{\partial \chi^2} = \frac{4B}{\chi_0^2} \quad (5.2)$$

Vakuumska vrijednost b polja je $b_0 = \sqrt{\frac{k_b^2}{\lambda}}$. Termodinamički potencijali gluona i dilatona iznose $-T \ln(Z)$ i one su, redom:

$$\begin{aligned}\Omega_A &= -\gamma_A \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \ln(1 + n_A) \\ \Omega_\chi &= -\gamma_\chi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \ln(1 + n_\chi)\end{aligned} \quad (5.3)$$

Ovdje su $\gamma_A = 2(N_c^2 - 1) = 16$ i $\gamma_\chi = 1$ faktori degeneracije gluona i dilatona. U γ_A faktor 2 dolazi od spinskih (točnije helicitetnih) stupnjeva slobode, i faktor

$(N_c^2 - 1) = 8$ od stupnja slobode boje, pa tako ima 16 gluona. Distribucijske funkcije, i pripadajuće energije su:

$$\begin{aligned} n_A &= \frac{1}{e^{\frac{E_A}{T}} - 1} \theta(\vec{p}^2 - b^2) & n_\chi &= \frac{1}{e^{\frac{E_\chi}{T}} - 1} \theta(b^2 - \vec{p}^2) \\ E_A &= \sqrt{\vec{p}^2 + \mathcal{M}_A^2} & E_\chi &= \sqrt{\vec{p}^2 + \mathcal{M}_\chi^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ovdje je očito čemu služi polje b - ono surpresira gluonske stupnjeve slobode do određene vrijednosti impulsa, nakon koje oni postaju dekonfinirani. Efektivna masa gluona definirana je preko interakcije s dilatonima kao $\mathcal{M}_A = G_A \frac{\chi}{\chi_0}$, gdje je $G_A = \frac{\mathcal{M}_\chi}{2} = 850$ MeV konstanta vezanja dilatona na polje konstituentnih gluona, i ona iznosi točno pola mase dilatona u vakuumu, jer u modelu glueball čine dva masivna gluona.

5.2 Jednadžbe procjepa

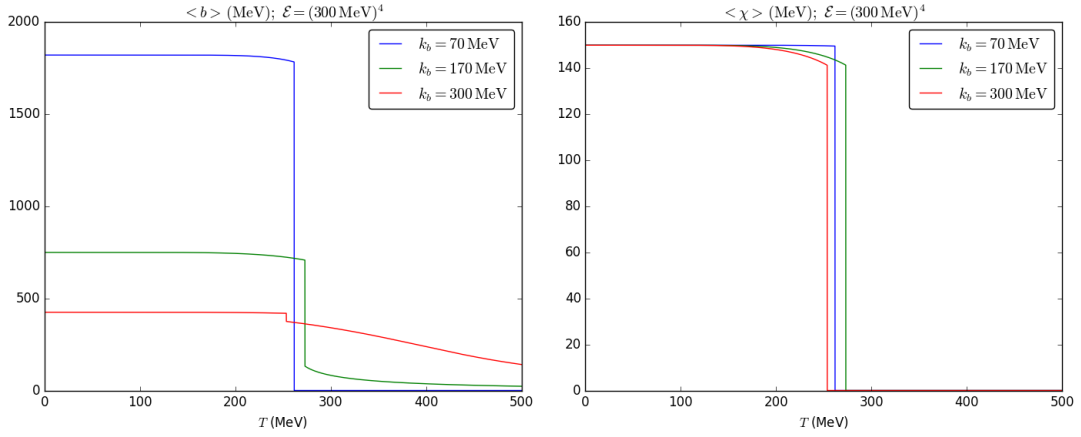
Kako su očekivane vrijednosti polja Landauovi parametri uređenja, za njih vrijede jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} = 0 &= B \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^3 \ln \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^4 + \gamma_A \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{M}_A}{E_A} G_A n_A \\ \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0 &= T \frac{b^2}{2\pi^2} \left[\gamma_A \ln(1 + f_A) - \gamma_\chi \ln(1 + f_\chi) \right]_{\vec{p}^2=b^2} - k_b b + \lambda_b b^3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Kao pokrata uvedene su funkcije $f_{A,\chi} = (e^{\frac{E_{A,\chi}}{T}} - 1)^{-1}$. Jednadžbe ravnoteže vrijede jer se očekuje da parametri uređenja iščezavaju, ili su barem jako mali nakon T_c , što implicira nepostojanje linearnog člana u Landauovom razvoju.

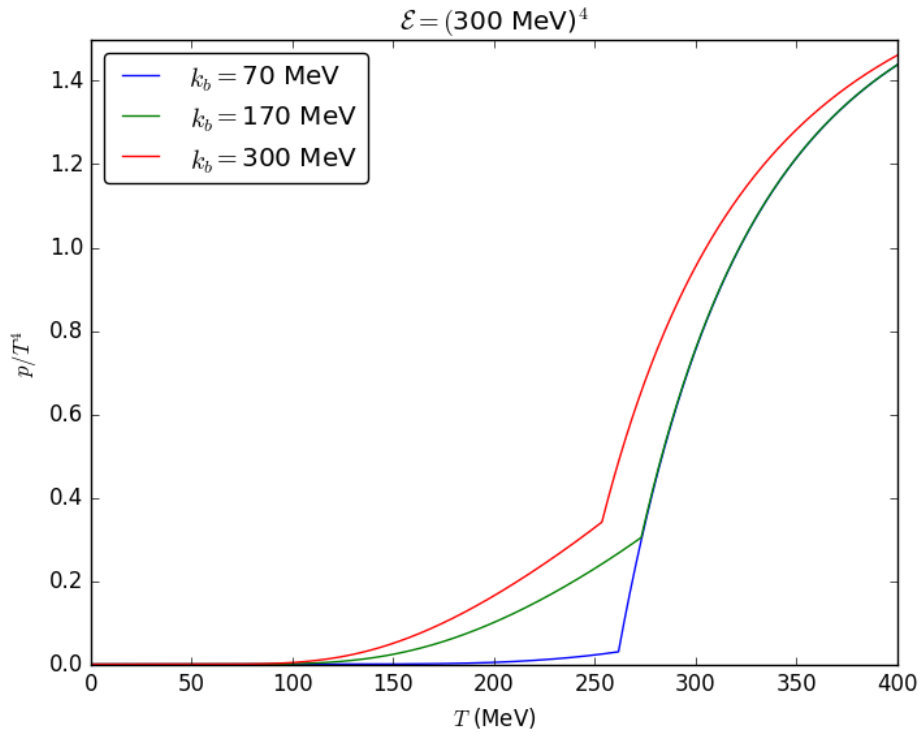
5.3 Rezultati

Ako se temperatura fiksira, termodinamički potencijal se može shvatiti kao funkcija dva polja, i tada on ima lokalne minimume, čiji položaji ovise o vrijednosti temperature. Kako se gustoća energije u vakuumu drži konstantnom za b polje, konstanta λ fiksirana je sa konstantom k_b , pa je dovoljno mijenjati samo k_b . Sama ukupna gustoća energije vakuuma ima veliku neodređenost, a kako npr. položaj kritične temperature ovisi o njoj ona je ovdje isto shvaćena kao slobodni parametar, unutar granica danih u [5]. Tako je za početak uzeta vrijednost $\mathcal{E} = (300 \text{ MeV})^4$ te je variran parametar k_b na skali usporedivoj onoj u [3]. Za minimume polja numerički su dobiveni rezultati prikazani na slici (5.1), na kojoj se vidi da kritična temperatura raste kako vrijednost k_b pada, sve do jedne vrijednosti, nakon koje kritična temperatura jako slabo pada sa k_b . To je zato jer postoje tri minimuma u potencijalu, od kojih je jedan u $(b, \chi) = (0, 0)$ i on postane dominantan za visoke temperature kroz termodinamičke potencijale dilatona i gluona za dovoljno nisku vrijednost k_b , što se jasno vidi na usporedbi plotova



Slika 5.1: Polja b i χ za tri različite vrijednosti parametra k_b , uz $\mathcal{E} = (300 \text{ MeV})^4$

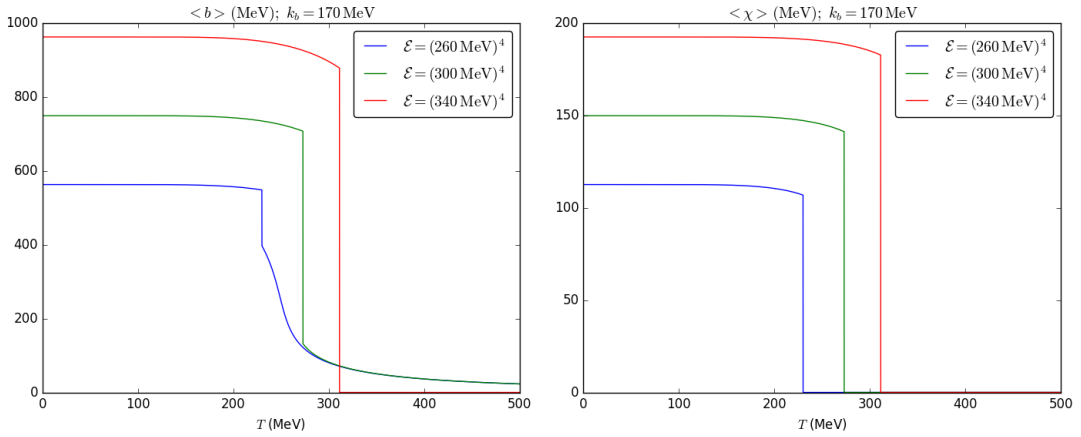
termodinamičkih potencijala za $k_b = 270 \text{ MeV}$ i $k_b = 70 \text{ MeV}$ na slikama (5.5) i (5.6), na stranicama 19 i 20, redom. Uz $p(T) = -\Omega(\chi_{\min}, b_{\min}, T)$ za ovakva polja dobiva se ovisnost pritiska o temperaturi kao na slici (5.2).



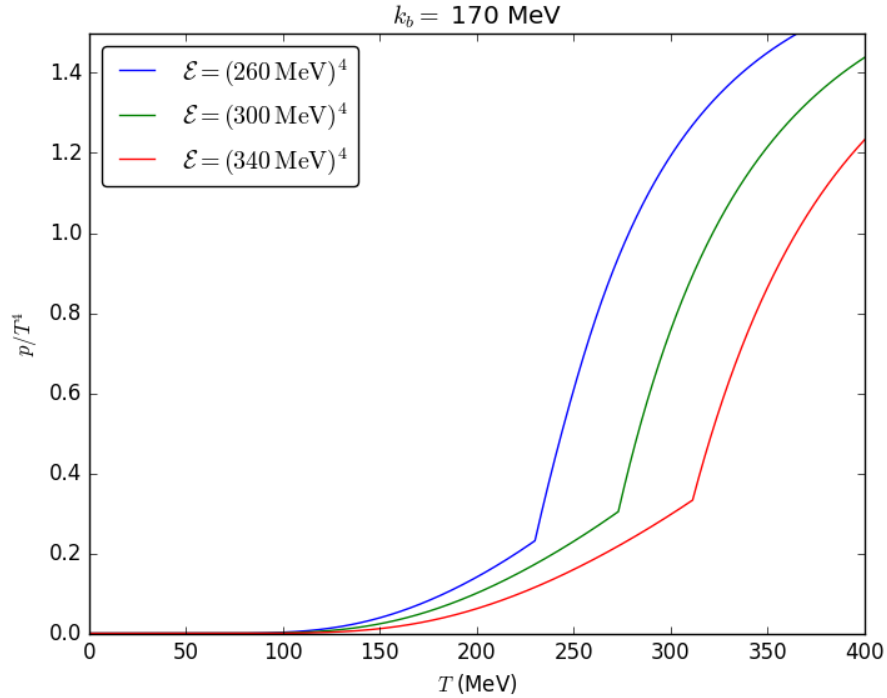
Slika 5.2: Yang-Mills pritisak u ovisnosti o temperaturi, za tri različite vrijednosti parametra k_b , uz $\mathcal{E} = (300 \text{ MeV})^4$

Kao što je rečeno, za još niže vrijednosti k_b kritična temperatura se snižava sa k_b . To je zato jer sa $b = 0$ dilatoni iščezavaju i ostaju samo gluoni, pa krivulja tlaka prati onu čistog gluonskog plina. Slična analiza se može ponoviti tako da se fiksira parametar k_b , a varira vakuumska gustoća energije, unutar dopuštenih vrijednosti. Izabrana je vrijednost $k_b = 170 \text{ MeV}$ jer se nalazi otprilike oko vrijednosti koja je granica između režima u kojemu potencijal ima minimum za $b = 0$, i onog u kojemu b

ipak ne iščezne sasvim. Rezultati su prikazani na slikama (5.3) i (5.4).

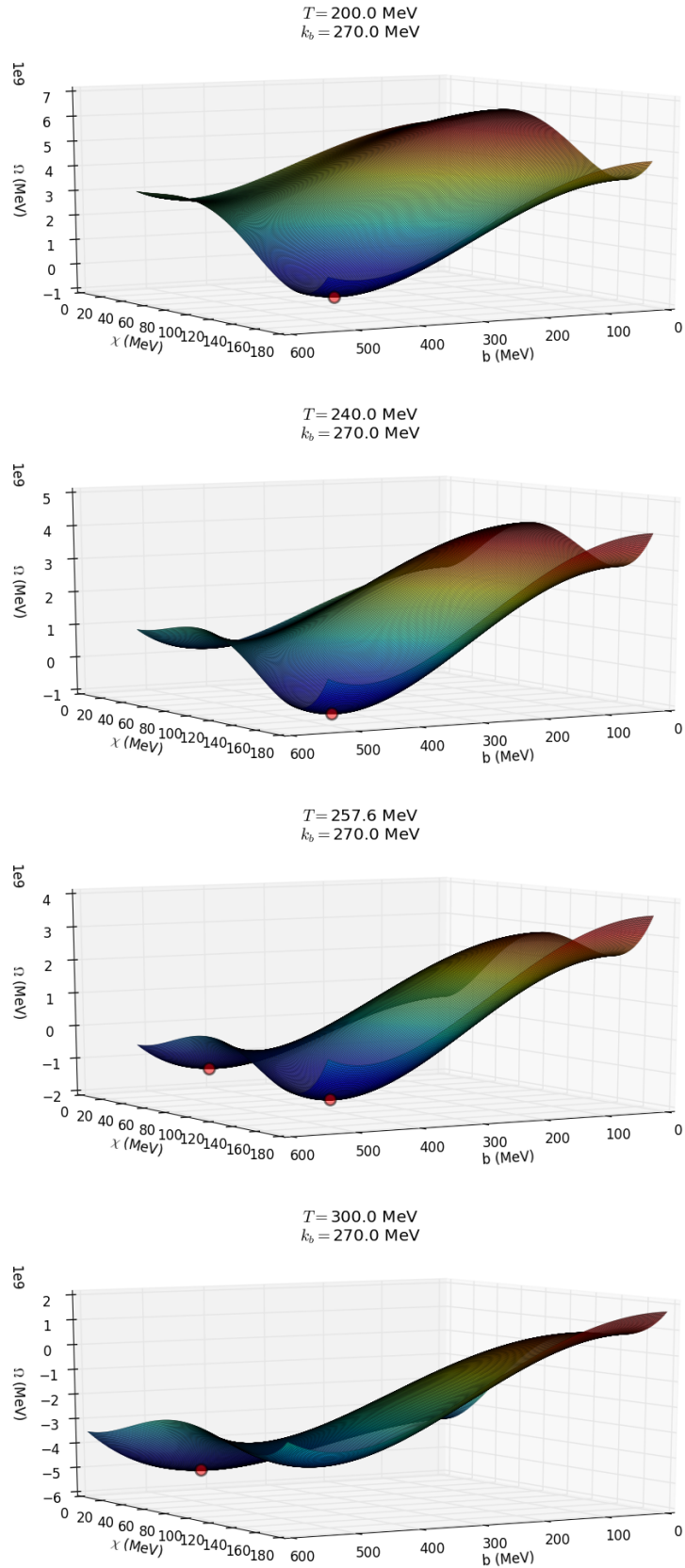


Slika 5.3: Polja b i χ za tri različite vrijednosti parametra \mathcal{E} , uz $k_b = 170$ MeV

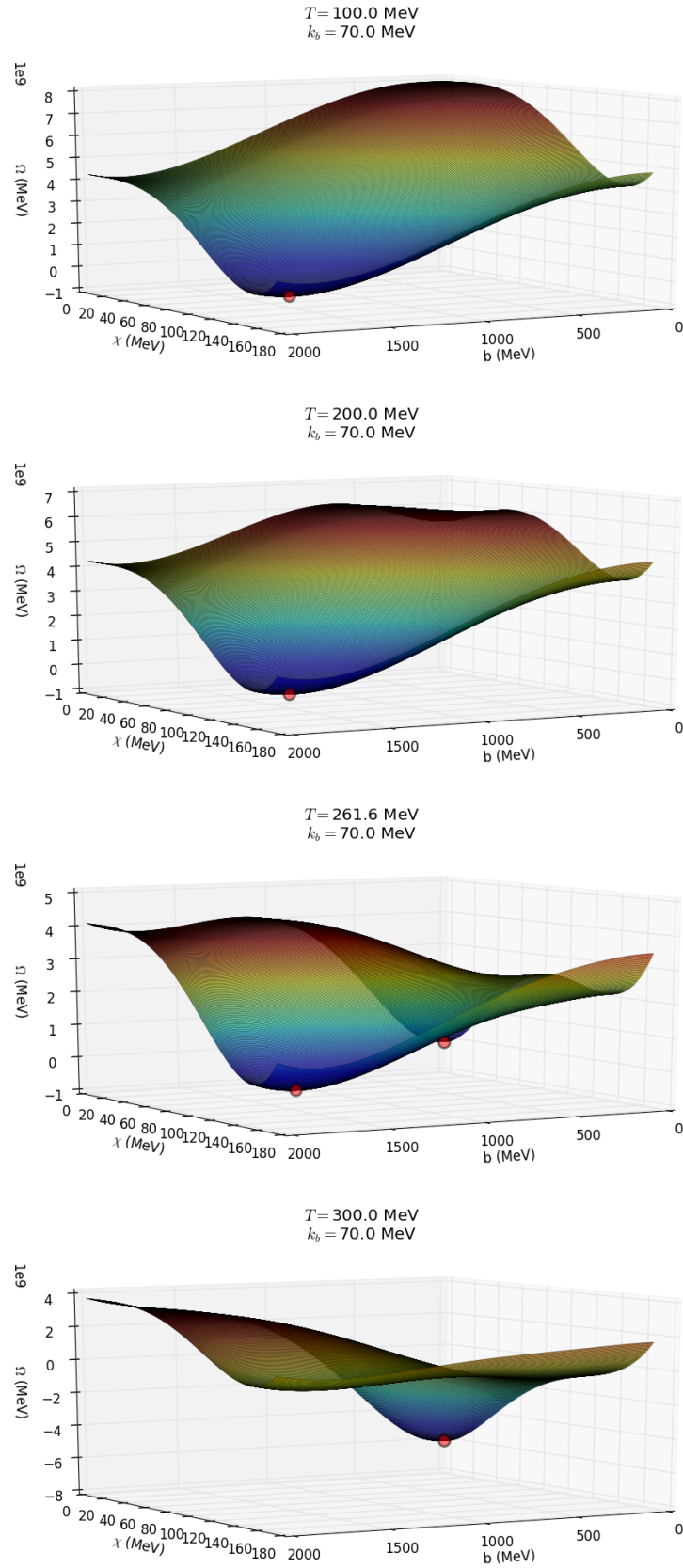


Slika 5.4: Yang-Mills pritisak u ovisnosti o temperaturi, za tri različite vrijednosti parametra \mathcal{E} , uz $k_b = 170$ MeV

Može se zaključiti da najniža vrijednost k_b nakon koje potencijal ima minimum za $b = 0$ ovisi o vakuumske gustoći energije, i ona raste sa gustoćom energije. Npr. za $\mathcal{E} = (340 \text{ MeV})^4$ vrijednost $k_b = 170$ MeV je ispod te vrijednosti, dok je za druge dvije crtane vrijednosti ona iznad. Ako bi se b gledao kao paramter uređenja, to znači da za je niske k_b prijelaz grub i prvog reda, dok bi se za visoke vrijednosti mogli postići blaži prijelazi prvog reda.



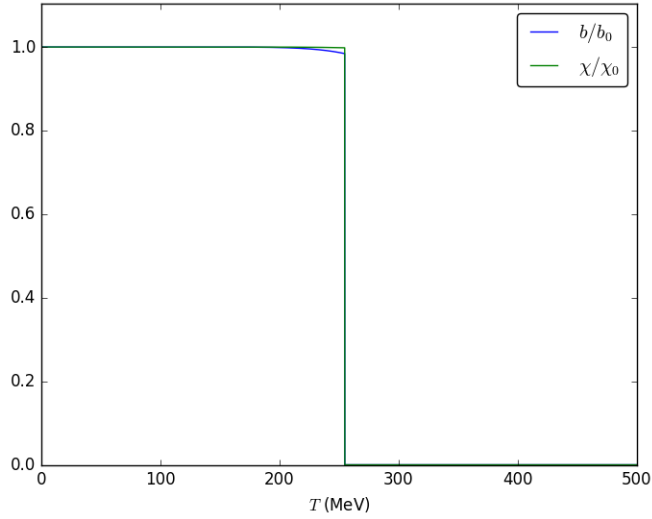
Slika 5.5: Ovisnost termodinamičkog potencijala o očekivanim vrijednostima polja za $k_b = 270 \text{ MeV}$ i $\mathcal{E} = (300 \text{ MeV})^4$ za četiri različite temperature, dvije prije, jednu točno na i jednu poslije prijelaza, sa minimumima označenim crvenim krugom



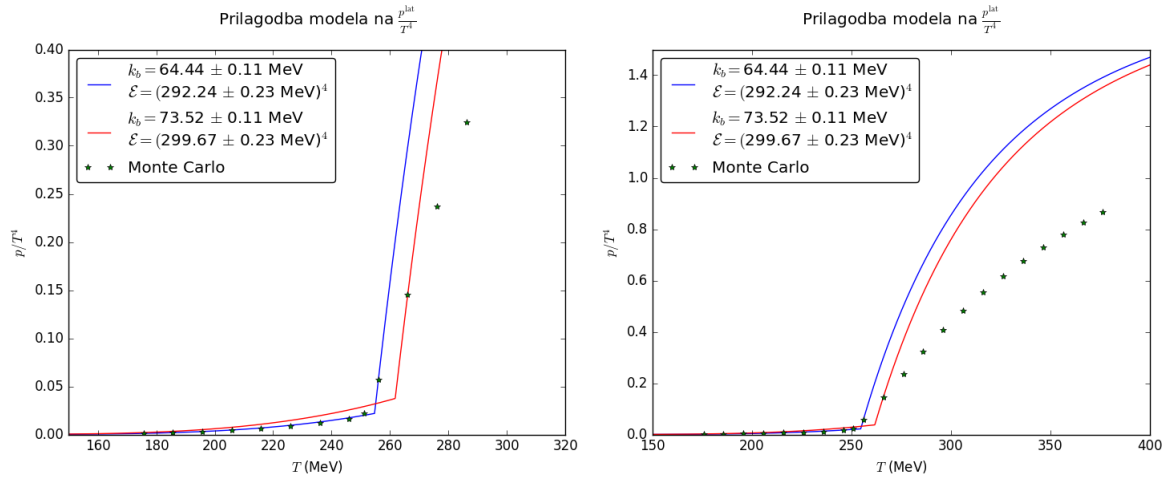
Slika 5.6: Ovisnost termodinamičkog potencijala o očekivanim vrijednostima polja za $k_b = 70 \text{ MeV}$ i $\mathcal{E} = (300 \text{ MeV})^4$ za četiri različite temperature, dvije prije, jednu točno na i jednu poslije prijelaza, sa minimumima označenim crvenim krugom

5.4 Prilagodba na Monte Carlo podatke

Rezultati računa na rešetci preuzeti su iz [7], dok je prije izdavanja tog rada najrelevantniji bio [8]. Prilagodba je rađena na parametre k_b i \mathcal{E} , i to na način da su se od vrijednosti Monte Carlo tlakova oduzimale vrijednosti tlakova modela, te se razlika kvadrirala i onda kvadrat sumirao. Rješenja su parovi parametara za koje je ova suma najmanja. Prikazana su na slikama (5.7), (5.8), (5.9) i (5.10). Prilagodba je rađena



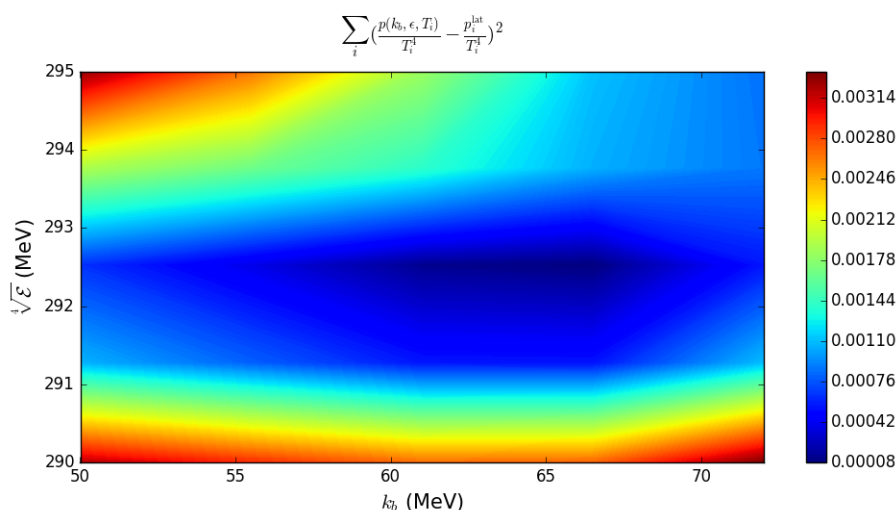
Slika 5.7: Normirana polja za fit na 10 točaka, koji bolje opisuje ponašanje za $T < T_c$



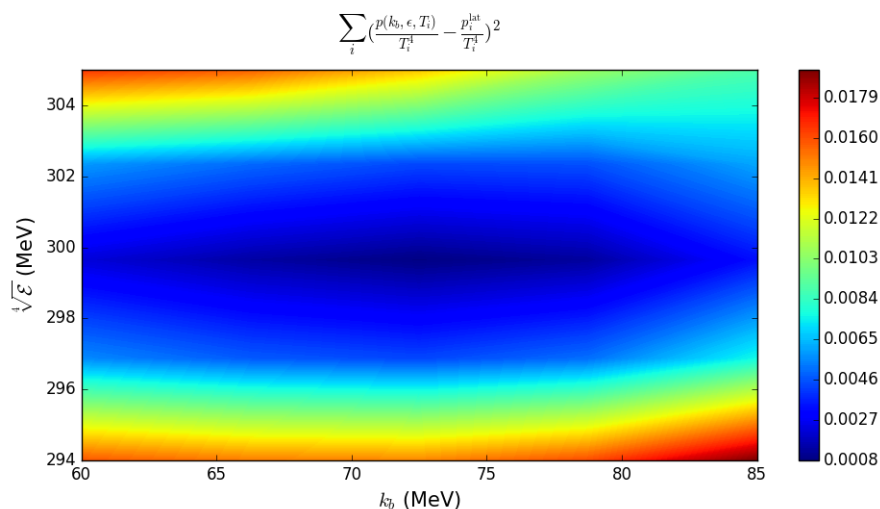
Slika 5.8: Prilagodba modela na Monte Carlo podatke za 10 i 11 točaka, od one za najnižu temperaturu

na prvih 10 i prvih 11 točaka podataka, redom, i dobivene kritične temperature usporedivši sa *lattice* vrijednostima su $T_c \approx 1.01T_c^{\text{lat}}$ i $T_c \approx 1.05T_c^{\text{lat}}$. Problem prilikom prilagodbe je što se najbolje slaganje za niske temperature dobiva za vrijednosti k_b za koje nakon prijelaza termodinamički potencijal ima minimum u $b = 0$, što znači da odmah nakon prijelaza nastupa slobodni gluonski plin (jaki prijelaz prvog reda), koji

sam prebrzo ide u Stefan-Boltzmannovu granicu, iako ima točan limes. Čak i kada b ne bi iščezavao, masa dilatona je tolika da doprinosi dovoljno da svejedno digne pritisak dosta iznad Monte Carlo podataka, a gluonski termodinamički potencijal nema dovoljnu infracrvenu (IR od eng. *infrared*) osjetljivost, što se vidi iz razvoja iz Dodatka A, gdje je dodana i masa gluona m_g u pokušaju obuzdavanja gluonskog plina, ali rezultat je da bi i neiščezavajući IR *cutoff* i masa gluona morali biti reda veličine temperature na kojoj se promatra integral, što je jako nefizikalno. Treba i spomenuti da, iako theta funkcije u termodinamičkim potencijalima impliciraju da su dilatoni dominantni mod prije kritične temperature, a praktički iščezavaju nakon, i obrnuto s gluonima, to nije tako. Dilatonski pritisak nestaje nakon kritične temperature, ali i prije nje on je za red veličine manji od gluonskog pritiska, tako da, iako u neperturbativnom režimu postoji jako dobro slaganje sa podacima, kvalitativno ovaj model ne opisuje dobro konfinaciju.



Slika 5.9: Suma kvadrata razlike modela i podataka za 10 točaka



Slika 5.10: Suma kvadrata razlike modela i podataka za 11 točaka

6 Zaključak

Promatran je model s efektivnim gluonima, dilatonom i interpolirajućim poljem vreće kojemu je zadatak bio potisnuti gluonske stupnjeve slobode na temperaturama nižim od kritične. Pokazano je da interpolirajuće polje nije u tome uspješno u obliku u kojem je ovdje predstavljeno, s obzirom na to da su gluonski stupnjevi slobode svejedno za red veličine jači od onog dilatonskog. Uspjeh modela je što se može napraviti dobra prilagodba na podatke za pritisak nedavno objavljenog QCD *lattice* računa s fizikalnom vrijednošću mase dilatona od 1700 MeV-a, i to na prvih 10 točaka, počevši od najniže. Bez polja vreće ta vrijednost bi bila 2 do 3 puta veća, a dilatonski pritisak neprimjetan, sve do jako visokih temperatura. Za prilagodbu na veći broj točaka neperturbativni režim do kritične temperature loše je predviđen. Razlog tome je neosjetljivost gluonskog termodinamičkog potencijala na postavljenu granicu u infracrvenom području. Suzbijanju gluonskih stupnjeva slobode na visokim temperaturama bi mogla pomoći drugačija raspodjela vakuumske energije, gdje bi se veći udio predao potencijalu interpolirajućeg polja, što bi rezultiralo mogućnošću da proučavani parametar potencijala interpolirajućeg polja poprimi dovoljno nisku vrijednost bez da očekivana vrijednost interpolirajućeg polja na konačnoj temperaturi iščezava nakon faznog prijelaza. Također, polju vreće bi se mogao promijeniti oblik dodavanjem još jednog člana u potencijalu koji opisuje interpolirajuće polje.

Dodaci

Dodatak A Termodinamika gluona konačne mase

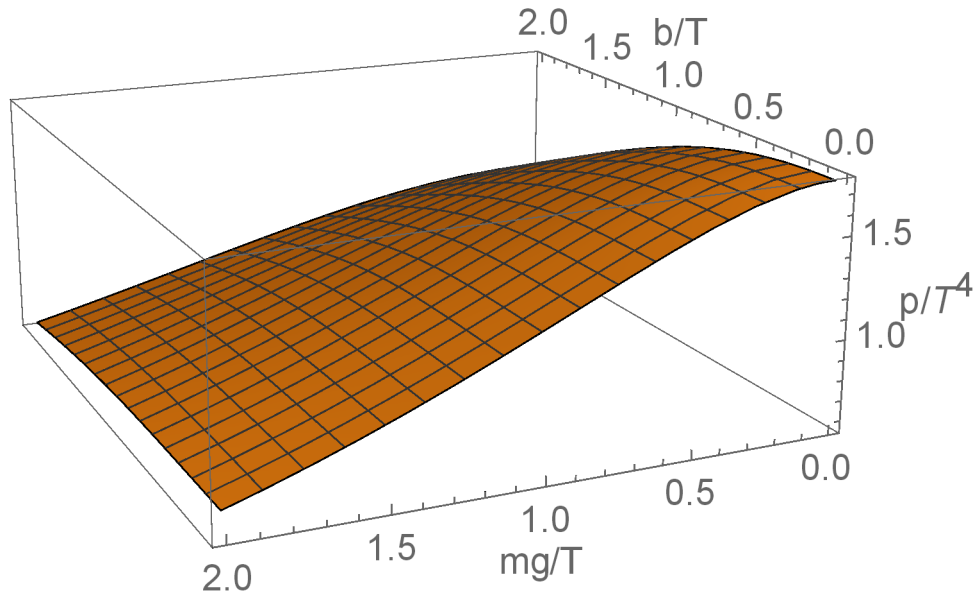
Kako prilagodba nije dobra za veći broj točaka na $T > T_c$, vrijedi istražiti uzrok pomoću Taylorovog razvoja tako da postuliramo (malu) masu gluona. Za malu, ali konačnu masu, uz $\mathcal{M}_A = G_A \frac{x}{\chi_0} \approx 0$ (što se očekuje za visoke temperature) vrijednost p/T^4 dolazi samo od gluonskog dijela:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\gamma_A}{T^4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} T \ln(1 + n_A) &= 16 \int_b^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \ln\left(1 - e^{\sqrt{p^2 + (m_g/T)^2}}\right) \\
 &= 16 \int_{\sqrt{b^2 + \frac{m_g^2}{T^2}}}^\infty dx \frac{x \sqrt{x^2 - (m_g/T)^2}}{2\pi^2} \ln(1 - e^x) \quad (\text{A.1}) \\
 &\approx 16 \int_{\sqrt{b^2 + \frac{m_g^2}{T^2}}}^\infty dx \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_g}{x}\right)^2\right)}{2\pi^2} \ln(1 - e^x)
 \end{aligned}$$

što daje, u razvoju za male $\frac{b}{T}$ i $\frac{m_g}{T}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{T^4} &\approx \left[\frac{8\pi^2}{45} - \frac{4}{3} \frac{m_g^2}{T^2} + \frac{m_g^3}{T^3} \left(\frac{64}{9\pi^2} - \frac{16 \ln\left(\frac{m_g}{T}\right)}{3\pi^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_g^4}{T^4}\right) \frac{b^2}{T^2} \right] \\
 &+ \left[\frac{2 \ln\left(\frac{m_g}{T}\right)}{\pi^2 \frac{m_g}{T}} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{m_g}{12\pi^2 T} - \frac{m_g^3}{1440\pi^2 T^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m_g^4}{T^4}\right) \right] \frac{b^4}{T^4} + \mathcal{O}\left(\frac{m_g^4}{T^4}, \frac{b^5}{T^5}\right) \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

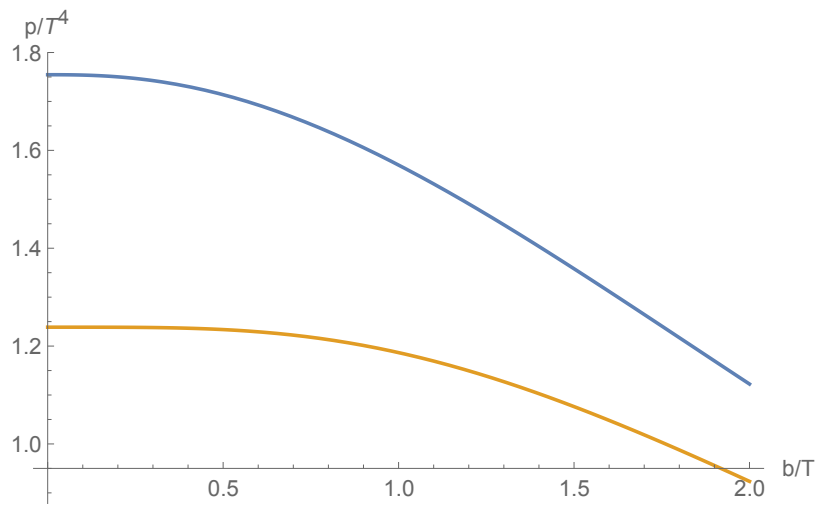
Može se crtati vrijednost tlaka u ovisnosti mase gluona i vrijednosti b , odnosno IR *cutoffa*, kao na slici (A.1). Za $m_g = 0$ može se provjeriti limes za visoke temperature,



Slika A.1: Vrijednost tlaka za $\frac{b}{T} \ll 1$ i $\frac{m_g}{T} \ll 1$

i on se slaže sa Stefan-Boltzmann granicom, slika (A.2). Vrijednosti na kojima se

moгу reproducirati podatke *lattice* računa na području $T \gtrsim T_c$ nisu fizikalne, ni za masu gluona, niti za IR *cutoff*. Također se time gubi dobar limes koji postoji bez umjetne mase ili *cutoffa*.



Slika A.2: Plava linija - $m_g/T = 0$, narančasta - $m_g/T = 1$

Dodatak B Prilagodba programskim jezikom "Julia"

```
using Cubature
using PyPlot
using NLSolve
ion()
```

```
const M_chi = 1700.::Float64;
const G_A = M_chi/2.::Float64;
const alpha = 1.::Float64;
```

Lattice podatci

```
f = open("latticeBor.txt")
podaci = readlines(f)
close(f)
```

```
lattice = Array{Float64} (length(podaci)-15,5)
for i = 1:(size(lattice,1))
    lattice[i,1] = parse(Float64, split(podaci[i+1])[1])
    lattice[i,2] = parse(Float64, split(split(podaci[i+1])[2], "(")[1])
    lattice[i,3] = parse(Float64, split(split(podaci[i+1])[2],
"(")[2][1:end-1])*10.0^(-(length(split(split(podaci[i+1])[2], "(")[1])-2)))
    lattice[i,4] = parse(Float64, split(split(podaci[i+1])[3], "(")[1])
    lattice[i,5] = parse(Float64, split(split(podaci[i+1])[3],
"(")[2][1:end-1])*10.0^(-(length(split(split(podaci[i+1])[3], "(")[1])-2)))
end
```

Definicije funkcija

```
function dis(p2::Float64, m::Float64, T::Float64)
    return (exp(sqrt(p2 + m^2)/T) - 1)^(-1)
end
```

```
function M_A(chi::Float64, E_d::Float64)
    chi_0 = 4*sqrt(E_d/2)/M_chi
    return chi*G_A/chi_0
end
```

```
function gapbT(chi::Float64, b::Float64, T::Float64, E_d::Float64, k_b::Float64)
    chi_0 = 4*sqrt(E_d/2)/M_chi
    lam_b = k_b^4/(2*E_d)
    b_0 = k_b/sqrt(lam_b)
    A = 0.
    if ((chi < 1.e-30)&&(b < 1.e-12))
        A = (- 1*log(1 + dis(alpha^2*b^2, M_A(chi, E_d), T)))*alpha^3*T*b^2/(2*pi^2) -
k_b^2*b + lam_b*b^3
    else
        A = ((16*log(1 + dis(alpha^2*b^2, M_A(chi, E_d), T)) - 1*log(1 +
dis(alpha^2*b^2, M_A(chi, T)))*alpha^3*T*b^2/(2*pi^2) - k_b^2*b + lam_b*b^3)
```

```

end
return A
end

function gapchiT(chi::Float64, b::Float64, T::Float64, E_d::Float64, k_b::Float64)
    chi_0 = 4*sqrt(E_d/2)/M_chi
    lam_b = k_b^4/(2*E_d)
    b_0 = k_b/sqrt(lam_b)
    A = 0.
    if (chi < 1.e-30)
        A = (16*G_A*M_A(chi, E_d)/(2*pi^2))*hquadrature(x ->
            (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_A(chi,
            E_d)^2)/T)-1)*(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_A(chi, E_d)^2)))/(2*(1-x[1])^2),
            [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], [1], abstol=1e-5)[1]
    else
        A = 2*E_d*(chi/chi_0)^3*log((chi/chi_0)^4) + (16*G_A*M_A(chi,
            E_d)/(2*pi^2))*hquadrature(x -> (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) +
            M_A(chi, E_d)^2)/T)-1)*(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_A(chi, E_d)^2)))/(2*(1-x[1])^2),
            [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], [1], abstol=1e-5)[1]
    end
    return A
end

function tmp(chi::Float64, b::Float64, T::Float64, E_d::Float64, k_b::Float64)
    chi_0 = 4*sqrt(E_d/2)/M_chi
    lam_b = k_b^4/(2*E_d)
    b_0 = k_b/sqrt(lam_b)
    A = 0.

    if (chi < 1.e-30)
        A = - k_b^2*b^2/2 + lam_b*b^4/4 - 1*T*hquadrature(x ->
            (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 + 1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_chi^2)/T) -
            1))/(1-x[1])^2, [0], [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2) -
            16*T*hquadrature(x -> (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 + 1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) +
            M_A(chi, E_d)^2)/T) - 1))/(1-x[1])^2, [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], [1],
            abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2) - (E_d/2)*(chi/chi_0)^4
    else
        A = - k_b^2*b^2/2 + lam_b*b^4/4 - 1*T*hquadrature(x ->
            (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 + 1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_chi^2)/T) -
            1))/(1-x[1])^2, [0], [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2) -
            16*T*hquadrature(x -> (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 + 1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) +
            M_A(chi, E_d)^2)/T) - 1))/(1-x[1])^2, [alpha^2*b^2/(1 + alpha^2*b^2)], [1],
            abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2) + (E_d/2)*(log((chi/chi_0)^4)-1)*(chi/chi_0)^4
    end
    return A
end
end

```

```

function tmpgluon(chi::Float64, b::Float64, T::Float64)
    return (- 16*T*hquadrature(x -> (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 +
    1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_A(chi)^2)/T) - 1))/(1-x[1])^2, [alpha^2*b^2/(1 +
    alpha^2*b^2)], [1], abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2) +
    (E_d/2)*(log((chi/chi_0)^4)-1)*(chi/chi_0)^4 - k_b^2*b^2/2 + lam_b*b^4/4)
end

```

```

function tmpball(chi::Float64, b::Float64, T::Float64)
    return (- 1*T*hquadrature(x -> (sqrt((x[1]/(1-x[1])))/2)*log(1 +

```

```

1/(exp(sqrt((x[1]/(1-x[1])) + M_chi^2)/T) - 1))/(1-x[1])^2, [0], [alpha^2*b^2/(1 +
alpha^2*b^2)], abstol=1e-5)[1]/(2*pi^2)
end

function tmpb(chi::Float64, b::Float64, T::Float64)
    return (- k_b^2*b^2/2 + lam_b*b^4/4)
end

function tmpchi(chi::Float64, b::Float64, T::Float64)
    return ((E_d/2)*(log((chi/chi_0)^4)-1)*(chi/chi_0)^4)
end

```

```

function ttofield(chif, bf, T::Float64, range, korak::Float64)
    a=1.
    b=1.
    for i in 1:length(range)
        if T == range[i]
            a = chif[i]
            b = bf[i]
        end
    end
    return [a, b]
end

```

Polja

```

function lhs1(T, E_d, k_b)
    function f!(x, fvec)
        fvec[1] = gapchiT(x[1], x[2], T, E_d, k_b)
        fvec[2] = gapbT(x[1], x[2], T, E_d, k_b)
    end
    return f!
end

```

```

function fields(k_in::Float64, Ed_in::Float64, temp::Float64)

    trange = 1.:0.1:temp
    chi_0 = 4*sqrt(Ed_in/2)/M_chi
    b_0 = k_in/sqrt(k_in^4/(2*Ed_in))

    b = [0. for i in trange]
    chi = [0. for i in trange]
    b_1 = [0. for i in trange]
    chi_1 = [0. for i in trange]
    b_2 = [0. for i in trange]
    chi_2 = [0. for i in trange]

    rezultat1 = nlsolve(lhs1(1., Ed_in, k_in), [chi_0; b_0])
    rezultat2 = nlsolve(lhs1(1., Ed_in, k_in), [1.e-8; b_0])
    b_1[1] = rezultat1.zero[2]
    chi_1[1] = rezultat1.zero[1]
    b_2[1] = rezultat2.zero[2]

```

```

chi_2[1] = rezultat2.zero[1]
b[1] = b_1[1]
chi[1] = chi_1[1]

k = 2
sw = 0

while (k <= length(trange))
  if (sw < 15)
    rezultat1 = nlsolve(lhs1(trange[k], Ed_in, k_in), [chi_1[k-1];
b_1[k-1]], ftol = 1.e-3)
    b_1[k] = rezultat1.zero[2]
    chi_1[k] = rezultat1.zero[1]
    rezultat2 = nlsolve(lhs1(trange[k], Ed_in, k_in), [chi_2[k-1];
b_2[k-1]], ftol = 1.e-3)
    b_2[k] = rezultat2.zero[2]
    chi_2[k] = rezultat2.zero[1]
    broj = 0
    while((converged(rezultat2) == false)&&(b_2[k] - broj*b_0/20. > 0))
      rezultat2 = nlsolve(lhs1(trange[k], Ed_in, k_in), [chi_2[k]; b_2[k]
- broj*b_0/20.], ftol = 1.e-3)
      b_2[k] = rezultat2.zero[2]
      chi_2[k] = rezultat2.zero[1]
      broj = broj + 1
      if b_2[k]<0 b_2[k] = - b_2[k] end
    end

    if broj>0 print("\n", trange[k], " ", b_2[k], " ", chi_2[k], "\n") end
    else
      rezultat2 = nlsolve(lhs1(trange[k], Ed_in, k_in), [chi_2[k-1];
b_2[k-1]], ftol = 1.e-3)
      b_1[k] = k_in/sqrt(k_in^4/(2*Ed_in))
      chi_1[k] = chi_0
      b_2[k] = rezultat2.zero[2]
      chi_2[k] = rezultat2.zero[1]
      broj = 0
      while((converged(rezultat2) == false)&&(b_2[k] - broj*b_0/20. > 0))
        rezultat2 = nlsolve(lhs1(trange[k], Ed_in, k_in), [chi_2[k]; b_2[k]
- broj*b_0/20.], ftol = 1.e-3)
        b_2[k] = rezultat2.zero[2]
        chi_2[k] = rezultat2.zero[1]
        broj = broj + 1
        if b_2[k]<0 b_2[k] = - b_2[k] end
      end
    end
  end

  if (converged(rezultat1) == false)
    sw = sw + 1
  end

  if sw < 15
    A = tmp(chi_1[k], b_1[k], trange[k], Ed_in, k_in)
    B = tmp(chi_2[k], b_2[k], trange[k], Ed_in, k_in)
    C = tmp(0., 0., trange[k], Ed_in, k_in)
    if ((A < B)&&(A < C))
      b[k] = b_1[k]
      chi[k] = chi_1[k]
    end
  end
end

```

```

elseif ((B < A)&&(B < C))
    b[k] = b_2[k]
    chi[k] = chi_2[k]
else
    b[k] = 0.
    chi[k] = 0.
end
else
    B = tmp(chi_2[k], b_2[k], trange[k], Ed_in, k_in)
    C = tmp(0., 0., trange[k], Ed_in, k_in)
    if (B < C)
        b[k] = b_2[k]
        chi[k] = chi_2[k]
    else
        b[k] = 0.
        chi[k] = 0.
    end
end
end

if ((converged(rezultat2) == false)&&(converged(rezultat1) == false))
    print(trange[k], " 1. ", converged(rezultat1), " 2. ",
converged(rezultat2), "\n")
end

k = k + 1

end
return (b, chi, trange)
end

```

```

function pressure(T::Array, params::Array)
    ind = 1
    press = Array{Float64}(length(T))
    finT = T[length(T)]
    res = fields(params[1], params[2], finT)
    for i in 1:length(T)
        for j in 1:length(res[3])
            if round(res[3][j]*10.)/10. == round(T[i]*10.)/10.
                ind = j
            end
            j = j + 1
        end
        fieldb0 = res[1][1]
        fieldchi0 = res[2][1]
        fieldb = res[1][ind]
        fieldchi = res[2][ind]
        A = tmp(fieldchi, fieldb, T[i], params[2], params[1])
        B = tmp(fieldchi0, fieldb0, 1., params[2], params[1])
        press[i] = - (A - B)/T[i]^4
    end
    return press
end

```

```

function lhs2(x::Array, xdata, ydata)
    press = pressure(xdata, x)

```

```

lsq = 0.
for i in 1:length(press)
    lsq = lsq + (press[i] - ydata[i])^2
end
return lsq
end

```

```

n = 50 #dimenzija rešetke
k_b = linspace(50., 72., n)
Eod = linspace(290.^4., 295^4., n)

polje = [1.,0.,0.] #prvi element je veći od očekivanog najmanjeg odstupanja
xgrid = repmat(k_b', n, 1)
ygrid = repmat(Eod, 1, n)

lsqd = zeros(n,n)

for i in 1:n
    for j in 1:n
        lsqd[i:i,j:j] = lhs2([k_b[j], Eod[i]], lattice[1:(size(lattice,1)),1]*251,
lattice[1:(size(lattice,1)),4])
        if lsqd[i,j] < polje[1]
            polje[1] = lsqd[i,j]
            polje[2] = i
            polje[3] = j
        end
    end
end

print("k_b = ", k_b[polje[2]], "; E = ", Eod[polje[3]])

```

Literatura

- [1] T. Kojo, Y. Hidaka, K. Fukushima, L. D. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. **A875**, 94 (2012), [1107.2124].
- [2] Lect. Notes Phys. **583** (2002) 209-249
- [3] S. Benić, I. Mishustin, and C. Sasaki, Phys. Rev. D **91**, 125034
- [4] Phys.Rev. **D21** (1980) 3393-3400
- [5] S. Narison, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **54A**, 238 (1997).
- [6] C. Sasaki and I. Mishustin, Phys. Rev. **C85**, 025202 (2012).
- [7] S. Borsanyi, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, JHEP **1207** (2012) 056
- [8] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Luetgemeier, B. Petersson, Nucl.Phys. **B469** (1996) 419-444