

# Lemoineova točka

---

Stepčić, Keti

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:901125>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Keti Stepčić

**LEMOINEOVA TOČKA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima i sestri Sari. Veliko hvala mojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje, koji su vjerovali u mene i moj uspjeh, bili moja podrška kroz cijelo moje obrazovanje. Najveće hvala mojoj sestri na njezinom odricanju, strpljenju i ogromnoj podršci što mi pruža. I na kraju se zahvaljujem svim svojim cimericama, prijateljima koji su kroz cijelo moje studiranje bili uz mene. Zahvaljujem se i svojoj mentorici doc.dr.sc. Mei Bombardelli na savjetima tijekom izrade i pisanja diplomskog rada.*

# Sadržaj

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Sadržaj</b>                         | <b>iv</b> |
| <b>Uvod</b>                            | <b>1</b>  |
| <b>1 Osnovni teoremi i pojmovi</b>     | <b>2</b>  |
| 1.1 Cevin i Menelajev teorem . . . . . | 2         |
| 1.2 Težište . . . . .                  | 8         |
| 1.3 Gergonneova točka . . . . .        | 8         |
| <b>2 Simedijana</b>                    | <b>10</b> |
| <b>3 Lemoineova točka</b>              | <b>24</b> |
| <b>4 Svojstva Lemoineove točke</b>     | <b>28</b> |
| <b>Bibliografija</b>                   | <b>48</b> |

# Uvod

U ovom radu proučavat ćemo simedijane, te njezina svojstva. Najvažnije svojstvo simedijana trokuta je da se one sijeku u jednoj točki koju nazivamo Lemoineova točka. Ime je dobila po francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineu.

Na početku prisjetit ćemo se nekih osnovnih teorema i definicija koje ćemo kasnije koristiti u radu. U drugom poglavlju definirat ćemo pojam simedijane, te iskazati neka njihova osnovna svojstva.

U trećem poglavlju definirat ćemo Lemoineovu točku. Posljednje poglavlje posvetit ćemo istraživanju nekih svojstava Lemoineove točke te ćemo prikazati više načina kako odrediti Lemoineovu točku trokuta.

# Poglavlje 1

## Osnovni teoremi i pojmovi

### 1.1 Cevin i Menelajev teorem

Cilj ovog rada je iskazati neka svojstva simedijana u trokutu, te uvesti pojam Lemoineove točke. Da bismo mogli to iskazati, na početku je potrebno najprije navest neke osnovne pojmove i teoreme. Prije svega iskažimo i dokažimo teorem poznat pod imenom **Cevin teorem**<sup>1</sup>:

**Teorem 1.1 (Cevin teorem).** *Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Ako pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  prolaze jednom točkom onda vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \quad (1.1)$$

*Dokaz.* Neka je  $S$  točka i neka pravci  $AS$ ,  $BS$  i  $CS$  sijeku stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  u točkama  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$ . Vrhom  $C$  konstruiramo paralelu s  $AB$ . Neka je  $D$  sjecište te paralele s  $BB_1$ , a  $E$  njeno sjecište s  $AA_1$ . Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi:

$$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1 \implies \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

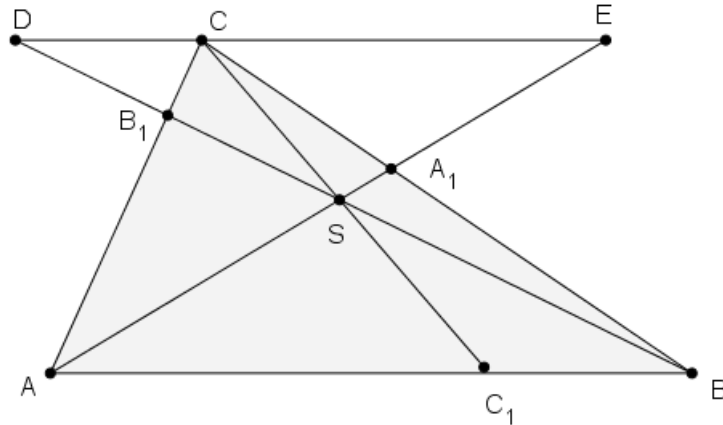
$$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1 \implies \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CE|}$$

$$\triangle SAC_1 \sim \triangle SEC \implies \frac{|AC_1|}{|CE|} = \frac{|C_1S|}{|CS|},$$

$$\triangle CDS \sim \triangle C_1BS \implies \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CS|}{|C_1S|}.$$

---

<sup>1</sup>Giovanni Ceva (1647.-1734.) talijanski matematičar



Slika 1.1: Cevin teorem

Množenjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1S|}{|CS|} \cdot \frac{|CS|}{|C_1S|}$$

i kraćenjem dobivamo tvrdnju teorema:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

□

**Teorem 1.2 (Obrat Cevinog teorema).** *Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1, \quad (1.2)$$

*tada pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  prolaze jednom točkom.*

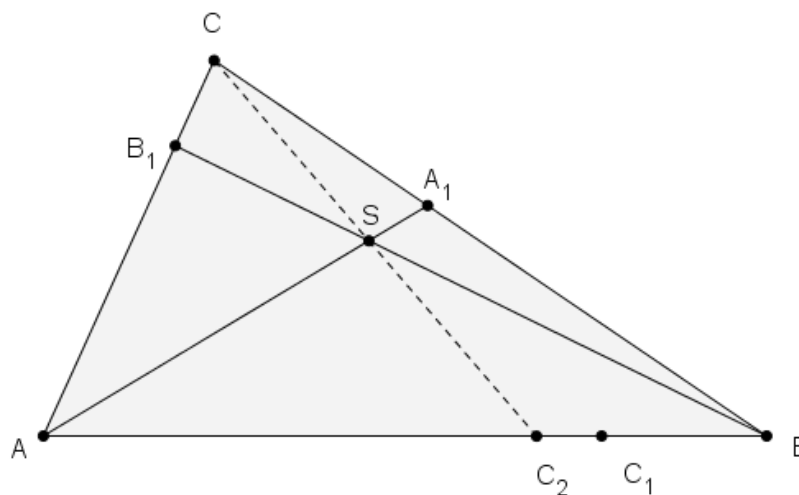
*Dokaz.* Neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Neka je  $S$  sjecište pravaca  $AA_1$  i  $BB_1$ , a  $C_2$  sjecište pravaca  $CS$  i  $AB$ . Prema teoremu 1.1, vrijedi:

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$





Slika 1.2: Obrat Cevinog teorema

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}.$$

Točke  $C_1$  i  $C_2$  pripadaju dužini  $\overline{AB}$ . S obzirom je  $|AC_1| = |AB| - |BC_1|$  i  $|AC_2| = |AB| - |BC_2|$ , iz jednakosti

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}$$

slijedi

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} - 1 = \frac{|AB|}{|BC_2|} - 1,$$

tj.

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} = \frac{|AB|}{|BC_2|}.$$

Dakle,  $|BC_1| = |BC_2|$ , odnosno točke  $C_1$  i  $C_2$  se podudaraju. Time smo dokazali da pravac  $CC_1$  prolazi točkom  $S$ .  $\square$

Cevin teorem možemo zapisati i na drugi način pomoću trigonometrije.

**Teorem 1.3 (Trigonometrijski oblik Cevinog teorema).** *Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , redom. Pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle CBB_1} = 1. \quad (1.3)$$

*Dokaz.* S obzirom smo Cevin teorem i njegov obrat već dokazali, dovoljno je pokazati da je umnožak omjera duljina iz Cevinog teorema jednak umnošku omjera navedenih sinusa kutova. Primjenom poučka o sinusima na trokute  $ABB_1$  i  $CBB_1$  dobivamo:

$$\frac{|CB_1|}{|BB_1|} = \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle C} \quad \text{i} \quad \frac{|BB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B_1BA}$$

odnosno

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C}.$$

Na analogan način dobili bismo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} \quad \text{i} \quad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B}.$$

Množenjem dobivenih jednakosti dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA}.$$

□

Sada ćemo iskazati i dokazati još jedan važan teorem poznat pod imenom **Menelajev teorem**<sup>2</sup> :

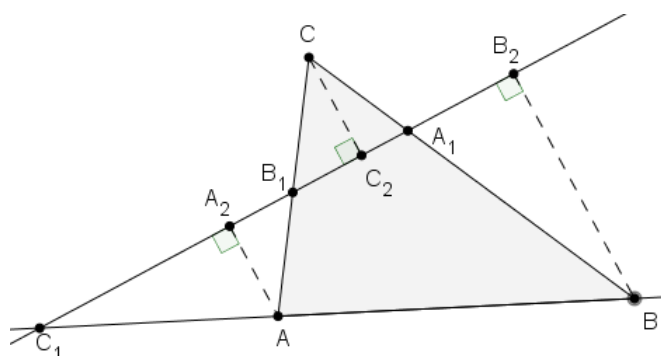
**Teorem 1.4 (Menelajev teorem).** *Neka su  $A_1$  i  $B_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ , a točka  $C_1$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Ako su točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  kolinearne onda vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \quad (1.4)$$

*Dokaz.* Neka je  $p$  pravac kojem pripadaju točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$ , te neka su točke  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  nožišta okomica iz vrhova trokuta  $ABC$  na pravac  $p$ . Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi:

$$\triangle AC_1A_2 \sim \triangle BC_1B_2 \implies \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AA_2|}{|BB_2|}$$

<sup>2</sup>Menelaj iz Aleksandrije (1.-2. st. pr. Kr), starogrčki matematičar



Slika 1.3: Menelajev teorem

$$\begin{aligned}\triangle BA_1B_2 &\sim \triangle CA_1C_2 \implies \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BB_2|}{|CC_2|} \\ \triangle CC_2B_1 &\sim \triangle AA_2B_1 \implies \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CC_2|}{|AA_2|}.\end{aligned}$$

Množenjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AA_2|}{|BB_2|} \cdot \frac{|BB_2|}{|CC_2|} \cdot \frac{|CC_2|}{|AA_2|}$$

i kraćenjem dobivamo tvrdnju teorema:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

□

**Teorem 1.5 (Obrat Menelajevog teorema).** *Neka su  $A_1$  i  $B_1$  točke na stranicama  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ , a točka  $C_1$  na produžetku stranice  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1, \quad (1.5)$$

*tada su točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  kolinearne.*

*Dokaz.* Neka je  $S$  sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $CB$ . Iz teorema 1.4 slijedi da je

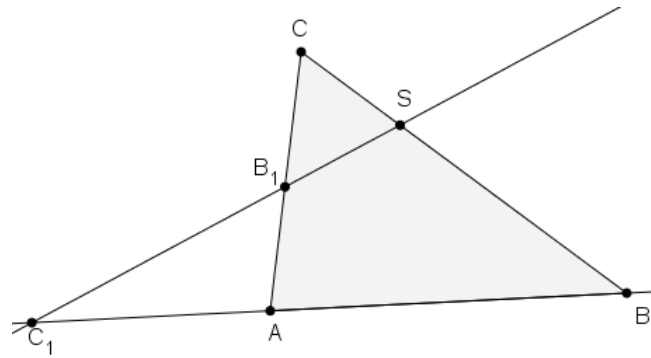
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BS|}{|SC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BS|}{|SC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BS|}{|SC|}.$$



Slika 1.4: Obrat Menelajevog teorema

Točke  $A_1$  i  $S$  pripadaju dužini  $\overline{BC}$ . S obzirom je  $|BA_1| = |BC| - |CA_1|$  i  $|BS| = |BC| - |CS|$ , slijedi

$$\frac{|BC|}{|A_1C|} - 1 = \frac{|BC|}{|SC|} - 1,$$

tj.

$$\frac{|BC|}{|A_1C|} = \frac{|BC|}{|SC|}.$$

Dakle,  $|A_1C| = |SC|$ , odnosno točke  $A_1$  i  $S$  se podudaraju. Time smo dokazali da su točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  kolinearne.  $\square$

Dakle, ako su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na pravcima  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  trokuta  $ABC$ , redom, takve da vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

onda se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u jednoj točki ili točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  pripadaju istom pravcu. Ukoliko sve tri točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  ili samo jedna od njih pripadaju stranicama trokuta  $ABC$ , prema teoremu 1.2 pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  se sijeku u jednoj točki, a ukoliko su samo dvije ili niti jedna točka na stranici trokuta  $ABC$ , tada su prema teoremu 1.5 točke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  kolinearne.

## 1.2 Težište

S obzirom je Lemoineova točka povezana s pojmovima težišnica i težišta, u ovom potpoglavlju prisjetit ćemo se njihovih definicija.

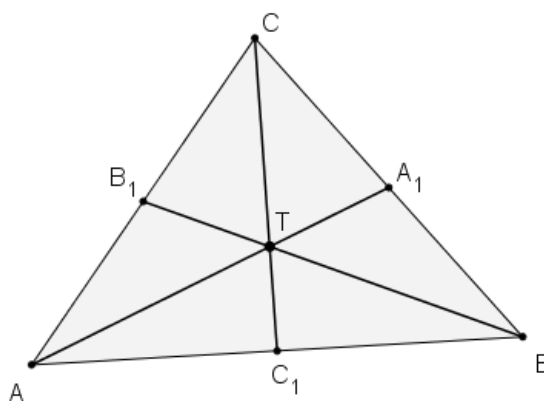
**Definicija 1.6.** Spojnicu nekog vrha danog trokuta  $ABC$  sa polovištem suprotne stranice zovemo **težišnicom** ili **medijanom** tog trokuta.

**Teorem 1.7.** U trokutu postoje tri težišnice koje se sijeku u jednoj točki.

*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$ , te neka su  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  težišnice. S obzirom su točke  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  polovišta dužina  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  vrijedi:

$$|AC_1| = |BC_1|, \quad |BA_1| = |CA_1| \quad \text{i} \quad |CB_1| = |AB_1|.$$

Dobivamo:



Slika 1.5: Težište  $T$  trokuta  $ABC$

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

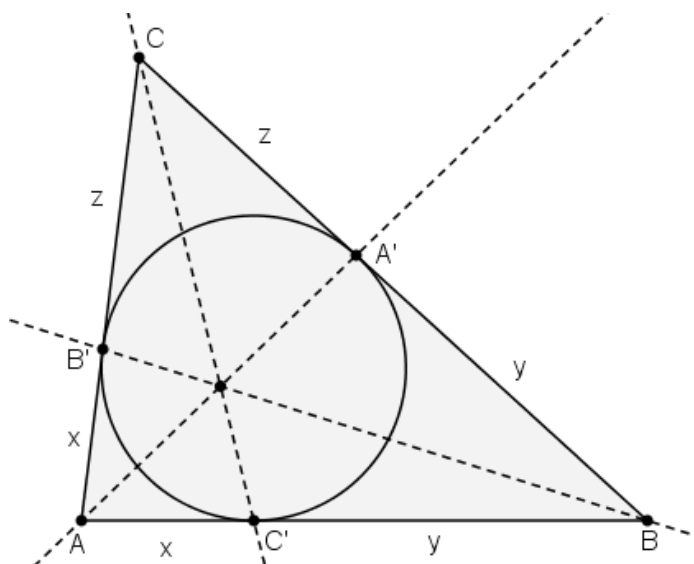
Koristeći obrat Cevinovog teorema 1.2 zaključujemo da se težišnice  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  i  $\overline{CC_1}$  sijeku u jednoj točki  $T$ .  $\square$

**Definicija 1.8.** Točka  $T$  u kojoj se sijeku težišnice trokuta  $ABC$  zove se **težište** trokuta.

## 1.3 Gergonneova točka

U ovom potpoglavlju iskazat ćemo teorem i definiciju **Gergonneove točke**.

**Teorem 1.9 (Gergonne<sup>3</sup>).** *Neka su  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  dirališta upisane kružnice trokuta  $ABC$  redom sa stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  trokuta. Tada se pravci  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  sijeku u jednoj točki.*



Slika 1.6: Gergonneova točka trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Odsječci tangenata povučениh iz neke točke na kružnicu su sukladni. Uvedimo oznake:

$$x = |AB'| = |AC'|, \quad y = |BA'| = |BC'|, \quad z = |CA'| = |CB'|.$$

Sada slijedi:

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1,$$

pa prema obratu Cevinog teorema 1.2 slijedi tvrdnja. □

**Definicija 1.10.** *Sjecište pravaca  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , pri čemu su točke  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  dirališta upisane kružnice trokuta  $ABC$  redom sa stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  trokuta, naziva se **Gergonneovom točkom**.*

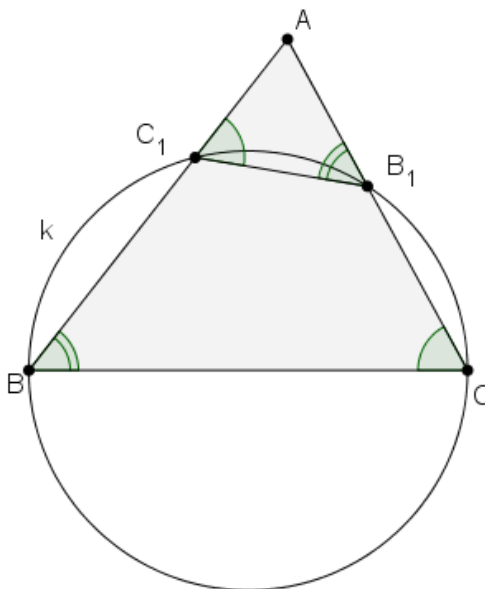
<sup>3</sup>Josef Diaz Gergonne (1771. - 1859.), francuski astronom i matematičar

## Poglavlje 2

### Simedijana

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam simedijane, te iskazati nekoliko teorema vezanih uz taj pravac. Da bismo mogli iskazati definiciju simedijane, najprije definirajmo antiparalele.

**Definicija 2.1.** *Neka je dan trokut  $ABC$ , točka  $B_1$  na pravcu  $AC$  i točka  $C_1$  na pravcu  $AB$ . Ako za takve točke vrijedi  $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$  i  $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$ , tada dužinu  $\overline{B_1C_1}$  zovemo **antiparalelom** stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ .*



Slika 2.1: Antiparalela

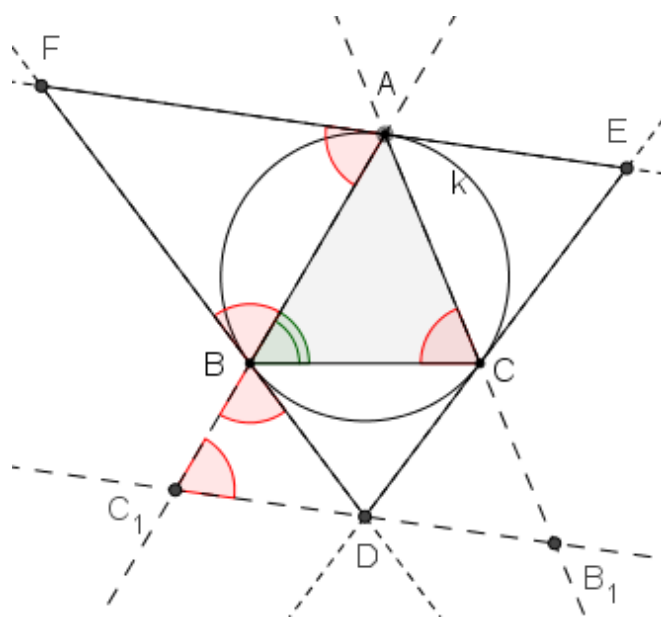
**Teorem 2.2.** *Ako je  $\overline{C_1B_1}$  antiparalela stranice  $\overline{BC}$ , tada točke  $B, C, B_1$  i  $C_1$  pripadaju jednoj kružnici.*

*Dokaz.* U četverokut  $BCB_1C_1$  (vidi sliku 2.1), uočavamo da su nasuprotni kutovi suplementarni. Dakle, četverokut  $BCB_1C_1$  je tetivni četverokut, pa točke  $B, C, B_1$  i  $C_1$  pripadaju istoj kružnici.  $\square$

**Teorem 2.3.** *Polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta pripadaju istom pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta.*

*Dokaz.* Na temelju definicije 2.1 slijedi da su sve antiparalele neke od stranica danog trokuta međusobno paralelne.

Neka je  $S$  središte opisane kružnice  $k$  trokuta  $ABC$ , te neka se tangente na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $B$  i  $C$  sijeku u točki  $D$ , tangente na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $C$  i  $A$  sijeku u točki  $E$  i tangente na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $A$  i  $B$  sijeku u točki  $F$ . Neka antiparalela  $\overline{C_1B_1}$  stranice  $\overline{BC}$  prolazi točkom  $D$  (vidi sliku 2.2).



Slika 2.2: Teorem 2.3

Središnji kut je dvostruko veći od obodnog kuta nad istim lukom, pa vrijedi:

$$\angle ASB = 2 \cdot \angle ACB.$$



S obzirom je tangenta okomita na polumjer koji spaja diralište te tangente sa središtem opisane kružnice, vrijedi:

$$\angle FAS = 90^\circ.$$

U jednakokračnom trokutu  $ABS$  vrijedi:

$$\angle BAS = \frac{180^\circ - 2 \cdot \angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACB,$$

te slijedi:

$$\angle FAB = \angle FAS - \angle BAS = \angle ACB.$$

Dakle, vrijedi:

$$\angle DC_1B = \angle FAB,$$

pa su pravci  $AF$  i  $DC_1$  paralelni.

S obzirom vrijedi da je  $|AF| = |FB|$ , slijedi:

$$\angle DC_1B = \angle FAB = \angle FBA = \angle DBC_1.$$

Dakle, trokut  $BC_1D$  je jednakokračan, i vrijedi  $|DC_1| = |DB|$ . Analogno se dobije da je  $|DB_1| = |DC|$ .

Dakle,

$$|DC_1| = |DB| = |DC| = |DB_1|,$$

odnosno točka  $D$  je polovište dužine  $\overline{C_1B_1}$ . Pravac  $AD$  siječe antiparalelu  $\overline{C_1B_1}$  u polovištu  $D$ . Antiparalele stranice  $\overline{BC}$  su međusobno paralelne, pa pravac  $AD$  siječe i sve ostale antiparalele dužine  $\overline{BC}$  u njihovim polovištima, jer se homotetijom s centrom u  $A$  polovišta dužina preslikavaju u polovišta.

Analogno, pravac  $CF$  siječe sve antiparalele dužine  $\overline{AB}$  u njihovim polovištima, a pravac  $BE$  siječe sve antiparalele dužine  $\overline{AC}$  u njihovim polovištima.  $\square$

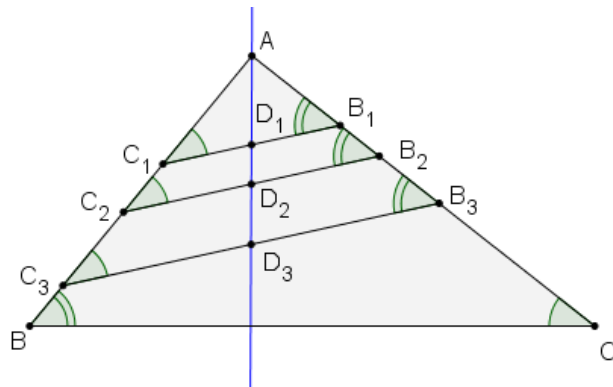
**Definicija 2.4.** *Pravac koji prolazi polovištima svih antiparalela neke stranice danog trokuta i prolazi nasuprotnim vrhom, zove se **simedijana** danog trokuta.*

**Definicija 2.5.** *Trokut čije stranice pripadaju tangentama na opisanu kružnicu danog trokuta u njegovim vrhovima zovemo **tangencijalni trokut** danog trokuta.*

Iz dokaza teorema 2.3 slijedi slijedeći teorem:

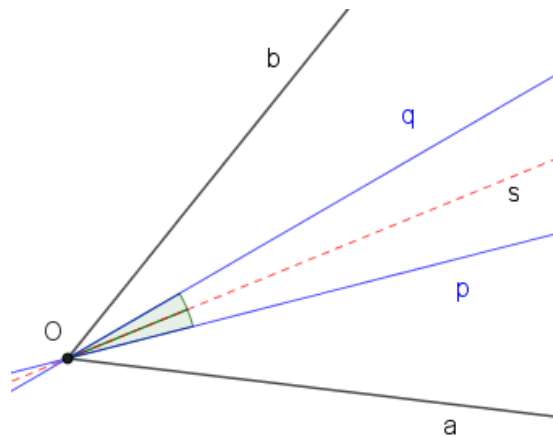
**Teorem 2.6.** *Neka je  $DEF$  tangencijalni trokut trokuta  $ABC$ . Tada su pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  simedijane trokuta  $ABC$ .*

Simedijanu trokuta možemo dobiti i na drugi način, pomoću izogonala. Prije toga, definirat ćemo pojam izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.



Slika 2.3: Simedijana

**Definicija 2.7.** Neka je dan kut i par pravaca,  $p$  i  $q$ , koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta zatvaraju sukladne kutove. Par pravaca,  $p$  i  $q$ , zovemo **izogonalama** tog kuta.



Slika 2.4: Pravci  $p$  i  $q$  su izogonale kuta  $\angle aOb$

Dakle, izogonale kuta zatvaraju sukladne kutove sa simetralom tog kuta, odnosno prema slici 2.4 vrijedi  $\angle pOs = \angle qOs$ . Slijedi da su i kutovi kojeg zatvaraju izogonale s krakovima danog kuta sukladni, tj. prema slici 2.4 vrijedi:

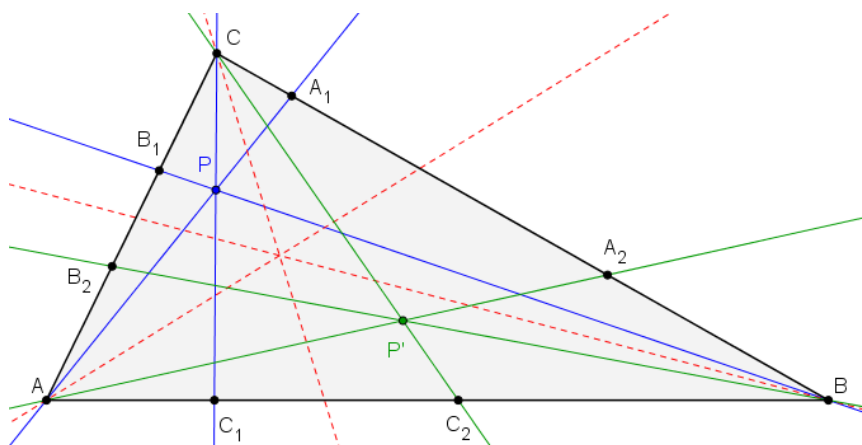
$$\angle aOp = \angle bOq \quad \text{i} \quad \angle aOq = \angle bOp.$$

**Teorem 2.8.** Neka je  $ABC$  trokut i točka  $P$  unutar trokuta. Pravci simetrični pravcima  $PA$ ,  $PB$  i  $PC$  s obzirom na simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki  $P'$ .

*Dokaz.* Neka pravci  $PA$ ,  $PB$  i  $PC$  sijeku stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Neka je  $A_2$  točka na pravcu  $BC$  takva da je pravac  $AA_2$  simetričan pravcu  $AA_1$  s obzirom na simetralu kuta pri vrhu  $A$ , točka  $B_2$  na pravcu  $AC$  takva da je pravac  $BB_2$  simetričan pravcu  $BB_1$  s obzirom na simetralu kuta pri vrhu  $B$  i točka  $C_2$  na pravcu  $AB$  takva da je pravac  $CC_2$  simetričan pravcu  $CC_1$  s obzirom na simetralu kuta pri vrhu  $C$ .  
Trebamo pokazati da vrijedi

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = 1,$$

pa će prema obratu trigonometrijskog oblika Cevinog teorema 1.3 slijediti tvrdnja. Budući



Slika 2.5: Izogonalno konjugirane točke

da su pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  simetrični, s obzirom na simetrale kutova trokuta  $ABC$ , pravcima  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$ , vrijedi  $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$ ,  $\angle C_2CB = \angle ACC_1$ ,  $\angle BAA_2 = \angle A_1AC$  itd. Na temelju toga dobivamo:

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = \frac{\sin \angle C_1CB}{\sin \angle ACC_1} \cdot \frac{\sin \angle A_1AC}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1BA}{\sin \angle CBB_1}.$$

S obzirom se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u točki  $P$ , prema trigonometrijskom obliku Cevinog teorema 1.3 slijedi:

$$\frac{\sin \angle C_1CB}{\sin \angle ACC_1} \cdot \frac{\sin \angle A_1AC}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1BA}{\sin \angle CBB_1} = 1,$$

pa vrijedi:

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = 1.$$

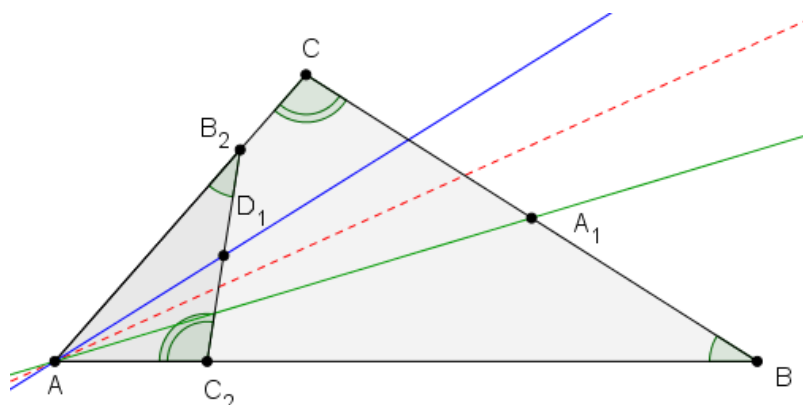
Dakle, prema trigonometrijskom obliku Cevinog teorema 1.3 pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  sijeku se u jednoj točki  $P'$ .  $\square$

**Definicija 2.9.** Neka je točka  $P$  unutar trokuta  $ABC$ , a točka  $P'$  sjecište pravaca simetričnih pravcima  $PA$ ,  $PB$  i  $PC$  s obzirom na simetrale kutova trokuta  $ABC$ . Točke  $P$  i  $P'$  zovemo **izogonalno konjugiranim točkama** ili kraće **izogonalnim točkama** trokuta  $ABC$ .

Točku  $P'$  još zovemo **izogonalni konjugat** točke  $P$  s obzirom na trokut  $ABC$ .

**Teorem 2.10.** Simedijana i pravac kojem pripada težišnica (medijana) trokuta  $ABC$  osno-simetrični su s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta.

*Dokaz.* Neka je  $\overline{B_2C_2}$  antiparalela dužine  $\overline{BC}$ , točka  $D_1$  polovište dužine  $\overline{B_2C_2}$ , a točka  $A_1$  polovište od  $\overline{BC}$  (vidi sliku 2.6).



Slika 2.6: Osa simetrija simedijane i pravca kojem pripada težišnica

Trokuti  $ABC$  i  $AB_2C_2$  su slični, prema KKK teoremu o sličnosti trokuta, te vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB_2|}{|B_2C_2|},$$

odnosno

$$\frac{|AB|}{|BA_1|} = \frac{|AB_2|}{|B_2D_1|}.$$

Kutovi  $\angle ABC$  i  $\angle AB_2D_1$  su sukladni po definiciji antiparalela. Stoga, zaključujemo da su trokuti  $ABA_1$  i  $AB_2D_1$  slični po SKS teoremu o sličnosti trokuta, što znači da je:

$$\angle BAA_1 = \angle B_2AD_1.$$

Time smo dokazali da su pravac kojem pripada težišnica i simedijana trokuta  $ABC$  osnosimetrične s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta.  $\square$

Godine 1883. M. d'Ocagne<sup>1</sup> uvodi pojam simedijana za pravce simetrične težišnici s obzirom na simetralu kuta.

**Teorem 2.11.** *Simedijane trokuta  $ABC$  sijeku se u jednoj točki.*

*Dokaz.* Dokaz ovog teorema slijedi iz teorema 1.7, 2.8 i 2.10. Dakle, težišnice se sijeku u težištu  $T$  trokuta  $ABC$ , pa se pravci simetrični pravcima  $AT$ ,  $BT$  i  $CT$  s obzirom na simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. S obzirom su simedijane i pravci kojima pripadaju težišnice trokuta  $ABC$  osnosimetrični s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta, slijedi da se simedijane sijeku u jednoj točki.  $\square$

U sljedećem poglavlju dokazat ćemo prethodni teorem i na drugi način, te ćemo sjecištu simedijana dati ime.

Sada ćemo iskazati i dokazati Steinerov teorem i njegov obrat koji su nam potrebni u dokazivanju sljedećih teorema.

**Teorem 2.12 (Steinerov teorem<sup>2</sup>).** *Sijeku li dvije izogonale kuta pri vrhu  $A$  suprotnu stranicu  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$ , tada vrijedi:*

$$\frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \quad (2.1)$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka  $A_1$  bliža točki  $B$  od točke  $A_2$ . Neka je  $k$  kružnica određena točkama  $A$ ,  $A_1$  i  $A_2$  i neka su  $D$  i  $E$  sjecišta kružnice  $k$  sa stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , redom. Znamo da je  $\angle DAA_2 = \angle EAA_1$  i  $\angle DAA_1 = \angle EAA_2$ . S obzirom su obodni kutovi kružnice  $k$  sukladni slijedi da su i pripadajući kružni lukovi sukladni, tj.:

$$\widehat{DA_2} = \widehat{EA_1} \quad \text{i} \quad \widehat{DA_1} = \widehat{EA}.$$

Dakle, dobivamo:

$$\angle DEA_1 = \angle DA_2A_1 = \angle EDA_2 = \angle EA_1A_2,$$

$$\angle A_2EA_1 = \angle A_2DA_1,$$

$$\angle EA_2D = \angle EA_1D,$$

<sup>1</sup>Philbert Maurice d'Ocagne (1862 - 1938), francuski matematičar

<sup>2</sup>Jakob Steiner (1796.-1863.), švicarski matematičar

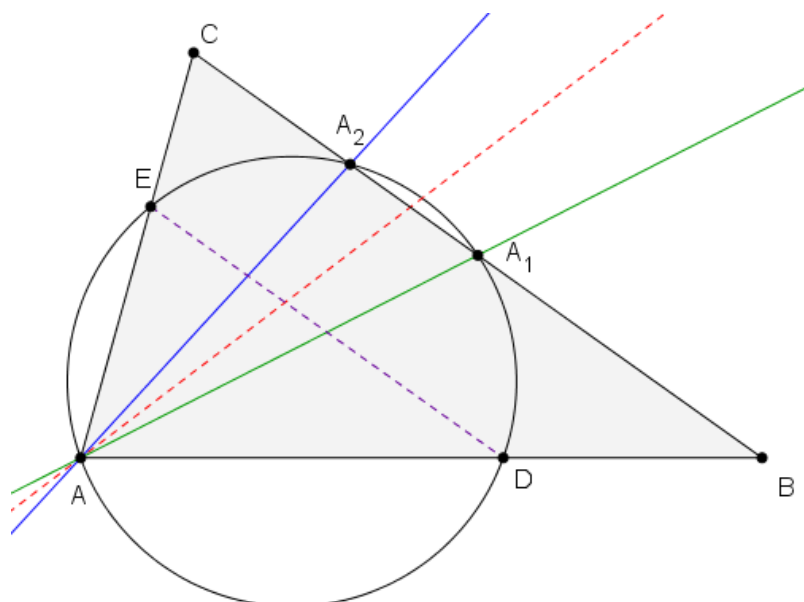
odnosno

$$\begin{aligned}\angle DEA_2 + \angle EA_2A_1 &= \angle DEA_1 + \angle A_2EA_1 + \angle EA_2D + \angle DA_2A_1 \\ &= \angle EDA_2 + \angle A_2DA_1 + \angle EA_1D + \angle EA_1A_2 \\ &= \angle EDA_1 + \angle DA_1A_2.\end{aligned}$$

S obzirom je zbroj veličina kutova u četverokutu jednak  $360^\circ$  slijedi da je

$$\angle DEA_2 + \angle EA_2A_1 = 180^\circ,$$

odnosno četverokut  $DA_2A_1E$  je trapez. Slijedi da su stranice  $\overline{DE}$  i  $\overline{BC}$  paralelne.



Slika 2.7: Steinerov teorem

S obzirom su pravci  $DE$  i  $BC$  paralelni, primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$$

odnosno,

$$\frac{|AB|^2}{|AB| \cdot |BD|} = \frac{|AC|^2}{|AC| \cdot |CE|}.$$

Primjenom potencija točkaka  $B$  i  $C$  u odnosu na kružnicu  $k$  dobivamo:

$$|AB| \cdot |BD| = |BA_2| \cdot |BA_1| \quad \text{i} \quad |AC| \cdot |CE| = |CA_2| \cdot |CA_1|.$$

Uvrštavajući u gornju jednakost dobivamo:

$$\frac{|AB|^2}{|BA_2| \cdot |BA_1|} = \frac{|AC|^2}{|CA_2| \cdot |CA_1|},$$

te slijedi tvrdnja teorema:

$$\frac{|BA_2| \cdot |BA_1|}{|CA_2| \cdot |CA_1|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

□

**Teorem 2.13 (Obrat Steinerovog teorema).** *Neka su  $A_1$  i  $A_2$  točke na stranici  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ . Ako vrijedi:*

$$\frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \quad (2.2)$$

onda su pravci  $AA_1$  i  $AA_2$  izogonalni.

*Dokaz.* Neka je  $k$  kružnica određena točkama  $A$ ,  $A_1$  i  $A_2$  i neka su  $D$  i  $E$  sjecišta kružnice sa stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , redom. Primjenom potencije točaka  $B$  i  $C$  u odnosu na kružnicu  $k$  dobivamo:

$$|AB| \cdot |BD| = |BA_2| \cdot |BA_1| \quad \text{i} \quad |AC| \cdot |CE| = |CA_2| \cdot |CA_1|.$$

Uvrštavajući u jednakost (2.2), dobivamo:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB| \cdot |BD|}{|AC| \cdot |CE|},$$

odnosno

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|},$$

tj.

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}.$$

Primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti slijedi da su pravci  $ED$  i  $BC$  paralelni. Četverokut  $EDA_1A_2$  je tetivni četverokut, a ujedno i trapez. Preciznije, četverokut  $EDA_1A_2$  je jednakokračan trapez. Dakle, dužina  $\overline{DA_1}$  sukladna je dužini  $\overline{EA_2}$ . Obodni kutovi nad sukladnim tetivama su sukladni, pa vrijedi:

$$\angle EAA_2 = \angle DAA_1.$$

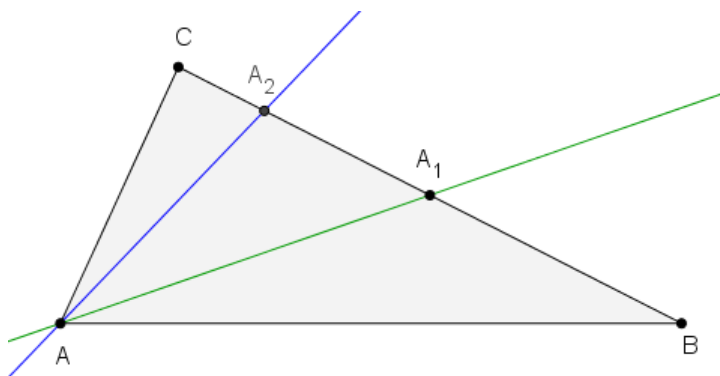
Dakle, pravci  $AA_1$  i  $AA_2$  su izogonalni.

□

**Teorem 2.14.** Neka je  $A_2$  točka na dužini  $\overline{BC}$ , takva da je pravac  $AA_2$  simedijana trokuta  $ABC$ . Tada vrijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \quad (2.3)$$

*Dokaz.* Neka je pravac  $AA_2$  simedijana, te neka je  $A_1$  polovište dužine  $\overline{BC}$ . Tada je dužina  $\overline{AA_1}$  težišnica trokuta  $ABC$ , pa su pravci  $AA_1$  i  $AA_2$  izogonalni.



Slika 2.8: Osnova simetrija težišnice i simedijane

Primjenjujući Steinerov teorem 2.12 vrijedi:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1||BA_2|}{|CA_1||CA_2|}.$$

S obzirom da je dužina  $\overline{AA_1}$  težišnica trokuta  $ABC$ , vrijedi da je  $|BA_1| = |CA_1|$ . Sada iz gornje jednakosti slijedi tvrdnja:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_2|}{|CA_2|}.$$

□

**Teorem 2.15.** Neka je  $A_2$  točka na stranici  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ . Ako vrijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \quad (2.4)$$

tada je pravac  $AA_2$  simedijana trokuta  $ABC$ .



*Dokaz.* Neka je  $A_1$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Tada je  $|BA_1| = |CA_1|$ , te vrijedi:

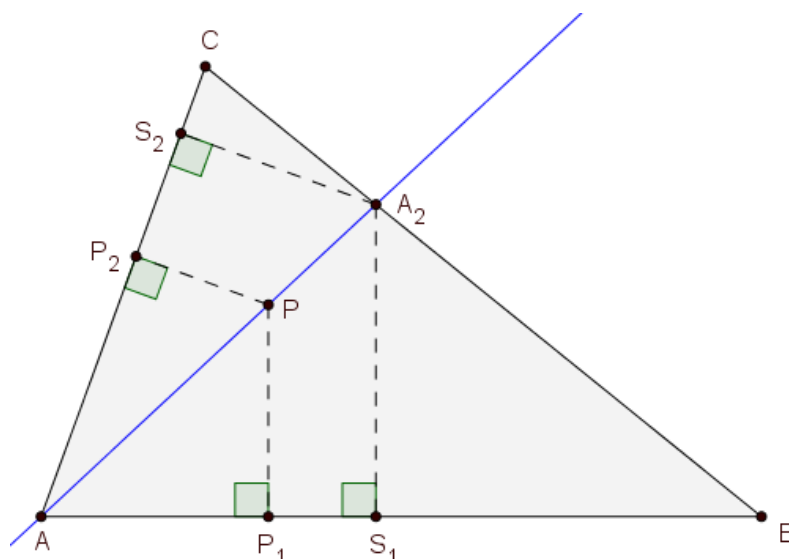
$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|}.$$

Primjenjujući obrat Steinerovog teorema 2.13 zaključujemo da su pravci  $AA_2$  i  $AA_1$  izogonalni, pa je prema teoremu 2.10 pravac  $AA_2$  simedijana trokuta  $ABC$ .  $\square$

**Teorem 2.16.** *Neka je  $P$  točka na simedijani vrha  $A$  trokuta  $ABC$ . Tada su udaljenosti  $|PP_1|$  i  $|PP_2|$  do stranica  $\overline{AB}$  odnosno  $\overline{AC}$  proporcionalne duljinama tih stranica, odnosno:*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

*Dokaz.* Neka je točka  $A_2$  sjecište simedijane iz vrha  $A$  sa stranicom  $\overline{BC}$ , a točke  $S_1$  i  $S_2$  nožista okomica iz točke  $A_2$  na pravce  $AB$  i  $AC$ . Promatrajući kutove  $\angle BAA_2$  i  $\angle CAA_2$ , te



Slika 2.9: Omjer udaljenosti točke  $P$  na simedijani  $AA_1$  od stranica trokuta

primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|A_2S_1|} = \frac{|AP|}{|AA_2|} \quad \text{i} \quad \frac{|PP_2|}{|A_2S_2|} = \frac{|AP|}{|AA_2|}. \quad (2.5)$$

Izjednačavanjem dobivenih jednakosti slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|A_2S_1|} = \frac{|PP_2|}{|A_2S_2|},$$

odnosno

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2S_1|}{|A_2S_2|}. \quad (2.6)$$

Neka je  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCA$ . Iz trokuta  $A_2S_1B$ , odnosno  $A_2S_2C$  dobivamo:

$$|A_2S_1| = |A_2B| \cdot \sin \beta, \quad (2.7)$$

$$|A_2S_2| = |A_2C| \cdot \sin \gamma. \quad (2.8)$$

Primjenjujući sinusov poučak u trokutu  $ABC$  slijedi:

$$\frac{|AC|}{\sin \beta} = \frac{|AB|}{\sin \gamma},$$

odnosno

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (2.9)$$

Prema teoremu 2.14 vrijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \quad (2.10)$$

Uvrštavajući jednakosti (2.7), (2.8), (2.9) u jednakost (2.6) dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2B| \cdot \sin \beta}{|A_2C| \cdot \sin \gamma} = \frac{|A_2B| \cdot |AC|}{|A_2C| \cdot |AB|},$$

odnosno zbog (2.10) slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|^2 \cdot |AC|}{|AC|^2 \cdot |AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

□

**Teorem 2.17.** *Neka je  $P$  točka takva su njene udaljenosti  $|PP_1|$  i  $|PP_2|$  do stranica  $\overline{AB}$  odnosno  $\overline{AC}$  proporcionalne duljinama tih stranica, odnosno takva da vrijedi:*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

*Tada točka  $P$  pripada simedijani vrha  $A$  trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* Neka je  $A_2$  sjecište pravaca  $AP$  i  $BC$ . Neka su  $S_1$  i  $S_2$  nožišta okomica iz točke  $A_2$  na stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ . Analogno kao u dokazu teorema 2.16, promatrajući kutove  $\angle BAA_2$  i  $\angle CAA_2$ , te primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2S_1|}{|A_2S_2|}.$$

Primjenom formulu za sinus dobivamo izraze:

$$|A_2S_1| = |A_2B| \cdot \sin \beta \quad \text{i} \quad |A_2S_2| = |A_2C| \cdot \sin \gamma. \quad (2.11)$$

Primjenjujući sinusov poučak u trokutu  $ABC$  slijedi:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (2.12)$$

Uvrštavajući jednakosti (2.11) i (2.12) dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2B| \cdot \sin \beta}{|A_2C| \cdot \sin \gamma} = \frac{|A_2B| \cdot |AC|}{|A_2C| \cdot |AB|}.$$

Dakle,

$$\frac{|A_2B|}{|A_2C|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

tj.

$$\frac{|A_2B|}{|A_2C|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Prema teoremu 2.15 slijedi da je pravac  $AA_2$  simedijana. Dakle, točka  $P$  se nalazi na simedijani.  $\square$

**Teorem 2.18.** *Neka su dani trokut  $ABC$  i kvadrati  $ACUV$  i  $ABST$  nad stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , s vanjske strane trokuta  $ABC$ . Neka je točka  $P$  središte opisane kružnice trokuta  $ATV$ . Tada je pravac  $AP$  simedijana trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* Središte  $P$  opisane kružnice trokuta  $ATV$  nalazi se na sjecištu simetrala dužina  $\overline{AT}$  i  $\overline{AV}$ . Neka su  $R_2$  i  $R_1$  polovišta dužina  $\overline{AT}$  i  $\overline{AV}$ , a  $P_1$  i  $P_2$  nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $AB$  i  $AC$ , redom. Četverokuti  $AP_1PR_2$  i  $AR_1PP_2$  su pravokutnici, pa vrijedi:

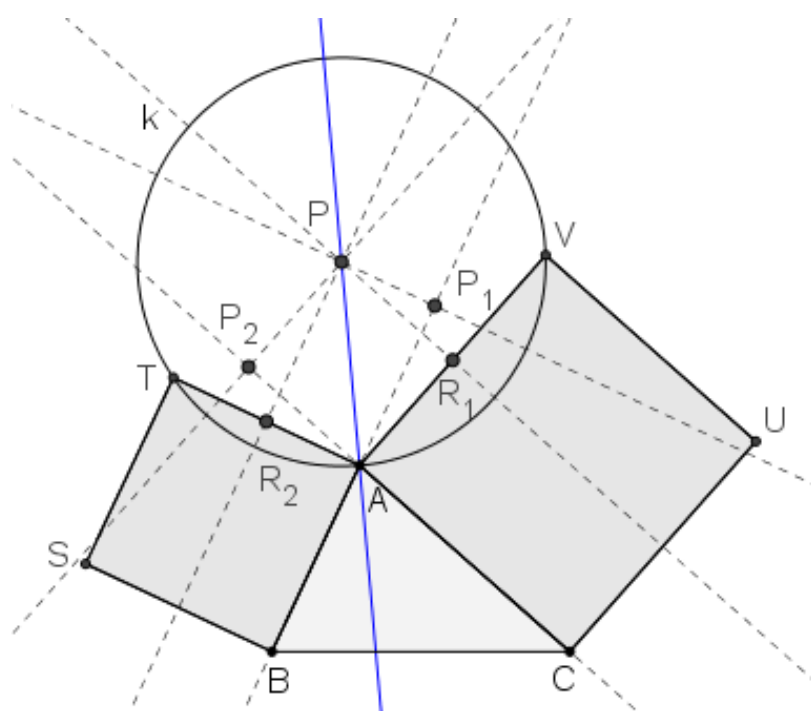
$$|PP_1| = |R_2A| = \frac{1}{2} |AT| = \frac{1}{2} |AB|,$$

$$|PP_2| = |R_1A| = \frac{1}{2} |AV| = \frac{1}{2} |AC|.$$

Sada slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{\frac{1}{2} |AB|}{\frac{1}{2} |AC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Prema teoremu 2.17 slijedi da je  $AP$  simedijana trokuta  $ABC$ .  $\square$



Slika 2.10: Teorem 2.18

## Poglavlje 3

### Lemoineova točka

Glavni cilj ovog rada je istražiti svojstva simedijana, ali i definirati Lemoineovu točku, što ćemo učiniti u ovom poglavlju.

**Teorem 3.1.** *Neka su pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  simedijane trokuta  $ABC$ . Tada se ta tri pravca sijeku u jednoj točki  $L$ .*

*Dokaz.* Neka su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . S obzirom su pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  simedijane trokuta  $ABC$  možemo koristiti teorem 2.14 po kojem slijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{|CB_2|}{|AB_2|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{|AC_2|}{|BC_2|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Množenjem navedenih jednakosti dobivamo:

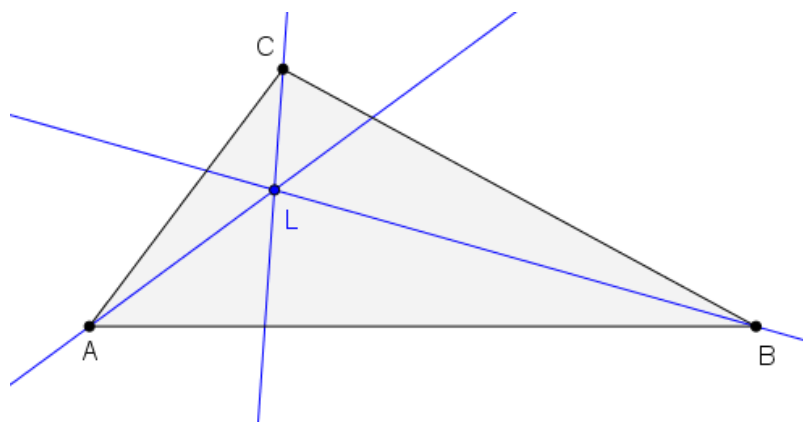
$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|CB_2|}{|AB_2|} \cdot \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Po obratu Cevinog teorema 1.2 slijedi da pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  prolaze jednom točkom. Dakle, simedijane trokuta  $ABC$  sijeku se u jednoj točki.  $\square$

**Definicija 3.2.** *Točku u kojoj se sijeku simedijane trokuta nazivamo **Lemoineova točka**.*

Lemoineova točka dobila je naziv po francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineu<sup>1</sup>. Poznat je kao inicijator zanimanja za geometriju trokuta. Diplomirao

<sup>1</sup>Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840. - 1912.), francuski matematičar

Slika 3.1: Lemoineova točka trokuta  $ABC$ 

je na Sveučilištu *École Polytechnique* u Parizu, 1860. Sudjelovao je u francusko-pruskom ratu. Radio je kao inženjer građevine, a matematikom, posebice geometrijom, i glazbom bavio se amaterski. Bio je jedan od osnivača glazbene grupe *La Trompette*. Od aktivnog matematičkog istraživanja odustao je 1895. godine, te od tada nije objavio niti jedan matematički rezultat.

Lemoine se je bavio istraživanjem pravaca koji prolaze polovištem antiparalela i njihovim sjecištem. Godine 1884. J. Neuberg<sup>2</sup> je nazvao sjecište simedijana Lemoineovom točkom. Međutim, tu točku su ranije spominjali i drugi matematičari, npr. L. Huilier<sup>3</sup> (1809.), Grebe<sup>4</sup>(1847.). Neko vrijeme su u Francuskoj tu točku nazivali Lemoineova točka, dok su ju u Njemačkoj nazivali Grebeova točka. Kasnije je Robert Tucker<sup>5</sup> uveo novo ime za sjecište simedijana trokuta, simedijalna točka, koja je široko prihvaćena. Više o Lemoineu i otkrivanju Lemoineove točke može se pronaći u literaturi (vidi [1], [6], [8]).

Lemoineovu točku smo definirali kao sjecište simedijana trokuta  $ABC$ , ali možemo ju definirati i na druge načine, što ćemo iskazati sljedećim teoremima.

**Teorem 3.3.** *Težište  $T$  i Lemoineova točka  $L$  su izogonalne točke trokuta  $ABC$ .*

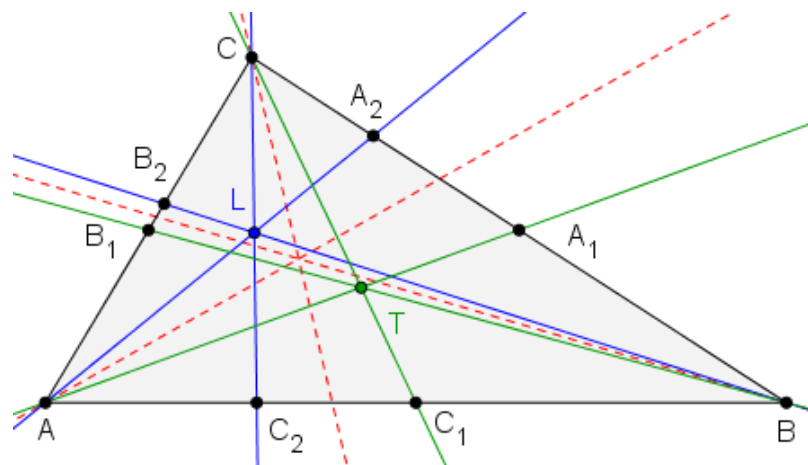
*Dokaz.* Znamo da se težišnice sijeku u težištu  $T$ . U teoremu 2.10 smo dokazali da su težišnice i simedijane trokuta  $ABC$  izogonalne, odnosno simetrične su s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta. U teoremu 2.8 dokazali smo da se pravci simetrični pravcima  $AT$ ,  $BT$  i  $CT$  sijeku u jednoj točki, odnosno simedijane se sijeku u jednoj točki. Dakle, težište  $T$  i Lemoineova točka  $L$  su izogonalne točke trokuta  $ABC$ .  $\square$

<sup>2</sup>Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840. - 1926.), luksemburški matematičar

<sup>3</sup>Simon Antoine Jean L'Huilier (1750. - 1840.), švicarski matematičar

<sup>4</sup>Ernst Wilhelm Grebe (1804. - 1874.), njemački matematičar

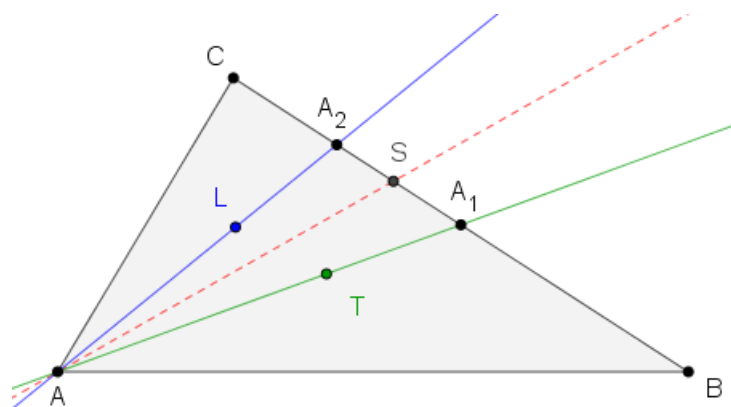
<sup>5</sup>Robert Tucker (1832. - 1905.), engleski matematičar



Slika 3.2: Težište i Lemoineova točka su izogonalne točke trokuta

**Teorem 3.4.** *Neka je T težište i L Lemoineova točka trokuta ABC. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
 \angle BAL &= \angle CAT & (3.1) \\
 \angle CAL &= \angle BAT \\
 \angle CBL &= \angle ABT \\
 \angle ABL &= \angle CBT \\
 \angle ACL &= \angle BCT \\
 \angle BCL &= \angle ACT.
 \end{aligned}$$



Slika 3.3: Teorem 3.4

*Dokaz.* Neka je  $A_1$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , a  $A_2$  točka u kojoj simedijana  $AL$  siječe stranicu  $\overline{BC}$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka  $A_1$  bliža točki  $B$  od točke  $A_2$ . Točka  $T$  pripada težišnicama, a točka  $L$  pripada simedijanama trokuta  $ABC$ . U teoremu 2.10 dokazali smo da su pravac kojem pripada težišnica i simedijana nekog vrha trokuta  $ABC$  simetrične s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta, odnosno da su ta dva pravca izogonale odgovarajućeg kuta trokuta. Dakle pravac kojem pripada težišnica i simedijana trokuta zatvaraju sa simetralom odgovarajućeg kuta jednake kutove.

Promatrat ćemo kut  $\angle CAB$  (slika 3.3). Neka je točka  $S$  sjecište pravca  $BC$  i simetrale kuta u vrhu  $A$  (vidi sliku 3.3). Tada dobivamo:

$$\angle BAL = \angle BAS + \angle SAL = \angle CAS + \angle SAT = \angle CAT,$$

$$\angle CAL = \angle CAS - \angle LAS = \angle BAS - \angle TAS = \angle BAT.$$

Na analogan način dobiju se preostale jednakosti. □



## Poglavlje 4

### Svojstva Lemoineove točke

Do sada je otkriveno mnogo svojstava Lemoineove točke, a u ovom ćemo poglavlju iskazati i dokazati neka od njih. Više o iskazanim teoremima nalazi se u literaturi (vidi [1], [2], [4], [7], [9]).

**Teorem 4.1.** *Neka su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ , a  $d_a$ ,  $d_b$  i  $d_c$  udaljenosti točke  $L$  do stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$  trokuta  $ABC$ , redom. Ako je  $L$  Lemoineova točka unutar danog trokuta  $ABC$  tada su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama pripadnih stranica tog trokuta, tj. vrijedi:*

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

*Dokaz.* U teoremu 2.16 dokazali smo da su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama stranica tog trokuta, pa vrijedi:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

Odnosno, kao produženi omjer dobivamo izraz:

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

□

**Teorem 4.2.** *Neka su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ , a  $d_a$ ,  $d_b$  i  $d_c$  udaljenosti točke  $L$  do stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$  trokuta  $ABC$ , redom. Ako je  $L$  točka unutar danog trokuta  $ABC$  takva da su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama pripadnih stranica tog trokuta, tj. da vrijedi:*

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c,$$

*tada je  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ .*

*Dokaz.* Iz produženog omjera slijedi:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

U teoremu 2.17 dokazali smo da se točka trokuta čije su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama stranica tog trokuta nalazi na simedijani. Iz gornjih jednakosti slijedi da se točka  $L$  nalazi na svakoj simedijani, dakle nalazi se na sjecištu simedijana, odnosno  $L$  je Lemoineova točka.  $\square$

**Teorem 4.3.** *Udaljenosti  $d_a$ ,  $d_b$  i  $d_c$  Lemoineove točke  $L$  od stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$  danog trokuta  $ABC$  dane su jednakostima:*

$$d_a = \frac{a^2 v_a}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d_b = \frac{b^2 v_b}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d_c = \frac{c^2 v_c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

*Dokaz.* Prema teoremu 4.1 vrijedi:

$$\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c},$$

odakle proširivanjem dobivamo:

$$\frac{ad_a}{a^2} = \frac{bd_b}{b^2} = \frac{cd_c}{c^2}.$$

Koristeći svojstvo razmjera slijedi:

$$\frac{ad_a + bd_b + cd_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ad_a}{a^2} = \frac{d_a}{a}. \quad (4.1)$$

Trokut  $ABC$  možemo podijeliti na tri trokuta  $BCL$ ,  $ACL$  i  $ABL$ . Površinu trokuta  $ABC$  možemo prikazati kao zbroj površina trokuta  $BCL$ ,  $ACL$  i  $ABL$ , te dobivamo:

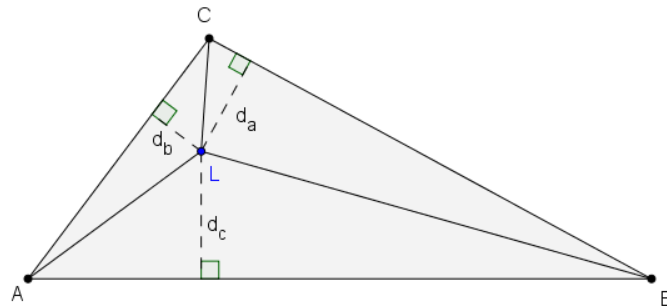
$$P_{ABC} = \frac{ad_a}{2} + \frac{bd_b}{2} + \frac{cd_c}{2},$$

odnosno

$$2P_{ABC} = ad_a + bd_b + cd_c.$$

Uvrštavajući u jednakost (4.1) vrijedi:

$$\frac{2P_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{d_a}{a},$$

Slika 4.1: Udaljenost Lemoineove točke  $L$  trokuta  $ABC$  do njegovih stranica

odnosno

$$d_a = \frac{2aP_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Površinu trokuta  $ABC$  možemo izračunati i kao  $P = \frac{av_a}{2}$ , pa slijedi:

$$d_a = \frac{a^2v_a}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Na analogan način možemo odrediti i preostale udaljenosti,  $d_b$  i  $d_c$ . □

**Teorem 4.4.** *Neka je dan pravokutan trokut. Udaljenost Lemoineove točke  $L$  od hipotenuze jednaka je polovini duljine visine na hipotenuzu.*

*Dokaz.* Neka je točka  $C$  vrh pravog kuta trokuta  $ABC$ . Neka su duljine kateta  $a$  i  $b$ , a duljina hipotenuze  $c$ , te duljina visine na hipotenuzu  $v_c$ . U pravokutnom trokutu  $ABC$  možemo primijeniti Pitagorin poučak, pa vrijedi da je  $c^2 = a^2 + b^2$ . Iz prethodnog teorema, 4.3, vrijedi

$$d_c = \frac{c^2v_c}{a^2 + b^2 + c^2},$$

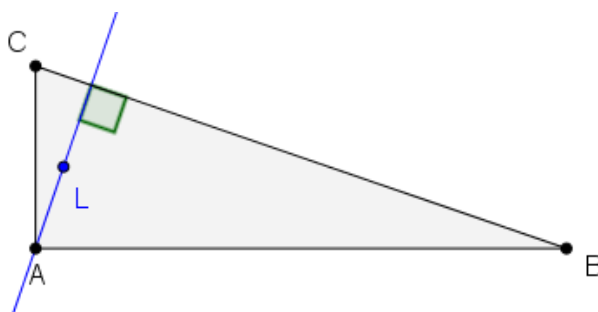
te uvrštavajući gornju jednakost slijedi:

$$d_c = \frac{c^2v_c}{c^2 + c^2} = \frac{c^2v_c}{2c^2},$$

odnosno

$$d_c = \frac{v_c}{2}.$$

Dakle, dobili smo da je udaljenost  $d_c$  Lemoineove točke  $L$  do stranice  $c$  jednaka polovini duljine visine  $v_c$  iz vrha  $C$  na stranicu  $c$ . □

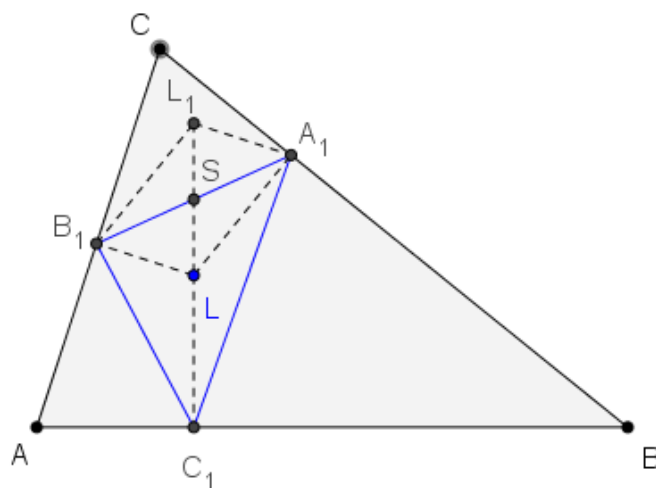


Slika 4.2: Udaljenost Lemoineove točke  $L$  pravokutnog trokuta  $ABC$  do hipotenuze

**Definicija 4.5.** Neka je točka  $P$  unutar trokuta  $ABC$ . Trokut  $A_1B_1C_1$  kojemu su vrhovi nožišta okomica spuštjenih iz neke točke  $P$  na stranice danog trokuta  $ABC$ , zovemo **nožišnim** ili **pedalnim trokutom** pola  $P$  s obzirom na dani trokut  $ABC$ .

**Teorem 4.6.** Nožišni trokut Lemoineove točke  $L$  je trokut kojemu je točka  $L$  težište.

*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$ , te neka je  $L$  Lemoineova točka, a trokut  $A_1B_1C_1$  nožišni trokut točke  $L$ . Neka je točka  $L_1$  u ravnini takva da je četverokut  $LA_1L_1B_1$  paralelogram. Dijagonale paralelograma se međusobno raspolavljaju, te sa  $S$  označimo njihovo sjecište. S obzirom je četverokut  $LA_1L_1B_1$  paralelogram, nasuprotne stranice su jednakih duljina,



Slika 4.3: Lemoineova točka  $L$  trokuta  $ABC$  je težište nožišnog trokuta  $A_1B_1C_1$

odnosno  $|LB_1| = |A_1L_1|$ . Prema teoremu 2.16 vrijedi:

$$\frac{|LA_1|}{|LB_1|} = \frac{|BC|}{|AC|},$$

odnosno

$$\frac{|LA_1|}{|A_1L_1|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Nadalje, vrijedi da je  $LA_1 \perp BC$  i  $LB_1 \perp AC$ . S obzirom su u paralelogramu nasuprotne stranice paralelne, vrijedi  $A_1L_1 \perp AC$ . Kutovi  $\angle ACB$  i  $\angle L_1A_1L$  imaju okomite krakove, pa su sukladni, tj.

$$\angle ACB = \angle LA_1L_1.$$

Trokuti  $ABC$  i  $L_1LA_1$  su slični po SKS teoremu o sličnosti trokuta. S obzirom su dva para odgovarajućih stranica tih sličnih trokuta međusobno okomite, moraju i preostale stranice biti međusobno okomite, odnosno  $AB \perp LL_1$ . Kako je  $AB \perp LL_1$ , točke  $C_1$ ,  $L$  i  $L_1$  su kolinearne. Točka  $S$  je sjecište dijagonala paralelograma  $LA_1L_1B_1$ , odnosno polovište dužine  $A_1B_1$ . Slijedi da je dužina  $C_1S$  težišnica trokuta  $A_1B_1C_1$ . Na analogan način dokazali bismo da i preostale težišnice trokuta  $A_1B_1C_1$  prolaze Lemoineovom točkom  $L$ . Dakle, točka  $L$  je težište trokuta  $A_1B_1C_1$ .  $\square$

**Teorem 4.7.** *Neka je  $T$  težište i  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka su  $D$ ,  $E$  i  $F$  sjecišta pravaca  $AT$ ,  $BT$  i  $CT$  s opisanom kružnicom trokuta  $ABC$ . Neka su  $D_1$ ,  $E_1$  i  $F_1$  sjecišta simedijana  $AL$ ,  $BL$  i  $CL$  s opisanom kružnicom trokuta  $ABC$ . Tada vrijedi:*

$$DD_1 \parallel BC, \quad EE_1 \parallel CA, \quad FF_1 \parallel AB.$$

*Dokaz.* U teoremu 3.4 dokazali smo da vrijedi jednakost  $\angle CAL = \angle BAT$ , odnosno da vrijedi  $\angle CAD_1 = \angle BAD$ . S obzirom su obodni kutovi nad jednakim lukovima jednaki, vrijedi:

$$\angle CAD_1 = \angle CDD_1 \text{ i } \angle BAD = \angle BCD,$$

te slijedi:

$$\angle CDD_1 = \angle DCB.$$

Pravac  $CD$  je transversala pravaca  $AB$  i  $D_1D$ . Dokazali smo da je  $\angle CDD_1 = \angle DCB$ , pa slijedi da su pravci  $BC$  i  $DD_1$  paralelni.

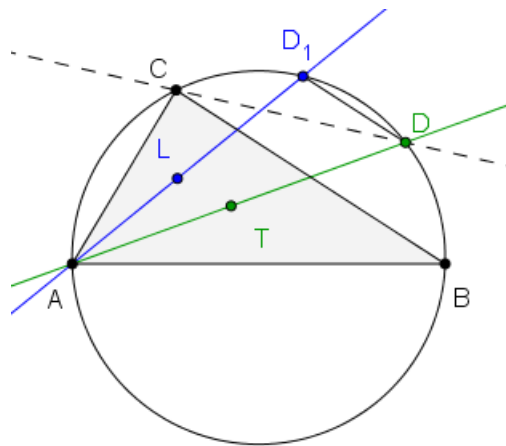
Time smo dokazali teorem, odnosno da vrijedi:

$$DD_1 \parallel BC,$$

a analogno se pokaže i:

$$EE_1 \parallel CA, \quad FF_1 \parallel AB.$$

$\square$



Slika 4.4: Teorem 4.7

Dakle, Lemoineovu točku trokuta možemo konstruirati i bez antiparalela, težišnica i težišta, tako da kao na slici 4.4 konstruiramo pravac  $AA_1$  kojem pripada težišnica te presječemo s opisanom kružnicom trokuta, a zatim konstruiramo paralelu s nasuprotnom stranicom  $\overline{BC}$  te presječemo s opisanom kružnicom, da bismo dobili točku  $D_1$ . Tada dobivamo simedijanu  $AD_1$ . Tako ponovimo i za preostale vrhove trokuta, te dobivamo Lemoineovu točku, kao sjecište tih pravaca.

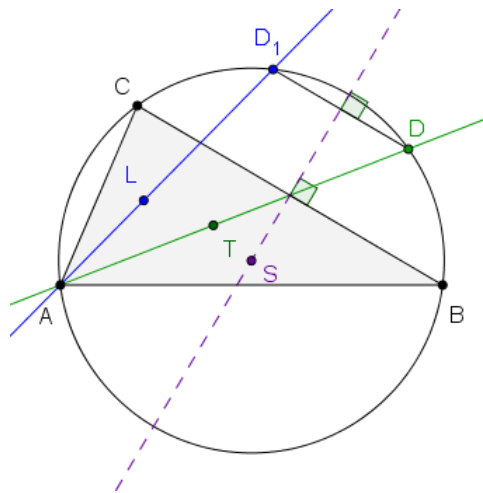
**Teorem 4.8.** *Neka je  $T$  težište i  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka su  $D, E$  i  $F$  sjecišta težišnica  $AT, BT$  i  $CT$  s opisanom kružnicom trokuta  $ABC$ . Neka su  $D_1, E_1$  i  $F_1$  sjecišta simedijana  $AL, BL$  i  $CL$  s opisanom kružnicom trokuta  $ABC$ . Simetrale dužina  $\overline{BC}, \overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  su istovremeno simetrale dužina  $\overline{DD_1}, \overline{EE_1}$  i  $\overline{FF_1}$ .*

*Dokaz.* U teoremu 4.7 dokazali smo da vrijedi da je  $DD_1 \parallel BC$ . Još moramo dokazati da se simetrale dužina  $\overline{DD_1}$  i  $\overline{BC}$  podudaraju. Simetrale stranica trokuta uvijek se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice. Označimo sa  $S$  središte opisane kružnice  $k$  trokuta  $ABC$ . Dakle, točka  $S$  pripada simetrali dužine  $\overline{BC}$ .

Dužina  $\overline{DD_1}$  je tetiva kružnice  $k$ . Simetrala tetive prolazi kroz središte kružnice. Slijedi da točka  $S$  pripada i simetrali dužine  $\overline{DD_1}$ .

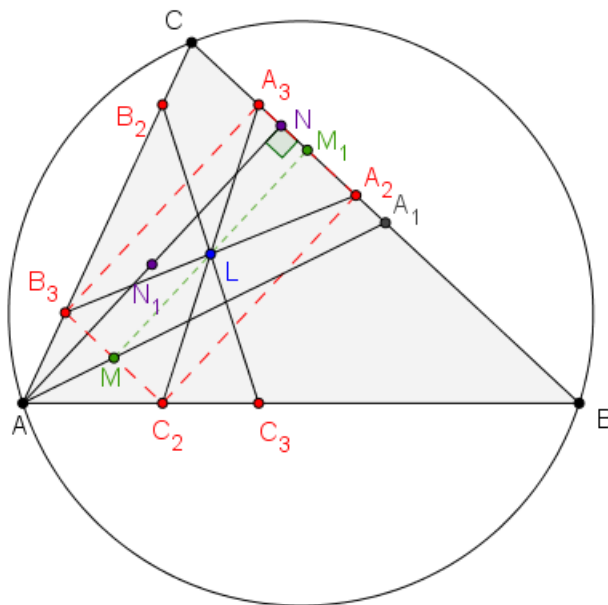
U teoremu 4.7 dokazali smo da su dužine  $\overline{DD_1}$  i  $\overline{BC}$  paralelne, pa vrijedi da su i simetrale tih dužina međusobno paralelne. Dakle, simetrale dužina  $\overline{DD_1}$  i  $\overline{BC}$  su paralelne i prolaze istom točkom  $S$ , pa slijedi da se podudaraju.

Analogno se dokaže da simetrale dužina  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  su istovremeno simetrale dužina  $\overline{EE_1}$  i  $\overline{FF_1}$ , redom.  $\square$



Slika 4.5: Teorem 4.8

**Teorem 4.9.** Neka je  $\overline{AN}$  visina, točka  $N_1$  polovište dužine  $\overline{AN}$ , a točka  $A_1$  polovište stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$ . Tada Lemoineova točka  $L$  trokuta  $ABC$  pripada pravcu  $A_1N_1$ .



Slika 4.6: Teorem 4.9

*Dokaz.* U trokutu  $ABC$  konstruirajmo antiparalele  $\overline{C_3B_2}$ ,  $\overline{C_2A_3}$ ,  $\overline{A_2B_3}$  kojima pripada Le-

moineova točka  $L$ , kao na slici 4.6. S obzirom točka  $L$  raspolavlja antiparalele, četverokut  $C_2B_3A_3A_2$  je paralelogram, a Lemoineova točka je sjecište dijagonala. Neka je  $A_1$  polovište dužine  $\overline{BC}$ . Neka težišnica  $\overline{AA_1}$  siječe dužinu  $\overline{C_2B_3}$  u točki  $M$ . Dužina  $\overline{C_2B_3}$  je paralelna s dužinom  $\overline{BC}$ , pa slijedi da je točka  $M$  polovište dužine  $\overline{C_2B_3}$ . Neka je  $M_1$  polovište dužine  $\overline{A_2A_3}$ . Tada je točka  $L$  polovište dužine  $\overline{MM_1}$ .

Homotetijom, s centrom u točki  $A_1$  dužina  $\overline{MM_1}$  preslikava se u dužinu  $\overline{AN}$ , odnosno polovište  $L$  dužine  $\overline{MM_1}$  preslikava se u polovište  $N_1$  dužine  $\overline{AN}$ . Dakle, Lemoineova točka  $L$  trokuta  $ABC$  pripada pravcu  $A_1N_1$ .  $\square$

Na analogan način dokaže se da Lemoineova točka  $L$  pripada preostalim pravcima koji spajaju polovišta stranica trokuta  $ABC$  s polovištima visina iz suprotnog vrha, te proizlazi slijedeći teorem.

**Teorem 4.10.** *Pravci koji spajaju polovišta stranica danog trokuta  $ABC$  s polovištima visina iz nasuprotnih vrhova sijeku se u Lemoineovoj točki  $L$ .*

Dakle, Lemoineovu točku možemo konstruirati na još jedan način, tako da spojimo polovišta stranica danog trokuta s polovištima visina iz suprotnog vrha i pronađemo sjecište.

Lemoineovu točku možemo konstruirati na još jedan način. U teoremu 2.6 dokazali smo da su pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  simedijane trokuta, a znamo da se one sijeku u Lemoineovoj točki. Prema teoremu 1.9 slijedi da se pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  sijeku u Gergonneovoj točki, odnosno Lemoineova točka trokuta  $ABC$  je zapravo Gergonneova točka njemu tangencijalnog trokuta

**Teorem 4.11.** *Neka je  $DEF$  tangencijalni trokut trokuta  $ABC$ . Neka su točke  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $CA$  i  $AB$  trokuta  $ABC$ , i neka je  $R$  sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $DE$ . Tada vrijedi:*

$$AR \parallel CF.$$

*Dokaz.* U teoremu 2.6 dokazali smo da su pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  simedijane trokuta, a znamo da se one sijeku u Lemoineovoj točki. Primjenjujući Cevin teorem 1.1 na trokut  $DEF$  dobivamo:

$$\frac{|EA|}{|AF|} \cdot \frac{|FB|}{|BD|} \cdot \frac{|DC|}{|CE|} = 1. \quad (4.2)$$

Neka su točke  $F_a$  i  $F_b$  sjecišta pravca koji je paralelan s pravcem  $DE$  i prolazi točkom  $F$  i pravaca  $BC$ , odnosno  $CA$ . Tada je pravac  $F_aF_b$  paralelan s pravcem  $DE$ . Iz dokaza teorema 2.3 slijedi da je točka  $F$  polovište dužine  $\overline{F_aF_b}$ . Neka je  $Q$  sjecište pravca  $DE$  i pravca koji je paralelan s pravcem  $BC$  i sadrži točku  $A$ . Neka su  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , pa je dužina  $\overline{B_1C_1}$  je srednjica trokuta  $ABC$  i vrijedi da je dužina  $\overline{B_1C_1}$



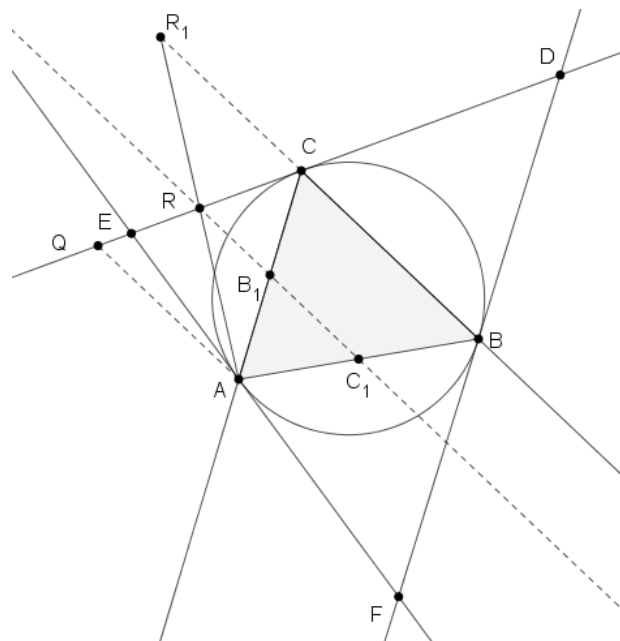


**Teorem 4.12.** *Neka je trokut  $DEF$  tangencijalni trokut trokuta  $ABC$ . Neka su točke  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , i neka je  $R$  sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $DE$ , a  $R_1$  centralnosimetrična točka točki  $A$  s obzirom na točku  $R$ . Tada točke  $R_1$ ,  $C$  i  $B$  pripadaju istom pravcu.*

*Dokaz.* U dokazu teorema 4.11 dokazali smo da je točka  $R$  polovište dužine  $\overline{QC}$ , pri čemu je  $Q$  sjecište pravca  $DE$  i pravca koji je paralelan s pravcem  $BC$  i sadrži točku  $A$ , odnosno vrijedi da su i točke  $C$  i  $Q$  centralnosimetrične s obzirom na točku  $R$ . Dakle, vrijedi:

$$|AR| = |R_1R| \quad \text{i} \quad |QR| = |CR|,$$

odnosno četverokutu  $ACR_1Q$  se međusobno raspolavljaju dijagonale, pa slijedi da je četverokut  $ACR_1Q$  paralelogram.

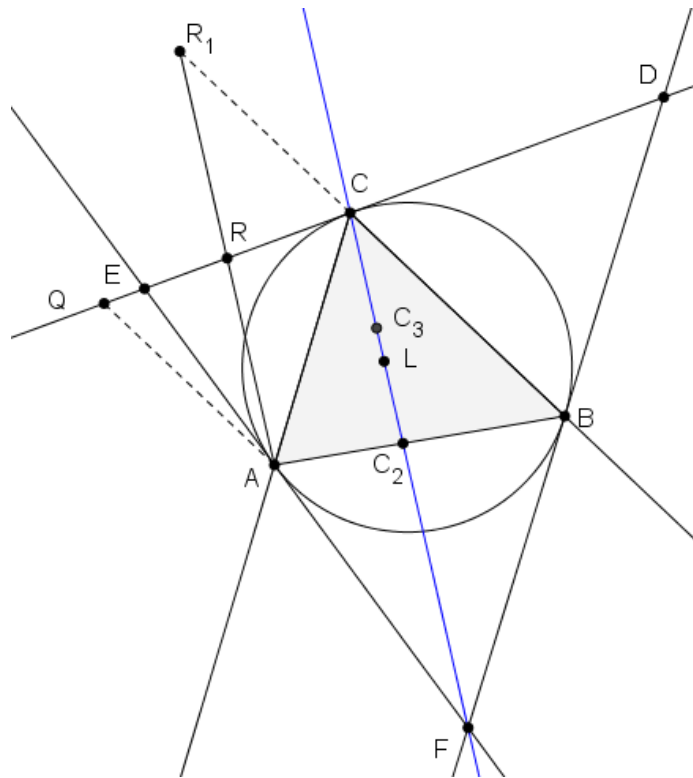


Slika 4.8: Teorem 4.12

Nasuprotne stranice paralelograma su paralelne, odnosno pravac  $QA$  je paralelan s pravcem  $R_1C$ . Prema definiciji točke  $Q$  slijedi da je pravac  $QA$  paralelan i s pravcem  $BC$ , odakle slijedi da točke  $R_1$ ,  $C$  i  $B$  pripadaju istom pravcu.  $\square$

**Teorem 4.13.** *Neka je trokut  $DEF$  tangencijalni trokut trokuta  $ABC$  s Lemoineovom točkom  $L$ . Neka su točke  $B_1$  i  $C_1$  polovišta stranica  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , i neka je  $R$  sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $\overline{DE}$ . Neka je točka  $C_2$  sjecište simedijane  $CL$  i stranice  $\overline{AB}$ , a točka  $C_3$  polovište dužine  $\overline{CC_2}$ . Tada točke  $R$ ,  $C_3$  i  $B$  pripadaju istom pravcu.*

*Dokaz.* Neka je  $R_1$  centralnosimetrična točka točki  $A$  s obzirom na točku  $R$ . Prema teoremu 2.6 pravac  $CF$  prolazi Lemoineovom točkom  $L$  trokuta  $ABC$ , odnosno točke  $C$ ,  $F$  i  $L$  su kolinearne. U teoremu 4.11 dokazali smo da je pravac  $AR$  paralelan s pravcem  $CF$ , odnosno vrijedi da je pravac  $AR_1$  paralelan s pravcem  $CF$ . Kako je pravac  $AR_1$  paralelan s pravcem  $\overline{C_2C}$  postoji homotetija sa središtem u točki  $B$  koja preslikava dužinu  $\overline{AR_1}$  u dužinu  $\overline{C_2C}$ , a polovište  $R$  dužine  $\overline{AR_1}$  u polovište  $C_3$  dužine  $\overline{CC_2}$ . Dakle, točke  $R$ ,  $C_3$  i  $B$  pripadaju istom pravcu.

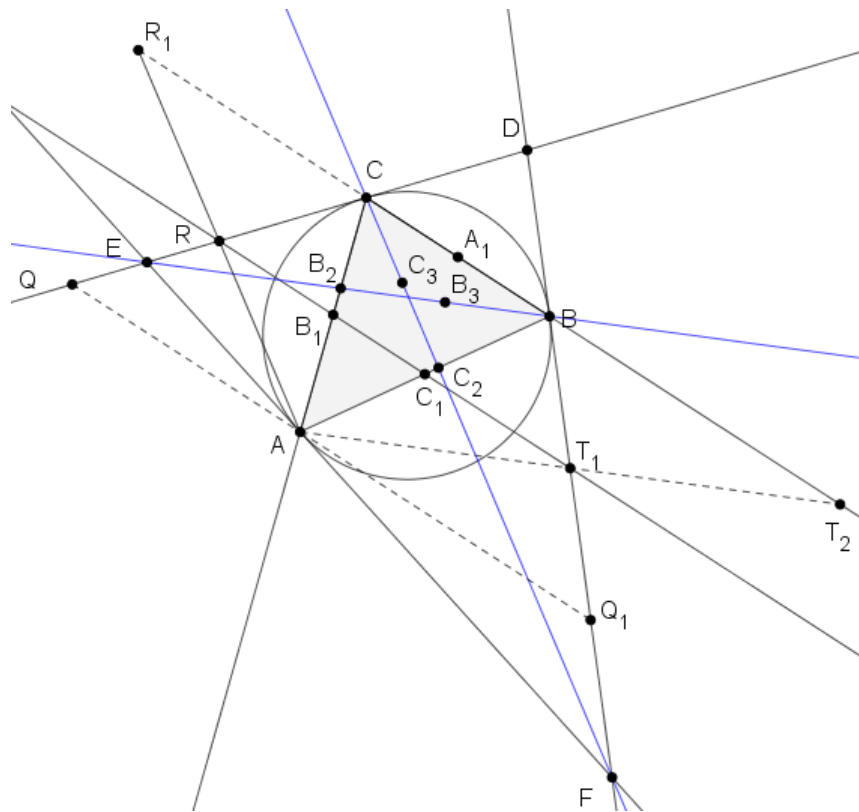


Slika 4.9: Teorem 4.13

□

**Teorem 4.14.** *Neka je  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka simedijane  $BL$  i  $CL$  trokuta  $ABC$  sijeku dužine  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  u točkama  $B_2$  i  $C_2$ , redom i neka su  $B_3$  i  $C_3$  polovišta dužina  $\overline{BB_2}$  i  $\overline{CC_2}$ . Tada su pravci  $BC_3$  i  $CB_3$  međusobno simetrični s obzirom na simetralu dužine  $\overline{BC}$ .*

*Dokaz.* Da bismo dokazali ovaj teorem, koristit ćemo tangencijalni trokut  $DEF$ . Neka je  $A_1$  polovište dužine  $\overline{BC}$ ,  $B_1$  polovište dužine  $\overline{CA}$  i  $C_1$  polovište dužine  $\overline{AB}$ . Neka je  $R$  sjecište



Slika 4.10: Teorem 4.14

pravaca  $B_1C_1$  i  $DE$ ,  $R_1$  centralnosimetrična točka točki  $A$  s obzirom na točku  $R$ , a točka  $Q$  sjecište pravca  $DE$  i pravca koji je paralelan s pravcem  $BC$  i sadrži točku  $A$ . U dokazu teorema 4.13 dokazali smo da točka  $R_1$  pripada pravcu  $BC$ .

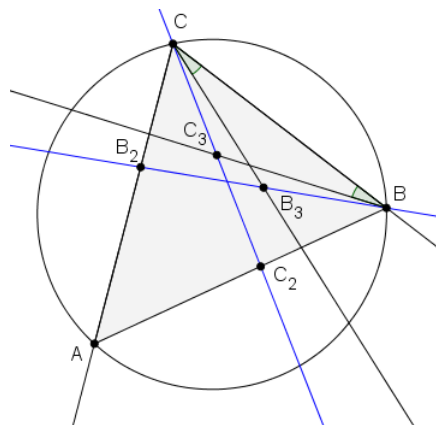
Neka je  $T_1$  sjecište pravca  $B_1C_1$  i  $FD$ , točka  $Q_1$  sjecište pravca  $FD$  i pravca koji je paralelan s pravcem  $BC$  i prolazi točkom  $A$ , te neka je točka  $T_2$  centralnosimetrična točki  $A$  s obzirom na točku  $T_1$ . Točka  $C_1$  je polovište stranice  $AB$ , a  $C_1B_1$  je srednjica trokuta  $ABC$ , pa slijedi da je pravac  $B_1C_1$  paralelan s pravcem  $BC$  i  $AQ_1$ , odnosno pravac  $C_1T_1$  je paralelan s pravcem  $AQ_1$ . Tada slijedi da je  $C_1T_1$  srednjica trokuta  $AQ_1B$ , tj. točka  $T_1$  je polovište dužine  $Q_1B$ .

Prema definiciji točke  $T_2$  slijedi da je  $T_1$  polovište dužine  $AT_2$ . Dakle,  $T_1$  je polovište dužine  $Q_1B$  i  $AT_2$ , pa je četverokut  $AQ_1T_2B$  paralelogram. Sada slijedi da se homotetijom s centrom u  $C$  polovište  $B_3$  dužine  $B_2B$  preslikava u polovište  $T_1$  dužine  $AT_2$ . Dakle, točke  $C$ ,  $B_3$  i  $T_1$  pripadaju istom pravcu. U teoremu 4.13 dokazali smo da točke  $R$ ,  $C_3$  i  $B$  pripadaju istom pravcu. Da bismo dokazali tvrdnju teorema, moramo dokazati da su pravci  $RB$  i  $T_1C$  međusobno simetrični s obzirom na simetralu dužine  $BC$ .

Točke  $B$  i  $C$  su međusobno simetrične s obzirom na simetralu dužine  $\overline{BC}$ , kao i točke  $B_1$  i  $C_1$ . Opisana kružnica trokutu  $ABC$  se tom osnom simetrijom preslikava sama u sebe. Tangenta na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točki  $B$  se preslikava u tangentu na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točki  $C$ . Drugim riječima, pravac  $FD$  se preslikava u pravac  $DE$ .

Točka  $T_1$  je sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $FD$ , a točka  $R$  je sjecište pravaca  $B_1C_1$  i  $DE$ , odnosno točka  $T_1$  se osnom simetrijom preslikava u točku  $R$ , pri čemu je os simetrije simetrala kuta  $\angle CDB$ . S obzirom se i točka  $C$  preslikava istom osnom simetrijom u točku  $B$  vrijedi da se i pravac  $T_1C$  preslikava tom osnom simetrijom u pravac  $RB$ . Dakle, dokazali smo tvrdnju teorema, da su pravci  $RB$  i  $T_1C$  simetrični s obzirom na simetralu dužine  $\overline{BC}$ .  $\square$

**Teorem 4.15.** *Neka je  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka simedijane  $BL$  i  $CL$  trokuta  $ABC$  sijeku dužine  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  u točkama  $B_2$  i  $C_2$ , i neka su  $B_3$  i  $C_3$  polovišta dužina  $\overline{BB_2}$  i  $\overline{CC_2}$ . Tada vrijedi  $\angle BCB_3 = \angle CBC_3$ .*



Slika 4.11: Teorem 4.15

*Dokaz.* U teoremu 4.14 dokazali smo da se pravac  $CB_3$  osnom simetrijom s obzirom na simetralu dužine  $\overline{BC}$  preslikava u pravac  $BC_3$ , a pravac  $BC$  se preslikava sam u sebe. Dakle, dobivamo:

$$\angle(BC, CB_3) = \angle(BC, BC_3).$$

Drugim riječima, dokazali smo tvrdnju teorema, odnosno da vrijedi:

$$\angle BCB_3 = \angle CBC_3.$$

$\square$

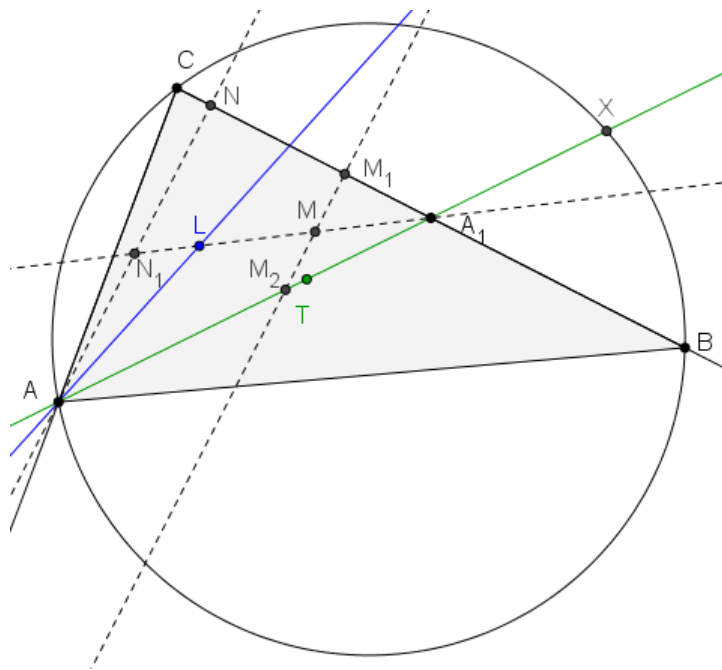
**Teorem 4.16.** Neka je točka  $A_1$  polovište dužine  $\overline{BC}$ , točka  $T$  težište, a točka  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka je  $J$  točka na pravcu  $TL$  koja dijeli dužinu  $\overline{TL}$  u omjeru  $\frac{|TJ|}{|JL|} = \frac{2}{3}$ . Neka je  $X$  sjecište pravca  $AA_1$  i opisane kružnice trokuta  $ABC$  (različito od točke  $A$ ), točka  $U$  ortogonalna projekcija točke  $X$  na pravac  $BC$ , a točka  $U_1$  centralno simetrična točka točki  $U$  s obzirom na točku  $X$ .

Tada pravac  $AU_1$  prolazi točkom  $J$  i prepolavlja dužinu  $\overline{LA_1}$ .

*Dokaz.* Jasno je da točke  $A, T, A_1$  i  $X$  pripadaju istom pravcu.

Neka je točka  $M$  polovište dužine  $\overline{LA_1}$ . Tada je Lemoineova točka,  $L$ , centralno simetrična točka točki  $A_1$  s obzirom na točku  $M$ .

Neka je točka  $N$  nožište visine iz vrha  $A$  trokuta  $ABC$ , a točka  $N_1$  polovište dužine  $\overline{AN}$ . U teoremu 4.9 dokazali smo da Lemoineova točka  $L$  pripada pravcu  $A_1N_1$ , pa možemo zaključiti da točke  $L, A_1, N_1$  i  $M$  pripadaju istom pravcu.



Slika 4.12: Teorem 4.16

Neka je točka  $M_1$  nožište okomice iz točke  $M$  na pravac  $BC$ , a točka  $M_2$  sjecište te okomice i pravca  $AA_1$ . S obzirom je točka  $N$  nožište visine iz vrha  $A$  trokuta  $ABC$ , pravac  $AN$  je okomit na pravac  $BC$ . Također, i pravac  $M_2M_1$  je okomit na pravac  $BC$ . Dakle,  $AN \parallel M_2M_1$ . Koristeći Talesov teorem o proporcionalnosti dobivamo:

$$\frac{|M_2M|}{|MM_1|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|}.$$

Prema definiciji, točka  $N_1$  je polovište dužine  $\overline{AN}$ , pa vrijedi:

$$\frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{|M_2M|}{|MM_1|} = 1.$$

Dakle, točka  $M$  je polovište dužine  $\overline{M_2M_1}$ . Odnosno, točka  $M_2$  je centralno simetrična točki  $M_1$  s obzirom na točku  $M$ . Kao što smo već spomenuli, točka  $L$  je centralno simetrična točki  $A_1$  s obzirom na točku  $M$ . Centralnom simetrijom se pravac preslikava u njemu paralelan pravac, pa vrijedi:

$$LM_2 \parallel A_1M_1, \quad \text{odnosno} \quad LM_2 \parallel BC.$$

Neka je  $X_1$  sjecište simedijane  $AL$  trokuta  $ABC$  i opisane kružnice tog trokuta. Prema teoremima 4.7 i 4.8, vrijedi  $XX_1 \parallel BC$  i simetrala dužine  $\overline{BC}$  je ujedno i simetrala dužine  $\overline{XX_1}$ . Neka je točka  $G_1$  ortogonalna projekcija točke  $X_1$  na pravac  $BC$ . Pravci  $AN$ ,  $XU$  i  $X_1G_1$  su okomiti na dužinu  $\overline{BC}$ , odnosno pravci su međusobno paralelni:

$$AN \parallel XU \parallel X_1G_1.$$

Iz teorema 4.9 znamo da točke  $L$ ,  $A_1$  i  $N_1$  pripadaju istom pravcu.

Neka je  $G$  sjecište tog pravca i pravca  $XU$ . S obzirom je  $AN \parallel XU$ , primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, dobivamo:

$$\frac{|XG|}{|GU|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1.$$

Dakle, točka  $G$  je polovište dužine  $\overline{XU}$ .

S obzirom je  $XX_1 \parallel UG_1$  i  $XU \parallel X_1G_1$ , četverokut  $XX_1G_1U$  je paralelogram. Preciznije četverokut  $XX_1G_1U$  je pravokutnik, jer je  $X_1G_1 \perp BC$ , odnosno  $\angle X_1G_1U = 90^\circ$ . Pravokutniku  $XX_1G_1U$  simetrale nasuprotnih stranica se podudaraju. Odnosno, simetrala dužine  $\overline{XX_1}$  podudara se sa simetralom dužine  $\overline{UG_1}$ , ali i sa simetralom dužine  $\overline{BC}$ . Dakle, i simetrale dužina  $\overline{UG_1}$  i  $\overline{BC}$  se podudaraju. S obzirom da dužine  $\overline{UG_1}$  i  $\overline{BC}$  pripadaju istom pravcu, a simetrale im se podudaraju, zaključujemo da je polovište  $A_1$  dužine  $\overline{BC}$  ujedno i polovište dužine  $\overline{UG_1}$ .

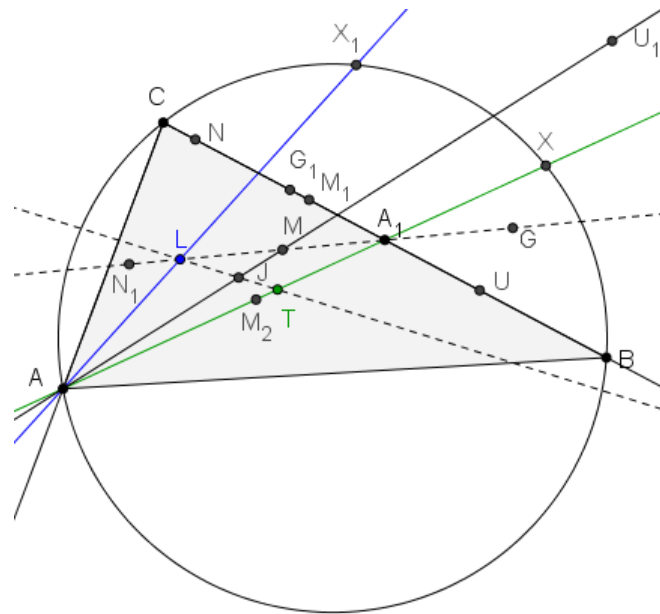
Sada znamo da su točke  $A_1$  i  $G$  polovišta dužina  $\overline{UG_1}$  i  $\overline{XU}$ . Promatrajući trokut  $G_1XU$ , uočavamo da je dužina  $\overline{A_1G}$  srednjica trokuta, a tada vrijedi da je  $A_1G \parallel G_1X$ . S obzirom da i Lemoineova točka  $L$  pripada pravcu  $A_1G$  vrijedi  $LA_1 \parallel G_1X$ .

Kako je točka  $U_1$  centralno simetrična točki  $U$  s obzirom na točku  $X$ , vrijedi  $|UX| = |XU_1|$ . Također,  $|UX| = |G_1X_1|$ , jer smo prije dokazali da je četverokut  $XX_1G_1U$  pravokutnik. Dakle,  $|XU_1| = |G_1X_1|$ .

Prije smo dokazali da je i  $XU_1 \parallel G_1X_1$ , pa zaključujemo da je četverokut  $XU_1X_1G_1$  paralelogram. Slijedi da je i  $G_1X \parallel U_1X_1$ . Ranije smo dokazali da je  $LA_1 \parallel G_1X$ , pa vrijedi da je







Slika 4.14: Teorem 4.16

Prethodno iskazani i dokazani teorem možemo primijeniti na analogan način i na preostale vrhove trokuta  $ABC$ , te dobivamo sljedeći teorem.

**Teorem 4.17.** *Neka su točke  $A_1, B_1, C_1$  polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , točka  $T$  težište trokuta  $ABC$  i neka su  $X, Y, Z$  sjecišta pravaca  $AT, BT, CT$  trokuta  $ABC$  i njemu opisane kružnice (različite od točaka  $A, B, C$ ). Nadalje, neka su  $U, V, W$  ortogonalne projekcije točaka  $X, Y, Z$  na pravce  $BC, CA, AB$ , a  $U_1, V_1, W_1$  centralno simetrične točke točkama  $U, V, W$  s obzirom na točke  $X, Y, Z$ .*

*Tada pravci  $AU_1, BV_1, CW_1$  prolaze jednom točkom  $J$  za koju vrijedi:*

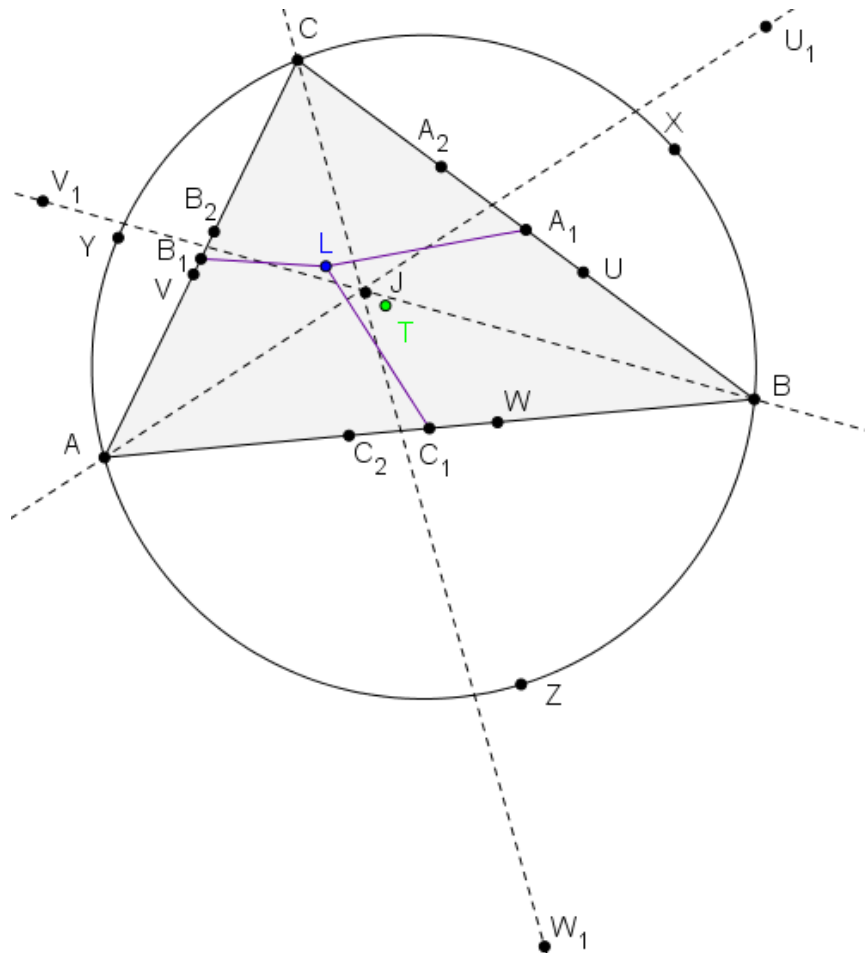
$$\frac{|TJ|}{|JL|} = \frac{2}{3},$$

gdje je  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ .

**Teorem 4.18.** *Neka je  $L$  Lemoineova točka trokuta  $ABC$ . Neka simedijana  $AL$  trokuta  $ABC$  siječe dužinu  $\overline{BC}$  u točki  $A_2$  i opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točki  $X_1$  (različitoj od  $A$ ). Tada vrijedi:*

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{1}{2}.$$

*Dokaz.* Iz dokaza teorema 4.8 znamo da je simetrala dužine  $\overline{BC}$  ujedno i simetrala dužine  $\overline{XX_1}$ , pri čemu je  $X$  sjecište pravca kojem pripada težišnica  $\overline{AA_1}$  i opisane kružnice trokuta



Slika 4.15: Teorem 4.17

$\triangle ABC$ . Po definiciji točka  $A_1$  je polovište dužine  $\overline{BC}$ , pa ona pripada simetrali dužina  $\overline{BC}$  i  $\overline{XX_1}$ . Dakle,  $|A_1X| = |A_1X_1|$ . S obzirom je trokut  $XA_1X_1$  je jednakokračan, vrijedi:

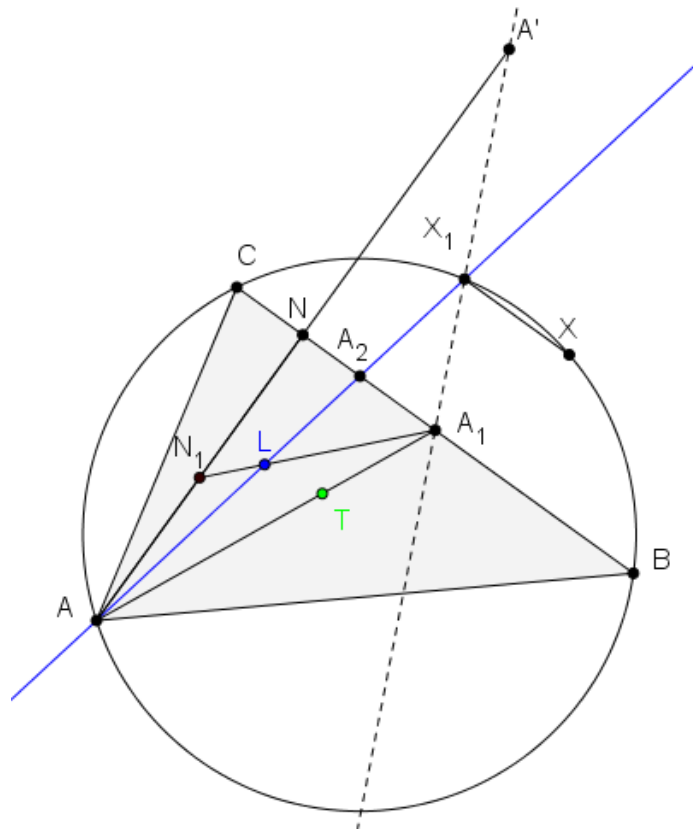
$$\angle A_1X_1X = \angle X_1XA_1.$$

Neka je  $H$  sjecište pravaca  $A_1X_1$  i  $AB$ . S obzirom je  $XX_1 \parallel BC$ , za kutove uz presječnicu  $A_1X_1$  vrijedi:

$$\angle A_1X_1X = \angle HA_1B \quad \text{i} \quad \angle X_1XA_1 = \angle CA_1A = \angle XA_1B.$$

Kutovi  $\angle X_1A_1X$  i  $\angle AA_1H$  su vršni, pa su sukladni. Sada slijedi:

$$\angle X_1A_1B = \angle X_1A_1X + \angle XA_1B = \angle AA_1H + \angle HA_1B = \angle AA_1B. \quad (4.4)$$



Slika 4.16: Teorem 4.18

Neka je točka  $A'$  osnosimetrična točki  $A$  s obzirom na pravac  $BC$ . Neka je točka  $N$  nožište visine iz vrha  $A$  na pravac  $BC$ . Tada je  $N$  ujedno i polovište dužine  $\overline{AA'}$ . Dakle,  $\frac{|AA'|}{|NA'|} = 2$ . Točka  $A'$  je osnosimetrična točki  $A$  s obzirom na pravac  $BC$ , pa vrijedi:

$$\angle A'A_1B = \angle BA_1A. \quad (4.5)$$

Uspoređujući dobivene jednakosti (4.4) i (4.5) zaključujemo da je  $\angle A'A_1B = \angle X_1A_1B$ , a kako su  $A'$  i  $X_1$  s iste strane pravca  $A_1B$ , točke  $A_1$ ,  $A'$  i  $X_1$  pripadaju istom pravcu. Sjecište simedijane  $AL$  i pravca  $BC$  je točka  $A_2$ , te stoga točke  $A_1$ ,  $N$  i  $A_2$  pripadaju istom pravcu. Neka je točka  $N_1$  polovište dužine  $\overline{AN}$ . Dakle, točke  $A$ ,  $N$ ,  $N_1$  i  $A'$  pripadaju jednom pravcu, te točke  $A$ ,  $L$ ,  $A_2$  i  $X_1$  pripadaju također jednom pravcu. Pravci  $A'X_1$ ,  $NA_2$ ,  $N_1L$ ,  $AA_1$  sijeku se u točki  $A_1$ . Primjenjujući jednakost dvoomjera četvorki točaka dobivamo:

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|} : \frac{|AA'|}{|A'M|}.$$

S obzirom je  $N_1$  polovište dužine  $\overline{AN}$ , a  $N$  polovište dužine  $\overline{AA'}$ , vrijedi:

$$\frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{|AA'|}{|A'N|} = 2.$$

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{1}{2}.$$

□

Dobili smo još jedan način konstrukcije Lemoineove točke  $L$ . Neka je  $X$  sjecište pravca  $AT$  i opisane kružnice  $k$  trokuta  $ABC$ , a  $X_1$  drugo sjecište opisane kružnice  $k$  i pravca koji je paralelan s pravcem  $BC$  i prolazi točkom  $X$ . Neka je  $\overline{AN}$  visina na stranicu  $\overline{BC}$ ,  $N_1$  polovište te visine i  $A_1$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Sjecište pravaca  $A_1N_1$  i  $AX_1$  je Lemoineova točka.

# Bibliografija

- [1] P. Ballew, *Isogons and Isogonic Symmetry*, (svibanj 2017.), <http://www.pballew.net/isogon.html>.
- [2] A. Bogomolny, *All about Symmedians*, (siječanj 2017.), <http://www.cut-the-knot.org/triangle/symmedians.shtml>.
- [3] M. Bombardelli i D. Ilišević, *Elementarna geometrija, skripta, verzija 1.0*, (rujan 2016.), <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf>.
- [4] D. Grinberg, *Three properties of the symmedian point*, (rujan 2016.), <http://web.mit.edu/~darij/www/TPSymmedian.pdf>.
- [5] M. Halapa, *Omjeri udaljenosti točke od stranica trokuta*, (svibanj 2017.), <http://www.halapa.com/pravipdf/omjerudalj.pdf>.
- [6] C. Kimberling, *Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840 - 1912) geometer*, (svibanj 2017.), <http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lemoine.html>.
- [7] S. Luo i C. Pohoata, *Let's Talk About Symmedians!*, (travanj 2017.), [https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets\\_talk\\_about\\_symmedians.pdf](https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf).
- [8] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *Emile Michel Hyacinthe Lemoine*, (svibanj 2017.), <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lemoine.html>.
- [9] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 1994.
- [10] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1992.

## Sažetak

U ovom radu definirali smo pojam simedijane trokuta na dva načina: kao pravac koji prolazi polovištima antiparalela stranica trokuta, te kao pravac koji je izogonalan pravcu kojem pripada težišnica. Zatim smo iskazali i dokazali neka od glavnih svojstava simedijana.

U drugom dijelu rada orijentirali smo se više na Lemoineovu točku, koju smo definirali kao sjecište simedijana, te kao izogonalno konjugiranu točku težišta. Zatim smo istraživali neka od svojstava Lemoineove točke. Dokazali smo i povezanost Lemoineove točke s nekim drugim poznatim točkama u ravnini, pa je tako Lemoineova točka trokuta ujedno i težište nožišnog trokuta Lemoineove točke, te je Lemoineova točka Gergonneova točka njemu tangencijalnog trokuta.

# Summary

In this paper we have defined the notion of the symmedian of a triangle in two ways: as the line that goes through the midpoints of the antiparallels to the sides of a triangle, and as the line that is isogonal to the triangle median. We have also presented and provided proof for some of the main properties of the symmedian.

In the second part of the paper we have mostly focused on the Lemoine point, which can be defined as the symmedian intersection and as the isogonal conjugate of the triangle centroid. In addition, we have investigated some of the properties of the Lemoine point. We have also proved the connection of the Lemoine point with some other points within the plane, which leads to the conclusion that the Lemoine point of a triangle also serves as the centroid of its pedal triangle and the Lemoine point actually represents the Gergonne point of its tangential triangle.

# Životopis

Rođena sam 2. svibnja 1991. godine u Puli. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1998. godine u Osnovnoj školi Vitomir Širola - Pajo, u područnoj školi u Svetom Martinu. Godine 2006. upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Mate Blažine u Labinu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2010. godine, nastavila sam daljnje školovanje na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija matematike 2014. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički, koji ove godine završavam.