

# Osnovno stanje neuređenog sustava

---

Sinković, Luka

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:105939>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/ [Zaštićeno autorskim pravom](#).

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Luka Sinković

Osnovno stanje neuređenog sustava

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

**Luka Sinković**

Diplomski rad

**Osnovno stanje neuređenog sustava**

Voditelj diplomskog rada: Dr. sc. Ivan Balog

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.

Prije svega bih želio uputiti zahvale svojem mentoru, dr. sc. Ivanu Balogu, na ukazanom povjerenju, neprestanoj podršci i vremenu uloženom u ovaj rad, ali i na ugodnoj atmosferi koju je pri tome stvorio. Hvala Alexanderu K. Hartmannu što nam je ustupio kod prema kojem je modificiran program korišten za numerički račun. Zahvaljujem i doc. dr. sc. Danku Radiću na inspiraciji u ključnoj fazi studija koju sam dobio preko kolegija „Diferencijalne jednadžbe i dinamički sustavi”. Također bih želio zahvaliti prof. dr. sc. Denisu Sunku na kvalitetnoj podlozi iz kolegija „Statistička fizika” te prenesenoj viziji do kojeg je obujma ključno razumjeti stvari.

Zahvaljujem i doc. dr. sc. Maji Planinić na tome što je znala ukazati na razinu razumijevanja koja je potrebna da bi se znanje efikasno prenijelo. To me dovodi do zahvale svim profesorima na fakultetu i u ranijim fazama školovanja, koji su svoje znanje s entuzijazmom dijelili, a posebno profesoru Dinku Meštroviću iz Prve gimnazije Varaždin, koji je jedan od razloga što sam upisao studij fizike.

Hvala svim prijateljima koji su ovo studentsko razdoblje učinili nezaboravnim. Posebice Nikoli, s kime su dijalozi uvijek bili političajni, a jednostavni. Hvala i Mati na bezuvjetnom prijateljstvu od mog prvog dana. Hvala Krešimiru koji je ovaj rad ispravio od stilskih grešaka. Hvala i kolegama, Josipu i Petru te kolegici Niki, koji su u različitim razdobljima bili ugodno društvo. Hvala Nenadu na pomoći kod učenja statističke fizike.

Zahvaljujem svojoj obitelji na svemu što se ne može stisnuti u ovih nekoliko redaka. Bez vaše podrške sve bi ovo bilo daleko teže. Hvala Erni što svakodnevicu čini obojenom.

## Sažetak

Numeričkim određivanjem osnovnog stanja sustava proučavana je kritičnost u 1d Isingovu modelu s nasumičnim poljem i dalekodosežnim interakcijama, što nam je omogućilo da preko skaliranja veličina u konačnom sustavu odredimo kritične eksponente. Promatrali smo spojene i odspojene verzije susceptibilnosti i kumulante magnetizacije i energije. Prikazana je evaluacija rezultata, a metoda je uspoređena s drugim analitičkim rezultatima.

Ključne riječi: osnovno stanje, Isingov model u nasumičnom polju, dalekodosežne interakcije, skaliranje u konačnom sustavu, kritični eksponenti.

# Ground State of a Disordered System

## Abstract

We have studied the criticality in 1d long-range random field Ising model by using numerical ground state determination in a finite system which allows us to extract critical exponents by finite size scaling. We have studied connected and disconnected versions of susceptibility and a magnetisation-energy cumulant. The evaluation of results is presented, as well as comparison with other analytical results.

Keywords: Ground state, random field Ising model, long-range interactions, finite size scaling, critical exponents.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorija</b>	<b>2</b>
2.1	Fazni prijelazi . . . . .	2
2.2	Isingov model . . . . .	4
2.3	Isingov model s nasumičnim poljem . . . . .	9
2.4	Isingov model s nasumičnim poljem i dalekodosežnim interakcijama . . . . .	10
2.5	Kritični eksponenti . . . . .	11
2.6	Teorija skaliranja za standardni kontinuirani fazni prijelaz . . . . .	12
2.6.1	Homogenost slobodne energije . . . . .	13
2.6.2	Relevantne i irelevantne varijable skaliranja . . . . .	13
2.6.3	Kako homogeni oblik daje potencijalna ponašanja? . . . . .	14
2.6.4	Relacije između eksponenata . . . . .	16
2.6.5	Skaliranje u konačnom sustavu . . . . .	17
2.7	Teorija skaliranja za RFIM . . . . .	17
2.7.1	Usporedba čistog Isinga i RFIM-a . . . . .	18
2.8	Skaliranje veličina koje promatramo . . . . .	20
2.8.1	Veličine i odnosi među eksponentima . . . . .	20
2.8.2	Kritični eksponenti $\gamma$ i $\eta$ . . . . .	21
2.8.3	Kritični eksponenti $\bar{\gamma}$ i $\bar{\eta}$ . . . . .	22
2.8.4	Veličine dobivene iz susceptibilnosti . . . . .	24
2.8.5	Kritični eksponent $\nu$ . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Rezultati</b>	<b>26</b>
3.1	Numerički detalji računa . . . . .	26
3.2	Obrada rezultata . . . . .	28
3.3	Procjena pogreški . . . . .	28
3.4	Kritični eksponent $\frac{\bar{\chi}}{\nu}$ . . . . .	30
3.4.1	Iz odspojene susceptibilnosti $\chi_d$ . . . . .	30
3.4.2	Iz odspojene susceptibilnosti $\chi_{d,2}$ . . . . .	30
3.5	Kritični eksponent $1/\nu$ . . . . .	31
3.5.1	Iz Binderova kumulanta $g_4$ i magnetizacije $m$ . . . . .	31

3.5.2	Iz spojenih i odspojenih $m - e$ kumulanata . . . . .	32
3.6	Kritični eksponent $\frac{\gamma}{\nu}$ . . . . .	33
3.7	Eksponenti $\Theta$ i $2\eta - \bar{\eta}$ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Zaključak i diskusija</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Metodički dio</b>	<b>40</b>
5.1	Interaktivna istraživački usmjerena nastava . . . . .	40
5.2	Nastavna priprema . . . . .	41
5.2.1	Obrazovni ishodi (očekivanja učenička postignuća) . . . . .	42
5.2.2	Tijek nastavnog sata . . . . .	42
<b>Literatura</b>		<b>50</b>



# 1 Uvod

Isingov model s nasumičnim poljem (*eng. Random Field Ising Model*, u daljnjem tekstu RFIM) na sebe je privukao veliku pozornost u posljednjih četrdesetak godina te su o njemu napisani brojni radovi. Prvotno su ga osmislili Imry i Ma u svojem radu iz 1975. godine [1]. Jedan razlog takve popularnosti jest teorijski izazov za razumijevanjem problema, a drugi proizlazi iz brojnih eksperimentalnih sustava za koje je otkriveno da dobro opisuje.

Eksperimentalne su realizacije Isingova modela s nasumičnim poljem su anti-feromagnetski spojevi kao što su  $Mn_{0.75}Zn_{0.25}F_2$ ,  $Fe_{0.5}Zn_{0.5}F_2$  ili  $Fe_{0.75}Co_{0.25}TiO_3$ . Ponašanje RFIM sustava eksperimentalno je proučavao Birgenau [2] upravo na tim spojevima. Također, uočeno je ekstremno eksponencijalno kritično usporavanje, koje je očekivano kao rezultat aktivirane dinamike [3] i koje je rezultat važnosti metastabilnih stanja za RFIM. Još jedan interesantan primjer jest prijelaz tekućina-plin u aerogelu [4], koji je spoj na bazi silicija toliko porozan da je samo 2 % njegova volumena krutina, dok je ostatak zrak. Kad se tekućina uroni u aerogel, porozna matrica efektivno se ponaša kao nered s nasumičnim poljem za tekućinu, a fazni prijelaz iz tekućine u plin istovjetan je kao u RFIM-u.

S teorijske strane najzanimljiviji predmet proučavanja u RFIM-u jest onaj faznih prijelaza u sustavu. Zbog nereda nametnutog poljem, od samog je početka bilo poznato da je fazni prijelaz u RFIM-u drukčiji od standardnog, kontinuiranog faznog prijelaza. Također, shvaćeno je da je fazni prijelaz snažno dominiran neredom, što je dovelo do opisa faznog prijelaza preko fiksne točke pri  $T = 0$ . Rezultat takva opisa jest postojanje tri kritična eksponenta koji opisuju fazni prijelaz, umjesto standardna dva, gdje je dodatni eksponent onaj reskaliranja temperature [5], koja je opasno irelevantna i vodi do slamanja *hyperscaling* relacije.

Također, primijećeno je da, zato što se fazni prijelaz događa pri  $T = 0$ , metastabilnost igra vrlo važnu ulogu u kritičnosti RFIM [6] [7]. To se može približiti preko faznog prijelaza u RFIM-u koji se događa u ravnoteži. Budući da je prijelaz opisan fiksnom točkom u  $T = 0$ , sve informacije o faznom prijelazu možemo dobiti iz njegova osnovnog stanja. Osnovno je stanje jedinstveno [8], međutim, postoje brojna metastabilna stanja u blizini osnovnog stanja. Budući da je dinamika zakočena pri  $T = 0$ , prostor metastabilnih stanja ne može se istraživati preko evolucije sustava,

ali može preko promjene homogene komponente magnetskog polja  $h$ . Ako zamislimo kritični RFIM sustav, infinitezimalna promjena  $h$  natjerat će sustav da skoči u najbliže metastabilno stanje, što će uzrokovati ravnotežnu lavinu. Takva će lavina prijeći preko cijelog sustava i bit će opisana dodatnim kritičnim eksponentom koji opisuje njenu fraktalnost. Ako je pak u RFIM dodana konačna temperatura, metastabilnost se vidi kao ekstremno spora dinamika [3, 9] povezana s relaksacijom iz metastabilnog stanja u osnovno stanje, što objašnjava eksperimentalne rezultate koje je dobio Birgenau [2].

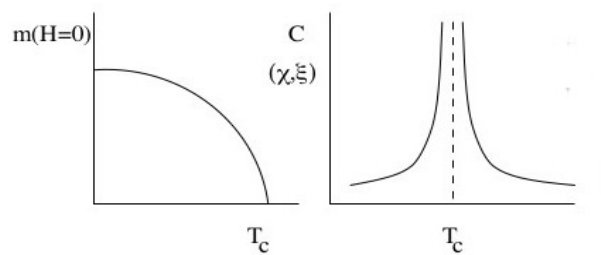
Ovi primjeri naglašavaju koliko je bitno razumijevanje RFIM, kako iz perspektive napretka teorije tako i u eksperimentalnom smislu. Da bismo unaprijedili razumijevanje RFIM-a u kritičnosti, odabiremo jednodimenzionalni RFIM s dalekodosežnim interakcijama. Ovakav modificirani slučaj promatramo zato što se sve kompleksne značajke faznog prijelaza koje se razvijaju promjenom dimenzionalnosti sustava mogu dobiti i u jednodimenzionalnom slučaju, i to promjenom parametra za doseg interakcija. Takva analogija korištena je i ranije [10]. Dodatni razlog za proučavanje jednodimenzionalnog problema jest taj što je vrlo pristupačan za numeriku, zbog čega se naš model čini kao idealan kandidat za detaljniju studiju u kojoj se problemu prilazi s dvije strane. Prva je numerička, gdje se koristi određivanje osnovnog stanja sustava da bi se proučavala kritičnost modela koristeći metode skaliranja za konačne sustave [11]. Druga je napredna analitička, u kojoj se upotrebljavaju metode neperurbativne renormalizacijske grupe koje su iznjedrile veliki napredak u polju tijekom zadnjih godina [12–15]. Ideja u ovakvu dvojakom pristupu jest unaprijediti i numeričke i analitičke metode u svrhu boljeg razumijevanja problema. Ovaj diplomski rad bazirat će se na numeričkom dijelu. Međutim, u svrhu usporedbe rezultata bit će prikazani i rezultati dobiveni analitikom.

## 2 Teorija

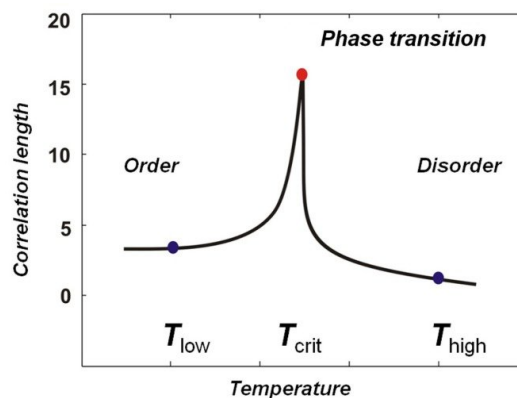
### 2.1 Fazni prijelazi

Feromagnetni se često koriste kao primjer sustava koji pokazuju fazni prijelaz. Pri visokim temperaturama feromagnet će biti neuređen, odnosno paramagnet, a na niskima će biti uređen, odnosno feromagnet. Paramagnetska faza javlja se zbog ten-

dencije neuređivanja - postoji ogroman broj neuređenih konfiguracija. Ako je temperatura vrlo visoka i utjecaj smanjivanja energije uređenjem jako mali, ogromna entropija pobjeđuje i sustav je neuređen. Feromagnetska faza javlja se zbog tendencije uređivanja – ako je  $T$  dovoljno niska,  $-\beta H$  ima jako velik utjecaj te minimizacija energije postaje sve važnija. Ako je prijelaz između ovih dviju situacija oštar, nazivamo ga faznim prijelazom. Fazni je prijelaz kolektivni efekt jer u njemu sudjeluju svi atomi u sustavu. Neke mjerene veličine (npr. susceptibilnost) divergiraju, što se može vidjeti na desnom grafu na slici 2.1. Fazni prijelaz ne može postojati u konačnom sustavu – ako je sustav konačan, tada ne postoji matematička divergencija, nego je vrh zaokružen i imamo maksimum (vidljivo na slici 2.2). To je također slučaj u eksperimentalnim sustavima, ali težimo opisu preko idealnog faznog prijelaza koji vrijedi za beskonačni sustav.



Slika 2.1: Primjer veličina koje ne divergiraju (lijevo) i veličina koje divergiraju (desno) kod faznog prijelaza. Slika preuzeta s [16]



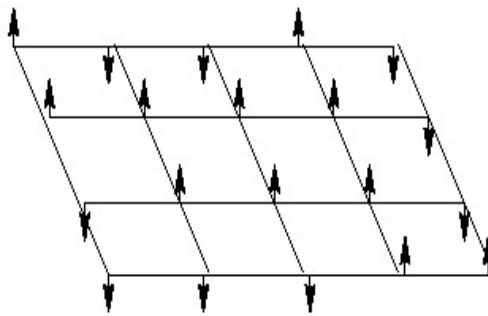
Slika 2.2: Primjer zaobljenosti vrha kod korelacijske duljine u konačnom sustavu. Slika preuzeta s [17]

## 2.2 Isingov model

Isingov model jest matematički model feromagnetizma, a predložio ga je njemački fizičar Wilhelm Lenz. [18] Ime „Isingov model” dobiva tako što ga Lenz daje svojem učeniku Ernstu Isingu na rješavanje. Ising je jednodimenzionalni problem riješio 1924. [19], dok znatno kompliciraniji, dvodimenzionalni, rješava Lars Onsanger 1944. godine. Radi se o vjerojatno najjednostavnijem modelu interakcija spinova u materijalu koji je vrlo jednostavno simulirati, a značajan je upravo po tome što usprkos svojoj jednostavnosti može prikazati fazni prijelaz iz feromagnetizma u paramagnetizam. Isingov model matematički možemo izraziti Hamiltonijanom

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} s_i s_j - h \sum_j s_j, \quad (2.1)$$

gdje prva suma ide preko parova susjednih spinova  $\langle i,j \rangle$  (svaki se par broji jednom), a  $J_{i,j}$  njihova je konstanta interakcije. Homogeno magnetsko polje  $h$  djeluje na svaki spin. Vrijednosti spinova na pozicijama  $i, j$  su  $s_{i,j} = \pm 1$ . Minus ispred svake sume označava da je riječ o feromagnetskim interakcijama, dok bi plus označavao antiferomagnetske. Dakle, svaki spin interagira s vanjskim magnetskim poljem i sa svojim najbližim susjedima. Energetski je favorizirana paralelna konfiguracija dvaju susjeda ( $-J$ ) nad antiparalelnom ( $+J$ ).



Slika 2.3: Primjer Isingova modela u  $d=2$ . Slika preuzeta s [20]

Mikroskopsko stanje sustava jest konfiguracija svih spinova:  $\{s\} = \{s_1, s_2, \dots\}$ . Vjerojatnost konfiguracije dana je preko Boltzmannove raspodjele

$$P_\beta(s) = \frac{e^{-\beta H(s)}}{Z_\beta}, \quad (2.2)$$

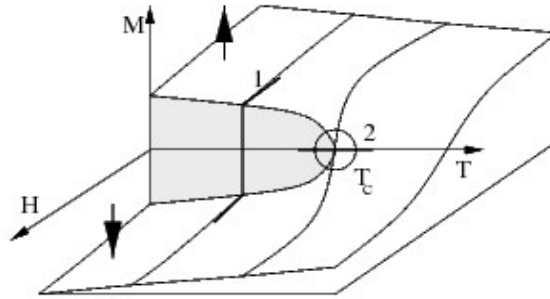
gdje je normalizacijska konstanta  $Z_\beta$  particijska funkcija, a  $\beta$  inverzna temperatura. Ona opisuje statistička svojstva sustava u termodinamičkoj ravnoteži.

$$Z_\beta = \sum_{\{s\}} e^{-\beta H(s)}. \quad (2.3)$$

Slijedi izraz za slobodnu energiju sustava

$$F = k_b T \ln Z_\beta = \frac{\ln Z_\beta}{\beta}, \quad (2.4)$$

preko koje se lako izvode termodinamičke varijable poput magnetizacije, susceptibilnosti ili toplinskog kapaciteta.



Slika 2.4: Fazni dijagram klasičnog Isingova feromagneta. Slika preuzeta s [16]

Fenomenologija Isinga [21] može se opisati heuristički preko metode srednjeg polja. Izaberemo određeni spin  $s_0$  i promatramo utjecaj svih ostalih spinova na njega. Pretpostavimo da stanje svih ostalih spinova možemo opisati njihovom srednjom magnetizacijom  $\langle s_i \rangle = m$ , gdje je  $m$  ujedno i parametar uređenja. Energija spina  $s_0$  u srednjem polju tada je

$$e(s_0) = -s_0 \left( J \sum_{\langle 0,i \rangle} s_i + h \right) \quad (2.5)$$

$$= -s_0 (z J m + h) - J s_0 \sum_i (s_i - m) \quad (2.6)$$

$$\approx -s_0 (z J m + h), \quad (2.7)$$

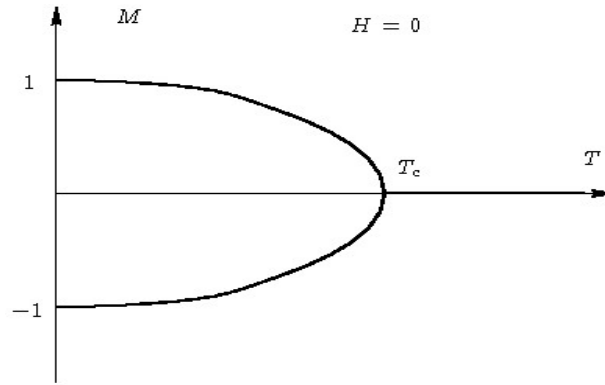
gdje je  $z$  koordinacijski broj, odnosno broj prvih susjeda. U izrazu (2.6) možemo zanemariti drugi član ako pretpostavimo da su fluktuacije u odnosu na vrijednost  $m$

male. Primjenom kanonskog ansambla možemo raspisati

$$\langle s_0 \rangle = \frac{\sum_{s_0=\pm 1} s_0 e^{-\beta H(s_0)}}{\sum_{s_0=\pm 1} e^{-\beta H(s_0)}} \quad (2.8)$$

$$= \frac{e^{\beta(zJm+h)} - e^{-\beta(zJm+h)}}{e^{\beta(zJm+h)} + e^{-\beta(zJm+h)}} \quad (2.9)$$

$$= \tanh(\beta(zJm + h)) = m. \quad (2.10)$$



Slika 2.5: Fazni dijagram za  $h = 0$ . Slika preuzeta s [20]

Na taj način dobiva se uvjet samokonzistentnosti  $\langle s_0 \rangle = m$ . Izraz (2.10) možemo riješiti numerički. Proizlazi i uvjet  $h = 0$ . Kada bi  $h \neq 0$ , ne bismo imali fazni prijelaz jer bi fazni dijagram magnetizacije u ovisnosti o temperaturi na prijelazu iz jednog u 3 rješenja bio zaglađen te ne bismo imali diskontinuitet u derivaciji koji vodi k singularnom ponašanju. Budući da nas zanima slučaj  $h = 0$ , možemo napraviti Taylorov razvoj funkcije  $m = \tanh(\beta z J m)$ .

$$m_0 = \beta J z m_0 - \frac{1}{3}(\beta J z)^3 m_0^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$m_0(1 - \beta J z) \approx -\frac{1}{3}(\beta J z)^3 m_0^3 \quad (2.12)$$

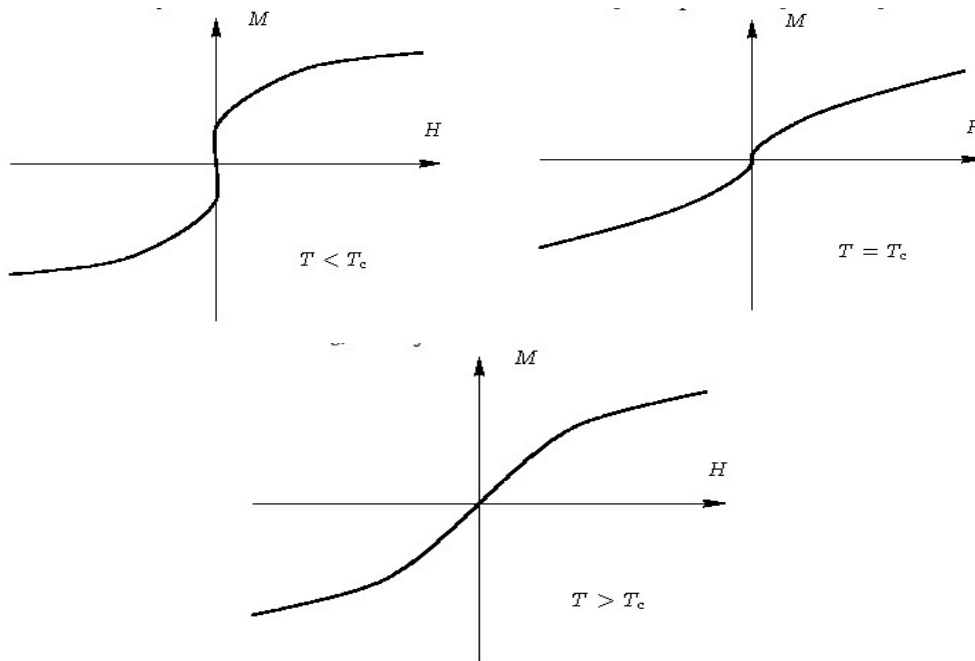
$$(1 - \beta J z) \approx -\frac{1}{3}(\beta J z)^3 m_0^2. \quad (2.13)$$

Ako je  $\beta J z < 1$ , postoji samo jedno, trivijalno rješenje:  $m = 0$ , a ako je  $\beta J z > 1$ , postoje dodatna dva rješenja u  $\pm m_0$ . Preko uvjeta  $\beta J z = 1$  dobiva se izraz za Curievu temperaturu.

$$(1 - \beta Jz) = 0 \quad (2.14)$$

$$T_C = \frac{Jz}{k_B}. \quad (2.15)$$

$$m_0 \approx \pm \sqrt{3} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_C}{T} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$



Slika 2.6: Ovisnost magnetizacije o magnetskom polju  $h$  u područjima  $T < T_c$ ,  $T = T_c$  i  $T > T_c$ . Slika preuzeta s [20]

Vidi se da parametar uređenja  $m$  prilazi nuli kada  $T$  prilazi  $T_C$ , asimptotski nestajući kao

$$m_0(T) \propto \left( \frac{T_C - T}{T} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Prepoznamo izraz za magnetizaciju koja slijedi potencijsko pravilo preko eksponenta  $\beta$  (2.27). Ovdje vidimo da kod aproksimacije srednjeg polja dobivamo  $\beta = 1/2$ , što se ne slaže s nešto boljim teorijama kao ni stvarnim magnetima. Susceptibilnost

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0} \quad (2.18)$$

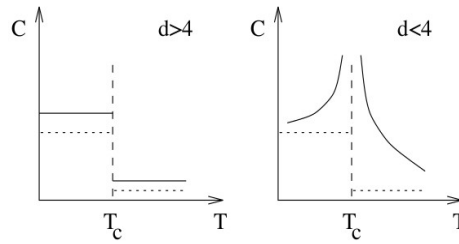
na kritičnoj temperaturi  $T_C$  divergira ( $\chi \propto \frac{1}{T - T_C}$ ), no je li ovaj opis dovoljno dobar?

Ako pak susceptibilnost računamo preko particijske funkcije

$$\chi = \frac{\partial}{\partial h} \frac{(\sum s_0 e^{-\beta h})}{(\sum e^{-\beta h})} = \beta \sum_j (\langle s_j s_0 \rangle - \langle s_j \rangle \langle s_0 \rangle) \quad (2.19)$$

te kada bismo srednje polje shvatili doslovno, iz gornjeg izraza (2.19) dobili bismo nulu. To se čini kao paradoks, međutim, zapravo je posljedica činjenice da je teorija srednjeg polja samo aproksimacija koja zanemaruje prostorne korelacije. Jedan korak dalje od teorije srednjeg polja jest Gaussova teorija jer su fluktuacije donekle uzete u obzir.

Gaussova teorija daje netrivialne rezultate za kritične eksponente toplinskog kapaciteta ( $\alpha$ ) i korelacijske duljine ( $\nu$ ). U teoriji srednjeg polja ovi eksponenti su nedefinirani jer su prostorne korelacije zanemarene, dok toplinski kapacitet ima skok u  $T_c$ , kao što možemo vidjeti u prvom grafu na slici 2.7, pa je njegov kritični eksponent  $\alpha$  također nedefiniran.



Slika 2.7: Prikaz ponašanja toplinskog kapaciteta u blizini  $T_c$  za  $d > 4$  (lijevo) i  $d < 4$  (desno). Slika uzeta s [16]

Iz Gaussove teorije proizlazi da je korelacijska duljina  $\xi \propto \frac{1}{|T-T_c|^{\frac{1}{2}}}$ , a toplinski kapacitet  $C \propto \frac{1}{|T-T_c|^{\frac{4-d}{2}}}$ , što povlači i postojanje njihovih kritičnih eksponenata. Ocjenu o važnosti fluktuacija i tome vrijedi li za sustav aproksimacija srednjeg polja daje nam Ginzburgov kriterij. Uspoređujemo ponašanje toplinskog kapaciteta u Gaussovoj teoriji te u teoriji srednjeg polja  $C_G$  i korekcija  $\delta C$

$$\frac{C_G}{\delta C} \propto \xi^{4-d}, \xi \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Vidljivo je da ako  $\xi \rightarrow \infty$  i ako je  $d < 4$ , Gaussova teorija pokazuje divergenciju toplinskog kapaciteta u usporedbi sa stepenicom dobivenom iz teorije srednjeg polja. To znači da dodavanje prostornih korelacija čini veliku razliku te je indicacija da je potrebna bolja teorija za objašnjavanje prijelaza u tom slučaju. Uočavamo i granicu



$d = 4$ , koja je takozvana gornja kritična dimenzija. Iznad gornje kritične dimenzije Gaussova teorija dobro opisuje fazni prijelaz. Upravo su za razumijevanje faznog prijelaza ispod gornje kritične dimenzije razvijene metode renormalizacijske grupe.

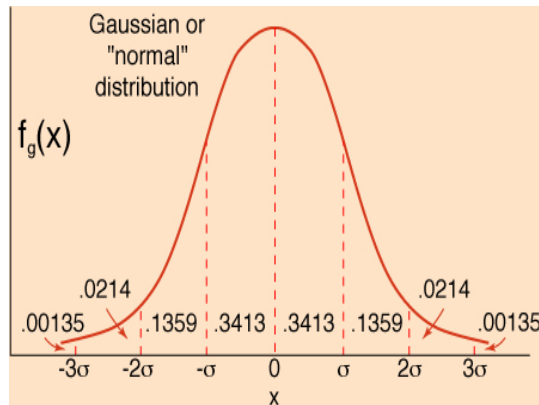
### 2.3 Isingov model s nasumičnim poljem

Razmotrimo sada drukčiji model od čistog Isingova modela

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j + h_0 \sum_i s_i + \sum_i h_i s_i, \quad (2.21)$$

gdje su prva dva člana jednaka kao u čistom Isingovu modelu. Veličina  $h_0$  izvan sume označava homogenost nametnutog polja, dok je posljednji faktor onaj s nametnutim neredom. Nasumična polja  $h_i$  zadana su iz Gaussove raspodjele oko nule. Gaussova raspodjela dana je izrazom 2.22 te je prikazana na slici 2.8.

$$P(h_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_0^2}} e^{-\frac{h_i^2}{2\Delta_0^2}}. \quad (2.22)$$



Slika 2.8: Gaussova raspodjela. Slika preuzeta s [22]

Ukupno 68 % cjelokupne površine u Gaussovoj raspodjeli nalazi se između  $-\Delta_0$  i  $\Delta_0$ . Za svaki spin na rešetki zasebno se izvlači  $h_i$  te na svaki čvor dodajemo član  $s_i h_i$ . Iako se čini samo kao modifikacija čistog Isingova modela, fizikalna svojstva Isinga u nasumičnom polju (eng. *Random Field Ising Model*) značajno su drukčija od čistog Isinga. Intuitivan je osjećaj da će izvana nametnuti nered (nasumično polje  $h_i$ ) kočiti spinove, zbog čega se faze i fazni prijelazi uvelike mijenjaju.

## 2.4 Isingov model s nasumičnim poljem i dalekodosežnim interakcijama

Isingov model možemo modificirati tako da uvedemo interakcije dugog doseg. Kao što je spomenuto i u uvodu, sve kompleksne značajke faznog prijelaza koje se razviju promjenom dimenzionalnosti sustava mogu se dobiti i promjenom parametra za doseg interakcija. Ono što nam je ovdje uistinu praktično jest da ovakav model možemo primijeniti na sustav  $d = 1$ , koji je zbog svoje dimenzionalnosti vrlo pristupačan za numerički račun. Jednodimenzionalni čisti Isingov model s kratkodosežnim interakcijama prvih susjeda inače nema fazni prijelaz (donja kritična dimenzija takva modela upravo je  $d = 1$ ), međutim, Isingov model s dalekodosežnim interakcijama dopušta nam promatranje faznog prijelaza u  $d = 1$ . Proučavamo Isingov model u nasumičnom polju (RFIM) s dugodosežnim feromagnetskim interakcijama koje opadaju po potencijalnom zakonu. Model je opisan sa sljedećim hamiltonijanom:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i (h_i + h) s_i, \quad (2.23)$$

gdje su spinovi  $s_i = \pm 1$  smješteni na čvorove rešetke s feromagnetskom parnom interakcijom koja na velikim udaljenostima opada s

$$J_{ij} \propto |x_i - x_j|^{-(d+\sigma)}. \quad (2.24)$$

EkspONENT  $\sigma > 0$  zajedno s dimenzionalnošću  $d$  (u našem slučaju  $d = 1$ ) karakterizira potencijalno ponašanje (eng. *power law*) interakcije. Veličinom  $h$  označeno je homogeno polje, dok je nered uveden preko nasumičnih polja  $h_i$ . Ona su nezavisno zadana preko Gaussove raspodjele širine  $\Delta_0$  oko nule (2.22).

Za  $\sigma \leq \sigma_G = 1/3$  kritično ponašanje određeno je Gaussovom fiksnom točkom, a kritični eksponenti su eksponenti srednjeg polja u prisustvu dalekodosežnih interakcija. Vrijednost  $\sigma_G$  povezana je s gornjom kritičnom dimenzijom. S druge strane, fazni prijelaz prestaje postojati za  $\sigma \geq \sigma_M = 1/2$ , gdje je  $\sigma_M$  povezana s donjom kritičnom dimenzijom. Stoga nam je zanimljiv interval  $1/3 \leq \sigma < 1/2$ . Može na prvi pogled zvučati zbunjujuće povezivati nižu vrijednost parametra  $\sigma$  s gornjom kritičnom dimenzijom, a višu s donjom, ali vrlo lako se vidi da to ima smisla. Naime,

što je vrijednost  $\sigma$  veća, potencijski zakon  $r^{-(d+\sigma)}$  opada brže. Brže opadanje potencijskog zakona znači da neki spin interagira s manjim brojem spinova na rešetci. U efektivnom modelu u kojemu reproduciramo efekte dimenzionalnosti dosegom interakcija, interakcije s manjim brojem spinova karakteriziraju sustav niže efektivne dimenzionalnosti. Obrat vrijedi također za smanjivanje parametra  $\sigma$ , što odgovara sustavu više efektivne dimenzije.

U ovom diplomskom radu upravo promatramo netrivialan raspon parametra  $\sigma$  (između gornje i donje kritične dimenzije) i u njemu definiramo pet vrijednosti pri kojima izvodimo račun.

## 2.5 Kritični eksponenti

Da znamo izračunati particijsku funkciju modela pri faznom prijelazu, utvrdili bismo da sve bitne observable prikazuju potencijsko ponašanje kao posljedicu prostorne skale koja divergira. Potencijsko ponašanje određuju kritični eksponenti. To su brojevi po kojima se vidi univerzalnost faznih prijelaza. Za vrlo široke klase faznih prijelaza u eksperimentalnim sustavima kritični eksponenti su identični. Niže su navedene definicije kritičnih eksponenata  $\nu, \beta, \gamma, \alpha$  i  $\delta$  te veličine s kojima su povezani:

a) korelacijska duljina

$$\xi \propto |\tau|^{-\nu}, \quad (2.25)$$

gdje je  $\tau$  jednak reduciranoj temperaturi

$$\tau = \frac{T - T_C}{T_C}. \quad (2.26)$$

b) magnetizacija

$$m(\tau, h = 0) \propto (-\tau)^\beta, \tau < 0, \quad (2.27)$$

c) susceptibilnost

$$\chi(\tau, h = 0) \propto |\tau|^{-\gamma}, \quad (2.28)$$

d) toplinski kapacitet

$$c(\tau, h = 0) \propto |\tau|^{-\alpha}, \quad (2.29)$$

e) kritična izoterma

$$m(\tau = 0, h) \propto (h)^{\frac{1}{\delta}} \text{sign}(h). \quad (2.30)$$

Isingov model u Gaussovoj aproksimaciji daje kritične eksponente  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  i  $\nu = 1/2$ . Kritični eksponenti ovise i o vrlo malom broju globalnih parametara te ne ovise o mikroskopskim karakteristikama sustava. Ovise o veličinama kao što su: simetrije parametra reda i modela (priroda stupnjeva slobode), dimenzionalnost sustava, doseg interakcije, nered u sustavu i vrsta nereda.

## 2.6 Teorija skaliranja za standardni kontinuirani fazni prijelaz

Prethodno smo vidjeli da je singularno ponašanje u blizini kritične točke karakterizirano skupom kritičnih eksponenata ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ). Takvi potencijalni zakoni termodinamičkih varijabli mogu se fenomenološki opisati teorijom skaliranja. Budući da su razne termodinamičke veličine povezane, ti eksponenti ne mogu biti kompletno neovisni jedan o drugome. Teorija skaliranja daje nam uvid kako možemo otkriti relacije koje povezuju kritične eksponente.

Razlikujemo funkcije karakteristične za mikrostanja i makrostanja [16, 23, 24]. Kod mikrostanja govorimo o Hamiltonijanu koji sadrži funkcije položaja i brzine ili spinova svake od čestica, dok funkcijama makrostanja smatramo one termodinamičke: tlak, volumen, temperaturu, unutarnju energiju itd. Takve ćemo različite veličine dovesti u vezu preko particijske funkcije koja daje sumu doprinosa svakog od mikrostanja:

$$Z = \sum_{\mu} e^{-\beta H(\mu)}. \quad (2.31)$$

Particijska funkcija nam je ovdje korisna zato što će nam dati izraz za Helmholtzovu slobodnu energiju:

$$F = -k_B T \ln Z. \quad (2.32)$$

### 2.6.1 Homogenost slobodne energije

Slobodna energija sastoji se od analitičkog dijela (nebitan za prijelaz) i singularnog dijela (bitan za prijelaz). To možemo zapisati kao

$$L^d f(\tau, h) = L^d f_a(\tau, h) + L^d f_s(\tau, h), \quad (2.33)$$

dok nam je dalje bitan samo singularni dio, a analitički ćemo zanemariti. Hipoteza homogenosti kaže da se pri promjeni skale sustava za faktor  $b$  singularni dio slobodne energije transformira kao

$$f_s(\tau, h) \rightarrow b^{-d} f_s(b^{y_\tau} \tau, b^{y_h} h), \quad (2.34)$$

gdje je  $b$  faktor reskaliranja, a  $y_\tau$  i  $y_h$  kritični eksponenti reducirane temperature i magnetskog polja. Također, eksponent  $y_\tau$  jednak je  $\frac{1}{\nu}$ , gdje je  $\nu$  kritični eksponent korelacijske duljine (2.25).

Posljedice homogenosti [16] su:

- a) Singularni dijelovi svih kritičnih veličina,  $f_s(\tau, h)$  su homogeni, s istim eksponentima ispod i iznad prijelaza.
- b) Zbog povezanosti preko termodinamičkih derivacija, isti eksponent ( $\nu$ ) pojavljuje se u svim navedenim veličinama.
- c) Svi kritični eksponenti mogu se izvesti iz dvaju nezavisnih (za standardni fazni prijelaz).

### 2.6.2 Relevantne i irelevantne varijable skaliranja

U relaciji 2.34 uključene su samo dvije varijable skaliranja  $\tau$  i  $h$ . To je zato što su one relevantne varijable skaliranja, tj. njihovo je ponašanje opisano pozitivnim kritičnim eksponentima. Što to znači, možemo vidjeti iz jednostavnog primjera ponašanja homogenog magnetskog polja  $h$ . Uzmimo da je  $h_1 > 0$  te napravimo transformaciju reskaliranja (odzumiranja). Kada nam se  $b$  mijenja, primjerice od 1 do 2, vrijednost  $h_2$  reskalirat će se kao u relaciji 2.36, pri čemu vidimo da je  $h_2$  iznosom veći od  $h_1$ :

$$b = 1 \quad , \quad h_1 > 0 \quad (2.35)$$

$$b = 2 \quad , \quad h_2 = 2^{y_h} h_1 \quad (2.36)$$

$$|h_2| > |h_1|. \quad (2.37)$$

Ostale su termodinamičke varijable osim  $\tau$  i  $h$  irelevantne, tj. karakterizirane eksponentima  $y_i < 0$  te nisu bitne za opis kritičnog ponašanja. Što to znači, možemo ilustrirati primjerom. Uključujući sve varijable skaliranja, relacija homogenosti glasila bi

$$f_s(\tau, h) \equiv b^{-d} f_s(b^{y_\tau} \tau, b^{y_h} h, b^{y_1} u_1, b^{y_2} u_2, \dots). \quad (2.38)$$

Suprotno od primjera koji smo pokazali s relevantnim varijablama skaliranja, argumenti koji uključuju irelevantne varijable skaliranja bivaju će sve manjima operacijama reskaliranja. Stoga, ako je ovisnost o njima analitička, funkciju homogenosti možemo razviti po njima. Na primjer, irelevantne će varijable za magnetizaciju dati korekcije koje idu u 0 kako reducirana temperatura ide u nulu:  $\tau \rightarrow 0$ .

$$m \Big|_{h=0} \approx \tau^{-\frac{y_h-d}{y_\tau}} f_s(\text{const.}, 0, \xi^{u_1} u_1, \dots) \quad (2.39)$$

$$\approx \tau^{-\frac{y_h-d}{y_\tau}} \left( a + b \frac{u_1}{\tau^{y_\tau}} + \dots \right) \quad (2.40)$$

U posebnim slučajevima možemo imati eksponent korekcije skaliranja  $y_1 \approx 0$ . Varijabla skaliranja pridružena takvom eksponentu zove se marginalna. Marginalnost uzrokuje logaritamska ponašanja u ovisnosti o parametru reskaliranja.

### 2.6.3 Kako homogeni oblik daje potencijska ponašanja?

a) magnetizacija

$$m = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=0} \approx b^{y_h-d} f_s^{(01)}(b^{y_\tau} \tau, b^{y_h} h) \Big|_{h=0} \quad (2.41)$$

$$\approx b^{y_h-d} f_s^{(01)}(b^{y_\tau} \tau, 0). \quad (2.42)$$

Ovdje ćemo pretpostaviti da smo sustav reskalirali za veličinu korelacijske duljine  $b = \xi$ . Također, možemo iskoristiti prethodno iskazanu relaciju za korelacijsku duljinu (2.25). Slijedi

$$m = \tau^{-(y_h-d)\nu} f_s^{(01)}(const., 0), \quad (2.43)$$

$$(2.44)$$

iz čega proizlazi relacija

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_\tau} = (d - y_h)\nu, \quad (2.45)$$

gdje je  $\beta$  kritični eksponent magnetizacije.

#### b) susceptibilnost

Isto ponavljamo i za susceptibilnost  $\chi$ , samo što po definiciji ovdje trebamo uzeti drugu derivaciju po  $h$ .

$$\chi = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \right|_{h=0} = b^{2y_h-d} f_s^{(02)}(b^{y_\tau} \tau, b^{y_h} h) \Big|_{h=0}, \quad (2.46)$$

$$= \tau^{-\frac{(2y_h-d)}{y_\tau}} f_s^{(02)}(const., 0). \quad (2.47)$$

Dobivamo relaciju za eksponent  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_\tau} = (2y_h - d)\nu. \quad (2.48)$$

#### c) toplinski kapacitet

$$c = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right|_{h=0} = b^{2y_\tau-d} f_s^{(02)}(b^{y_\tau} \tau, 0), \quad (2.49)$$

$$= \tau^{-\frac{2y_\tau-d}{y_\tau}} f_s^{(20)}(const., 0), \quad (2.50)$$

preko čega se dobiva relacija za kritični eksponent  $\alpha$ :

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y_\tau} = 2 - d\nu. \quad (2.51)$$

d) kritična izoterma

$$m = \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{\tau=0} = b^{y_h-d} f_s^{(01)}(0, b^{y_h} h). \quad (2.52)$$

Da bi se izgubila ovisnost  $b^{y_h} h$ , potrebno je namjestiti da taj izraz bude konstanta, stoga uvodimo da je

$$b \propto h^{-\frac{1}{y_h}}, \quad (2.53)$$

što daje

$$m = h^{\frac{d-y_h}{y_h}} f_s^{(01)}(0, const.). \quad (2.54)$$

Konačno, prema izrazu (2.30) dobivamo relaciju za kritični eksponent  $\delta$

$$\delta = \frac{y_h}{d - y_h}. \quad (2.55)$$

#### 2.6.4 Relacije između eksponenata

Sve kritične eksponente može se izraziti preko kritičnih eksponenata reducirane temperature  $y_\tau$  i magnetskog polja  $y_h$ . Iz toga dobivamo zanimljive relacije između eksponenata.

a) Rushbrookeov identitet

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (2.56)$$

b) Widomov identitet

$$\frac{\gamma}{\beta} = \delta - 1 \quad (2.57)$$

c) Josephsonov identitet



Identitet koji je poznat i kao „*hyperscaling*” relacija, iako naziv općenito obuhvaća i sve relacije koje uključuju dimenziju prostora  $d$ :

$$\nu d = 2 - \alpha \quad (2.58)$$

d)

$$\alpha + \beta(1 + \delta) = 2 \quad (2.59)$$

### 2.6.5 Skaliranje u konačnom sustavu

Fazni prijelaz nije moguć kada je sustav konačan, a teorija skaliranja nam može dati i predodžbu zašto. Iako fazni prijelaz nije moguć u konačnom sustavu, svejedno proučavanjem konačnog sustava možemo izračunati kritične eksponente [25], a to je ono što ćemo mi raditi u ovom diplomskom radu. Konačni sustav razlikuje se od beskonačnog po tome što vrijednost  $\xi$  ne može biti beskonačna. Kada upotrebljavamo homogenost, ne možemo reskalirati u  $\xi \rightarrow \infty$ , nego samo do  $\xi \rightarrow L$ , gdje nam je  $L$  veličina rešetke. Što to znači za observable?

a) Magnetizacija

$$b \equiv L \Rightarrow m = L^{y_h - d} f_s^{(01)}(L^{y_\tau} \tau, 0) \quad (2.60)$$

$$L = \infty \Rightarrow m \propto (-\tau)^\beta; (\tau < 0) \quad (2.61)$$

a) Susceptibilnost

$$\chi = L^{2y_h - d} f_s^{(02)}(L^{y_\tau} \tau, 0) \quad (2.62)$$

Vrh postaje sve oštiji i ide u pravu divergenciju kako  $L \rightarrow \infty$ . Vrijednost  $\tau$  za vrh mijenja se s  $\Delta\tau \propto L^{-y_\tau}$ . Lokacija vrha je kada  $\xi = L$ , a to se dogodi za drukčije vrijednosti  $\tau$  ako su veličine sustava različite!

## 2.7 Teorija skaliranja za RFIM

Relacija homogenosti za RFIM je sljedeća:

$$f(\delta, h) = b^{-(d-\theta)} f_s(b^{y_\tau} \delta, b^{y_h} h), \quad (2.63)$$

gdje dodatni eksponent  $\Theta$  ulazi u reskaliranje singularnog dijela slobodne energije. Singularni dio slobodne energije ne ovisi eksplicitno o temperaturi ( $\tau$ ), već je ulogu temperature preuzeo nered pa u relacije skaliranja ulazi varijabla  $\delta$

$$\delta = \Delta_0 - \Delta_c. \quad (2.64)$$

Kritični eksponent  $\nu$  kao i ranije opisuje divergenciju korelacijske duljine, koja je u slučaju RFIM inducirana promjenom parametra snage nereda  $\delta$ .

$$\xi = |\delta|^{-\nu} \quad (2.65)$$

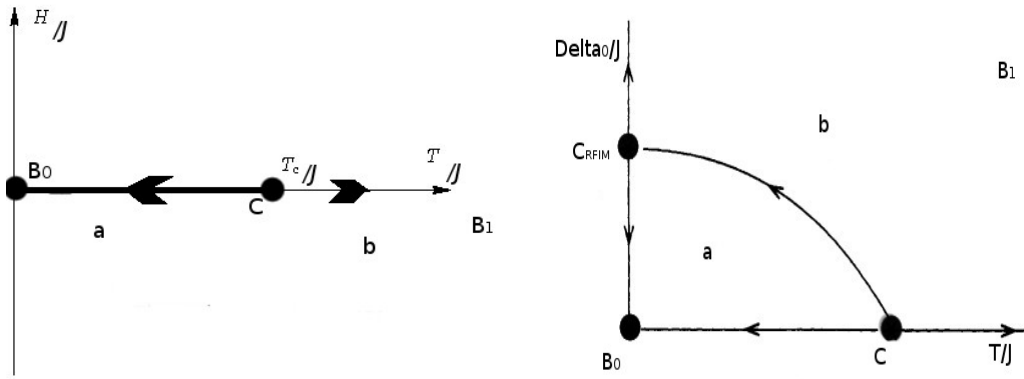
S pomoću standardne hipoteze homogenosti za kontinuirani fazni prijelaz dobiveni su izrazi 2.45, 2.48, 2.51 i 2.55. Relacije za skaliranje u RFIM-u možemo dobiti direktno zamjenom  $d$  s  $d - \theta$ . Većina relacija među eksponentima ostaje ista kao i kod običnog Isingova modela (kada se eliminiraju  $y_\tau$  i  $y_h$ ), zato što  $d$  u relacije ne ulazi eksplicitno. Na snazi, primjerice, ostaju relacije 2.56 i 2.57, dok je jedina relacija koja se mijenja *hyperscaling* relacija, i to jer sadrži eksplicitnu ovisnost o  $d$ .

$$d\nu = 2 - \alpha \longrightarrow (d - \theta)\nu = 2 - \alpha \quad (2.66)$$

### 2.7.1 Usporedba čistog Isinga i RFIM-a

Oba modela pokazuju prijelaz između paramagnetske (područje b na faznom dijagramu) i feromagnetske faze (područje a na faznom dijagramu). Gaussova teorija kod čistog Isinga vrijedi za  $d > 4$ , dok u RFIM-u fluktuacije gube značaj tek za  $d > 6$ . Fazni prijelaz za čisti Isingov model postoji sve do  $d = 1$ , dok za RFIM nestaje u  $d = 2$  [1]. Na slici 2.9 prikazani su fazni dijagrami za ta dva modela.

Strelice pokazuju smjer toka renormalizacijske grupe. Heuristički to možemo objasniti tako da zamislimo da mijenjamo sustav na način da „odzumiramo” mikroskop i tada gledamo efektivnu promjenu parametara sustava ( $T$  i  $\Delta_0$ ). To znači da uvećani, odzumirani sustav ima karakteristike kakve bi imao neodzumirani sustav da ima tu temperaturu (ili jakost nereda  $\Delta_0$ ).



Slika 2.9: Fazni dijagram za obični Ising (lijevo) i za RFIM (desno). Slike uzete iz [20,26]

Fiksne točke određuju tokove u faznom dijagramu. Oznaka  $C$  predstavlja kritičnu točku koja određuje prijelaz u čistom Isingovu sustavu. Oznaka  $C_{RFIM}$  predstavlja kritičnu točku koja određuje prijelaz u RFIM sustavu. S  $B_0$  označena je kritična točka koja karakterizira feromagnetsku fazu pri  $T = 0$ , dok je s  $B_1$  označena točka koja karakterizira paramagnetsku fazu.

Kritične točke karakteriziraju kritični eksponenti. Točka  $C_{RFIM}$  karakterizirana je s tri kritična eksponenta koji su bitni za opis prijelaza (a samo dva su relevantna u smislu klasifikacije kritičnih eksponenata). Kritičnu točku  $C$  karakteriziraju samo dva kritična eksponenta,  $y_\tau$  i  $y_h$ , i oba su relevantna. Za fiksne točke koje određuju feromagnetsku fazu ( $B_0$ ) i paramagnetsku fazu ( $B_1$ ) svi su kritični eksponenti irelevantni te su fiksne točke beskonačno privlačne.

Fazni prijelaz u RFIM-u opisuje fiksna točka koja se nalazi pri  $T = 0$ . To sa sobom nosi dalekosežne posljedice za ponašanje sustava. Može se reći da je fazni prijelaz dominiran neredom. Točnije, fluktuacije koje izaziva promjena konfiguracije nereda daleko su značajnije od bilo kakvih fluktuacija u termodinamičkom ansamblu. Korelacijska duljina  $\xi$  divergira u netrivialnim kritičnim točkama  $C$  i  $C_{RFIM}$ , a konačna je u fiksnim točkama  $B_0$  i  $B_1$ .

Iako nemamo eksplicitnu ovisnost o temperaturi, ona svejedno igra važnu ulogu za RFIM. Smjer približavanja  $C_{RFIM}$  upravo je smjer  $\tau$ , stoga prilikom reskaliranja na konačnoj temperaturi  $\tau \rightarrow b^{-\theta}\tau$ . Eksponent irelevantnosti temperature jest eksponent  $\theta$ , isti eksponent koji ulazi u reskaliranje slobodne energije. Stoga, iako je temperatura irelevantna varijabla skaliranja, njezin eksponent eksplicitno ulazi u relacije skaliranja. Upravo zbog toga kažemo da je temperatura opasno irelevantna.

Eksponenti  $y_\tau$  i  $y_h$  drukčiji su za  $C_{RFIM}$  nego za  $C$ . Prijelazi su različiti i u različitim klasama univerzalnosti.

## 2.8 Skaliranje veličina koje promatramo

### 2.8.1 Veličine i odnosi među eksponentima

Postoje dvije vrste korelacijskih funkcija koje opisuju kritične korelacije u RFIM-u. Postojanje takvih dvaju različitih korelacijskih funkcija direktan je rezultat činjenice da je kritičnost sustava određena fiksnom točkom pri  $T = 0$ . Za svaku funkciju postoji drugi kritični eksponent koji određuje potencijalski zakon. Jednu funkciju nazivamo spojenom (eng. *connected*), dok drugu nazivamo odspojenom (eng. *disconnected*). Iz engleskih naziva uzimamo i indekse za potonje izraze.

Spojena korelacijska funkcija slična je standardnoj korelacijskoj funkciji

$$G_c(r_{12}) = \overline{\langle \sigma_{r_1} \sigma_{r_2} \rangle} - \langle \sigma_{r_1} \rangle \langle \sigma_{r_2} \rangle, \quad (2.67)$$

gdje  $\bar{A}$  označava prosjek od veličine  $A$  po svim konfiguracijama nereda, dok je  $\langle A \rangle$  prosjek od veličine  $A$  po termodinamičkom ansamblu. Odaberemo dvije točke u sustavu koje su razmaknute za  $r_{12}^{\vec{r}} = r_1^{\vec{r}} - r_2^{\vec{r}}$  i pomnožimo vrijednosti spinova u njima. Zatim usrednjujemo tu vrijednost koju dobijemo po što više konfiguracija nereda (vrijednosti  $h_i$  na svim čvorovima rešetke koje su izabrane nasumično). Zatim se izračunaju vrijednosti spina u dvije određene točke,  $r_1^{\vec{r}}$  i  $r_2^{\vec{r}}$ , te se vrijednosti također usrednjuju po što više konfiguracija nereda i dobiveni se izrazi množe.

Odspojena korelacijska funkcija posebna je korelacijska funkcija koja nije definirana u čistom sustavu. Karakterizira fluktuacije inducirane promjenom konfiguracije nereda u sustavu i ona je opisana s drukčijim eksponentom od onog koji se pojavljuje kod spojene.

$$G_d(r_{12}) = \overline{\langle \sigma_{r_1} \rangle \langle \sigma_{r_2} \rangle} \quad (2.68)$$

Kao što možemo vidjeti iz izraza u nastavku, ponašanje ovih dvaju korelacijskih funkcija određeno je eksponentima  $\eta$  i  $\bar{\eta}$ .

$$G_c(r) \approx \frac{e^{-\frac{|r|}{\xi}}}{|r|^{d-2+\eta}} \quad (2.69)$$

$$G_d(r) \approx \frac{e^{-\frac{|r|}{\xi}}}{|r|^{d-4+\bar{\eta}}} \quad (2.70)$$

Korelacijska duljina pri tome divergira s eksponentom  $\nu$ .

$$\xi \propto |\Delta - \Delta_c|^{-\nu}. \quad (2.71)$$

Trebamo definirati nekoliko veličina koje će nam omogućiti da odredimo ova tri kritična eksponenta.

### 2.8.2 Kritični eksponenti $\gamma$ i $\eta$

Spojena susceptibilnost  $\chi_c$  izvedena je preko spojene korelacijske funkcije  $G_c$  tako što smo korelacijsku funkciju integrirali preko cijelog uzorka  $\chi_c = \int_r G_c(r)$ . Divergencija spojene susceptibilnosti dana je preko kritičnog eksponenta  $\gamma$ :

$$\chi_c \propto |\Delta - \Delta_c|^{-\gamma}. \quad (2.72)$$

Integrirajući funkciju (2.69) i namještajući korelacijsku duljinu na veličinu cijelog sustava dobiva se donja relacija koja pokazuje odnos kritičnih eksponenata  $\gamma$  i  $\eta$ :

$$\frac{\gamma}{\nu} = 2 - \eta. \quad (2.73)$$

Preko argumenata renormalizacijske grupe može se pokazati da je za jednodimenzionalni dalekodosežni RFIM, eksponent  $2 - \eta$ , a s njime i  $\gamma/\nu$  posebno ograničen dalekodosežnim interakcijama, što daje

$$2 - \eta = \sigma. \quad (2.74)$$

Da bismo u numeričkoj simulaciji pristupili eksponentu  $\gamma$ , promatramo spojene susceptibilnost koja se numerički može dobiti preko relacije

$$\chi_c = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (2.75)$$

Da bismo izračunali susceptibilnost, trebamo osnovna stanja ne samo za vanjsko homogenu polje  $h = 0$ , već i za određeni broj vrijednosti polja u samoj blizini  $h = 0$ . Iz njih zatim numerički računamo derivaciju u polju  $h = 0$ .

Spojena susceptibilnost u beskonačnom sustavu divergira u kritičnoj točki. To je jedan od razloga zašto je toliko interesantna u numerici. Ako u obzir uzmemo konačan sustav, korelacijska duljina ne može biti veća od  $L$ , stoga spojena susceptibilnost ne može divergirati. Umjesto toga otkrivamo da u konačnom sustavu susceptibilnost može biti najviše reda

$$\chi_c \propto L^{\frac{\gamma}{\nu}}. \quad (2.76)$$

Spojena susceptibilnost ima vrlo naglašen vrh (eng. *peak*), čak i u konačnim sustavima, oko kritične vrijednosti nereda  $\Delta_c(L)$ . Budući da je  $\frac{\gamma}{\nu}$  pozitivan broj, vrh postaje vrlo oštar kako povećavamo veličinu sustava  $L$  u vrijednosti nereda  $\Delta_c(L)$ , što se ekstrapolira kao kritična jakost nereda u limesu  $L \rightarrow \infty$ . Prema tome, lokacije vrhova kod funkcije susceptibilnosti daju procjenu o kritičnoj jakosti nereda kao

$$\Delta_c(L) = \Delta_c + aL^{-1/\nu} + \dots. \quad (2.77)$$

### 2.8.3 Kritični eksponenti $\bar{\gamma}$ i $\bar{\eta}$

Kako bismo numerički pristupili eksponentu  $\bar{\eta}$ , moramo proučiti odspojenu susceptibilnost

$$\chi_d = L^{\bar{\eta}m^2}. \quad (2.78)$$

Divergencija ove veličine opisana je s kritičnim eksponentom  $\bar{\gamma}$

$$\chi_d \propto |\Delta - \Delta_c|^{-\bar{\gamma}}. \quad (2.79)$$

Odspojena susceptibilnost jest integral odspojene korelacijske funkcije po cijelom prostoru, gdje je odspojena korelacijska funkcija dana preko izraza (2.70). Slično kao kod spojene susceptibilnosti, integracijom dobivamo sljedeći izraz za vezu između eksponenata  $\bar{\gamma}$  i  $\bar{\eta}$ .

$$\frac{\bar{\gamma}}{\nu} = 4 - \bar{\eta}. \quad (2.80)$$

Također, slično kao kod spojene susceptibilnosti dobivamo skaliranje

$$\chi_d(\Delta, H) = L^{\frac{\bar{\gamma}}{\nu}} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c), L^{y_h} H). \quad (2.81)$$

Međutim, odspojena susceptibilnost iz izraza (2.78) nema ekstrem (maksimum), već je monotona. Stoga, kako bismo dobili eksponent skaliranja, moramo se poslužiti jednom od sljedećih tehnika. Potrebno je ili napraviti kolaps podataka za  $\chi_d$  za različite  $L$  ili odabrati neku vrijednost nereda za svaki  $L$  te pokušati ekstrapolirati skaliranje  $\chi_d$  (primjerice, pogledati  $\chi_d$  na pozicijama gdje se nalaze maksimumi  $\chi_c$ ).

Eksponent  $\bar{\gamma}/\nu$  može se dobiti preko skaliranja magnetizacije, koju dobivamo tako da napravimo kolaps podataka različitih  $L$  na istu krivulju. Skaliranje magnetizacije može se opisati kao

$$m = L^{\frac{\beta}{\nu}} \tilde{m}(L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c), L^{y_h} H). \quad (2.82)$$

Iz definicije (2.78) lako se očita odnos između  $\bar{\gamma}$  i  $\beta$ :

$$\frac{\bar{\gamma}}{\nu} = d - 2\frac{\beta}{\nu}. \quad (2.83)$$

Možemo definirati još jednu veličinu:

$$\chi_{d,2} = L^d (\overline{m^2} - \bar{m}^2). \quad (2.84)$$

U kritičnom beskonačnom sustavu, veličina  $\chi_{d,2}$  potpuno je ekvivalentna  $\chi_d$  (jer je srednja magnetizacija jednaka nuli), ali to nije slučaj u konačnom sustavu. Međutim,  $\chi_{d,2}$  skalira se identično kao  $\chi_d$ . Veličina  $\chi_{d,2}$  ima *a priori* prednost u numeričkim računima pred  $\chi_d$  zato što ima vrlo naglašen vrh oko određene vrijednosti nereda, ovisno o veličini sustava -  $\Delta_{c,i}(L)$  što, kako ćemo vidjeti, olakšava određivanje kritičnih eksponenata.

### 2.8.4 Veličine dobivene iz susceptibilnosti

Susceptibilnosti se mogu kombinirati na posebne načine kako bi se dobili eksponenti koji su direktno izračunati u renormalizacijskoj grupi. Jedna takva veličina jest drugi kumulant nereda  $\Delta_2$ . U normalnom bi se slučaju skaliranje prikazalo preko graničnog valnog vektora  $k$ , međutim, možemo uzeti  $k \propto 1/L$  i formulirati reskaliranje te veličine kao  $\Delta_2 \propto L^{2\eta-\bar{\eta}}$ . Veličina koja je proporcionalna  $\Delta_2$  konstruirana se kao

$$\frac{\chi_d}{\chi_c^2} \propto \Delta_2 \propto L^{2\eta-\bar{\eta}}. \quad (2.85)$$

Kako bi se direktno pristupilo eksponentu irelevantnosti temperature  $\Theta$ , trebamo razmotriti veličinu

$$\frac{\chi_d}{\chi_c} \propto L^\Theta. \quad (2.86)$$

Iz te relacije lako se dobiva još jedna relacija među eksponentima

$$\Theta = 2 + \eta - \bar{\eta}. \quad (2.87)$$

### 2.8.5 Kritični eksponent $\nu$

Za nalaženje kritičnog eksponenta  $\nu$  vrlo je korisna veličina Binderov kumulant [27] definiran kao

$$g_4 = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{\overline{m^4}}{m^2{}^2} \right). \quad (2.88)$$

Veličina je izrazito korisna jer se ne skalira:

$$g_4(\Delta, H) = \tilde{g}_4(L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c), L^{y_h} H). \quad (2.89)$$

Zato možemo pronaći točke križanja  $g_4(\Delta)$  za različite vrijednosti  $L$  te ih iskoristiti za određivanje eksponenta  $\nu$  po uzoru na sličnu relaciju (2.77).

Dodatno, bila nam je potrebna veličina koja će nam dati eksponent na sličan način kao što susceptibilnost daje kritični eksponent  $\gamma/\nu$ . Ako uzmemo maksimum susceptibilnosti  $\chi_c$ , možemo lako vidjeti da se oni skaliraju kao  $a \cdot L^{\frac{\gamma}{\nu}}$ . Inače, postoje korekcije skaliranja da bi se izraz mogao modificirati kao  $a \cdot L^{\frac{\gamma}{\nu}} + bL^{\frac{\gamma}{\nu}-\omega} + \dots$ , dakle



s još jednim ili više članova. Budući da je  $\gamma/\nu$  pozitivna veličina, uzimanjem maksimuma  $\chi_c$  određujemo vrijednost koja je velika i izrazito neosjetljiva na numeričke pogreške. Uzimajući prijelazne točke Binderovih kumulanata (ili nečega sličnog), određujemo vrijednost tipa (2.77). To u teoriji nije problem ako imamo dobre podatke. Međutim, ako u obzir uzmemo činjenicu da smo ograničeni na, primjerice, broj konfiguracija nereda i ostale numeričke parametre, moglo bi biti nepouzdana ovako određivati kritični eksponent  $\nu$ .

Zato bismo trebali razmotriti sljedeću vrijednost [28]:

$$U_{c,me} = \left. \frac{\partial e}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (2.90)$$

Preko razmatranja skaliranja možemo pokazati da

$$U_{c,me} = L^{\frac{1}{\nu}} \tilde{u}_c(L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c), L^{y_h} h). \quad (2.91)$$

Lako možemo provjeriti ponaša li se ova veličina slično kao susceptibilnost jer pokazuje istaknuti vrh (maksimum) koji se povećava s  $L$ . Indeks  $c$  označava da se radi o spojenoj veličini (kao i kod susceptibilnosti). Isto tako možemo definirati i odspojeni ekvivalent navedene veličine:

$$U_{d,me} = L^d \frac{\overline{m \cdot e} - \bar{m} \cdot \bar{e}}{\bar{m}}. \quad (2.92)$$

Iz pretpostavki skaliranja, za razliku od spojene verzije, slijedi da je

$$U_{d,me} = L^{\frac{1}{\nu} + \Theta} \tilde{u}_d(L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c), L^{y_h} H). \quad (2.93)$$

Takvo skaliranje nije iznenađujuće jer isto dobivamo usporedbom skaliranja odspojene i spojene susceptibilnosti:

$$[\chi_d] = L^\Theta [\chi_c]. \quad (2.94)$$

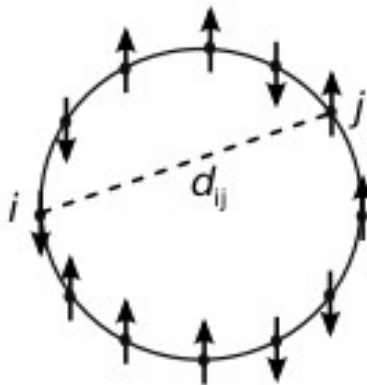
### 3 Rezultati

Proučavamo kritično ponašanje za  $\sigma = 0, 35, 0, 375, 0, 4, 0, 425$  i  $0, 45$ . Za svaki taj  $\sigma$  odabrane su veličine sustava od  $L = 2^n$ , gdje  $n$  ide od 7 do 14, što odgovara rasponu od  $L_{min} = 128$  do  $L_{max} = 16384$ . Za svaki  $\sigma$  i  $L$  preko određivanja osnovnog stanja izračunate su observable sustava kao što su magnetizacija i energija. Sve je to rađeno u rasponu jakosti nereda  $\Delta$ .

#### 3.1 Numerički detalji računa

Polazimo od koda dobivenog od prof. Alexandera Hartmanna, koji upotrebljava „*Push-and-relabel*” algoritam da bi pronašao osnovno stanje konačnog jednodimenzionalnog RFIM sustava s dalekosežnim interakcijama. Program je korišten u članku [11], no u ovom je slučaju modificiran da računa razne veličine navedene u prethodnim poglavljima. Razmatramo sustav s periodičkim rubnim uvjetima, što je u jednodimenzionalnom slučaju prsten (prikazano na slici 3.1). Umjesto da među spinovima zadržimo točne interakcije koje se ponašaju po potencijском zakonu, namještamo ih da se njihov prosjek ponaša po potencijском zakonu. Taj potez značajno pojednostavljuje interakcije jer bi zadržavanje točnog oblika potencijского zakona značilo da svaki spin interagira sa svakim drugim za veliki raspon veličina rešetki. Efektivni Hamiltonijan tada je

$$H = -J \sum_{i < j} \epsilon_{i,j} s_i s_j - \sum_i (h_i + h) s_i. \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Sustav s periodičkim rubnim uvjetima za  $d = 1$  jest prsten. Slika uzeta iz [11]

$L$	$\delta h$
128	0,012
256	0,01
512	0,007
1024	0,005
2048	0,005
4096	0,003
8192	0,002
16384	0,0015

Tablica 3.1: Prikaz vrijednosti  $\delta h$  za svaku veličinu rešetke  $L$ .

Koeficijenti  $\epsilon_{i,j}$  čine matricu razrjeđenja (eng. *dilution*) i imaju vrijednost 1 ako postoji interakcija između dva spina te vrijednost 0 ako ona ne postoji. Interakcija među spinovima zadana je s vjerojatnošću

$$p_{i,j} \propto 1/d_{i,j}^{1+\sigma}, \quad (3.2)$$

gdje su  $d_{i,j}$  jednaki:

$$d_{i,j} = \frac{L}{\pi} \sin(\pi|i-j|/L). \quad (3.3)$$

Kako bi se izbjeglo da je  $p_{i,j} > 1$ , primjenjujemo granicu za kratke udaljenosti, pa je stoga

$$p_{i,j} = 1 - e^{-\frac{A}{d_{i,j}^{1+\sigma}}}. \quad (3.4)$$

Konstanta  $A$  računa se numerički tako da se fiksira broj dalekodosežnih interakcija po čvoru:

$$z = \sum_{i=2}^{L-2} p_{i,L}. \quad (3.5)$$

U našem je računu vrijednost  $z$  bila fiksirana na vrijednost 6.

Kako bismo izračunali veličine kao što su spojena susceptibilnost i spojeni kumulant magnetizacije i energije, morali smo odrediti osnovno stanje za nekoliko vrijednosti  $h$  koje su različite od nule, a ne samo za homogeno polje  $h = 0$ . Računali smo u četiri točke  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = \delta h$ ,  $h_2 = 2\delta h$  i  $h_3 = 3\delta h$ , gdje je  $\delta h$  variran ovisno o veličini sustava, kao što je prikazano u tablici (3.1).

Vrijednosti  $\delta h$  smanjili smo s povećanjem  $L$  zato što je bilo potrebno zadržati sličnu preciznost za različite vrijednosti  $L$  pri numeričkom računu derivacije. Funkcionalna ovisnost fizikalnih veličina kao što su  $m$  i  $e$  postaje vrlo strma oko prijelaza u ovisnosti o  $L$ . Jednom kada smo izračunali osnovna stanja i odredili vrijednost  $f$  za dani  $h_i$ , prva derivacija u  $h_0 = 0$  određena je jednostranom formulom konačnih razlika [29] kroz 4 točke.

$$f'(h_0) = \frac{-11f(h_0) + 18f(h_1) - 9f(h_2) + 2f(h_3)}{6\delta h}. \quad (3.6)$$

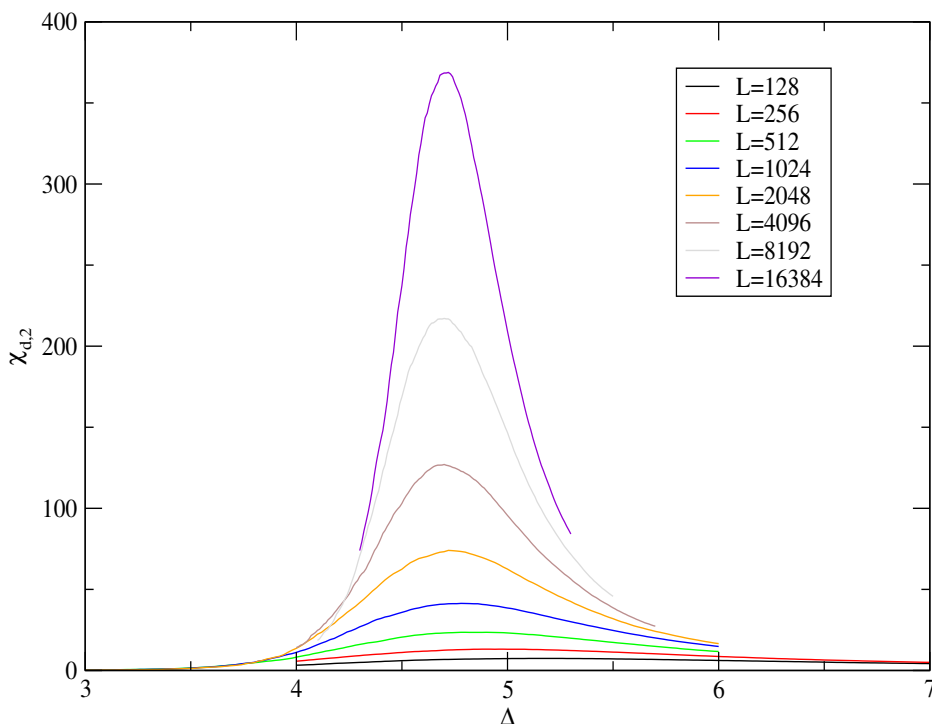
### 3.2 Obrada rezultata

Nakon što smo dobili rezultate s izračunatim osnovnim stanjima (oko 26 GB podataka), bilo je potrebno izračunati ranije spomenute veličine:  $\chi_c$ ,  $\chi_d$ ,  $\chi_{d,2}$ ,  $U_{c,me}$ ,  $U_{d,me}$  te Binderov kumulant. Budući da se radi o ogromnom broju podataka, to je rađeno preko skripte napravljene u programskom jeziku Fortran 90. Zatim se, s izračunatim podacima za spomenute veličine (primjer se može vidjeti na slici 3.2), preko skripte izrađene u programskom jeziku Python odradilo ugađanje polinoma 3. reda na dane podatke kako bi se dobila njihova vrijednost u maksimumu (vrhu) funkcije preko koje je zatim određeno skaliranje.

### 3.3 Procjena pogreški

Proučavamo iznad definirane veličine kako bismo dobili kritične eksponente. Kad imamo veličinu koja u ovisnosti o jakosti nereda ima maksimum, određivanje pripadajućeg kritičnog eksponenta vrlo je jednostavno. Dobivamo ga skaliranjem vrijednosti u maksimumu. U ovakvu slučaju pronašli smo da jednostavna ovisnost potencijskog zakona u obliku  $aL^b$  daje najvjerođostojnije vrijednosti eksponenata jer broj konfiguracija nereda nije dovoljan za određivanje korekcija skaliranja. Utvrdili smo da nije moguće odrediti korekciju tipa  $cL^d$  jer je šum od konačnog broja konfiguracija nereda prevelik. Kada se veličina mijenja monotono (bez vrha je), upotrebljavamo kolaps podataka kao u [30]. Takva metoda ima manu jer ne može uključiti korekcije skaliranja.

Pogreške kod kritičnih eksponenata određujemo variranjem numeričkih parametara kod određivanja eksponenata. Time smo željeli odrediti pogreške koje dolaze od



Slika 3.2: Primjer  $\chi_{d,2}$  u ovisnosti o  $\Delta$  za  $\sigma = 0,35$ .

ograničenog broja konfiguracija nereda i od korekcija skaliranja. Preciznije, pogreške kod eksponenata određujemo na sljedeće načine:

- a) Najprije je variran broj konfiguracija nereda. Tako smo dobili najveći rasap eksponenata za sve metode određivanja. Eksponenti su određeni prethodno opisanim načinima određivanja s punim brojem konfiguracija (10000) te je za određivanje pogreške ponovljeno određivanje eksponenata, ali s pola konfiguracija nereda.
- b) Preko određivanja eksponenata s pomoću maksimalnih vrijednosti veličina (vrhova), u obzir nije uzeto nekoliko manjih rešetki kako bismo mogli ocijeniti korekcije skaliranja. Nalazimo da je nepouzdanost rezultata od korekcija skaliranja manja od one koja dolazi od konačnog broja konfiguracija nereda.
- c) Preko kolapsa podataka varirani su intervali bezdimenzionalne varijable skaliranja od 4 do 0,4. Također su mijenjani početni uvjeti iteracije. Kolapsom su nađene prihvatljive vrijednosti eksponenta  $1/\nu$ , no interval u kojem  $\Delta_c$  varira s različitim početnim uvjetima djeluje prilično veliko, što opravdava određene sumnje prema ovoj metodi određivanja eksponenata.

$\sigma$	$\Delta_c - \chi_d$	$\bar{\gamma}/\nu - \chi_d$
0,35	$4,70 \pm 0,03$	$0,80 \pm 0,02$
0,375	$4,61 \pm 0,05$	$0,80 \pm 0,02$
0,400	$4,50 \pm 0,04$	$0,80 \pm 0,03$
0,425	$4,39 \pm 0,03$	$0,81 \pm 0,02$
0,45	$4,22 \pm 0,04$	$0,82 \pm 0,02$

Tablica 3.2: Prikaz rezultata dobivenih preko kolapsa za  $\chi_d$ .

$\sigma$	$\bar{\gamma}/\nu - \chi_{d,2}$
0,35	$0,778 \pm 0,003$
0,375	$0,801 \pm 0,005$
0,400	$0,821 \pm 0,004$
0,425	$0,857 \pm 0,003$
0,45	$0,883 \pm 0,003$

Tablica 3.3: Prikaz rezultata dobivenih skaliranjem  $\chi_{d,2}$ .

### 3.4 Kritični eksponent $\frac{\bar{\gamma}}{\nu}$

#### 3.4.1 Iz odspojene susceptibilnosti $\chi_d$

Odspojena susceptibilnost definirana je u izrazu (2.78) i u kritičnosti daje dominantan doprinos susceptibilnosti neuređenog sustava. Riječ je o monotonj funkciji nereda, na kojoj iz očitih razloga (bez vrha je) nismo mogli odrediti eksponent iz skaliranja očitavajući maksimume, već je s podacima napravljen kolaps. Eksponent  $\bar{\gamma}/\nu$  u načelu se mogao odrediti i kolapsom magnetizacije, no uvidjeli smo da je rasap tako dobivenog  $\beta/\nu$  malo prevelik da bismo te rezultate mogli uzeti u obzir. Rezultati su iskazani u tablici 3.2.

#### 3.4.2 Iz odspojene susceptibilnosti $\chi_{d,2}$

Odspojena susceptibilnost  $\chi_{d,2}$  definirana je relacijom (2.84). Radi se o funkciji nereda koja nije monotona, već ima maksimum, pa se eksponent lako može dobiti skaliranjem maksimuma, što je prikazano u tablici 3.3.

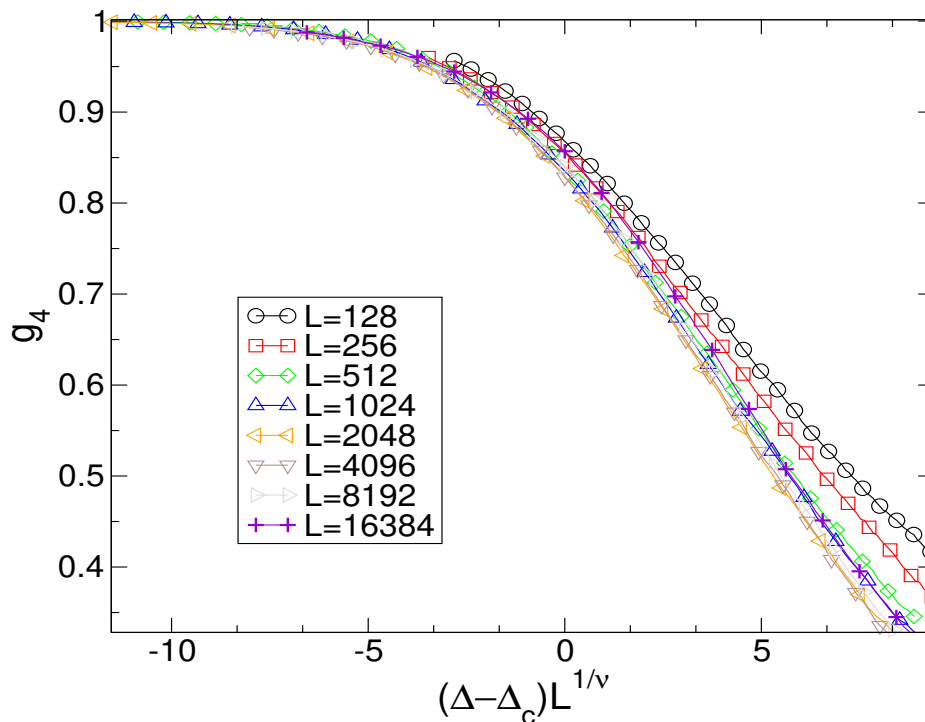
Jasno je da je odspojena susceptibilnost s maksimumom *a priori* numerički uvelike preciznija vrijednost za određivanje kritičnog eksponenta.

### 3.5 Kritični eksponent $1/\nu$

Ponašanje ovog eksponenta bilo je najteže utvrditi i vrlo je intrigantno. Zato je upotrijebljeno nekoliko različitih metoda za određivanje njegove vrijednosti.

#### 3.5.1 Iz Binderova kumulanta $g_4$ i magnetizacije $m$

Prvo pogledajmo kolaps magnetizacije i Binderova kumulanta prikupljajući podatke za različite vrijednosti  $L$ , ugađajući ih koristeći se relacijama (2.89) i (2.82). Upotrebljavamo proceduru opisanu u [30]. Kolaps Binderova kumulanta trebao bi biti pouzdaniji od, primjerice, kolapsa  $\chi_d$  jer se vrijednost sama po sebi ne skalira i stoga imamo samo dva parametra ugađanja (eng. *fitting*) ( $\delta_c$  i  $1/\nu$ ) umjesto tri, kao što je to slučaj kod magnetizacije (povrh onih za  $g_4$   $\beta/\nu$ ). Konzistentnost podataka za ugađanja  $g_4$  potvrđuje tu činjenicu. Rezultati su prikazani u tablici 3.4.



Slika 3.3: Kolaps Binderova kumulanta za  $\sigma = 0, 35$ .

Kada se koristimo kompletnim rasponom rešetke  $L$ , ugađanja su konzistentnija. Izgleda da postoji jedinstven set parametara koji dobro opisuju ugađanje neovisno o rasponu bezdimenzionalne varijable  $L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c)$  korištene za ugađanje i početne uvjete. Za bezdimenzionalnu varijablu  $L^{1/\nu}(\Delta - \Delta_c)$  korišteni su rasponi od  $[-4, 4]$  do  $[-0, 5, 0, 5]$ . Problem je u tome što ugođene vrijednosti  $\Delta_c$  pokazuju zamjetno ra-

$\sigma$	$1/\nu - g_4$	$\Delta_c - g_4$	$1/\nu - m$	$\Delta_c - m$
0,35	$0,302 \pm 0,006$	$4,65 \pm 0,15$	$0,300 \pm 0,010$	$4,75 \pm 0,07$
0,375	$0,303 \pm 0,010$	$4,45 \pm 0,20$	$0,300 \pm 0,005$	$4,70 \pm 0,05$
0,400	$0,302 \pm 0,007$	$4,35 \pm 0,15$	$0,305 \pm 0,008$	$4,55 \pm 0,05$
0,425	$0,304 \pm 0,006$	$4,25 \pm 0,10$	$0,303 \pm 0,010$	$4,50 \pm 0,15$
0,45	$0,303 \pm 0,005$	$4,05 \pm 0,07$	$0,302 \pm 0,005$	$4,43 \pm 0,10$

Tablica 3.4: Prikaz rezultata za kolaps Binderova kumulanta i magnetizacije

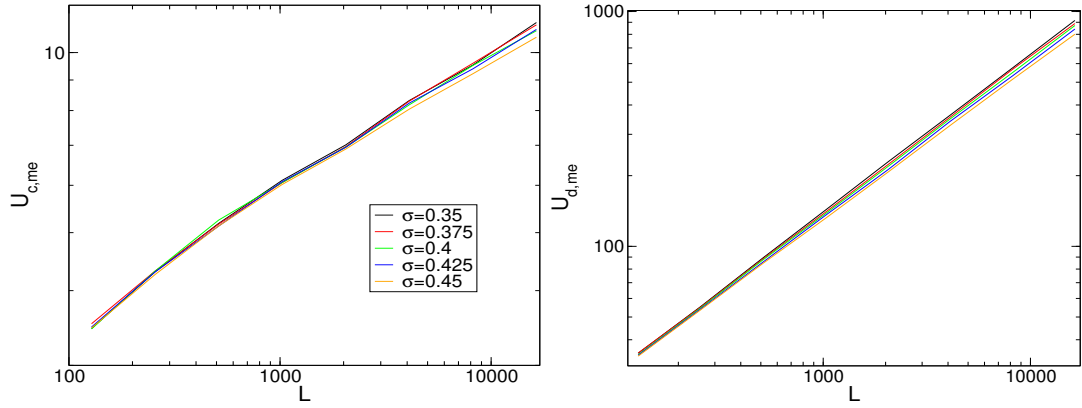
sipanje između ugađanja  $g_4$  i  $m$ , što upućuje na bitno prisustvo korekcija skaliranja, koje sistematski ne možemo uzeti u obzir. Kako bismo pokušali smanjiti korekcije skaliranja, razmotrene su samo 4 najveće rešetke. Tako se dobivaju zadovoljavajuća ugađanja. Međutim, raspon u kojem  $\Delta_c$  varira ostaje znatan. Moguće je da odmak među vrijednostima  $\Delta_c$  za  $g_4$  i  $m$  iščezava za  $L \rightarrow \infty$  i da smo ovdje ograničeni pre-malom veličinom sustava. Varijabla  $\Delta_c$  također nema velik utjecaj na vrijednosti  $1/\nu$ , što nam potvrđuje da su vrijednosti ovog eksponenta ustvari robusne. Navodimo vrijednosti  $1/\nu$  iz ugađanja koja uključuju samo 4 najveće rešetke. Upotrebljavamo i ugađanja sa svim rešetkama, kao što variramo početne uvjete kako bismo utvrdili pogreške. Odabiremo samo ugađanja koja pokazuju najmanje pogreške, no dobivamo da ugađanja magnetizacije generalno pokazuju velike pogreške. Stoga smo u obzir uzeli ugađanja za  $g_4$  istog reda pogreške kao najbolja ugađanja za  $m$ .

Dolazimo do dvaju važnih zaključaka proučavajući kolapse Binderova kumulanta  $g_4$  i magnetizacije  $m$ . Prvo, obje veličine daju vrijednosti od oko  $\frac{1}{\nu} \approx 0,303 \pm 0,010$  nevezano za  $\sigma$ . Usprkos činjenici da je numerički određena pogreška vrlo mala, vrijednost  $\Delta_c$  u stvarnosti može dosta varirati s obzirom na početne uvjete, uključujući mogućnost preklapanja između ugađanih vrijednosti za  $g_4$  i  $m$ . Međutim, vrijednost  $\frac{1}{\nu}$  vrlo je robusna na veliki rasap  $\Delta_c$ .

### 3.5.2 Iz spojenih i odspojenih $m - e$ kumulanata

Razne verzije kumulanata magnetizacije i energije čine se kao obećavajući način određivanja kritičnog eksponenta  $1/\nu$ . Razmotrimo veličine definirane u izrazima (2.90) i (2.92), koje su obje funkcije s maksimumom. Izgleda da su korekcije skaliranja za te veličine vrlo male i da ne možemo napraviti ništa bolje doli pretpostaviti jedan potencijalski zakon ( $aL^b$ ) za ponašanje podataka. Također dobivamo da je numerička netočnost dobivenih eksponenata vrlo malena.





Slika 3.4: Logaritamski grafovi spojene i odspojene verzije kumulanta magnetizacije i energije.

$\sigma$	$1/\nu - (2.90)$	$1/\nu + \Theta - (2.92)$	$1/\nu - (2.92)$
0,35	$0,224 \pm 0,006$	$0,671 \pm 0,005$	$0,297 \pm 0,008$
0,375	$0,224 \pm 0,005$	$0,664 \pm 0,003$	$0,283 \pm 0,006$
0,400	$0,217 \pm 0,006$	$0,664 \pm 0,003$	$0,265 \pm 0,009$
0,425	$0,218 \pm 0,007$	$0,659 \pm 0,003$	$0,255 \pm 0,009$
0,45	$0,212 \pm 0,005$	$0,649 \pm 0,007$	$0,235 \pm 0,008$

Tablica 3.5: Rezultati za eksponent  $1/\nu$  dobiveni preko spojenog i odspojenog  $m - e$  kumulanta

Postoji način kako nezavisno izračunati eksponent  $\Theta$  koji je predstavljen u sljedećem potpoglavlju. Stoga, možemo se poslužiti eksponentom  $1/\nu$  izračunatim preko odspojenog kumulanta magnetizacije i energije (treći stupac tablice 3.5) i eksponentom  $\Theta$  (drugi stupac tablice 3.7) kako bismo dobili još jednu procjenu za  $1/\nu$ .

Vidimo da dva nezavisna načina određivanja eksponenta  $1/\nu$  daju numerički relativno precizne procjene (koristeći spojeni  $m - e$  kumulant i kolaps  $g_4$ ), ali daju i različite vrijednosti ovog eksponenta.

### 3.6 Kritični eksponent $\frac{\gamma}{\nu}$

Određivanje ovog kritičnog eksponenta omogućava nam provjeru konzistentnosti jer bi iznosom trebao biti jednak vrijednosti  $\sigma$ . Očitavamo vrijednosti spojene susceptibilnosti u maksimumu. Eksponent dobivamo ugađajući funkciju jednostavnog potencijskog zakona  $aL^b$  na podatke. Izraz je vrlo jednostavan jer nismo dobili nikakve dodatne informacije kada smo uključili i korekciju u izraz za potencijско pravilo  $aL^b + cL^d$ .

$\sigma$	$\gamma/\nu$
0,35	$0,421 \pm 0,008$
0,375	$0,430 \pm 0,010$
0,400	$0,440 \pm 0,010$
0,425	$0,457 \pm 0,007$
0,45	$0,470 \pm 0,010$

Tablica 3.6: Rezultati dobiveni za eksponent  $\gamma/\nu$  preko skaliranja  $\chi_c$

Vrijednosti određivanog eksponenta  $\gamma/\nu$  ne podudaraju se s očekivanim vrijednostima ( $\sigma$ ) (prikazano u tablici 3.6). Nije nam jasan izvor tog pomaka. Bitno je primijetiti i da je spojena susceptibilnost subdominantn doprinos odspojenoj susceptibilnosti, pa se razlika koju nalazimo u numeričkom računu s ograničenim brojem konfiguracija nereda i veličinama sustava ne bi trebala smatrati velikim problemom.

### 3.7 Eksponenti $\Theta$ i $2\eta - \bar{\eta}$

Kombinirajući podatke koje imamo, omogućen nam je pristup i nekim drugim eksponentima koji su također interesantni. Preko rezultata za odspojene susceptibilnosti ( $\chi_{d,1}$  i  $\chi_{d,2}$ ) i spojenu susceptibilnost  $\chi_c$  možemo doći do kritičnog eksponenta  $\Theta$  kao što je objašnjeno u izrazu (2.86). Slično tomu, izraz (2.85) trebao bi direktno dati eksponent  $2\eta - \bar{\eta}$ . Eksponent  $\theta$  interesantan je zato što je to kritični eksponent irelevantnosti temperature. Pokazano je da taj eksponent diktira eksponencijalno, aktivirano usporavanje u RFIM sustavima [3, 9]. Eksponent  $2\eta - \bar{\eta}$  zanimljiv je jer postoje fizikalni argumenti koji određuju njegov iznos na temelju relevantnosti rijetkih događaja [31]. Schwarz-Sofferova nejednakost zahtijeva da je

$$2\eta - \bar{\eta} \geq 0. \quad (3.7)$$

Kada bi ovaj eksponent bio negativan, prekršili bismo nejednakost. Točnije, negativnost ovog eksponenta implicirala bi da se jakost kritičnog nereda renormalizira u 0. Kada bi tvrdnja  $2\eta - \bar{\eta} = 0$  bila istinita, povukla bi se implikacija da se nered ne renormalizira u renormalizacijskoj grupi i da je kompatibilan sa scenarijem da rijetke konfiguracije nereda ne igraju nikakvu ulogu. Kao primjer rijetkih konfiguracija nereda možemo izdvojiti slučaj kada je sav nered skupljen u mali volumen, a ostatak sustava je čist, ili obrnuto, da je nered slučajno takav da razbija mogućnost

$\sigma$	$\Theta - a$	$\Theta - b$	$2\eta - \bar{\eta} - a$	$2\eta - \bar{\eta} - b$
0,35	$0,370 \pm 0,005$	$0,37 \pm 0,02$	$-0,03 \pm 0,02$	$-0,06 \pm 0,04$
0,375	$0,381 \pm 0,005$	$0,37 \pm 0,01$	$-0,04 \pm 0,02$	$-0,06 \pm 0,04$
0,400	$0,399 \pm 0,007$	$0,37 \pm 0,02$	$-0,02 \pm 0,02$	$-0,05 \pm 0,03$
0,425	$0,402 \pm 0,008$	$0,39 \pm 0,02$	$-0,05 \pm 0,03$	$-0,06 \pm 0,03$
0,45	$0,414 \pm 0,005$	$0,39 \pm 0,02$	$-0,04 \pm 0,03$	$-0,04 \pm 0,04$

Tablica 3.7: Rezultati za eksponente  $\theta$  i  $2\eta - \bar{\eta}$  određeni na a) i b) načine iz teksta

dalekodosežnog reda. Konačno, pozitivnost ovog eksponenta ukazuje na to da se efektivna jakost nereda povećava u renormalizacijskoj grupi, zbog čega je u kritičnoj točki efektivni nered beskonačan.

Postoji nekoliko različitih načina na koje možemo doći do eksponenata i nije *a priori* očito koji je način najbolji:

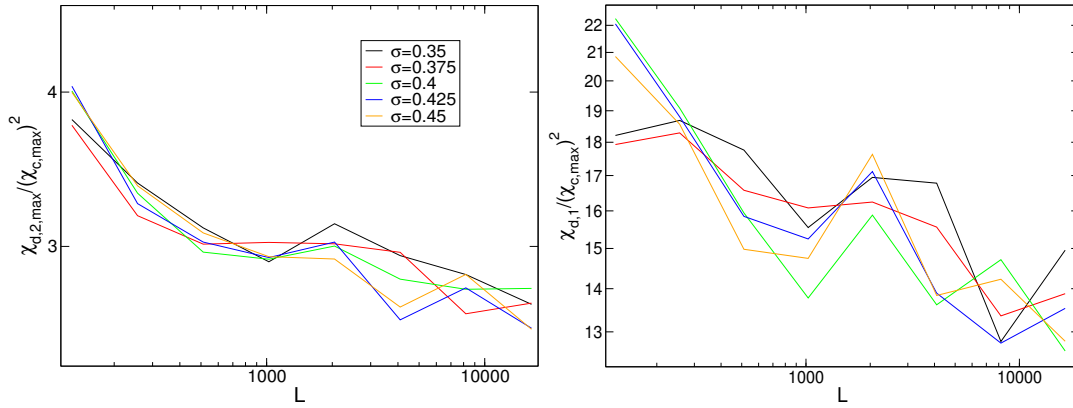
- a) Uzimanje vrijednosti maksimuma od  $\chi_{d,2}$  i  $\chi_c$ , računanje kvocijenata tih vrijednosti i određivanje eksponenta s pomoću potencijskog zakona.
- b) Gledajući vrijednost odspojene susceptibilnosti  $\chi_d$  na lokaciji maksimuma od spojene susceptibilnosti  $\chi_c$  i potom računajući potrebne kvocijente.

Eksponenti određeni na načine a) i b) prikazani su u tablici 3.7. Usprkos činjenici da je metoda a) numerički preciznija, možemo vidjeti da obje metode daju konzistentne rezultate. Otkrili smo da u metodi b) karakteristični  $\Delta_c$  iz odspojene susceptibilnosti prolazi kroz karakteristični  $\Delta_c$  za spojenu veličinu između  $L = 2048$  i  $L = 4096$ , doprinoseći time pogreškama u određivanju eksponenta. Taj događaj nije moguće uzeti u obzir ni na jedan drugi način doli kao izvor šuma. Imaju li te vrijednosti eksponenta  $\theta$  ikakva smisla? Ako u obzir uzmemo izraz 2.87 i kombiniramo ga s egzaktnom relacijom (2.74), možemo dobiti relaciju

$$\Theta = \sigma + 2\eta - \bar{\eta}. \quad (3.8)$$

Postoje opsežni numerički podaci koji pokazuju da je dalje od gornje kritične dimenzije eksponent  $2\eta - \bar{\eta}$  mala vrijednost [32, 33]. Iz naših podataka očito je da je određena vrijednost  $\theta$  u načelu vrlo bliska vrijednosti  $\sigma$ .

Kako bismo pitanje jednakosti  $\theta$  i  $\sigma$  sagledali iz druge perspektive, određen je eksponent  $2\eta - \bar{\eta}$  direktno iz podataka. Međutim, dobivamo eksponent blizak 0, ali s negativne strane za raspon vrijednosti  $L$  za koje smo računali. Postoji tendencija

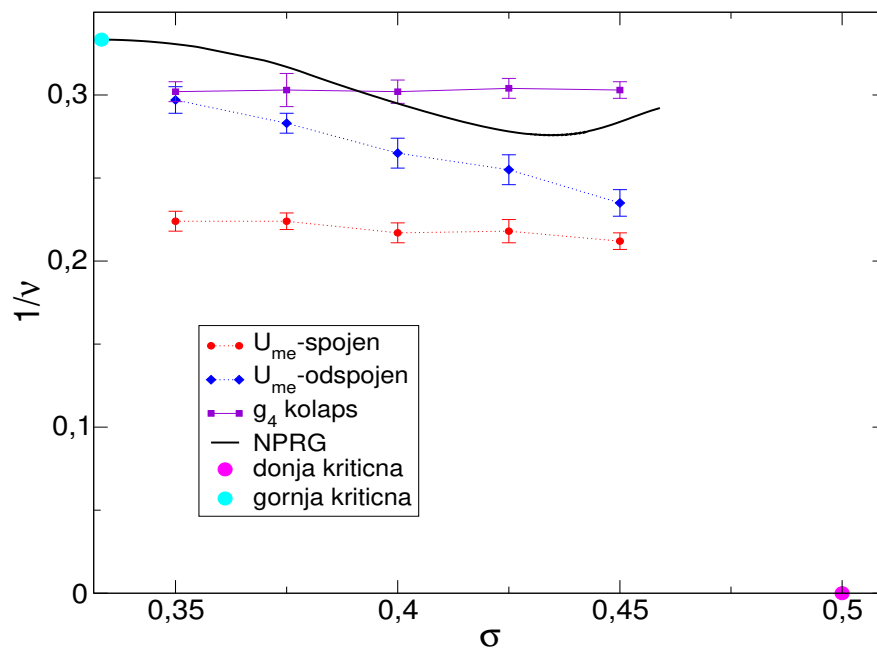


Slika 3.5: Logaritamski grafovi kvocijenata koji određuju eksponent  $2\eta - \bar{\eta}$  kao nagibe s pomoću prethodno opisanih metoda a) i b)

prikazana u grafovima na slici 3.5 da navedeni eksponent trne u 0 za velike rešetke (veliki  $L$ ). Opcija da se  $\Delta_c$  renormalizira u 0 nije kompatibilna s ostatkom naših rezultata koji pokazuju jasan fazni prijelaz u konačnoj vrijednosti nereda. Dolazimo do zaključka da su efekti koji se događaju kod konačne veličine sustava suptilni i prilično snažni, usprkos činjenici što se ne mogu odrediti tako da na svoje podatke pokušamo numerički ugoditi dvostruki potencijski zakon. Čini se da na suptilan način, koji je ispod preciznosti koju diktira broj konfiguracija nereda, postupno mijenjaju eksponente kako se raspon  $L$  mijenja. Direktno promatranje eksponenta  $2\eta - \bar{\eta}$  problematično je i podložno jakim korekcijama koje dolaze od konačne veličine sustava.

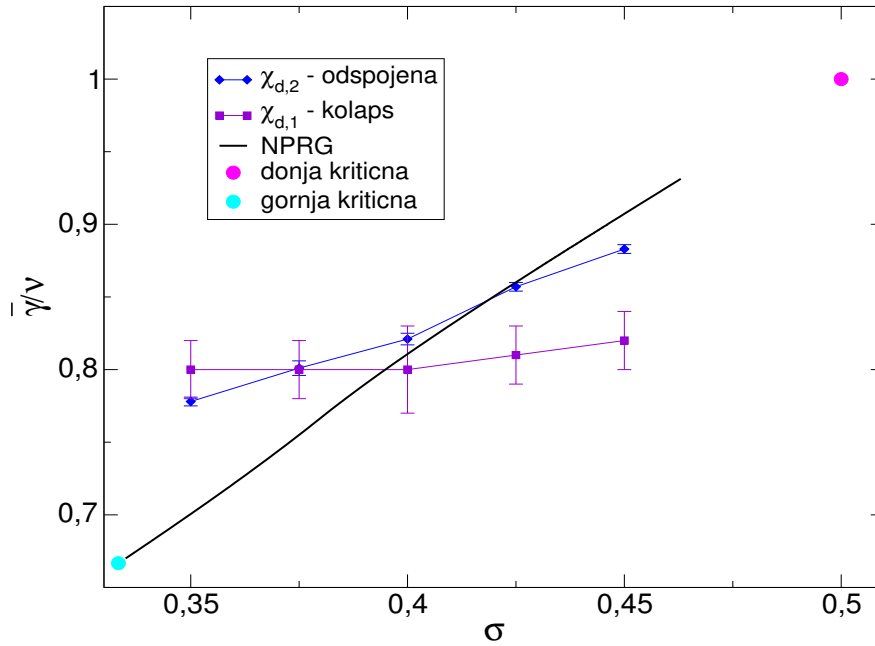
## 4 Zaključak i diskusija

Numerički računi za kritičnost na neuređenim sustavima daju egzaktne rezultate ako su sustavi beskonačni i ako je broj konfiguracija nereda beskonačan. Međutim, jasno je da je takav račun nemoguće izvesti. Analitički pristupi, primjerice renormalizacijska grupa, daju informacije o beskonačnim sustavima s beskonačno puno konfiguracija nereda, ali vrlo se rijetko može dobiti egzaktan rezultat za realističan sustav poput RFIM-a na običnoj rešetci u konačnom broju dimenzija. Kako bismo uvidjeli relevantnu fiziku iza ovih dvaju pristupa, potrebno ih je oprezno usporediti. Jedini egzaktne rezultate za eksponente koji su nam poznati za ovaj model nalaze se u granicama sigme  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , gdje je  $\sigma = \frac{1}{3}$  dobivena iz Gaussove teorije i odgovara gornjoj kritičnoj dimenziji, a granica  $\sigma = \frac{1}{2}$  označava kraj faznog prijelaza i odgovara donjoj kritičnoj dimenziji. Za  $\sigma = \frac{1}{3}$  eksponenti su  $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{3}$  i  $\frac{\bar{\gamma}}{\nu} = \frac{2}{3}$ , a za  $\sigma = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{\nu} = 0$  i  $\frac{\bar{\gamma}}{\nu} = 1$ .



Slika 4.1: Rezultati za eksponent  $1/\nu$ .

Na slici 4.1 možemo vidjeti usporedbu eksponenta  $\frac{1}{\nu}$  u ovisnosti o  $\sigma$  dobivenih iz numeričkih računa i NPRG računa koji je odrađen u sklopu rada [15]. Čudno je da različite metode dobivanja eksponenta numerikom daju različite rezultate koji su izvan okvira pogreški. Najmanje vjerodostojna metoda određivanja  $\nu$  jest metoda kolapsa jer smo vidjeli da vrijednosti mogu značajno varirati bez puno razlike u prividnoj kvaliteti kolapsa podataka. Kvalitetu kolapsa vidimo preko veličine  $S$



Slika 4.2: Rezultati za eksponent  $\bar{\gamma}/\nu$ .

definirane u [30]. Dobivanje eksponenta preko maksimuma spojenog ili odspojenog kumulanta magnetizacije i energije djeluje vrlo dobro jer su numeričke pogreške vrlo male. Međutim, vidljive su razlike i između rezultata dobivenih preko spojenog i odspojenog kumulanta ( $U_{me,c}$  i  $U_{me,d}$ ). Koja je od tih veličina najpouzdanija i predstavlja najbolji način za određivanje eksponenta  $\nu$  pitanje je koje, da bismo na njega mogli odgovoriti, iziskuje daljnji rad. Doduše, možemo procijeniti da se određivanje eksponenta iz odspojenog kumulanta najviše podudara s teorijom jer pokazuje tendencije poprimanja egzaktnih vrijednosti gornje i donje kritične dimenzije.

Moguće je da egzaktni efektivni Hamiltonijan sustava u kritičnosti pokazuje multi-kritično ponašanje, koje bi moglo vrijednosno razdvojiti određeni eksponent kada ga promatramo iz različitih veličina, kao što to vidimo iz numeričkih računa. Također, potrebni su računi sa znatno većim rešetkama ( $L$ ) da bi se potvrdilo preživljava li razlika u eksponentima u limesu beskonačnog sustava.

Ono što je vidljivo iz našeg računa, ali i iz rezultata za  $\frac{1}{\nu}$  dobivenih u članku [11], jest manjak strukture u ovisnosti o  $\sigma$ , pri čemu govorimo o tome da dobivamo gotovo konstantnu vrijednost eksponenta i nemamo jake indikacije da će sustav poprimiti poznate vrijednosti  $\frac{1}{\nu}$  u donjoj i gornjoj kritičnoj granici  $\sigma$ . Autori navedenog članka našli su sličnu vrijednost eksponenta  $\frac{1}{\nu} \approx 0,3$  za slučaj koji odgovara donjoj kritičnoj dimenziji, što je daleko od očekivane vrijednosti 0, ali suprotno tome možemo vidjeti

čudno, ne monotono ponašanje za  $1/\nu$  u NPRG rezultatima za koje se očekuje da u  $\sigma = \frac{1}{2}$  konvergira u vrijednost 0. Čini se da u numeričkim podacima postoji tendencija uočavanja prijelaza blizu donje kritične dimenzije jer trenutačni podaci ne upućuju na određenu interesantnu strukturu ako se pogleda ovisnost eksponenta o  $\sigma$ . Razumijevanje razloga tendencije uočavanja faznog prijelaza pri donjoj kritičnoj dimenziji potencijalno je vrlo značajno jer bi vodilo do zaključaka kako moramo promatrati ponašanja blizu donje kritične dimenzije u numeričkim računima. Zašto se to događa otvoreno je i vrlo zanimljivo pitanje jer se čini da se događa i u nekim drugim problemima, kao što je primjerice prijelaz histereze.

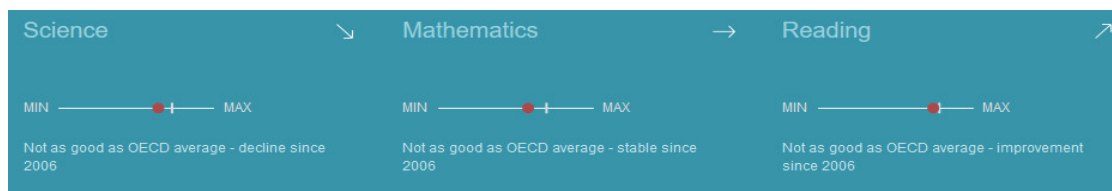
Slika 4.2 prikazuje graf ovisnosti eksponenta  $\frac{\tilde{\gamma}}{\nu}$  o  $\sigma$ . Ponovno imamo prikaz rezultata dobivenih preko NPRG te preko dviju numeričkih metoda. Ponovno možemo vidjeti da nam je kolaps dao vrlo ravnu, skoro konstantnu ovisnost, kao što je to bio slučaj kod prethodnog eksponenta  $\nu$ . Određivanje eksponenta iz skaliranja maksimuma preko observable  $\chi_{d,2}$  i u ovom se slučaju čini daleko pouzdanijim. Jasno se vidi veća podudarnost s NPRG rezultatima, ali i poznatim vrijedostima u gornjoj i donjoj kritičnoj dimenziji.

## 5 Metodički dio

### 5.1 Interaktivna istraživački usmjerena nastava

Trenutačno je u Republici Hrvatskoj aktualna problematika kurikularne reforme [34], tako da je vrlo bitno razmisliti kako bi ona trebala utjecati na nastavu fizike u osnovnim i srednjim školama. Nastava fizike od učenika iziskuje visoki intelektualni angažman, stoga predavački tip nastave, gdje je u fokusu nastavnik, a učenici su pasivni, očito nije adekvatan za održavanje nastave fizike. U sam proces nastave potrebno je uključiti sve učenike i držati njihovu intelektualnu uključenost na visokom nivou tokom cijelokupnoga školskog sata. To može osigurati interaktivna istraživački usmjerena nastava. Podaci koje prikazuje PISA [35] (eng. *Programme for International Student Assessment*) govore o tome da naši učenici u usporedbi s vršnjacima iz zemalja OECD-a (eng. *Organisation for Economic Co-operation and Development*), rangiraju ispod prosjeka za prirodoslovnu, matematičku i čitalačku pismenost (vidljivo na slici 5.1). Ono što je dodatno zabrinjavajuće jest negativan trend kod prirodoslovne pismenosti, što svakako ukazuje na to da nešto moramo promijeniti u obrazovnom sustavu kako bismo na tom području išli ukorak sa zemljama OECD-a. Jedan od zaključaka koji se nameće jest da je potrebno restrukturirati gradivo i smanjiti obujam kako bi se više vremena moglo posvetiti interaktivnoj nastavi i razumijevanju. Razumijevanje osnovnih koncepata možda bi bolje pripremlilo učenike na nešto zahtjevnija poglavlja, koja se mogu obraditi u formi učeničkog projekta, domaće zadaće ili dodatne nastave. Interaktivna istraživački usmjerena nastava u određenom se obujmu (vjerojatno ne zadovoljavajućem) provodi i sada, ali moguće je da ima previše sadržaja propisanog kurikulumom da bi se ona izvodila u potpunosti i dala očekivane rezultate. Prednosti su takve nastave što je ona bazirana na eksperimentima, demonstracijama, simulacijama, interakciji s učenicima i na interakciji učenika međusobno. Na taj se način uz valjanu strukturu sata dobiva zadovoljavajuća intelektualna uključenost učenika tijekom cjelokupnog sata i uz razumijevanje koncepata, zakona i modela razvijaju i bitne sposobnosti, poput znanstvenog zaključivanja, kritičko-logičkog razmišljanja i eksperimentalnih vještina. Najbitniji čimbenik u ovakvom tipu nastave jest pripremljenost profesora te njegova uloga vodiča u učeničkom traženju odgovora na znanstvena pitanja, testiranju hipoteza, provođenju eksperimenata, prezentiranju rezultata, iznošenju zaključaka te korištenju argumenata.





Slika 5.1: Rangiranje Hrvatske u usporedbi s prosjekom zemalja OECD-a prema PISA-inim podacima. Preuzeto s [35]

Nastavni se sat u istraživački usmjerenoj nastavi sastoji od triju dijelova: uvodnog, središnjeg i završnog. Uvodni dio započinje uvodnim problemom u obliku pitanja ili demonstracije neke pojave preko simulacije, videozapisa ili opservacijskog poskusa, frontalno pred cijelim razredom.

Uvodni dio, nakon diskusije, završava uvođenjem naziva nove pojave. Središnji dio sata sastoji se od vođenog istraživanja koje započinje istraživačkim pitanjem na koje je cilj odgovoriti na kraju tog dijela sata. U tom procesu potrebno je konstruirati model i matematički opisati pojavu. Istraživačko pitanje trebalo bi biti jasno, zatvoreno pitanje na koje je lako odgovoriti nakon istraživanja. Konačno, u završnom dijelu sata s pomoću konceptualnih pitanja, problemskih zadataka ili aplikacijskih pokusa evaluira se model konstruiran u središnjem dijelu.

## 5.2 Nastavna priprema

Nastavna priprema na temu „Zakon očuvanja kutne količine gibanja“ predviđena je za jedan sat trećeg razreda prirodoslovno-matematičke gimnazije. Učenici su prije ovog sata proučavali kinematiku i temeljne zakone rotacije. Vrsta nastave jest interaktivna istraživački usmjerena nastava. Zamišljeno je da se sat provodi frontalno u kombinaciji s individualnim radom učenika. Nastavne metode koje se koriste su demonstracija pokusa, metoda razgovora odnosno usmjerene rasprave, konceptualna pitanja s karticama, metoda pisanja/crtanja te naposljetku prikazivanje videozapisa. Nastavna pomagala i sredstva potrebna za izvođenje nastave su ploča, kreda/marker, računalo, projektor, stolac koji se može okretati, dvije boce vode te vrtjelica [36] (eng. *fidget spinner*). Slijede i odgojno-obrazovni ishodi [37] koji predstavljaju očekivana znanja, vještine i sposobnosti te vrijednosti i stavove koje učenici trebaju steći i koje mogu pokazati po uspješnom završetku određene teme. Usmjereni su na učenike i njihove aktivnosti. Profesorima pružaju osnovu za određivanje sadržaja,

nastavnih strategija i metoda, određivanje aktivnosti koje učenici trebaju izvesti, ali i za vrednovanje uspjeha i napretka. Također, služe za vrednovanje ostvarenosti kurikuluma. Učenici su prije ovog sata proučavali temeljne zakone rotacije. U ovoj nastavnoj jedinici nema previše korelacije s drugim predmetima, osim s matematikom, s kojom se dotiče preko proporcionalnosti, vektora i osi simetrije.

### 5.2.1 Obrazovni ishodi (očekivanja učenička postignuća)

**Učenik će nakon sata moći:** definirati kutnu količinu gibanja, objasniti pod kojim je uvjetima kutna količina gibanja očuvana, iskazati matematički izraz za kutnu količinu gibanja, prepoznati primjere očuvanja kutne količine gibanja, navesti izraz za kinetičku energiju rotacije, prikazati kinetičku energiju rotacije na stupčastom dijagramu, upotrebljavati pravilo desne ruke kako bi se prikazao smjer kutne brzine, kutne akceleracije i kutne količine gibanja.

**Učenik će satu razvijati sposobnosti:** rada u grupi, znanstvenog i logičkog zaključivanja, opažanja i analiziranja, usmenog i pismenog izražavanja te proporcionalnog zaključivanja.

**Učenik će tijekom sata usvajati vrijednosti:** uvažavanja tuđeg mišljenja / demokratičnosti, razvijanja samopouzdanja kod vlastita izražavanja, formiranja vlastita mišljenja na temelju činjenica, pozitivnog odnosa prema radu.

### 5.2.2 Tijek nastavnog sata

#### A) Uvodni dio: otvaranje problema, prikupljanje ideja, upoznavanje pojave

**Uvodni problem:** Prikazujem kratak videozapis [41] klizačice koja radi piruetu, pri čemu se može vidjeti kako klizačica povećava svoju kutnu brzinu tako da privlači ruke i noge osi rotacije. Prije no što pokrenem videozapis, usmjeravam pažnju učenika na platno i dajem upute da pažljivo promatraju situaciju.

**Što ste upravo mogli vidjeti na videozapisu?** Očekujem deskriptivne odgovore koji opisuju situaciju. Poput, „klizačica radi piruetu na ledu, vrti se jako brzo, ubrzava, skuplja ruke, privlači noge...“.

Zatim ponovno pokrećem videozapis te im usmjeravam pažnju na središnji dio gdje mogu vidjeti da je klizačica privukla ruke i nogu prema osi rotacije. **Možete li događaj koji ste vidjeli podijeliti u dvije situacije te ponovno opisati što se**

**dogodilo u svakoj od njih? Zapišite odgovore u svoju bilježnicu.** Pri tome mislim na dvije situacije opisane na slici ispod. Pričekam koji trenutak da učenici zapišu svoja opažanja.

**Može li mi netko pročitati što je zapisao?** Ako učenici imaju problema s formulacijom situacije, pomažem dodatnim pitanjima: **Što se dogodilo? Što je klizačica promijenila? Kako se zatim gibala? U kojem su položaju njezine ruke i noge?** Želim da učenici uoče kako se u jednom trenutku klizačica rotira sporije, a u sljedećem brže te da uoče položaj njezinih ruku i nogu prije i kasnije.



Slika 5.2: Prikaz klizačice s rukama i nogom u ekstenziji te s privučenom nogom i rukama. Preuzeto s [41]

**Bismo li mi mogli izvesti nešto slično u razredu? Što bi vam sve bilo potrebno?** Saslušam prijedloge od nekolicine učenika. Ako nema ruku u zraku, mogu nekog prozvati da iznese svoju ideju, no mogu im pomoći tako da na sredinu razreda postavim rotirajući stolac.

#### **Pokus 1: Čovjek na rotirajućem stolcu s dvije boce vode**

**Imate li sada kakvih ideja?** Očekujem odgovore koji će dati do znanja da se mi možemo rotirati na stolcu i širiti/skupljati ruke, međutim učenicima još ne pokazujem boce s vodom.

**Što očekujete da će se dogoditi ako se zavrtno na stolcu i raširimo/skupimo ruke?** Bitno je dobiti uvid u učenička očekivanja. Upućujem ih da ih zapišu u bilježnicu te prozovem nekoliko učenika da pročitaju što su zapisali. Pokus izvodim ja ili netko od učenika.

**Što ste primijetili?** Promjena kutne brzine slabo je zamjetna kada nemamo boce u rukama. Očekujem da će biti odgovora da se promijenila brzina rotacije, neki će se dvoumiti u vezi s odgovorom jer promjena kutne brzine nije toliko zamjetna kao što su mogli vidjeti na videozapisu.

**Što mislite da će se dogoditi ako uzmemo dvije boce pune vode u ruke?**

Očekujem podijeljene odgovore, smatram da će neki učenici misliti da će se razlika u brzinama rotacije sada još manje vidjeti. Učenici zapisuju svoja očekivanja u bilježnicu i nekolicina ih pročita što su zapisali. Ponovno izvodimo pokus, ovaj put s bocama vode u rukama.

**Što uočavate?** Učenici su mogli uočiti da je sada promjena u kutnim brzinama naglašena i da smo djelomično rekreirali situaciju s filmića. **Kako se gibao učenik na stolcu?** Želim da učenici uoče da se gibao brže/sporije, dakle da imamo povećanje odnosno smanjenje kutne brzine. Kada su mu ruke raširene, da rotira s manjom brzinom, a kada skupi ruke, da mu se brzina rotacije poveća.

**Zašto se učenik tako gibao? Što je promijenio šireći/skupljajući ruke?** Želim postići da učenici odgovore kako njihov kolega nije mijenjao masu, ali je promijenio njezin raspored s obzirom na os rotacije, dakle utjecao je na moment tromosti  $I$ . S učenicima želim doći do toga da postoji određena veličina  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  koja je analogna količini gibanja  $\vec{p} = m\vec{v}$ , a nazivamo je kutnom količinom gibanja i zapisujem je na ploču.

**Stavljam naslov: Što se događa s kutnom količinom gibanja kod rotacije tijela?**

## B) Središnji dio: konstrukcija modela – fizikalni i matematički opis pojave

Ovdje nam je naslov ujedno istraživačko pitanje jer bih točnim naslovom cjeline odao da je kutna količina gibanja očuvana, a to je ono što ne želimo. U interesu nam je imati konstantno zanimanje učenika, a ne im odgovore dati unaprijed. Također bih s učenicima želio interaktivno izvesti zakon očuvanja kutne količine gibanja. Kod interaktivnog izvoda bitno je učenike potaknuti da izvedu sljedeći korak ili više njih u izvodu i potom to reproducirati na ploči. Učenike bih želio navoditi kroz analogiju s II. Newtonovim zakonom.

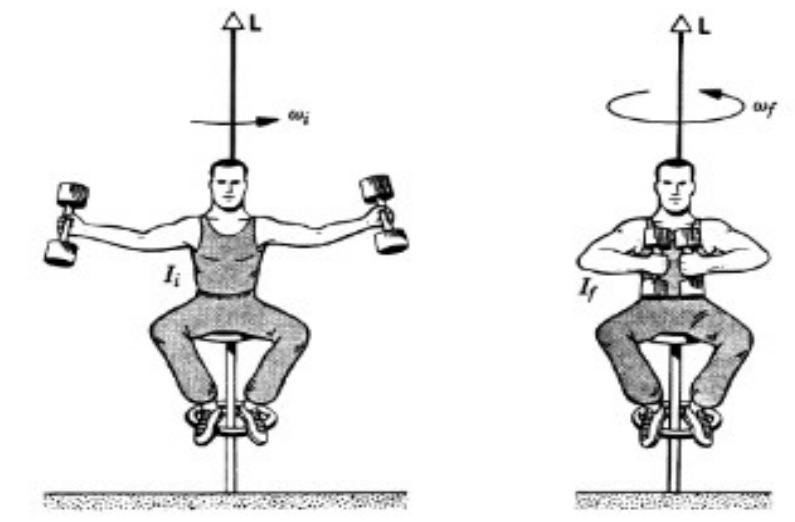
**Kojim biste temeljnim zakonom opisali translacijsko, a kojim rotacijsko gibanje?** Ispisujemo temeljni zakon rotacije,  $\vec{M}_{uk} = I\vec{\omega}$ , pokraj temeljnog zakona za translacijsko gibanje,  $\vec{F}_{uk} = m\vec{a}$ , te analiziramo sličnosti. Bitno je da učenici uoče analogiju između veličina kod temeljnih zakona translacije i rotacije.

**Napišite II. N. z. preko količine gibanja.** Dolazimo do zapisa II. N. z. preko promjene količine gibanja  $\vec{F}_{uk} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ . Netko od učenika zapisuje izraz na ploču. Što vam ovaj izraz govori? Želim da učenici uoče kako će resultantna sila na tijelo uzrokovati promjenu količine gibanja.

**Bismo li i temeljni zakon rotacije mogli zapisati na sličan način?** Ponovno želim postići da učenici vide da se (u ovom slučaju kutna) akceleracija može zapisati kao promjena (kutne) brzine. Ako je potrebno, učenike ohrabrujem naputkom da se slobodno posluže novom veličinom, kutnom količinom gibanja  $\vec{L}$ , koja je zapisana na ploču u uvodnom dijelu sata (umnožak kutne brzine i momenta tromosti  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ). Time bismo došli do izraza  $\vec{M}_{uk} = I \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ . Što vam ovaj izraz govori? Želim da učenici uoče kako će rezultantni moment sile na tijelo uzrokovati promjenu kutne količine gibanja.

**Koje sile djeluju na klizačicu? Koliki su njihovi momenti?** Imamo vanjske sile:  $F_g$  i  $N$ , no njihov je zbroj nula, a i momenti su im nula jer su krakovi sila nula. Dakle, suma momenata sila na tijelo je 0.

**Što to znači za kutnu količinu gibanja?** Želim učenicima dati malo vremena da preko izraza  $\vec{M}_{uk} = 0 = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$  dođu do zaključka da se  $\vec{L}$  ne mijenja i da je konstantna  $\vec{L} = konst.$ , što nam daje i odgovor na istraživačko pitanje – kutna je količina gibanja očuvana ako na tijelo u rotaciji ne djeluju vanjski momenti sila:  $\vec{L}_p = \vec{L}_k = konst.$ . Provjeravam imaju li svi učenici zapisan izvod u bilježnicama, dok jedan od učenika ove izraze zapisuje na ploču.



Slika 5.3: Prikaz čovjeka na rotirajućem stolcu s rukama u ekstenziji te s privučenim rukama. Preuzeto s [42]

**Možete li sada sami doći do zaključka na koji je način klizačica povećala svoju kutnu brzinu? Kako je to učinio učenik na rotirajućem stolcu?** Budući da se klizačici kutna brzina povećala, morao joj se smanjiti moment tromosti. Ona je

svoju kutnu brzinu povećala tako da je smanjila svoj moment tromosti, približavajući ruke tijelu.

$$I_p \vec{\omega}_p = I_k \vec{\omega}_k \quad (5.1)$$

$$|\vec{\omega}_p| < |\vec{\omega}_k| \quad (5.2)$$

$$I_p > I_k \quad (5.3)$$

**Kolika je energija rotacijskog gibanja?** Ukupnu energiju svih čestica koje sudjeluju u rotaciji nazivamo rotacijskom kinetičkom energijom. Moramo sumirati doprinose kinetičkih energija svake čestice:  $\sum_i E_{kin,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \omega^2$ . Učenicima dajem vremena da sami napišu izraz.

**Kako biste zapisali brzinu  $v$  ako razmatramo kružno gibanje?** Ovakvo pitanje jedan je od načina da učenike navedem da brzinu pretvore u kutnu brzinu.

**Prepoznajete li član unutar sume?** Ako učenici imaju poteškoće s opažanjem izraza za moment inercije, mogu ga staviti u zagrade i time ga naglasiti. Prisjećam ih da se radi o momentu inercije. Moment inercije obrađivao se detaljnije na prethodnom satu pa bi ga trebali moći prepoznati. Konačno, rotacijsku kinetičku energiju prepoznajemo kao:  $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ . Potičem učenike da zapišu izraz u bilježnicu, dok netko zapisuje izraz na ploči.

**Promotrite izraz, vidite li sličnosti s izrazom za translacijsku kinetičku energiju?** Očekujem da će sada analogija između translacijskih i rotacijskih veličina biti očita. Dolazimo do odgovora na treće istraživačko pitanje: rotacijsko gibanje ima kinetičku energiju rotacije. Što preuzima ulogu mase? Moment inercije. Koja veličina preuzima ulogu brzine? Kutna brzina.

**C) Završni dio: primjena modela - korištenje novostečenog znanja u novim situacijama, provjera ostvarenosti obrazovnih ishoda.**

Prikazujem videozapis [43] čovjeka koji stoji na podlozi koja se može okretati.

**Zašto se nakon okretanja kotača čovjek počne okretati?** Prikazujem videozapis i zaustavljam ga na 0:20 kako bi se istaknulo pitanje i kako učenici ne bi došli do odgovora prijevremeno. Dajem učenicima vrijeme da razmisle i zapišu svoje pretpostavke u bilježnicu. Prozivam neke učenike da pročitaju što su zapisali. Ako je potrebno, pomažem pitanjima.

**Je li čovjek promijenio svoj moment inercije?** Očekujem da učenici uoče da se

ničemu nije mijenjao oblik.

**Zašto se onda okreće?** Želio bih da učenici navedu da onda mora biti problem u kutnoj brzini, ali ne u njezinu iznosu, nego u smjeru.

**Je li se promijenio iznos kutne brzine?** Ako ne shvate da se promijenio smjer kutne brzine, pomažem dalje: Kako biste odredili smjer kutne brzine? Očekujem da će se sjetiti pravila desne ruke, ako ne, tada podsjećam na njega (ako su prsti u smjeru obodne brzine, palac pokazuje u smjeru kutne brzine). Uočite u kojem se smjeru okreće kotač, a u kojem se smjeru okreće sustav. Ako je naputak previše kompliciran, raspisujem kutnu količinu gibanja sustava na komponente i ponovno upitam učenike što misle.  $L_{sus}^{\vec{}} = L_{cov}^{\vec{}} + L_{kot}^{\vec{}}$

**Sada primijenite zakon očuvanja kutne količine gibanja.** Želim s učenicima doći do zaključka da je kutna količina gibanja sustava ostala konstantna, da nismo imali vanjskih sila na sustav niti da se promijenio iznos kutne količine gibanja. Tu bi učenici trebali shvatiti da je relevantan smjer kutne količine gibanja.

**Kolikom se kutnom količinom gibanja okreće sustav?** Želim da učenici jednostavno odgovore na pitanje tako da u početnom trenutku imamo  $L$  u pozitivnom smjeru, a nakon što okrenemo kotač  $L$  u negativnom smjeru, da bi kutna količina gibanja ostala sačuvana, sustav se mora okretati iznosom  $2L$  u pozitivnom smjeru. Jednostavan izvod glasilo bi:

$$L_{s,1}^{\vec{}} = L_{s,2}^{\vec{}} \quad (5.4)$$

$$L_{k,1}^{\vec{}} + L_{c,1}^{\vec{}} = L_{k,2}^{\vec{}} + L_{c,2}^{\vec{}} \quad (5.5)$$

$$|L_{k,1}^{\vec{}}| + |L_{c,1}^{\vec{}}| = |L_{k,2}^{\vec{}}| + |L_{c,2}^{\vec{}}| \quad (5.6)$$

$$0 + L = -L + |L_{c,2}^{\vec{}}| \quad (5.7)$$

$$|L_{c,2}^{\vec{}}| = 2L \quad (5.8)$$

Po razredu pošaljem donedavno popularnu vrtlicu, još poznatu po engleskom nazivu „*fidget spinner*“ (na slici 5.4) pa uputim učenike da prepoznaju silu koja ih želi zaokrenuti kada promijene smjer kutne količine gibanja igrački.

**Slijedi zajedničko rješavanje konceptualnih zadataka:**

1. Kada bi rotirajuće tijelo, na koje ne djeluju vanjski momenti sila, dva puta



Slika 5.4: Popularna igračka. Preuzeto s [44]

**smanjilo svoj moment tromosti, što bi se dogodilo s kutnom brzinom tog tijela? Kutna brzina povećala bi se 2 puta.**

$$I_p \vec{\omega}_p = I_k \vec{\omega}_k \quad (5.9)$$

$$I_k = \frac{1}{2} I_p \quad (5.10)$$

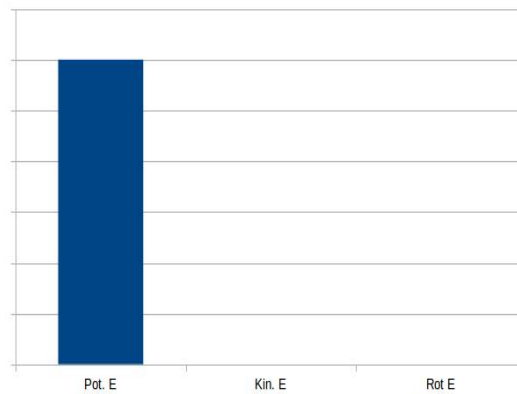
$$\vec{\omega}_k = 2\vec{\omega}_p \quad (5.11)$$

2. **Tvrdimo da je kutna količina gibanja očuvana. Međutim, gotovo svi objekti koji rotiraju nakon određenog vremena uspire i stanu. Zašto?** Dajem učenicima vremena da razmisle i zapišu odgovore u bilježnicu. Prozivam nekoliko učenika da iznesu svoje odgovore. Iz prikupljenih odgovora želim s učenicima doći do zaključka: Zato što je kutna količina gibanja očuvana u zatvorenim sustavima, gdje nemamo vanjskih sila i momenata na tijelo. Gotovo i nemamo stvaran makroskopski sustav na zemlji koji je zatvoren, zbog čega vanjske sile obično zaustavljaju sustav tijekom vremena (trenje, otpor zraka itd.)
3. **Zašto zvijezde, nakon kolapsa u neutronske zvijezde (recimo da nema gubitka mase u procesu), enormno povećaju svoju frekvenciju rotacije? Zato što su promijenile svoj moment inercije (drastično ga smanjile). Budući da su u izoliranom sustavu i nema vanjskih sila na sustav, rezultat toga jest povećanje**

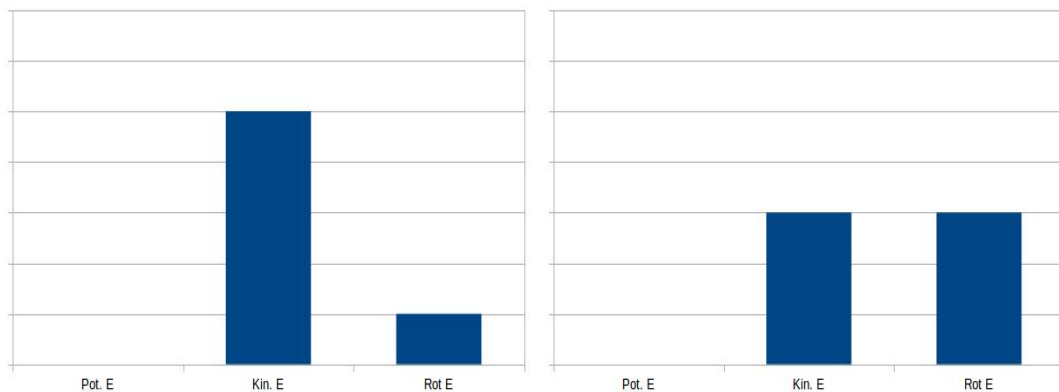


kutne brzine.

4. **Pokus za domaću zadaću: Uzmite 2 identične boce vode i zamrznite jednu. Stavite te dvije boce na istu kosinu i promatrajte koja će boca prije stići do podnožja. Zašto? Potkrijepite svoj odgovor stupčastim dijagramom. Želim da učenici dođu do odgovora kako će prije stići boca s tekućom vodom jer se gravitacijska potencijalna energija ne troši na energiju rotacije vode, već rotira samo boca, dok kod zaleđene boce cijeli sadržaj boce rotira s njom.**



Slika 5.5: Stupčasti dijagram za boce na vrhu kosine.



Slika 5.6: Stupčasti dijagrami za bocu s vodom (lijevo) i bocu s ledom (desno) pri dnu kosine.

## Literatura

- [1] Imry, Y., Ma, S. K., Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
- [2] Birgenau, R.J., Jour. Mag. Mat. 177, 1 (1998)
- [3] Villain, J., Phys. Rev. Lett. **52**, 1543 (1984); Fisher, D. S., Phys. Rev. Lett. **56**, 416 (1986).
- [4] Lilly, M. P., Wootters, A. H., Hallock, R. B., Phys. Rev. Lett. **96**, 4222 (1996).
- [5] Bray, A.J., Moore, A.J., J. Phys. C, **18**, L927 (1985)
- [6] Middleton, A.A., Le Doussal, P., Wiese, K.J. Phys. Rev. Lett. **98**, 155701 (2007)
- [7] Dukovski, I., Machta, J., Phys. Rev. B **67**, 014413 (2003).
- [8] A.A.Middleton in *New Optimization Algorithms in Physics*, Edited by Alexander K. Hartmann, Heiko Rieger, Wiley (2004)
- [9] Balog, I.; Tarjus, G.; Phys. Rev. B **91**, 214201 (2015).
- [10] Leuzzi, L., Parisi, G., Phys. Rev. B **88**, 224204 (2013)
- [11] Dewenter, T.; Hartmann, A.K., Phys. Rev. B **90**, 014207 (2014)
- [12] Tarjus, G., Tissier, M. Phys. Rev. Lett **93**, 267008 (2004); Phys. Rev. B **78**, 024203 (2008).
- [13] Tissier, M., Tarjus, G. Phys. Rev. Lett **96**, 087202 (2006); Phys. Rev. B **78**, 024204 (2008).
- [14] Tissier, M., Tarjus, G. Phys. Rev. Lett. **107**, 041601 (2011); Phys. Rev. B **85**, 104202 (2012); *ibid*, 104203 (2012).
- [15] Balog, I., Tarjus G., Tissier, M., J. Stat. Mech. P10017 (2014)
- [16] Simons group, lectures for course „Phase transitions and Collective phenomena” <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/phase.html> 9.2.2018.
- [17] Research Gate [https://www.researchgate.net/profile/John\\_Beggs/publication/225375861/figure/fig4/AS:214227966849028@](https://www.researchgate.net/profile/John_Beggs/publication/225375861/figure/fig4/AS:214227966849028@)

1428087335427/Correlation-length-as-a-function-of-temperature-for-a-simulation.png, 3.2.2018.

- [18] Wikipedia, Ising model. [https://en.wikipedia.org/wiki/Ising\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Ising_model) 14.2.2018.
- [19] Contribution to the Theory of Ferromagnetism, Ernst Ising, Bibliotheca Augustana, [http://www.hs-augsburg.de/~harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi\\_fm03.html](http://www.hs-augsburg.de/~harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi_fm03.html)), 2.2.2018.
- [20] Statistical Thermodynamics of Materials <http://boris.lk.net/matsc597c-1997/phases/index.html> 14.2.2018.
- [21] Plischke, M., Bergersen, B., Equilibrium Statistical Physics. 3rd ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2006.
- [22] Hyperphysics, Gaussian distribution function <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Math/gaufcn.html>, 3.2.2018.
- [23] Sunko, D.K. Statistička fizika i termodinamika, bilješke s predavanja. Zagreb, 2011.
- [24] Stowe, K. An Introduction to Thermodynamics and Statistical Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [25] Barber, M. N. Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 8, str. 145., Academic press, 1983
- [26] Bray, A.J.; Moore, M.A.; J.Phys.C **18**, L927 (1985)
- [27] Binder, K., Phys. Rev. Lett. **47**, 693 (1981)
- [28] Ferrenberg, A. M., Landau, A. M. Phys. Rev. B **44**, 5081 (1991)
- [29] Finite Difference, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference), 3.2.2018.
- [30] Melchert, O. arXiv: 0910.5403 (2009)
- [31] Schwartz, M., Soffer, A. Phys. Rev. Lett. **55**, 2499 (1985)

- [32] Fytas, N., Martin-Mayor, V., Phys. Rev. Lett. **110**, 227201 (2013)
- [33] Fytas, N., Martin-Mayor, V., Phys. Rev. E **93**, 063308 (2016)
- [34] Krsnik, R. (2008). Suvremene ideje u metodici nastave fizike. Zagreb: Školska Knjiga d.d.
- [35] Compare your country - PISA 2015 <http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/HRV?lg=en>, 12.2.2018.
- [36] Hrvatski naziv za *fidget spinner* <https://www.srednja.hr/kultura/vijesti-kultura/puna-su-nam-usta-fidget-spinner-a-pa-smo-upitali-strucnjakinju>, 12.2.2018.
- [37] Bloomova taksionomija - obrazovni ishodi [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/mnm3-Bloomova\\_taksonomija-ishodi.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/mnm3-Bloomova_taksonomija-ishodi.pdf), 12.2.2018.
- [38] Krsnik, R. Fizika 1 udžbenik za nastavu fizike u 1. razredu gimnazije. Zagreb: Školska Knjiga d.d. 2005
- [39] Labor, J. Fizika 1. Udžbenik za 1. razred gimnazije. Zagreb: Alfa. 2008
- [40] Giancoli, D.C. (2005). Physics: Principles with applications. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.
- [41] Video klizačice <https://www.youtube.com/watch?v=AQLtcEAG9v0>, 12.2.2018.
- [42] Slika s prikazom čovjeka na rotirajućoj stolici <http://capa-new.colorado.edu/teacher/capalibrary/Graphics/Gtype21/prob14a.gif>, 13.2.2018.
- [43] Video čovjeka s kotačem [https://www.youtube.com/watch?v=\\_XgYTP0kB7A](https://www.youtube.com/watch?v=_XgYTP0kB7A), 13.12.2018.
- [44] Fidget spinner [https://www.dollargeneral.com/media/catalog/product/cache/image/700x700/e9c3970ab036de70892d86c6d221abfe/v/i/vibe\\_fidget\\_spinner\\_blue\\_1.jpg](https://www.dollargeneral.com/media/catalog/product/cache/image/700x700/e9c3970ab036de70892d86c6d221abfe/v/i/vibe_fidget_spinner_blue_1.jpg) 13.12.2018.