

# Teorija katastrofe

---

**Malenica, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:257913>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Marko Malenica

TEORIJA KATASTROFE

Diplomski rad

Zagreb, 2016

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: PROFESOR FIZIKE

**Marko Malenica**

Diplomski rad

**Teorija katastrofe**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Boris Podobnik

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2016.



## Sažetak

Ekonofizika je interdisciplinarna znanost koja za rješavanje problema u ekonomiji primijenjuje metode i teorije razvijene u fizici. Teorija katastrofe je teorija koja je izvedena iz topologije, koja pak čini dio matematičke znanosti koja proučava svojstva površina u više dimenzija. Teorija je grana bifurkacijske teorije koja se koristi u istraživanju dinamičkih sustava, ona je također poseban slučaj općenitije teorije singulariteta na koju nailazimo u geometriji. U ovom radu obrađujem temu teorije katastrofe kao sastavnog dijela ekonofizike, s time da se nisam ograničio samo na primjere koji koriste ekonomsku teoriju i podatke prikupljene iz područja ekonomije. S obzirom da su mnoge znanosti uključene u ekonofiziku i na razne načine daju doprinos ekonofizici, sadržaj svojeg diplomskog rada zamislio sam kao općeniti uvod i upoznavanje s ekonofizikom, te obradom teorije katastrofe, počevši od najjednostavnijih pa sve do kompleksnijih modela.

# Catastrophe theory

## Abstract

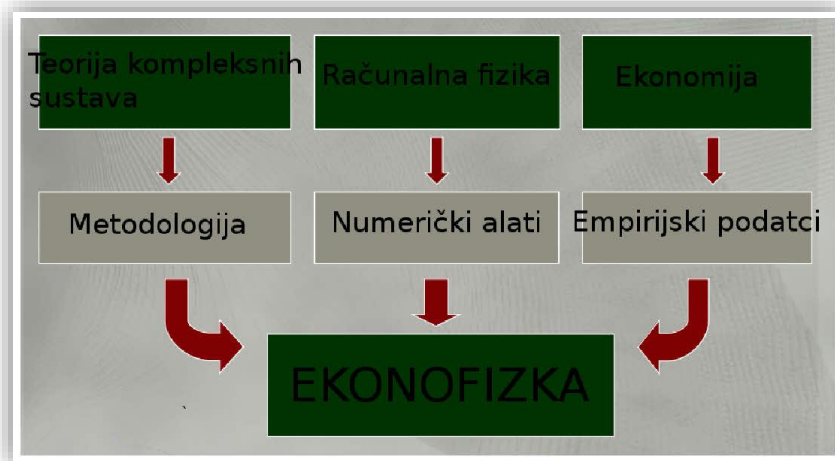
Econophysics is an interdisciplinary science that applies methods and theories developed in physics for solving problems in the economy. Catastrophe theory is a theory that is derived from the topology, which is part of mathematical science that studies the properties of surfaces in several dimensions. The theory is a branch of bifurcation theory that is used in the study of dynamic systems, it is also a special case of a more general theory of singularity which can be found in geometry. This paper analyzes the catastrophe theory as a part of econophysics, but I did not focus only on the examples that use economic theory and files that are collected in the field of the economy. Given that many sciences are involved in econophysics, and in many ways contribute to econophysics, the content of my paper I imagined as a general introduction and familiarization with the econophysics, and processing a catastrophe theory, starting from the simplest through to more complex models.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod u ekonofiziku .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fraktali.....</b>	<b>2</b>
2.1	Iterirana funkcija sustava (IFS) .....	4
2.2	Fraktalna dimenzija.....	7
2.3.	Weierstrassova fraktalna funkcija .....	8
2.4.	Multifraktali .....	9
<b>3.</b>	<b>Ekonomska teorija i otkrivanje krize na financijskom tržištu .....</b>	<b>10</b>
<b>4.</b>	<b>Teorija katastrofe.....</b>	<b>23</b>
4.1.	Pseća agresija i šiljasta katastrofa.....	26
4.2.	Stroj katastrofe .....	36
4.3.	Psihološki modeli i atraktori .....	40
4.4	Burza.....	44
4.5.	Izvijanje elastičnog štapa .....	45
4.6.	Klasifikacija katastrofa .....	47
4.7.	Leptirova katastrofa .....	49
4.8.	Anorexia Nervosa.....	51
<b>5.</b>	<b>Zaključak.....</b>	<b>55</b>
<b>6.</b>	<b>Metodički dio – Modeli u nastavi fizike.....</b>	<b>56</b>

## 1. Uvod u ekonofiziku

Ekonofizika je interdisciplinarna znanost koja za rješavanje problema u ekonomiji primjenjuje metode i teorije razvijene u fizici. To su često problemi koji uključuju neizvjesnost ili stohastički procesi i teorija kaosa. Njena primjena pri proučavanju financijskih tržišta dala joj je još i naziv financijska statistika koji potječe od statističke fizike. Kada govorimo o ekonofizici govorimo o sinergiji metodologije, numeričkih alata te empirijskih podataka. Metodologija koja se koristi u ekonofizici je preuzeta iz teorije kompleksnih sustava, računalna fizika je dala numeričke alate, dok empirijske podatke nalazimo u ekonomskoj znanosti.



Slika 1: Dijagram pokazuje znanosti uključene u ekonofiziku i način na koji daju doprinos ekonofizici.



Slika 2: Prikaz alata koji se koriste u ekonofizici

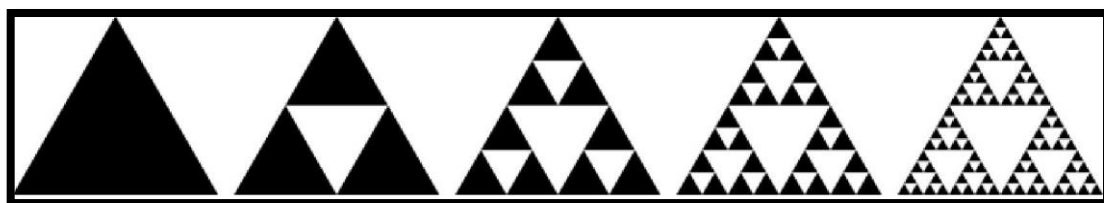


## 2. Fraktali

Postoje brojne definicije fraktala, ali niti jedna nije dovoljno egzaktna. Fraktalno prije svega znači sebi slično. Koliko god snažnim povećalom promatrali fraktal, on će uvijek izgledati isto. Pojam fraktala osmislio je francuski matematičar Benoit B. Mandelbrot, prema latinskom pridjevu fractus, od glagola frangere, što znači: slomiti, razlomiti. Iako je izmislio pojam fraktal, mnogi dijelovi iz njegove knjige, Fraktalne geometrije prirode (The Fractal Geometry of Nature), već su prije opisani od strane drugih matematičara. Svejedno, sve su te teorije bile smatrane izoliranim, i neprirodnim s neintuitivnim svojstvima. Mandelbrot ih je uspio ujediniti u jedinstvenu teoriju. Promotrimo sada dvije definicije fraktala:

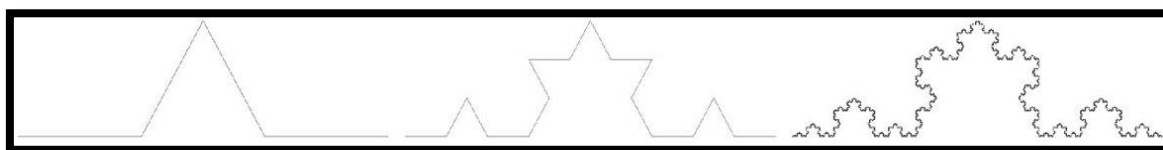
Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje dijelove tako da je svaki od njih, makar približno, umanjena kopija cjeline.

Fraktal je objekt čija je fraktalna dimenzija strogo veća od njegove topološke dimenzije.



*Slika 3: Nulta i prve četiri iteracije Sierpinskijevog trokuta.*

Drugim riječima, to su objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Dakle, fraktale je moguće uvećavati beskonačno mnogo, a da se pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi, i da količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka. Oni su (barem približno) samoslični (sastoje se od umanjenih verzija samih sebe), ali i suviše nepravilni da bi se opisali euklidskom (jednostavnom) geometrijom.



*Slika 4: Prve tri iteracije von Kochove krivulje.*

Jedan od najjednostavnijih i sigurno najpoznatiji fraktal koji se često koristi kao reprezentativni primjer jest Kochova krivulja (slika 4.). Predstavio ju je švedski matematičar Niels Fabian Helge von Koch 1904. godine, što ju čini jednom od prvih uopće opisanih fraktalnih krivulja. Tvori se tako da se dužina zamijeni prvim likom lijevo prikazanim na slici (slika 4.). Kada zamijenimo dužinu opisanim likom tada dobiveni lik nazivamo prvom iteracijom Kochove krivulje. Drugu iteraciju dobijemo tako da svaku od četiri dužine prve iteracije ponovno zamijenimo istim likom. Isti postupak ponavljamo kako bismo dobili treću, četvrtu i n-tu iteraciju. Nakon beskonačnog broja iteracija dobijemo Kochovu krivulju (slika 4.). Primjećujemo kako je svaki parcijalni dio Kochove krivulje sličan cijeloj krivulji.

Isto tako možemo predstaviti i još jedan poznati fraktal koji se naziva trokut Sierpińskog (slika 3.). Za razliku od Kochove krivulje sada krećemo sa trokutom, nulta iteracija, koji zamjenjujemo trima trokutima čija je duljina osnovne stranice upola manja od duljine osnovne stranice početnog trokuta. Opisanom zamjenom dobivamo prvu iteraciju Sierpinskijevog trokuta. U daljnjim iteracijama ponavljamo isti postupak sa svakim trokutom, i tako u beskonačnost.

"Priroda daje novu razinu kompleksnosti. Količina različitih skala duljina u prirodi je gotovo beskonačna." B. Mandelbrot.



*Slika 5: Neki fraktali u prirodi*

Sebisličan objekt je točno ili aproksimativno sličan nekom dijelu samog sebe. Strogo primjenom značenja sebisličnosti, možemo razlikovati dvije grupe fraktala. Jedna grupa sastoji se od objekata čiji manji detalji, pod odgovarajućim uvećanjem, egzaktno repliciraju njihove veće i nazivaju se "egzaktni sebislični objekti" od kojih je Kochova krivulja klasičan primjer.

Druga grupa sastoji se od "statistički sebisličnih" ili "slučajno stohastičkih" fraktala i oni se

razlikuju od egzaktnih sebisličnih fraktala po tome što njihovi reproducirani detalji nisu egzaktne kopije već statistički slične. Samoslični fraktali (egzaktni ili slučajni) su uključeni u veću grupu "sebisrodnih objekata".

Sebisrodnost (*eng.* - self-affinity) je osobina koja je karakterizirana skaliranjem različitih veličina u različitim smjerovima. Sebisrodni fraktali moraju biti skalirani različitim veličinama u različitim smjerovima (sebisrodna transformacija) da bi se osigurala kopija originalne strukture prije nego što se primjeni povećanje uvećanja samo po sebi (razmjere u svim pravcima, ali istom vrijednošću).

Sebisličnost može biti smatrana specijalnim slučajem sebisrodnosti, gdje su odnosi skaliranja u različitim smjerovima isti.

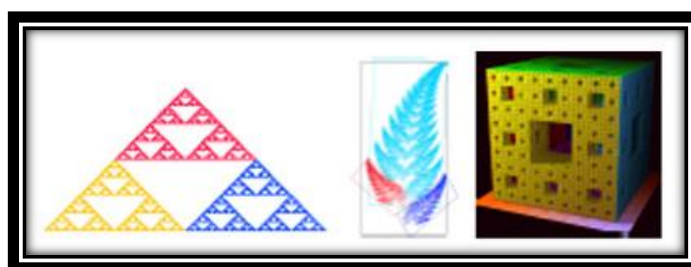
### 2.1. Iterirana funkcija sustava (IFS)

Iterirana funkcija sustava ili IFS je metoda konstruiranja fraktala. Formalno, IFS je konačan skup sažimajućih preslikavanja na potpunom metričkom prostoru:

$$\{f_i: X \rightarrow X \mid i = 1, 2, \dots, N\} \quad N \in \mathbb{N}$$

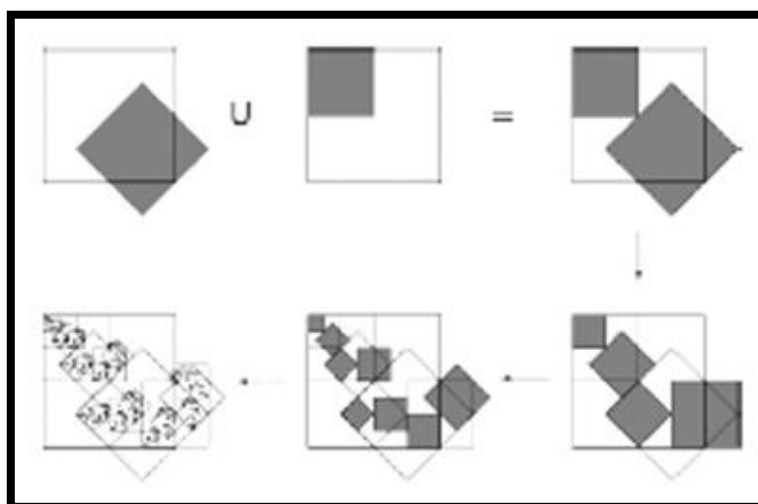
je IFS ako je svaki  $f_i$  sažimanje potpunog metričkog prostora  $X$ .

Dobivene konstrukcije su uvijek sebislične. IFS fraktali mogu imati bilo koji broj dimenzija, ali se uobičajeno računaju i crtaju u 2D. Fraktal je sačinjen od unije nekoliko kopija samog sebe. Svaka kopija se transformira funkcijom (otud naziv "funkcija sustava"). Odličan primjer IFS-a je Sierpinskijev trokut.



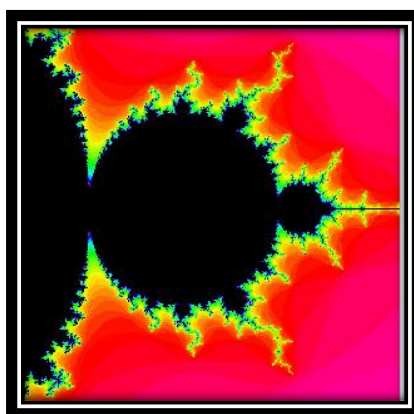
Slika 6: Fraktali nastali korištenjem IFS-a. Sierpinskijev trokut, Barnsleyeva paprat i Mengerova spužva

Funkcije je moguće sažimati tj. približavati ih bliže jednu drugoj i smanjivati ih. Iz tog razloga oblik IFS fraktala je načinjen od nekoliko manjih kopija samog sebe koje se mogu preklapati, a svaka kopija je također napravljena od kopija sebe i tako u beskonačnost. To je izvor IFS fraktalove sebisličnosti.



Slika 7: Izrada IFS-a korištenjem dviju funkcija.

Mandelbrotov skup je najsavršeniji od svih fraktala. Ako uvećamo određeno područje fraktala, ukazuju se isti oblici kao i prije uvećavanja, odnosno bez obzira na stupanj uvećanja slika ostaje nepromjenjena - fraktal ima svojstvo samosličnosti. Mandelbrotov skup zapravo je skup koji obuhvaća samo neke, točno zadane, točke  $T(a,b)$  u ravnini. Ako te točke, dakle one koje pripadaju Mandelbrotovom skupu, prikažemo crnom bojom, a sve ostale bijelom (ili ih uopće ne nacrtamo), dobili smo crno-bijelu sliku koja predstavlja pravi Mandelbrot.



Slika 8: Mandelbrotov skup

Iteracijom izraza  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  određujemo koje točke  $T(a,b)$  pripadaju Mandelbrotovom skupu.

Gdje su  $z$  i  $c$  kompleksni brojevi:  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $c = a + ib$

gdje je  $i$  imaginarna jedinica. Prema tome, izraz za iteraciju može se napisati tako da se realni dio odvoji od imaginarnog dijela kompleksnog broja, i dobije se:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2 * x_n * y_n + b$$

Za neke vrijednosti  $a$  i  $b$ , apsolutne vrijednosti  $|x|$  i  $|y|$  postaju sve veće i veće. Možemo, primjerice, isprobati  $N = 500$  iteracija. Ako vrijednosti ni tada ne prelaze 2, tada točka  $T(a,b)$  pripada Mandelbrotovom skupu. Prikazujemo je crnom mrljicom na mjestu  $(a,b)$  u ravnini. Zamislimo da posjedujemo računalni program koji izračunava parove brojeva  $x_n$  i  $y_n$  za početne vrijednosti  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 0$ , za točku  $a = 0.1$ ,  $b = 0.3$ , do  $n = 500$ , te bilježi točke koje pripadaju Mandelbrotovom skupu. Prvih nekoliko redaka tablice koju bi računalni program izračunao za zadanu točku  $T(0.1, 0.3)$  izgledao bi otprilike ovako:

$x_1 = 0.1000$	$y_1 = 0.3000$
$x_2 = 0.0200$	$y_2 = 0.3600$
$x_3 = -0.0292$	$y_3 = 0.3144$
$x_4 = 0.0020$	$y_4 = 0.2816$
$x_5 = 0.0207$	$y_5 = 0.3011$
$x_6 = 0.0098$	$y_6 = 0.3125$

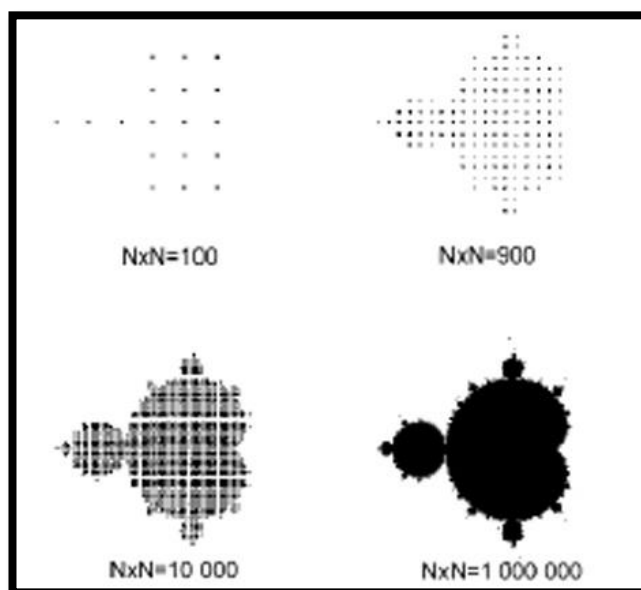
Ni u daljnjim parovima brojeva nijedan od njih ne premašuje vrijednost 2, dakle dolazimo do zaključka kako točka  $T(0.1, 0.3)$  pripada Mandelbrotovom skupu. Nastavimo sa programom koji računa tablicu za  $10 \cdot 10$  točaka unutar područja ravnine zadanog  $-2 < a < 2$ , i  $-1.5 < b < 1.5$ , crta sve dobivene točke, te ponavlja postupak za  $N = 30, 100$  i  $1000$ . Slika je preciznija što je broj  $N$  veći. Na slici se vidi kako izgledaju dobiveni skupovi za:

a)  $N = 10, N^2 = 100$

b)  $N = 30, N^2 = 900$

e)  $N = 100, N^2 = 10000$

d)  $N = 1000, N^2 = 1000000$       Broj iteracija:  $n = 500$



Slika 9: Mendelbrotov skup za  $N = 10$ ,  $N = 30$ ,  $N = 100$  i  $N = 1000$

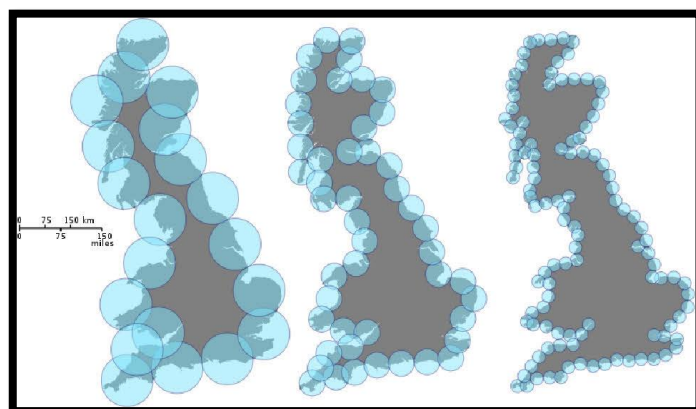
## 2.2. Fraktalna dimenzija

Fraktalna dimenzija je vrijednost koja nam daje uvid u to u kojoj mjeri neki fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi. Postoji mnogo definicija fraktalne dimenzije, od kojih se niti jedna ne može smatrati univerzalnom. Najjednostavnija je dimenzija samosličnosti, ali se ona može upotrijebiti samo kod vrlo jednostavnih geometrijskih fraktala. Za teoriju je najvažnija Hausdorffova dimenzija, a u praksi se najviše koristi Minkowski-Bouligandova dimenzija.

Hausdorffova dimenzija je nenegativan realan broj povezan s nekim metričkim prostorom.

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

Gdje je  $L$  duljina ruba objekta,  $\delta$  je objekt (matematički skup), a  $D$  je fraktalna (Hausdorffova dimenzija).



Slika 10: Određivanje Hausdorffove dimenzije obale Velike Britanije

Minkowski-Bouligandova dimenzija, poznata i kao Minkowskijeva dimenzija ili "box-counting" dimenzija je način određivanja fraktalne dimenzije skupa  $S$  u Euklidskom prostoru  $\mathbb{R}^n$  ili općenitije u metričkom prostoru  $(X, d)$ . Ako je:

$$L(\delta) \sim \frac{1}{\delta^d}, \quad \delta \rightarrow 0$$

tada

$$D = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}$$

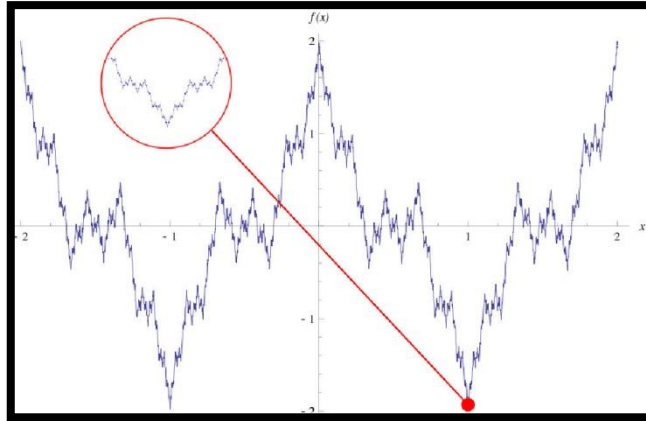


Slika 11: Određivanje box-counting dimenzije obale Velike Britanije

### 2.3. Weierstrassova fraktalna funkcija

Weierstrassova funkcija je kontinuirana svugdje, a diferencijalna nigdje. Ime je dobila po Karlu Weierstrassu, koji ju je otkrio. Povijesno, Weierstrassova funkcija je važna jer je ona prvi objavljeni primjer (1872. g.) koji je izazvao notaciju da je svaka kontinuirana funkcija diferencijabilna osim na nekom konačnom skupu. Weierstrassova funkcija je invarijantna na skaliranje, a glasi:

$$C(t) = ReW(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}$$



Slika 12: Graf Weierstrassove funkcije na intervalu  $[-2, 2]$ . Poput fraktala, funkcija ima svojstvo selsiĉnosti: svako povećanje (crveni krug) je sliĉno grafu.

Svojstva skaliranja Weierstrassove funkcije:

$$C(bt) = b^{2-D} C(t)$$

promjena varijabli:

$$t \rightarrow b^4 t$$

$$c(t) \rightarrow b^{4(2-D)} c(t)$$

#### 2.4. Multifraktali

Multifraktalni sustav je generalizacija fraktalnog sustava u kojem jedan eksponent (fraktalna dimenzija) nije dovoljan da bi opisao njegovu dinamiku. U ovom sluĉaju potreban je kontinuiran spektar eksponenata (tzv. spektar singulariteta).

U multifraktalnom sustavu  $s$ , ponašanje oko bilo koje toĉke opisano je lokalnim zakonom potencije:

$$s(\vec{x} + \vec{a}) - s(\vec{x}) \sim a^{h(\vec{x})}$$

Eksponent  $h(\vec{x})$  zove se eksponent singulariteta i opisuje lokalni stupanj singularnosti ili regularnosti oko neke toĉke  $\vec{x}$ .

Multifraktalni sustavi su ĉesti u prirodi, naroĉito u geofizici. Ukljuĉuju potpuno razvijenu turbulenciju, vremenski red Sunĉevog magnetskog polja, dinamiku kucanja srca, ljudski hod, vremenski red prirodnog svjetla i vremenski red burze vrijdnosnih papira. PredloŹeni



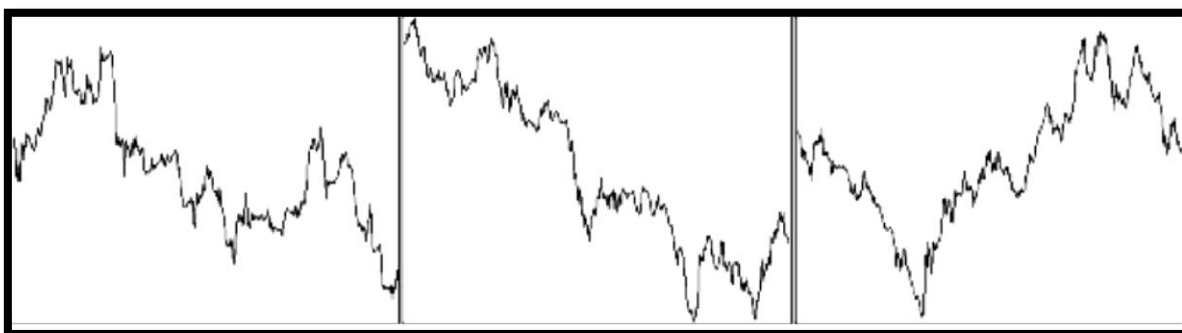
su modeli u raznim kontekstima poput turbulencije u hidrodinamici, internetskog prometa, financija, meteorologije, geofizike i drugog. Porijeklo multifraktalnosti u nanizanim (vremenski red) podacima može dijelom biti pripisano matematičkom efektu konvergencije povezanoj sa teoremom središnjeg limita (CLT) u čijem je fokusu familija statističkih distribucija pod imenom "Tweedie eksponencijalni disperzijski modeli".

Sto je multifraktalna analiza? Značaj multifraktalne analize je detekcija *multi* u multifraktalnom skaliranju. Multifraktalna analiza, gledano iz praktične perspektive, koristi matematičke osnove multifraktalne teorije za istraživanje skupova podataka, često u kombinaciji s drugim metodama fraktalne analize i lakunarne analize. Ova tehnika zahtijeva distorziju (iskrivljavanje) skupova podataka izvučenih iz uzoraka da bismo generirali multifraktalne spektre koji ilustriraju kako skaliranje varira kroz skup podataka. Tehnike multifraktalne analize našle su svoju primjenu u različitim situacijama poput predviđanja potresa i interpretacije slika dobivenih medicinskim aparatima.

### **3. Ekonomska teorija i otkrivanje krize na financijskom tržištu**

Financijska tržišta su kompleksni sustavi i kao takvi imaju svojstva:

- Otvorenost
- Više ravnopravnih činilaca (samostalnih entiteta)
- Prilagodljivost i samoorganizacija
- Invarijantnost na skaliranje

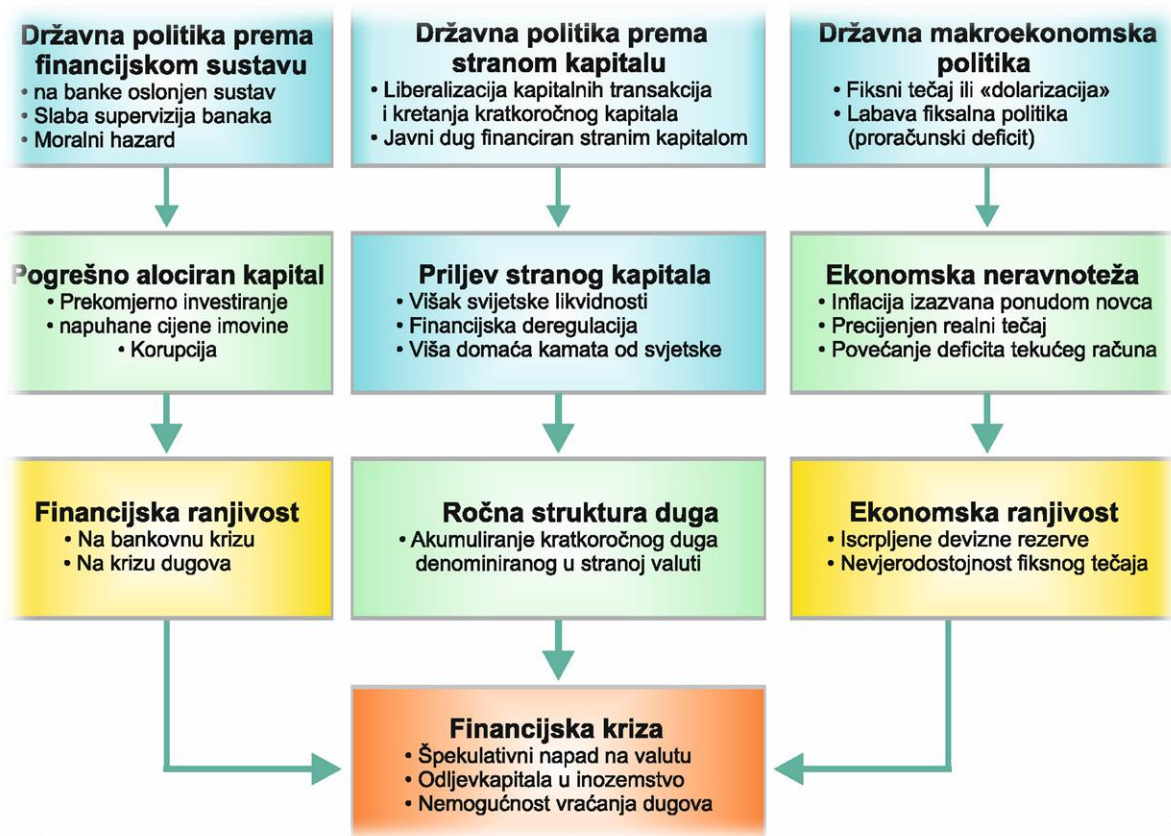


*Slika 13: Kretanje omjera cijene GBP /USD. Lijevo - dvosatni period, u sredini - tjedni period, desno - period od mjesec dana. Slika pokazuje invarijantnost na skaliranje financijskog tržišta.*

Veliki slomovi američkog tržišta događali su se:

- ljeta 1982. - embargo na naftu, inflacija 15 -17%, visoke cijene naftnih derivata, smanjenje efikasnosti otplate dugova
- u listopadu 1987. - kompjutersko trgovanje (korištenje algoritama), trgovinski i proračunski deficiti, precijenjivanje imovine
- jeseni 1998. - azijska kriza, internacionalizacija sjedinjenoameričkih korporacija, precijenjivanje
- u rujnu 2001. - teroristički napad u New Yorku, precijenjivanje, ekonomski problemi, kriza visoko tehnološkog sektora

Financijske krize označavaju veće smetnje u sustavu financija, koje prati pad (vrijednosti) imovine te nesolventnost mnogih tvrtki iz financijskog sektora ili drugih privrednih grana i obilježavaju negativni utjecaj na gospodarske aktivnosti u jednoj ili više zemalja. U osnovi se razlikuje između bankarske krize, monetarne krize ili krize financijskoga sustava, u kojima pojedina država ili pojedine zemlje ne mogu podmirivati inozemni dug. Financijska kriza je poremećaj na financijskom tržištu kojega karakterizira oštar pad cijena imovine i neuspjeh mnogih financijskih i nefinancijskih tvrtki.



Slika 14: Uzroci financijskih kriza

Raymond Smith definira financijsku krizu kao "oštro, kratko pogoršanje svih ili većine ekonomskih indikatora - kratkoročnih kamatnjaka, cijena imovine, nelikvidnost, bankrot određenog broja financijskih institucija". Robna i financijska tržišta međusobno dobro funkcioniraju. Međutim, povremeno se javljaju neravnoteže.

*Dva pristupa:*

1. tržišta funkcioniraju savršeno i racionalno
2. tržišta se nisu u stanju samoregulirati, proizvode krize i potrebna je intervencija države.

Praksa je pokazala da su financijske krize pojava koja se odvija prema nekim zakonitostima i da je na kraju nužna intervencija države.

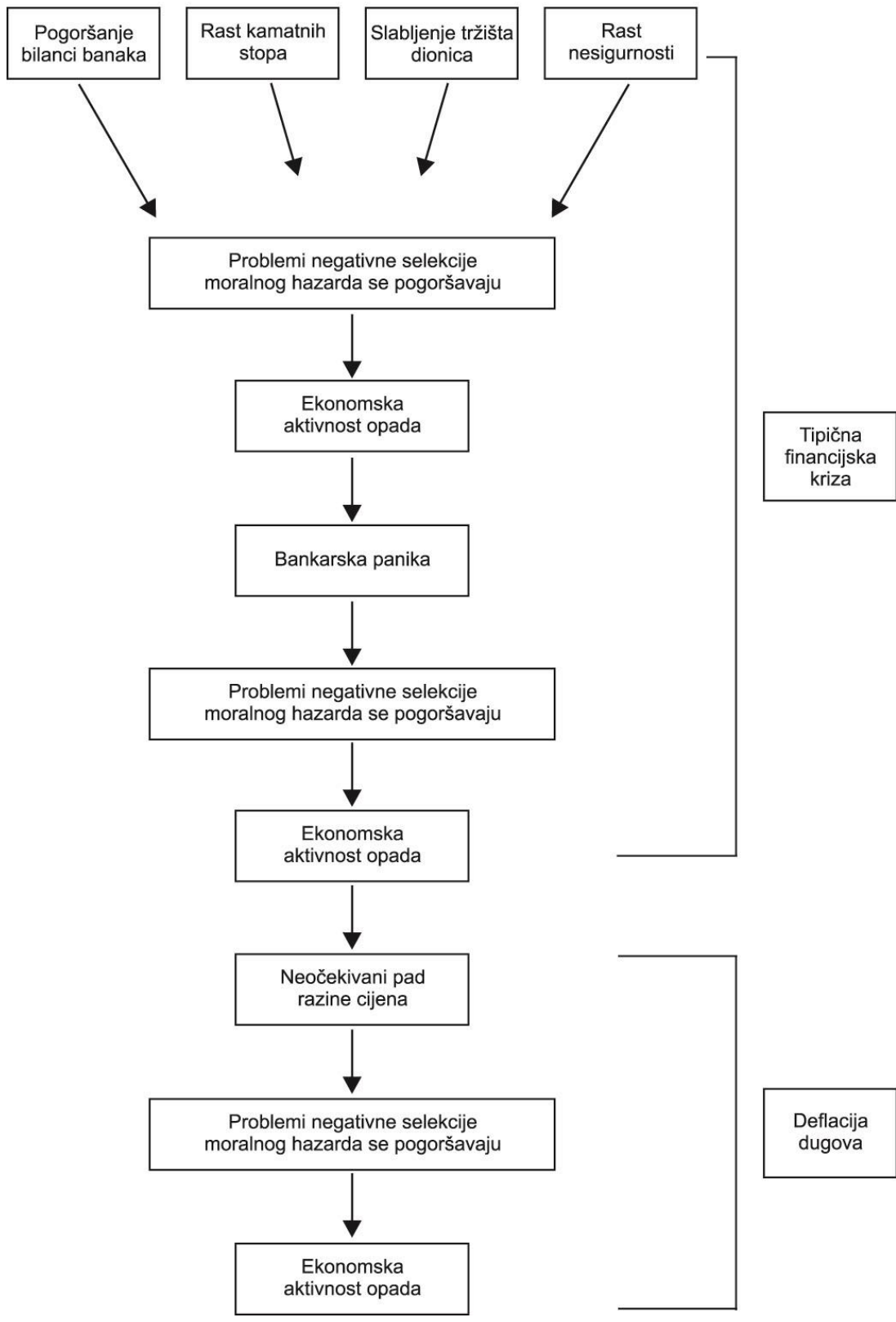
Obilježja i faze financijskih kriza mogu se podijeliti na nekoliko etapa. Prema Minskom kriza se sastoji od sljedećih razvojnih stupnjeva:

1. Nastaju kao rezultat vanjskog šoka (rat, tehnološko dostignuće, promjena preferencija, ekonomsko- političke mjere ... )
2. Ako je šok dovoljno velik, nastaju gubici ili dobiti. Ako su dobiti veći-poticaaj investiranju. Stvara se faza boom-a.
3. Boom se povećava rastom bankarskih kredita (povećanje M1). To potiče i špekulacije.
4. Spekulacije izazvane boomom potiču potražnju za realnim dobrima ali i vrijednosnicama. Rast potražnje za robom u kratkom roku potiče inflaciju. To u kratkom roku potiče investiranje zbog rasta cijena.
5. Spekulacije se pojačavaju povećanjem cijena. Zahvaća sve širi krug stanovništva privučen visokim zaradama.
6. Spekulacija se kreće od normalnog i racionalnog ponašanja ka iracionalnom i vodi euforiji i maniji. Time se cijene sve više udaljavaju od oni~ realnih. Siro krug publike ne razumijeva nastali proces i podliježu manipulacijama. Spekulacije se prenose i na objekte manje vrijednosti.
7. Pojedini špekulanti počinju prodavati svoju robu ili vrijednosnice. Počinje "Juriš" na likvidna sredstva - novac. Nastupa proces sloma cijena. Neki špekulanti ne mogu vratiti svoje kredite. Počinje bijeg od objekata špekulacije.
8. Signal za otkrivanje krize može biti otkrivanje neke prijevare ili znatan pad cijene objekta špekulacije.

Panika se analogno proširuje na špekulacije, osim ako je ispunjen jedan od slijedećih uvjeta:

- Cijene toliko pale da ponovo potiču na investiranje
- Uvodi se limitiranje cijena ili se zatvara burza

Sredinja Banka kao posljednju mjeru (*eng.* - "lender of last resort") može uvjeriti investitore da će osigurati dovoljno novca da pokrije povećane potrebe za likvidnošću.



Slika 15: Slijed događaja u američkim financijskim krizama.

Financijski sustav je nestabilniji što su tokovi plaćanja međusobno povezani, što je manji udio stranih ulaganja u portfelju subjekta i što cijene vrijednosnica snažnije odražavaju očekivane poraste cijena.

Financijska zaraza je značajno povećanje međutržišnih veza nakon šoka u jednoj zemlji ili grupi zemalja. U tom slučaju primjetno je nepostojanje koordinacije među investitorima i nezadovoljavajući mehanizam koji bi se nosio s problemima likvidnosti na međunarodnom nivou. Zaraza je širenje tržišnih nestabilnosti koje se ogledaju u sukretanju tečajeva, cijena vrijednosnica, tokova kapitala itd. Obično se pojavljuje u dva oblika:

1. prelijevanje nestabilnosti zbog normalne međuzavisnosti (fundamentalni uzroci)
2. makroekonomska situacija se u drugoj zemlji ne može povezati s onom gdje je kriza.

Psihološki čimbenici u ovakvoj situaciji postaju presudni - iracionalno ponašanje.

Financijske zaraze se šire nasumično, prijenosom sredstava između dviju zemalja na kratko vrijeme (*eng.* - hot money), vrijednosnicama, monetarnim tokovima, psihologijom mase.

Mogući kanali prijenosa financijske zaraze su:

- a) trgovačke veze
- b) regionalna udruženja  
sličnosti na makroekonomskom planu
- d) zajednički kreditori
- e) povezivanje u fondove (*eng.* - hedging) među tržištima

Većina financijskih kriza u Sjedinjenim Državama počela je s pogoršanjem u bilancama banaka, oštrim rastom kamatnih stopa (koje je često rezultat rasta kamatnih stopa u inozemstvu), strmim padom na tržištu dionica i rastom nesigurnosti kao rezultat propadanja glavnih financijskih i nefinancijskih tvrtki ..

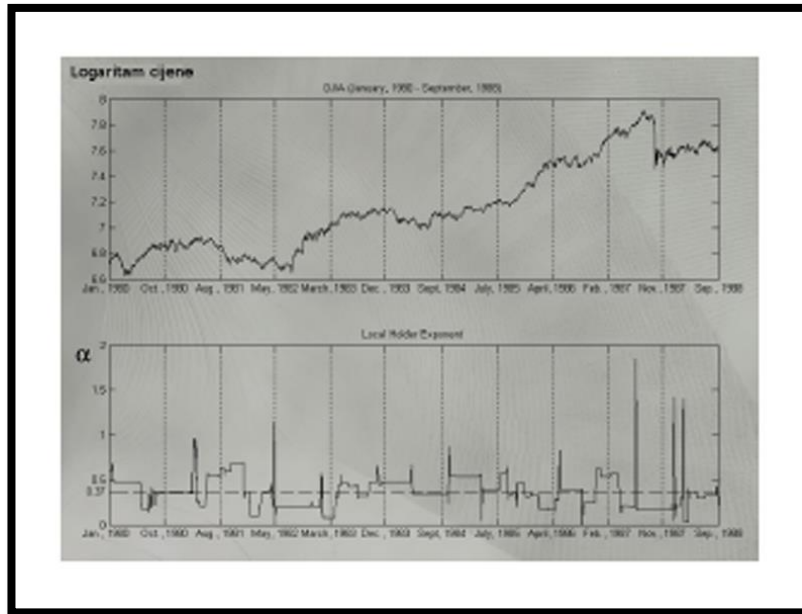
Singulariteti na financijskim tržištima se mogu opisati formulom:

$$f(t + h) - f(t) < const * h^\alpha$$

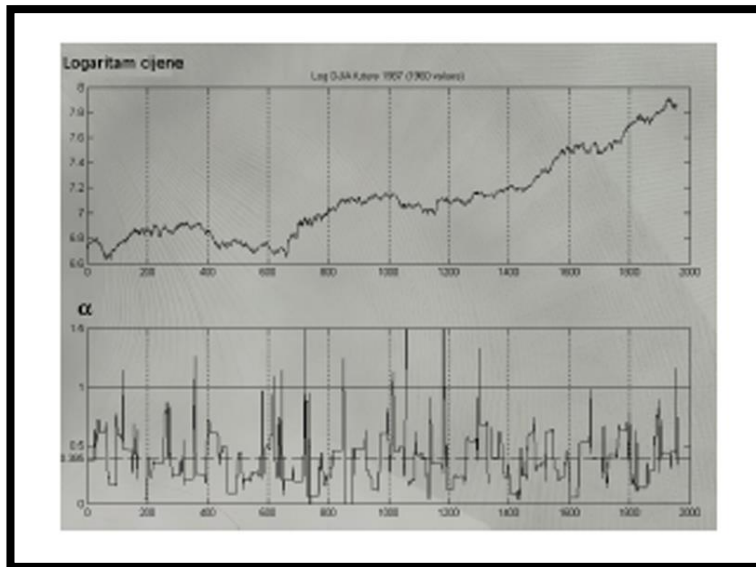
ako je  $\alpha = 1$ ,  $f(x)$  je diferencijabilna funkcija, a ako je  $\alpha = 0$ ,  $f(x)$  ima neuklonjiv diskontinuitet. U jednadžbi:

$$f(t + h) - f(t) < const * h^{\alpha(t)}$$

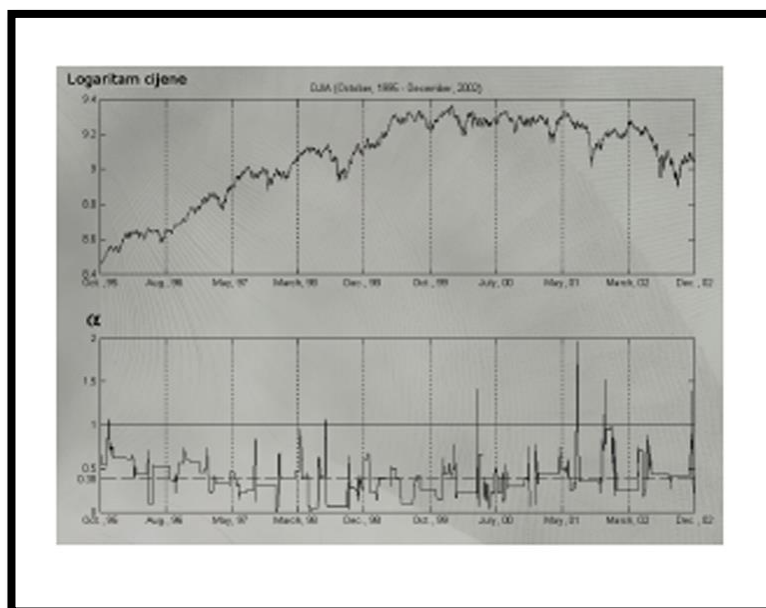
$\alpha(t)$  nazivamo Holderovim lokalnim eksponentima. Holderovi lokalni eksponenti su prikladno sredstvo mjerenja singularnosti.



Slika 16: DOW JONES INDUSTRIAL prosjek - 1980.- 1988

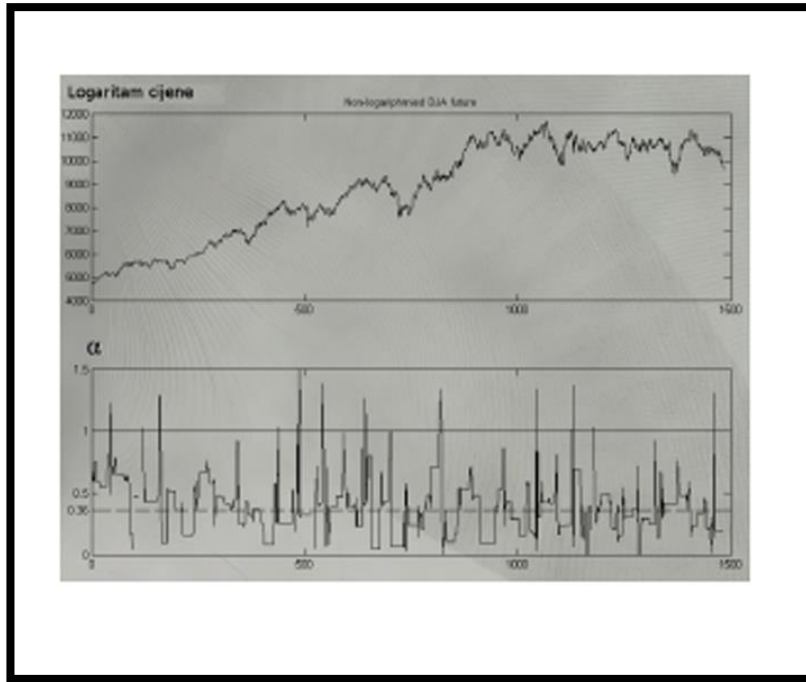


*Slika 17: Otkrivanje krize 1987.*



*Slika 18: DOW JONES INDUSTRIAL prosjek - 1995.- 2001.*





*Slika 19: Otkrivanje krize 2001.*

Nepouzdanost mnogih modela proizlazi iz definiranih pretpostavki o financijskom tržištu kao što su pretpostavke kako sve stranke imaju isti pristup relevantnim informacijama, ne postojanje troškova transakcija, kako je sva financijska imovina beskonačno djeljiva i likvidna, što u realnom okruženju nije slučaj.

U otkrivanju krize na financijskom tržištu veliku ulogu imaju i Markovljevi lanci (Andrey Markov). U matematici Markovljev lanac predstavlja niz stanja sustava. U svakome trenutku sustav može prijeći u neko novo stanje ili može ostati u istome stanju. Promjene stanja nazivaju se tranzicije. Ako slijed stanja ima Markovljevo svojstvo to znači da je svako buduće stanje vremenski neovisno o svakome prijašnjem stanju. Stohastički proces je model slučajne pojave ovisne o vremenu. Kao što slučajna varijabla opisuje statičku slučajnu pojavu, tako je stohastički proces familija slučajnih varijabli  $X_t$ , jedna za svako vrijeme  $t$  u nekom skupu  $J$ . Skup  $S$  u kojem slučajne varijable  $X$ , poprimaju vrijednosti zove se prostor stanja procesa. U teoriji vjerojatnosti, stohastički proces ima Markovljevo svojstvo ako buduća raspodjela vjerojatnosti procesa, za dano trenutno stanje i sva prošla stanja, ovisi samo o trenutnome stanju i niti o jednom drugome prethodnom. Markovljevo svojstvo se obično naziva Markovljev proces, i može biti opisano kao markovljevo. Markovljev lanac je slijed slučajnih varijabla  $X_1, X_2, X_3, \dots$  s Markovljevim svojstvom i to zato što su trenutno, buduće i prošlo stanje nezavisni.

$$\Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = \Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

Moguće vrijednosti  $X_i$  formiraju prebrojivi skup  $S$  nazvan stanje prostora lanca.

Primjer: (preuzeto sa <http://hr.wikipedia.org/wiki/Markovljevanac>)

Na željezničkoj pruzi nalazi se semafor na kojem gori ili crveno (C) ili zeleno (Z) svjetlo.

U ovom primjeru željeznička pruga i semafor predstavljaju jedan sustav. Pretpostavimo da smo u nekom vremenskom intervalu promatrali u kojem se stanju nalazi naš sustav i da smo registrirali slijedeći niz:

C, C, Z, Z, Z, C, Z, Z, C, C, C, Z, Z, Z, C, Z. (\*)

U mnogim problemima se želi na osnovu sadašnjega stanja sustava predvidjeti u kom stanju će biti sustav prilikom slijedećeg ili nekoga kasnijega promatranja. Na osnovu nekoga promatranoga stanja ne možemo sa sigurnošću predvidjeti neko stanje već odrediti s kojom vjerojatnošću će se sustav nalaziti u nekom određenom stanju. Za ovaj primjer zanimljiva su slijedeća pitanja:

1. Ako je sustav sada u stanju C, kolika je vjerojatnost da će pri slijedećem promatranju biti u stanju C?
2. Ako je sustav sad u stanju C, kolika je vjerojatnost da će pri slijedećem promatranju biti u stanju Z?
3. Ako je sustav sad u stanju Z, kolika je vjerojatnost da će pri slijedećem promatranju biti u stanju C?
4. Ako je sustav sad u stanju Z, kolika je vjerojatnost da će pri slijedećem promatranju biti u stanju Z?

Pokušajmo odgovoriti na ova pitanja. Iz niza (\*) vidimo da je sustav u stanju C bio 7 puta.

U 3 slučaja sustav je ostao u stanju C, a u 4 slučaja iz stanja C prešao u stanje Z.

Zaključujemo da je:

$$p(\text{sustav je bio u stanju C i ostao u stanju C}) = \frac{3}{7}$$

$$p(\text{sustav je bio u stanju C i prešao u stanje Z}) = \frac{4}{7}$$

Iz niza (\*) zaključujemo da je:

$$p(\text{sustav je bio u stanju Z i ostao u stanju Z}) = \frac{5}{8}$$

$$p(\text{sustav je bio u stanju Z i prešao u stanje C}) = \frac{3}{8}$$

Informacije o vjerojatnostima prijelaza sustava iz jednoga u drugo stanje možemo

zapisati koristeći matrični račun: Naznačena matrica zove se matrica prijelaznih vrijednosti i obično se označava sa  $P$ , a njezini elementi, gdje su indeksi  $p_{ij}$  iz skupa svih stanja. Matricu  $P$  možemo zapisati i pomoću stabla. Uočimo da je suma svih grana koje izlaze iz bilo kojeg čvora jednaka 1. Dakle možemo reći:

Markovljev lanac je niz diskretnih slučajnih varijabli  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ , koji zadovoljavaju uvjete:

- varijable opisuju stanje nekog fizičkog sustava u vremenima  $t_0, t_1, t_2 \dots$
- prijelaz iz jednog stanja u drugo u trenutku  $t_n$  opisan je matricom prijelaznih vjerojatnosti (To je matrica s elementima  $p_{ij}(n)$  a naziva se još i matrica prijelaznih vrijednosti.)
- lanac je markovljev ukoliko stanje sustava u trenutku  $t_n$  ovisi samo o stanju u prethodnom trenutku, tj.

$$P(X_n = s_{in} | X_{n-1} = s_{in-1}, \dots, X_1 = s_{i1}) = P(X_n = s_{in} | X_{n-1} = s_{in-1})$$

Ako Markovljev lanac ima  $k$  mogućih stanja koje označavamo 1, 2, 3, ...  $k$  onda se vjerojatnost da je sustav u stanju  $j$  u trenutku  $t + 1$  nakon što je bio u stanju  $i$  u trenutku  $t$  označava  $p_{ij}$  i zove se vjerojatnost prijelaza iz stanja  $i$  u stanje  $j$ . Matrica  $P = [p_{ij}]$  se zove matrica prijelaza Markovljevog lanca. Zbroj elemenata u svakom stupcu matrice prijelaznih vrijednosti ( $p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{kj} = 1$ ) naziva se stohastička matrica, matrica vjerojatnosti ili Markovljeva matrica.

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$$

Za svako stanje  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  prijelazna vjerojatnost  $p_{ij}$  predstavlja uvjetnu vjerojatnost da će se sustav naći u  $j$ -tom stanju ako se prethodno nalazio u  $i$ -tom stanju. Ako se vratimo na naš primjer onda možemo sa  $p_1^1$  označiti vjerojatnost da će se sustav naći u stanju 1, a sa  $p_2^1$  da će sustav na početku biti u stanju 2. U našem primjeru je:

$$p_1^1 = \frac{7}{16} \quad p_2^1 = \frac{9}{16}$$

Izračunajmo vjerojatnost  $p_i^2$ ,  $i \in \{1, 2\}$  da će se prilikom sljedećeg promatranja sustav

nalaziti u stanju 1, odnosno 2. Primjenom formule za totalnu vjerojatnost dobivamo sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} p_1^1 p_{11} + p_2^1 p_{21} &= p_1^2 \\ p_1^1 p_{12} + p_2^1 p_{22} &= p_2^2 \end{aligned}$$

Ili u matričnom obliku:

$$[p_1^2 p_2^2] = [p_1^1 p_2^1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Označimo li sa  $p^1$  vektor-redak početnih vrijednosti, a sa  $p^2$  vektor-redak vjerojatnosti u sljedećem promatranju, onda sustav možemo pisati i u skraćenom obliku:

$$p^2 = p^1 P$$

Ako je  $P$  matrica prijelaznih vrijednosti za Markovljev proces, a  $p^1$  vektor-redak početnih vjerojatnosti, onda je:

$$p^2 = p^1 P$$

vektor-redak za iduće promatranje. U našem primjeru je:

$$p^1 = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow p^2 = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 7 \\ 5 & 3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 77 \\ 128 & 128 \end{bmatrix}$$

Dakle, ako se sustav s vjerojatnošću  $p_1^1 = \frac{7}{16}$  nalazi na početku (to jest pri prvom promatranju) u stanju 1, a s vjerojatnošću  $p_2^1 = \frac{9}{16}$  u stanju 2 onda će se s vjerojatnošću  $p_1^2 = \frac{51}{128}$  nalaziti u stanju 1 pri sljedećem promatranju. Black-Scholesova jednadžba izmišljena je još 1973. godine. Primjenjuje se na dva najjednostavnija i najstarija derivativa, a to su opcija na kupnju i opcija na prodaju. Opcije daju kupcu ili prodavaču pravo da prodaju ili kupe robu u određenom trenutku po određenoj cijeni, a pomoću formule se dolazi do sustavnog izračuna vrijednosti određene opcije prije nego što sazrije. Na taj način se može prodati ili kupiti u bilo kojem trenutku.

Formula glasi:

Teoretska cijena opcija:  $pN(d_1) - se^{-rt}N(d_2)$

gdje je 
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{p}{s}\right) + \left(r + \frac{v^2}{2}\right) * t}{v\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{t}$$

za:

v = nestabilnost mjerena godišnjom standardnom devijacijom

s = cijena izvršenja opcije

p = cijena dionice

t = vrijeme preostalo do isteka izraženo u postotcima godine

r = trenutna kamatna stopa bez preuzimanja rizika

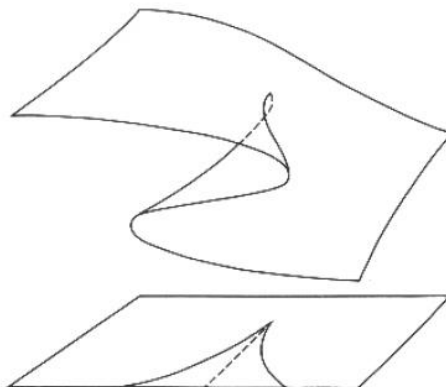
N = kumulativna normalna funkcija gustoće

Zbog iznimnog uspjeha i djelotvornosti prodaje Myron Scholes i Robert Merton su za tu formulu 1997. dobili Nobelovu nagradu za ekonomiju. Naime, Merton je potvrdio formulu, a Black je do 1997. godine preminuo. Formula je dobila naziv 'Midi formula', prema kralju Midi, jer je bila svojevrsni recept za pretvaranje svega u 'zlatu'. N o tržišta su zaboravila kako je završila priča o kralju Midi.

Proučavanje financijskih kriza vrijedno je jer su dovodile do ozbiljnih gospodarskih nazadovanja u prošlosti posjedujući potencijal da se to ponovi i u budućnosti. Otkrivanje krize na financijskom tržištu nije jasno definirani proces, već se uporabom raznovrsnih fizikalnih modela, te njihovim kombiniranjem nastoji stvoriti (hibridni model) koji bi predvidio fluktuacije na financijskom tržištu.

U zadnjih dvadesetak godina istraživanja i primjene tih istraživanja u financijskoj industriji su intenzivirana, i u njima zajednički sudjeluju ekonomisti, matematičari a zadnjih godina sve više su prisutni i fizičari. Znanstveno-istraživački radovi pojavljuju se velikom brzinom, te se pokreću novi časopisi namijenjeni samo tom području. Radovi se objavljuju u matematičkim, ekonomskim i interdisciplinarnim časopisima. Najbolji dokaz popularnosti i važnosti proučavanja financijskih tržišta jest činjenica da skoro svako važnije sveučilište u Europi i SAD-u nudi dodiplomski ili poslijediplomski interdisciplinarni program iz financija.

#### 4. Teorija katastrofe



Teorija katastrofe je teorija koja je izvedena iz topologije, koja pak čini dio matematičke znanosti koja proučava svojstva površina u više dimenzija. Teorija je grana bifurkacijske teorije koja se koristi u istraživanju dinamičkih sustava, ona je također poseban slučaj općenitije teorije singulariteta na koju nailazimo u geometriji. Bifurkacijska teorija proučava i klasificira pojave koje su karakterizirane naglim promjenama u ponašanju, a koje proizlaze iz malih promjena u uvjetima, analizirajući kako kvalitativna priroda rješenja jednadžbi ovisi o parametrima koji se pojavljuju u jednadžbama. To može dovesti do naglih i dramatičnih promjena, na primjer, na nepredvidiv trenutak erupcije i magnitudu lavine.

Teorija katastrofe je nastala radom francuskog matematičara René Thoma 1960.godine, te je postala vrlo popularna zahvaljujući Christopheru Zeemanu 1970.godine.

Ona razmatra poseban slučaj u kojem se dugoročna stabilna ravnoteža može identificirati sa minimumom glatke, dobro definirane potencijalne funkcije (Lyapunova funkcija). 1892. godine Alexandr Mihailovich Lyapunov (1857–1918), profesor matematike u Harkovu je formalizirano ideju koja kaže da ako je ukupna energija raspršena, sustav mora biti stabilan. Profesor Lyapunov je predložio dvije metode za određivanje stabilnosti dinamičkih sustava opisanih diferencijalnim jednadžbama. Metoda vrijedi i za linearne i za nelinearne sustave, kako za jednoparametarske tako i za višeparametarske sustave, te predstavlja jednu od vrlo važnih metoda za određivanje globalne stabilnosti rješenja sistema diferencijalnih jednadžbi.

Druga metoda poznata pod imenom direktna Lyapunova metoda je vrlo pogodna zato što ne zahtjeva poznavanje karakterističnih vrijednosti sustava. Iako ju je Lyapunov donio za kontinuirane sustave lako se prilagodi i diskretnim sustavima. Male promjene u određenim parametrima nelinearnog sustava mogu uzrokovati nastajanje ili nestajanje ravnoteže, ili njezinu promjenu od privlačenja do odbijanja i obrnuto, što u konačnici može dovesti do velike i nagle promjene ponašanja sustava. Međutim, ispitana u većem parametarskom prostoru, teorija katastrofe otkriva da takve bifurkacijske točke imaju tendenciju da se pojavljuju kao dio dobro definiranih kvalitativnih geometrijskih struktura.

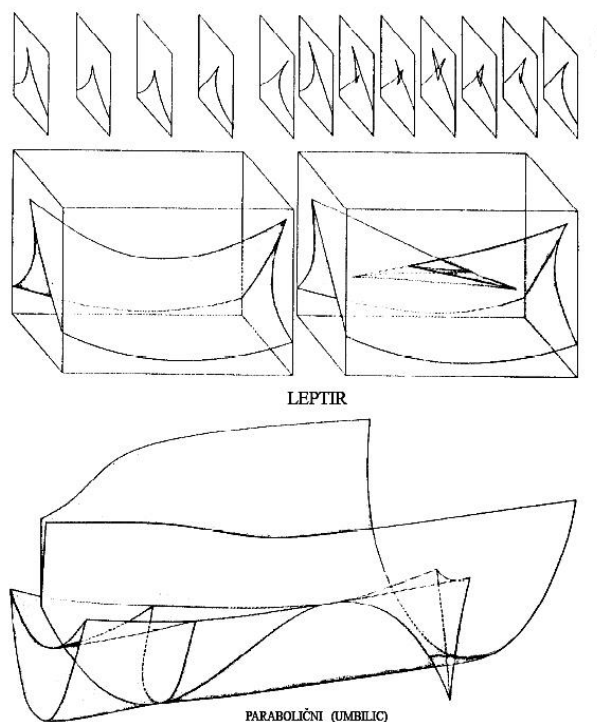
Teorija katastrofe je mlada znanost: Thom je objavio prvi rad na temu šezdesetih godina prošlog stoljeća te je do sada je njegov najveći utjecaj bio na matematiku. Posebno ga je stimulirao razvoj u drugim granama matematike koji su bili potrebni za dokaze njegovim teoremima. Najvažniji izvanredni problemi u razvoju teorije odnose se na razumijevanje i klasifikaciju generalizirane katastrofe, i suptilnije katastrofe koje nastaju kada se nameću uvjeti simetrije. Osim toga postoje problemi vezani uz to kako teorija katastrofe može biti upotrebljena u vezi s drugim matematičkim metodama i konceptima, kao što su diferencijalne jednačbe, povratne informacije buke, statistika i difuzija. Nove primjene teorije istražene su u mnogim područjima. U fizici i inženjerstvu, modeli su razvijeni za propagandu udarnih valova, nelinearnih oscilacija, raspršenje i elastičnost. Michael V. Berry sa Sveučilišta u Bristolu nedavno je upotrijebio pupčanu katastrofu kako bi predvidio novi rezultat u fizici kaustike i fluida, te je svoje rezultate potvrdio i eksperimentom.

Thomova vlastita Strukturalna stabilnost i Morfologija, inspirirana radom D'Arcy Wentworth Thompsona i C. H. Waddingtona, uvelike se tiče embriologije, ali još nekoliko biologa slijedili su njegove ideje u laboratoriju. Izradio sam modele katastrofe otkucaja srca, prijenos živčanih impulsa i formaciju gastrule i odsječke u embriju. Nedavni eksperimenti koje su proveli J. Cooke s Medicinskog istraživačkog vijeća laboratorija u Londonu i T. Elsade s Medicinskog istraživačkog vijeća laboratorija u Edinburghu, pojaviti će se kako bi potvrdili neka od mojih predviđanja. Međutim, većina mog posla bila je u prirodnim znanostima, kao što je predloženo od strane modela opisanog u mom članku. Sve veći broj istražitelja sugeriraju modele izvedene iz teorije katastrofe, a u narednih deset godina veselim se vidjeti te modele testirane eksperimentom. Tek tada

možemo suditi o pravoj vrijednosti metode, svojedobno je izjavio Thom. Thom je upotrijebio teoriju u nastojanju pronalaska modela generiranja jezika. To je intrigantna misao da ista matematika može biti temelj, ne samo način kako genetski kod uzrokuje razvoj embrija, ali i način na koji tiskana riječi uzrokuje razvijanje naše mašte.

Topologija je uključena u teoriju zato što pruža odličan alat za opisivanje fundamentalnih sila prirode putem glatkih ravnotežnih površina. Kada dolazi do narušavanje ravnoteže tada nastupa katastrofa. Jedan od glavnih izazova koji se postavljaju pred teoriju katastrofe jest na koji način opisati izgled svih mogućih ravnotežnih površina. Thom je gore navedeni problem opisa ravnotežnih površina riješio svojim modelom koji je prezentirao u obliku nekoliko arhetipskih oblika, koje je nazvao elementarnim katastrofama.

Promatrajući i analizirajući procese koji su kontrolirani sa ne više od četiri faktora, Thom je pokazao da za takav tip procesa postoje samo sedam elementarnih katastrofa. Dokaz njegovog teorema je vrlo kompliciran i zahtjeva visoko teorijsko znanje i operativne vještine, no rezultat koji proizlazi iz dokaza može se relativno jednostavno objasniti. Ono što čini ovu teoriju vrlo pristupačnom je činjenica da se elementarne katastrofe mogu vrlo lako shvatiti i primijeniti u znanstvenim problemima bez pozivanja na dokaz.



Slika 20. neke od elementarnih katastrofa: leptirova i pupčana

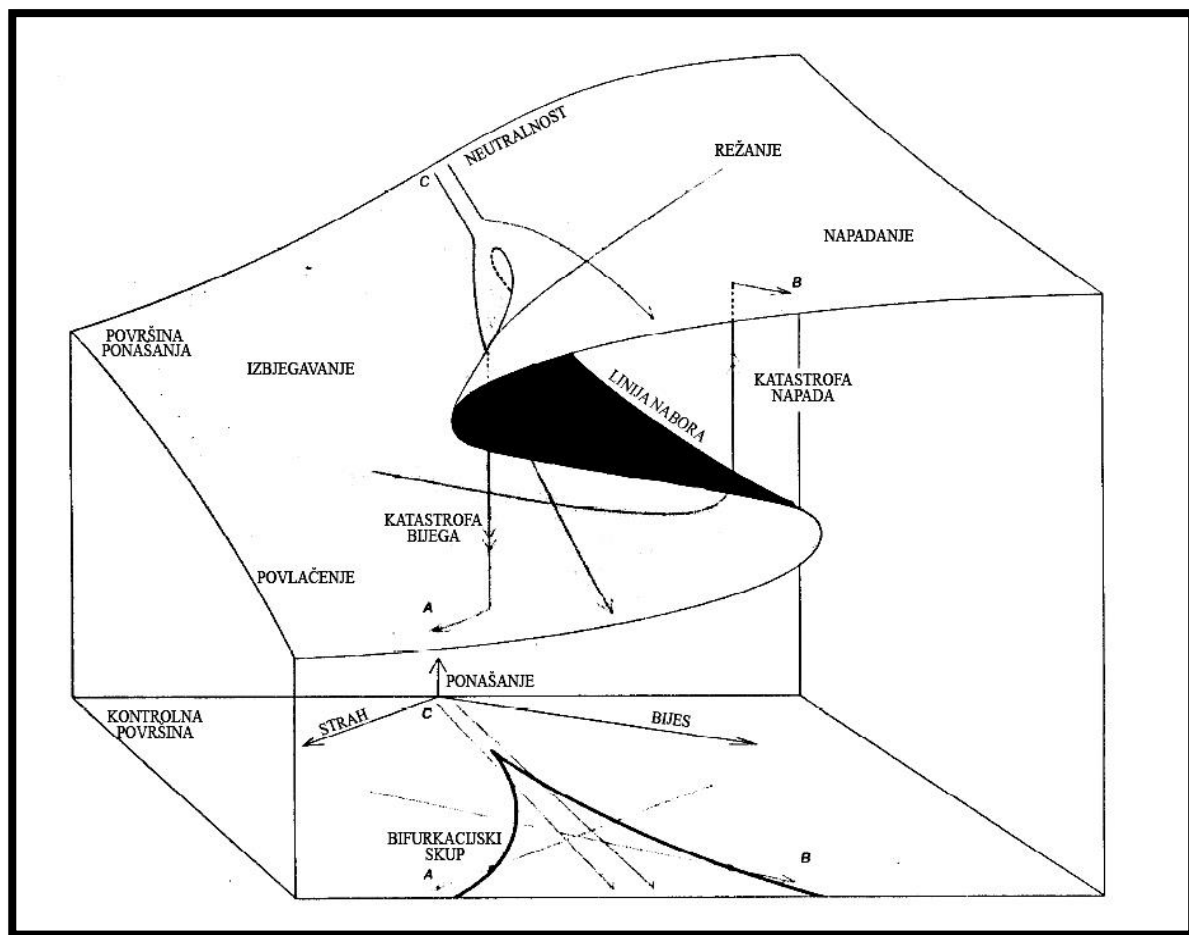


#### ***4.1. Pseća agresija i šiljasta katastrofa***

Priroda modela izvedenih iz teorije katastrofe najbolje može biti predočena primjerima, početi ću sa modelom pseće agresivnosti.

Pseću agresiju možemo opisati modelom baziranim na jednom od modela elementarnih katastrofa. Model pseće agresije pretpostavlja da je agresivno ponašanje psa kontrolirano određenim razinama bijesa i straha koje pas istovremeno posjeduje u promatranom trenutku. Bijes i strah nazivamo konfliktnim faktorima te ih nanosimo kao osi na horizontalnu ravninu. Tako naneseni, kao osi horizontalne ravnine, bijes i strah tvore kontrolnu površinu. Ponašanje psa prikazujemo na vertikalnoj osi koju nazivamo os ponašanja (graf 1.). Ponašanje rangiramo od napadačkog ponašanja do psećeg uzmicanja, gdje više vrijednosti na vertikalnoj osi prikazuju napadačko ponašanje. Spuštanjem sa visokih vrijednosti prema nižim vrijednostima vertikalne osi prelazimo preko modova ponašanja koje karakteriziraju pseće režanje i izbjegavanje sukoba. Konačno dolazimo do najnižih vrijednosti vertikalne osi, odnosno psećeg ponašanja u kojem dolazi do uzmicanja.

Pogledajmo sada kontrolnu površinu (graf 1.). Za svaku kombinaciju konfliktnih faktora, u našem slučaju bijesa i straha, odnosno za svaku točku kontrolne površine, postoji najmanje jedan vjerojatni oblik (model) ponašanja psa. Taj oblik ponašanja psa naznačen je kao točka na određenoj visini iznad odgovarajuće točke kontrolne površine. Skup svih takvih točaka, koje predstavljaju oblik ponašanja psa, tvore površinu ponašanja. U većini promatranih slučajeva postoji samo jedan vjerojatni oblik ponašanja psa, no u područjima u kojima su i bijes i strah približno jednako zastupljeni postoje dva vjerojatna oblika ponašanja pasa.



Graf 1. pseća agresija

Promotrimo sada psa koji je u isto vrijeme i ljutit i uplašen. Pas koji se nalazi u takvom emocionalnom stanju može reagirati na dva vjerojatna načina. Može napasti, ili se pak može povući. Stoga u sredini gore navedenog grafa (graf 1.) postoje dvije površine koje prikazuju vjerojatno ponašanje. Te dvije površine su povezane sa trećom površinom te one zajedno tvore veliku kontinuiranu, naboranu površinu (graf 1.).

Treća, odnosno srednja površina koja je prikazana crnom bojom, ima drugačije značenje od ostale dvije površine grafa. Ona predstavlja najmanje vjerojatno pseće ponašanje, u našem slučaju neutralno ponašanje. Pomićući se po površini ponašanja dolazimo do centralnog nabora koji postaje sve uži te konačno iščezava. Linija koja definira rubove nabora, gdje se gornji i donji slojevi presavijaju kako bi formirali srednji sloj, naziva se linija nabora, te kao rezultat njezine projekcije na kontrolnu površinu dobivamo krivulju u obliku šiljka (graf 1.).

Budući da šiljak na kontrolnoj površini označava granicu na kojoj ponašanje postaje bimodalno i definira pragove gdje se mogu odvijati nagle promjene, još ga nazivamo i bifurkacijski skup ruba katastrofe. Upravo iz tog razloga model se naziva šiljasta katastrofa.

Šiljasta katastrofa se do danas pokazala kao jedan od najproduktivnijih i jedan od sedam najjednostavnijih osnovnih modela katastrofa. Analizirajući šiljastu krivulju kontrolne površine dolazi se do zaključka da sve dok stanje sustava ostaje izvan vrha, ponašanje varira glatko i kontinuirano kao funkcija parametara upravljanja. Čak i u prvim trenutcima ulaska u šiljastu krivulju ne opažaju se nagle promjene. Međutim, kada kontrolna točka prolazi putem kroz šiljak, katastrofa je neizbježna. Unutar cijelog područja bifurkacijskog skupa postoje dva moguća načina ponašanja dok izvan područja bifurkacijskog skupa postoji samo jedan.

Uzrok postojanja samo dva moguća modela ponašanja je u tome što je srednji sloj u naboranom području sastavljen od točaka koje predstavljaju manje vjerojatno ponašanje. Srednji sloj, koji je označen tamnijom bojom na gore navedenom grafu (graf 1.), uključen je u graf ponajprije kako bi površina ponašanja bila glatka i kontinuirana. Točku koja se nalazi na površini ponašanja nazivamo točkom ponašanja. Treba naglasiti kako točka ponašanja nikada ne zauzima srednji sloj.

Doista, ne postoji putanja na kontrolnoj površini koja bi mogla dovesti točku ponašanja na središnji dio površine. Čim točka na kontrolnoj površini dosegne liniju nabora, svojstvena točka ponašanja skače između gornjih i donjih slojeva površine ponašanja te srednji sloj postaje nedostupan.

Kako bismo konstruirali ovaj model moramo započeti s unaprijed određenom hipotezom koja kaže da se ponašanje psa može predvidjeti iz njegovog emocionalnog stanja a koje se pak može odrediti iz njegova izraza lica. Budući da za određeno emocionalno stanje postoje dva moguća načina ponašanja, nedvosmisleno predviđanje slijedećeg psećeg ponašanja postaje nemoguće. S obzirom na gore navedenu činjenicu na prvi pogled može nam se učiniti da je bimodalnost nastalog grafa u suprotnosti sa ranije navedenom hipotezom. Doista, ako poznamo samo trenutno emocionalno stanje psa i ako

to promatrano stanje poprima vrijednosti koje spadaju u bimodalno područje grafikona, tada ne možemo predvidjeti slijedeću pseću reakciju.

Ako prilikom predviđanja uzmemo u obzir dodatni faktor tada naš model postaje sofisticiraniji. Ponašanje psa možemo predvidjeti ako uz poznavanje njegovog trenutnog emocionalnog stanja poznamo i nedavnu prošlost njegovih emocionalnih stanja. Dolazimo do zaključka kako se učinci bijesnog psa koji se zastraši razlikuju od učinaka preplašenog psa kojeg se razbijesni.

Promotrimo sada psa koji je u isto vrijeme i ljutit i uplašen. Ako psa koji se nalazi u takvom emocionalnom stanju sve više plašimo, njegovo raspoloženje prati trajektoriju A na kontrolnoj površini prikazanu na grafu (graf 1.) ovog rada. Odgovarajuća putanja trajektorije A na površini ponašanja proteže se od desne strane površine ponašanja ulijevo. Prateći trajektoriju A po površini ponašanja dolazimo do područja nabora gdje gornja površina konačno iščezava, te trajektorija A naglo pada na donju površinu (graf 1.). Prema tome, dolazimo do zaključka kako mala promjena u konfliktnim faktorima doprinosi velikoj, gotovo katastrofalnoj promjeni u ponašanju psa. Pas napušta napadački mod ponašanja, trenutno mijenja svoje ponašanje i bježi. Analogno tome možemo analizirati ponašanje prestrašenog psa koji je u isto vrijeme i ljutit. Ako takav pas postaje iz trenutka u trenutak sve ljući, tada ponašanje psa opisanog emocionalnog stanja prati trajektoriju B prikazanu na grafu (graf 1.). Prateći trajektoriju B po površini ponašanja uočavamo da pas ostaje na donjem dijelu površine ponašanja sve dok donja površina ne iščezne. U tom trenutku pas napušta svoj trenutni mod ponašanja te naglo mijenja svoje ponašanje. Trajektorija B iznenada skače sa donjeg dijela površine ponašanja na gornji dio površine ponašanja što dovodi do katastrofalne promjene u ponašanju psa. Pas čije ponašanje prati trajektoriju B naglo mijenja svoje ponašanje te prelazi iz moda ponašanja u kojem se povlačio u mod ponašanja kojem su glavna obilježja agresivnost i napadanje.

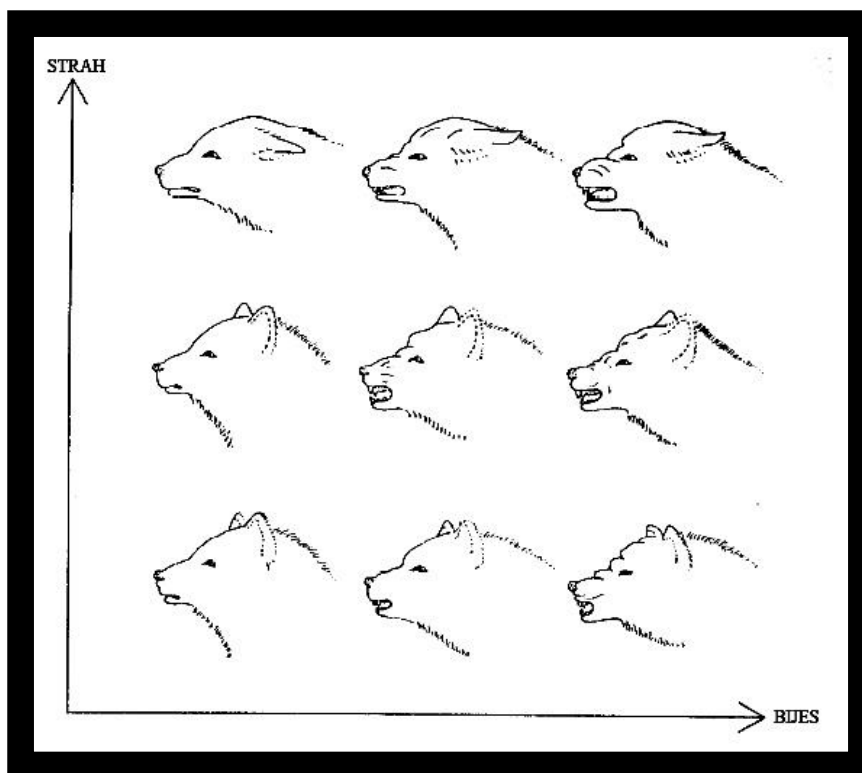
Ponašanje psa koji je u isto vrijeme i razljućen i uplašen mora pratiti jednu od dvije trajektorije na površini ponašanja označenu sa C. Koji će model ponašanja pas odabrati, odnosno hoće li se kretati po gornjem dijelu površine ponašanja i postajati sve agresivniji ili će se kretati po donjem dijelu površine ponašanja i u konačnici postati pokoran, kritično ovisi o vrijednostima bijesa i straha.

Mala promjena poticaja može prouzročiti veliku promjenu u ponašanju, fenomen je divergentan.

Upravo gore navedena činjenica čini ovu teoriju interesantnijom i uzbudljivom. Možemo pronaći elemente teorije determinističkog kaosa, fizike faznih prijelaza, populacijske biologije, dinamičkih sustava, fizike neuređenih sustava i naravno ekonofizike.

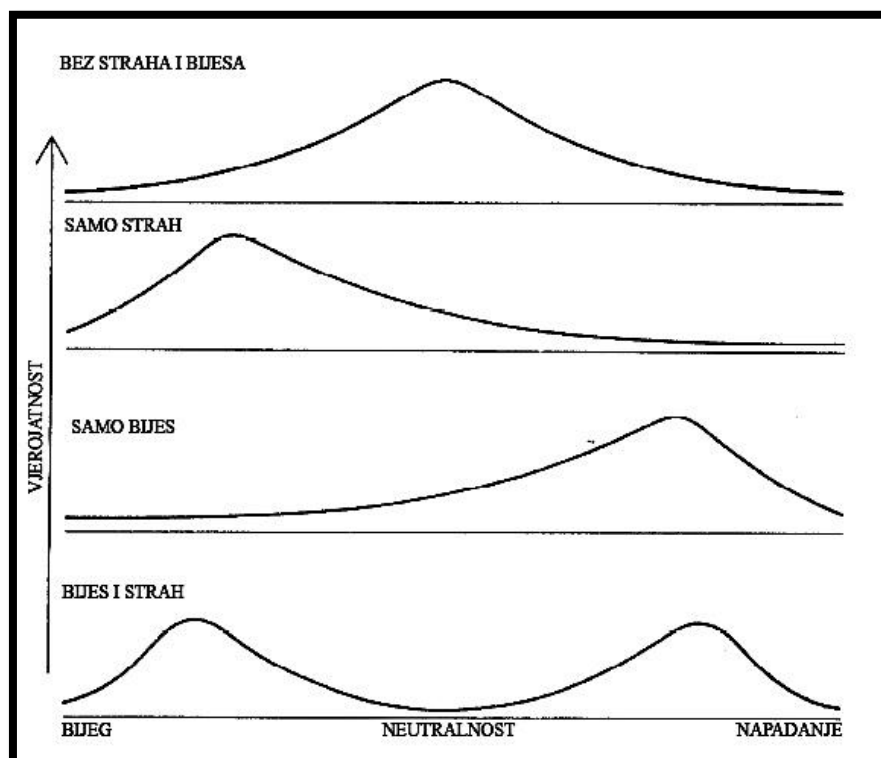
Razvoj kaosa kao zasebne discipline omogućio je razvoj posebnih tehnika korištenja računala, posebne vrste grafičkih prikaza i slika koje sadrže fantastični i profinjeni ustroj koji sačinjava složenost. Nova znanost je rodila i vlastiti jezik, elegantni žargon pun fraktala i bifurkacija, prekida i periodičnosti... (James Gleick – Chaos)

Konard Z. Lorenz je istaknuo da je agresivno ponašanje kod pasa uvjetovano bijesom i strahom koji u suštini predstavljaju dva suprotstavljena nagona. Isto tako predložio je da se kod pasa ti faktori mogu mjeriti sa određenom pouzdanošću. Stupanj bijesa promatranog psa povezan je sa stupnjem otvorenosti njegovih usta i otkrivenih zubi u danom trenutku. Strah se naprimjer može prepoznati po tome koliki je stupanj spljoštenosti ušiju (slika 20.).



Slika 21. prikaz ovisnosti psećeg izraza lica o razinama bijesa i straha

Nadalje, ako upotrijebimo pseći izraz lica kao indikator psećeg emocionalnog stanja tada možemo promatrati promjenu psećeg ponašanja kao funkciju njegovog raspoloženja. Svrha ovog modela je što bolje predviđanje psećeg ponašanja u realnim situacijama. Pretpostavimo da je u našem modelu prisutan samo jedan emocionalni faktor, u tom slučaju ponašanje promatranog psa je relativno lagano predvidjeti. Ako promatramo situaciju u kojoj je pas razbješnjen a nije uplašen, tada se sa velikom vjerojatnošću može pretpostaviti kako će reakcije psa biti agresivne, odnosno postoji vrlo velika mogućnost njegovog napada (graf 2.). Suprotno tome kada promatramo psa koji je preplašen a nije ljutit, tada možemo zaključiti kako agresija kao izbor postaje gotovo nemoguća, odnosno vjerojatnost napada je minimalna. U tom slučaju pas će najvjerojatnije pobjeći. U slučaju da niti jedan od navedenih stimulansa nije prisutan, pas pokazuje prirodno ponašanje koje ni u kojoj mjeri nije povezano sa agresivnim ili pokornim ponašanjem (graf 2.).



*Graf 2. vjerojatnost izbora psećeg ponašanja u odnosu na samo jedan emocionalni faktor*

Promotrimo sada situaciju u kojoj su istovremeno prisutna dva podražaja. U ovom slučaju promatrajmo bijes i strah kao dva podražaja koja pas istovremeno osjeća. Izabrali smo bijes i strah zato što su oni kao kontrolni faktori u direktnom sukobu. Koristeći jednostavne modele koji nisu u mogućnosti primijeniti diskontinuitet vrlo lagano možemo doći do zaključka kako će se ta dva podražaja uzajamno poništiti, te bismo gotovo sigurno predvidjeli da će pasje ponašanje u konačnici biti neutralno. Što je u potpunoj suprotnosti sa eksperimentom. Takvi načini predviđanja tek otkrivaju nedostatke korištenja jednostavnih modela s obzirom da je neutralno ponašanje psa u našoj situaciji ustvari zadnje ponašanje koje bi se moglo dogoditi. Mogli bismo reći da je pseći odabir našeg predviđenog ponašanja gotovo nevjerojatan. Kada je pas istovremeno i ljutit i uplašen tada je vjerojatnost oba ekstremna modela ponašanja visoka. Pas može napasti ali isto tako može se i povući, no gotovo sigurno neće ostati ravnodušan.

Snaga modela koji je izveden iz teorije katastrofe je u tome što uzima u obzir bimodalnu distribuciju vjerojatnosti. Štoviše model pruža bazu za predviđanje, pod određenim okolnostima, koje će ponašanje pas odabrati.

Pogledajmo sada ponovno graf 1. Kao što smo već ranije naglasili za svaku točku na kontrolnoj površini, koja sama po sebi označava kombinaciju određenih razina bijesa i straha, postoji najmanje jedno moguće ponašanje koje je prikazano u obliku točke na određenoj visini točno iznad svojstvene točke kontrolne površine. Za one točke kontrolne površine koje se nalaze u područjima u kojima prevladava jedan od faktora, ili bijes ili strah, postojat će samo jedna točka mogućeg ponašanja. Ako promatramo središnji dio grafa u kojem i bijes i strah imaju gotovo jednak učinak, tada će svaka točka kontrolne površine imati dvije svojstvene točke ponašanja. Jedna od točaka poprimati će visoku vrijednosti na osi ponašanja, koja predstavlja agresivno pseće ponašanje, dok će druga točka poprimati nižu vrijednost na istoj osi, koja predstavlja pokorno ponašanje. Kada obilježimo i povežemo sve svojstvene točke ponašanja točaka kontrolne površine, tada će one tvoriti ranije definiranu glatku površinu koju nazivamo površina ponašanja (graf 1.). Nagib tako definirane površine možemo pratiti polazeći od visokih vrijednosti osi ponašanja, na kojima prevladava bijes kao emocionalno stanje promatranog psa, do nižih vrijednosti u području gdje je strah dominantno stanje.

Teorija katastrofe se očituje u središnjem dijelu površine ponašanja gdje dolazi do presavijanja gornjeg i donjeg dijela površine ponašanja. Upravo nabor koji biva formiran takvim presavijanjem daje modelu njegove najinteresantnije karakteristike. Uzimajući u obzir sve gore navedeno možemo zaključiti kako sve točke površine ponašanja prikazuju najvjerojatnije ponašanje psa, uz iznimku onih točaka koje se nalaze u središnjem dijelu površine. Točke u središnje dijelu površine imaju drugačije značenje, one prikazuju najmanje vjerojatno ponašanje psa.

Polazeći od činjenice da je nekim kontrolnim točkama svojstveno ponašanje bimodalno, upotrebom teorije katastrofe možemo utvrditi oblik cijele površine. Da bismo bili u stanju razumjeti na koji način model predviđa ponašanje psa, moramo uzeti u obzir pseću reakciju u odnosu na promjenu stimulansa. Promotrimo sada novi slučaj.

Pretpostavimo da je u početku emocionalno stanje psa neutralno i označimo to početno stanje na grafu točkom u ishodištu kontrolne površine. Svojstvena točka, označenog početnog stanja, na površini ponašanja prikazuje neutralno ponašanje psa. Ako neki stimulans poveća pseći bijes, a u isto vrijeme efektivno ne utječe na njegov strah, tada se ponašanje promatranog psa mijenja glatko prema višim dijelovima površine ponašanja sve do položaja koje karakteriziraju agresivna ponašanja. U slučaju da se razina bijesa dovoljno poveća, odnosno dosegne kritičnu granicu, pas napada. Ako se sada strah počne povećavati, uz uvjet da razina bijesa ostaje ne promijenjena, tada se točka kontrolne površine koja prikazuje njegovo emocionalno stanje giba prema središtu. Svojstvena točka koja se nalazi na površini ponašanja naravno prati kretanje točke kontrolne površine, te se giba u području u kojem nagib površine nije velik. Samim time zaključujemo kako se ponašanje psa mijenja vrlo malo u odnosu na početno stanje i ono ostaje agresivno. Kako strah i dalje poprima sve veću vrijednost, točka na površini ponašanja se približava naboru i konačno doseže granicu nabora. Karakteristična svojstva našeg modela tada postaju očita. Promatramo li točku koja se sada nalazi na granici nabora uočavamo da svako dodatno povećanje straha uzrokuje nestajanje gornjeg sloja površine ponašanja. Površina po kojoj putuje točka se presavija i time biva učinkovito uništena. Agresivna stanja koja se nalaze na gornjem sloju površine ponašanja nisu više moguća. Točka tada iznenada pada na donji sloj površine ponašanja, koja predstavlja totalno drugačiji model ponašanja. Ne postoji alternativa nagloj i doista katastrofalnoj promjeni modela ponašanja. Model tako predviđa da razbješnjeni pas koji postepeno postaje sve strašljiviji u jednom



trenutku naglo prekida svoje agresivno napadačko ponašanje i povlači se. Takvu iznenadnu promjenu u ponašanju možemo nazvati katastrofa bijega. Graf također predviđa i postojanje suprotnog obrazca ponašanja kojeg nazivamo napadajućom ili katastrofom napada.

Promotrimo sada gore navedeni slučaj.

Početno stanje ovog slučaja karakterizira stanje dominirajućeg straha. Pseće ponašanje je stabilizirano na donjem sloju površine ponašanja. Dovoljnim povećanjem razine bijesa promatrana točka ponašanja prolazi rub nabora i odjednom skače na gornji sloj površine ponašanja koju karakteriziraju agresivna stanja. Drugim riječima, ako je preplašeni pas u situaciji u kojoj se razina njegovog bijesa konstantno povećava tada možemo očekivati iznenadni napad takvog psa. Konačno promotrimo ponašanje psa čije je početno raspoloženje neutralno te mu se razine bijesa i straha povećavaju jednoliko. U ovom slučaju početna pozicija točke ponašanja je definirana u ishodištu. Pod utjecajem jednolikog povećavanja razina bijesa i straha, koji predstavljaju sukobljene stimulanse, točka ponašanja se giba po pravcu (graf 1.).

Međutim, u singularnosti, gdje površina ponašanja postaje naborana, točka ponašanja mora izabrati put po kojem će nastaviti svoje kretanje. Kako pas postaje sve agresivniji točka ponašanja se mora premjestiti na gornji sloj površine ponašanja. Analogno tome, kako pas postaje sve manje agresivan, točka ponašanja se premješta na donji sloj površine ponašanja. Po kojem će se sloju površine ponašanja točka gibati ovisi najviše o stanju uma koje pas posjeduje neposredno prije nego što dosegne singularnost. Kažemo da je graf divergentan. Mala promjena u početnim uvjetima rezultira velikom promjenom u konačnom rezultatu.

Naravno da agresivnost nije jedinstvena pseća osobina, model opisuje mehanizam koji bi možda mogao djelovati i na druge životinjske vrste.

Promotrimo sada novi primjer, teritorijalno ponašanje određenih tropskih riba koje uspostavljaju stalna mjesta gniježđenja na koraljnim grebenima. U ovom slučaju parametri koji kontroliraju agresiju mogu biti fizička veličina ribe koja napada promatrano područje i njezina udaljenost od kritične lokacije u danom trenutku. Za kritičnu lokaciju uzimamo lokaciju na kojoj se nalaze gnijezda dotičnih riba. Ponašanje je i u ovom slučaju opisano modelom šiljaste katastrofe. Promatrajući reakcije ribe koja traži hranu daleko od svojeg gnijezda, odnosno one ribe koja se nalazi na velikoj udaljenosti od kritične lokacije,

primjećujemo kako ona bježi kada se nalazi u blizini protivnika koji je veći od nje. Njezino uzmicanje traje sve dok ne dosegne radijus obrambene linije svojeg teritorija. Tada njezino ponašanje doživljava naglu promjenu, ona trenutno mijenja smjer svojeg gibanja i staje u obranu svojeg teritorija. Suprotno navedenom, ako se riba osjeća ugroženom unutar kritične lokacije tada ona napada i lovi neprijatelja. Potjera za neprijateljem traje sve dok riba ne dosegne radijus napadačke linije svojeg teritorija. Dolaskom do napadačke granice riba naglo napušta dosadašnje obrambeno ponašanje, koje karakteriziraju napad i potjera za neprijateljem, te trenutno mijenja smjer kretanja i vraća se u gnijezdo.

Primjer koji posjeduje očitu analogiju sa modelom pseće agresije jest šiljasti model politike rata. Kontrolni parametri u modelu pseće agresije su bili bijes i strah. U ovom modelu zamjenjujemo ih za nove parametre, prijetnju i trošak. Os ponašanja opisuje moguće aktivnosti naroda. Spektar aktivnosti proteže se od punog napada, manjih vojnih odgovora poput blokade preko neutralnosti do smirenja i predaje. U situaciji gdje su i prijetnja i trošak visoki, javno mišljenje često postaje bimodalno te je narod podijeljen na dvije konfliktne strane koje čine „golubice“, koje se zalažu za predaju i na „sokole“, koji se zalažu za napad. Dinamiku modela čini osjetljivost vlade na volju svojih birača. Vlada je sustav koji stalno prilagođava svoju politiku da bi joj se povećavala potpora te stoga ostaje na površini ponašanja. Iz modela možemo zaključiti koje posljedice mogu proizaći iz trenutnih aktivnosti.. Ugrožen narod može stalno pružati ustupke, no postoji granica nakon koje daljnja prijetnja izaziva naglu objavu rata. Suprotno tomu, kako troškovi rastu narod bi mogao izazvati rat, no postoji granica nakon koje bi daljnji troškovi mogli rezultirati iznenadnom predajom. Histereza se može prepoznati u odgodama koje se uočavaju prije javne objave rata ili prije kapitulacije. Nedostupna regija osi ponašanja jest srednja zona koja predstavlja pregovore ili kompromis. Napokon, divergencija se može promatrati u konfliktu između dva jednako snažna naroda, u kojima je distribucija javnog mišljenja slična, no odgovor vlada je dosta različit, te jedna postaje sve agresivnija dok druga postaje pokornija.

Prethodni primjeri i analiza upućuju na nekoliko zajedničkih značajki navedenih modela šiljastih katastrofa. Jedna invarijantna karakteristika jest da je ponašanje bimodalno preko dijela svog dosega te se iznenadne promjene primjećuju prijelazom iz jednog načina ponašanja do drugog. Uz to, uzorak iznenadnih promjena pokazuje učinak koji smo ranije objasnili (graf 4.), a naziva se histereza, to jest, prijenos s gornje plohe na donju ne odvija

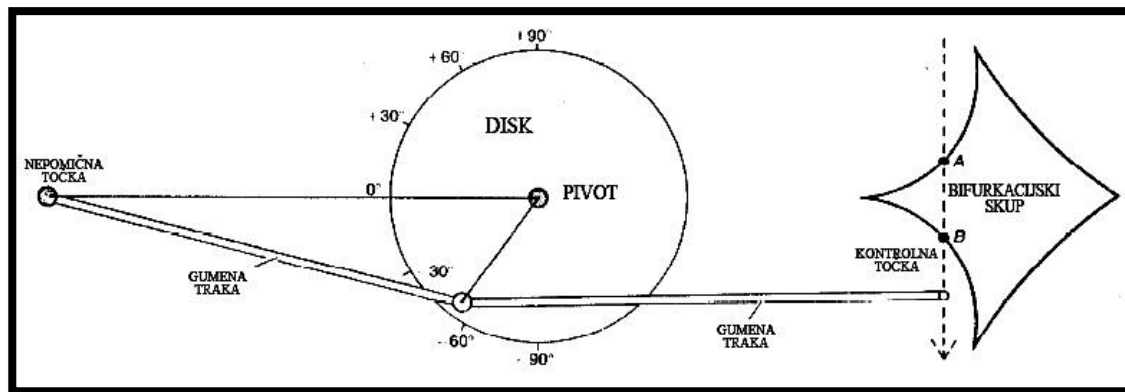
se u istom trenutku kao prijenos s donje plohe na gornju. Do iznenadne promjene ne dolazi u sredini šiljka.

Druga karakteristika jest da unutar šiljka, gdje ponašanje postaje bimodalno, srednja zona na osi ponašanja postaje nepristupačna. Napokon, model implicira mogućnost divergencije tako da mala perturbacija originalnog stanja sustava može rezultirati velikom razlikom finalnog stanja. Ovih pet kvaliteta koje uključuju bimodalnost, iznenadni prijenosi, histereza, nepristupačnost i divergencija, vezane su jedna za drugu samim modelom. Ako je jedna od njih očigledna u procesu, treba potražiti druge četiri, te ako se nađe više od jedne, onda bi se proces trebao smatrati kandidatom za opis šiljastom katastrofom.

#### ***4.2. Stroj katastrofe***

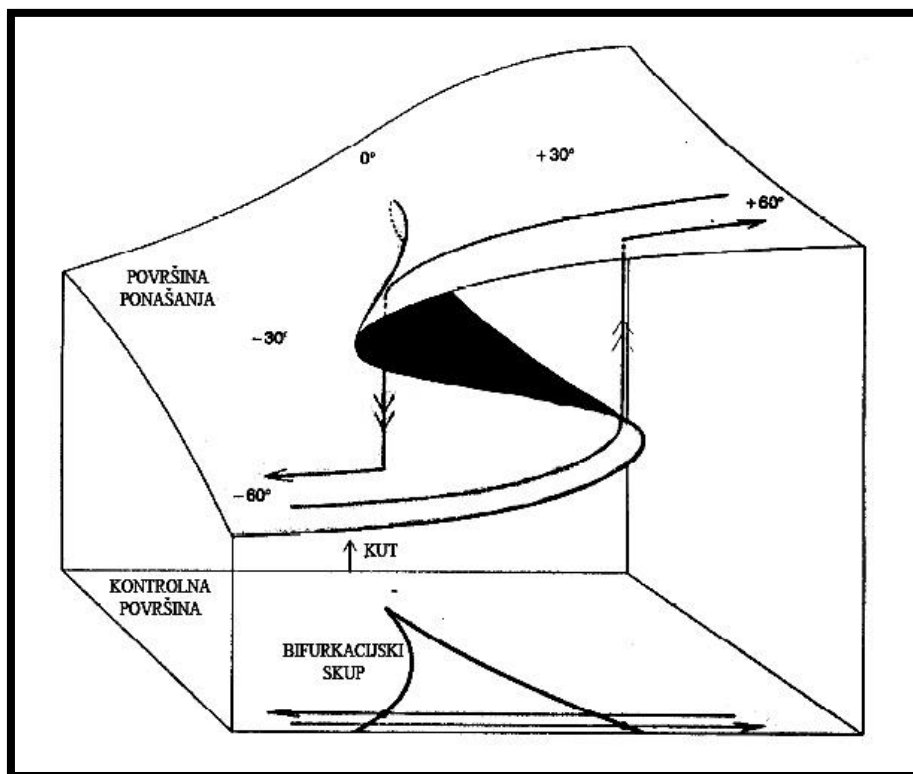
Uređaj koji prikazuje diskontinuirano ponašanje izmislio je matematičar Christopher Zeeman. Sastoji se od rotirajućeg diska i elastične gumice. Na disku postoji fiksna točka na koju je pričvršćena elastična gumica. Isto tako izvan diska odredi se druga fiksna točka za koju je pričvršćen drugi kraj elastične gumice ( slika 22.). Rukom pomičemo slobodni kraj elastične gumice. U većini slučajeva kao rezultat dobijemo glatku rotaciju diska. Postoji područje u kojem jednoliki pokret kontrolne točke može uzrokovati nagli pokret diska. To područje nalazi se u blizini točke koja se nalazi dijametralno suprotno sidrištu fiksirane gumene trake.

Promotrimo sada trenutke u kojima disk poskoči. Označimo položaje kontrolne točke za svaki put kada disk poskoči. Nakon dovoljnog broja označenih položaja kontrolne točke primjećujemo kako se stvorila konkavna krivulja koja ima oblik dijamanta. Ova krivulja je sačinjena od četiri spojena šiljka (slika 22.). Kao i što smo ranije definirali, svaki šiljak predstavlja bifurkacijski set šiljaste katastrofe.



Slika 22. stroj katastrofe

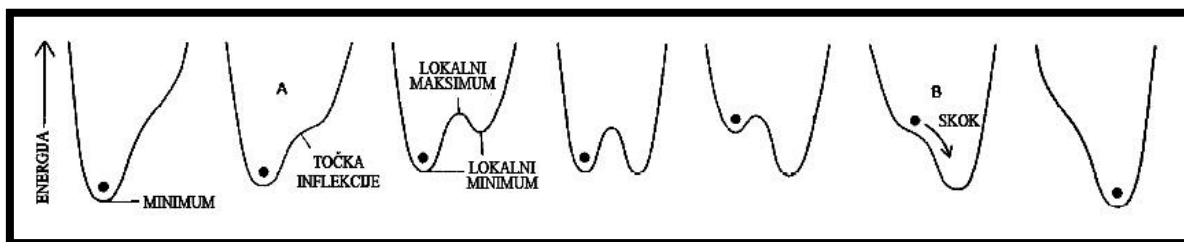
Razmotrimo samo jedan od četiri šiljka, poput onog koji se nalazi najbliže disku. Odgovarajuću površinu ponašanja možemo stvoriti raspoređivanjem krivulje nabora tako da leži izravno iznad šiljka. Za bilo koji položaj koji kontrolna točka poprima izvan šiljka, površina ponašanja ima samo jednu plohu i disk ima samo jedan stabilan položaj. Ako kontrolna točka poprima vrijednosti koje se nalaze unutar šiljka, površina ponašanja tada ima tri plohe. Srednju plohu površine ponašanja moramo isključiti zato što ona odgovara nestabilnoj ravnoteži. Kao rezultat dobijemo dva stabilna položaja diska (graf 3.).



Graf 3. šiljasti model stroja katastrofe

Činjenicu kako ponašanje stroja odgovara ovom modelu možemo provjeriti pomicanjem kontrolne točke slijeva nadesno po grafu. Disk se pomiče vrlo malo i jednoliko sve dok kontrolna točka ne dosegne desni rub šiljka. U tom trenutku točka ponašanja skoči na gornju plohu površine ponašanja te disk naglo zakreće. Pogledajmo sada primjer putanje kontrolne točke u suprotnom smjeru od gore navedenog. Disk se giba jednoliko sve dok kontrolna točka ne dosegne lijevi rub šiljka na kontrolnoj površini. U tom trenutku točka ponašanja skače s gornje na donju plohu površine ponašanja.

Uzrok ovakvog ponašanja stroja katastrofe nalazimo u tendenciji svih fizičkih sustava zauzimanju stanja minimalne energije. Energija koja će se minimalizirati jest potencijalna energija pohranjena u gumenim trakama te se stoga disk rotira sve dok napetost dvije gumene trake ne dođe do minimuma. U tom položaju stroj katastrofe doseže stabilnu ravnotežu. Stroj mora ostati u ravnotežnoj točki, osim u slučaju kada se energija pridodaje sustavu. Proces koji sustav zadržava u ravnotežnoj točki naziva se dinamika. Dinamiku prikazujemo nizom grafova (slika 23.). Svaki graf prikazuje za određenu poziciju kontrolne točke pripadajuću energiju stroja za sve moguće rotacije diska.

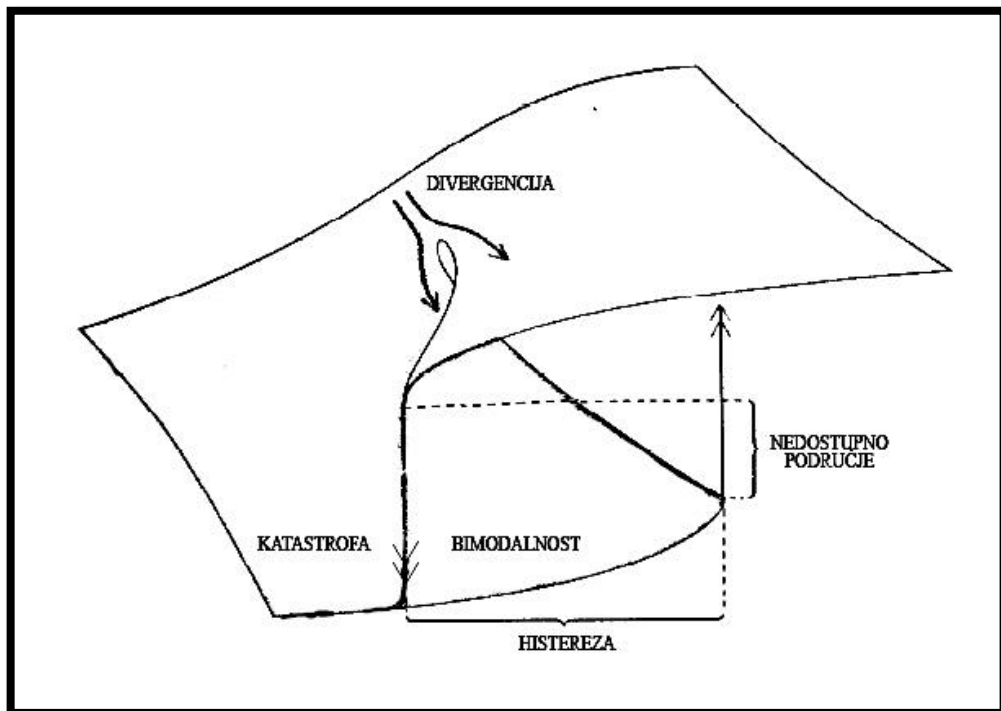


Slika 23. funkcija energije

Sve dok kontrolna točka poprima vrijednosti koje se nalaze izvan šiljka kontrolne površine graf poprima oblik glatke krivulje s jednim minimumom, dolom. U ovom slučaju stroj uvijek poprimi u vrlo kratkom vremenskom roku stanje minimalne energije na dnu dola. Kako kontrolna točka ulazi u unutrašnjost šiljka, tako se pored izvornog, razvija i drugi dol ili lokalni minimum energije. Drugi dol postepeno postaje sve dublji, no stroj ne može ući u njega zato što dva dola ostaju odvojena malim vrhom. Taj mali vrh predstavlja lokalni maksimum energije. Stanje stroja se ne mijenja sve dok se prvi dol ne sjedini s lokalnim maksimumom. Stroj zadržava postojeće stanje sve dok kontrolna točka ne dosegne slijedeću liniju šiljka kontrolne površine. Tada dolazi do manifestacije dinamike koja postojeće stanje stroja velikom brzinom prenosi do nove jedinstvene pozicije

minimalne energije.

Pet svojstava karakteriziraju fenomen koji se može opisati šiljastom katastrofom. Ponašanje je uvijek u nekom dijelu svog raspona bimodalno te se primjećuju iznenadni skokovi između dva različita načina ponašanja. Skok s gornje plohe površine ponašanja na donju plohu ne odvija se na istom položaju kao i skok s donje plohe površine ponašanja na gornju. Opisani efekt naziva se histereza. Između gornje i donje plohe površine ponašanja nalazi se nedostupno područje. Srednja ploha, koja predstavlja najmanje vjerojatno ponašanje, izostavljena je kako bi skokovi između dva sloja površine ponašanja bila jasnije prikazana. Srednji sloj jasno je prikazan na grafu: graf 4. Šiljasta katastrofa implicira mogućnost divergentnog ponašanja.



Graf 4. pet svojstava

Značaj dinamike postaje očit kada se otkrije da je površina ponašanja šiljaste katastrofe graf svih minimuma i maksimuma funkcije energije. Izvan šiljka postoji samo jedan energetski minimum dok maksimumi ne postoje. Površina ponašanja stoga ima samo jednu plohu. Na krivulji koja formira šiljak stvaraju se novi lokalni minimum i maksimum, te se formiraju dvije plohe novih oblika na površini ponašanja. Stanje stroja nikad ne može ostati stabilno ako poprima vrijednosti koje se nalaze na srednjoj plohi površine ponašanja

zato što ta pozicija označava položaj maksimalne energije (graf 3.). Matematički postupak koji se koristi za crtanje površine ponašanja proizlazi iz elementarnog računa. Površina ponašanja graf je svih točaka gdje je prva derivacija funkcije energije jednaka nuli. Graf funkcije energije horizontalan je samo na minimumima i maksimumima i na točkama infleksije. Minimumi čine stabilne gornje i donje plohe, maksimumi čine nestabilnu srednju plohu, a točke infleksije čine krivulju nabora koja označava granice ploha.

Kao što smo u gornjem dijelu teksta objasnili ponašanje vezano za šiljak koji je bliži disku, mogli bismo na isti način analizirati i ponašanje povezano sa šiljkom koji je najudaljeniji od diska. Ključna razlika ova dva promatrana šiljka na suprotnim stranama je ta što je njihova funkcija energije obrnuta. Unutar šiljka postoje dvije točke koje odgovaraju dvama položajima diska pri kojima disk posjeduje maksimalnu energiju, te samo jednu točku minimalne energije. Dinamika prisiljava stroj da ostane u jedinom stabilnom položaju minimalne energije. Na površini ponašanja su i položaji minimuma i maksimuma obrnuti. Srednja ploha predstavlja stabilne minimume energije, dok gornje i donje plohe predstavljaju nestabilne maksimume. Točka ponašanja stoga može ležati samo na srednjoj plohi. Graf koji prikazuje gore opisani model naziva se dualna šiljasta katastrofa.

Objašnjenje uspjeha teorije katastrofe možemo potražiti u analizi ponašanja stroja katastrofe. Ključni koncept je koncept dinamike, koji ima dvije funkcije.

Prvo, točku ponašanja zadržava čvrsto na gornjoj ili donjoj plohi površine ponašanja. Uslijed zakretanja diska, dinamika oštro vraća disk u ravnotežni položaj.

Drugo, kada točka ponašanja prijeđe krivulju nabora, dinamika je ta koja uzrokuje katastrofalni skok s jedne plohe na drugu.

#### **4.3. Psihološki modeli i atraktori**

Iste principe možemo primijeniti i na psihološke modele. Funkcije vjerojatnosti u psihološkim modelima analogne su funkciji energije u modelu stroja katastrofe, osim što su uloge minimuma i maksimuma obrnute. Gornje i donje plohe površine ponašanja sačinjene su od svih točaka koje predstavljaju maksimalnu vjerojatnost, a srednja ploha je

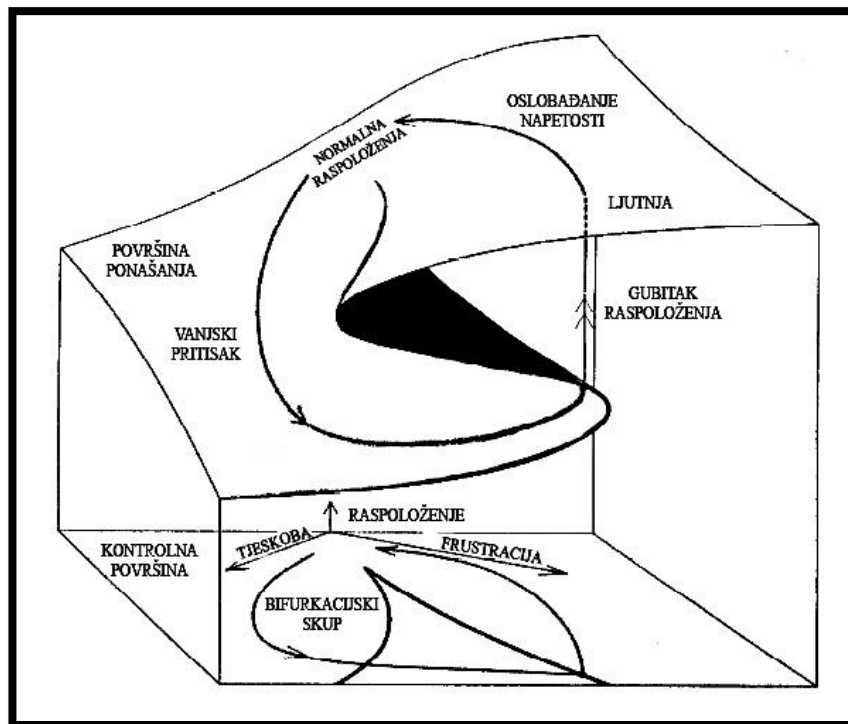
sastavljena od onih točaka koje predstavljaju minimalnu vjerojatnost. Energetski minimum u fizičkom sustavu poput stroja katastrofe poseban je slučaj koncepta koji se zove atraktor. U ovom slučaju to je najjednostavniji oblik atraktora, jedno stabilno stanje, a njegov učinak možemo usporediti sa učinkom magneta. Atraktor privlači prema sebi sve što se nalazi unutar njegovog raspona utjecaja. Pod utjecajem atraktora sustav preuzima stanje statičke ravnoteže. U psihološkim modelima također moraju postojati atraktori, iako ne moraju biti jednostavni kao ovaj. Atraktor sustava koji je u dinamičkoj ravnoteži sastoji se od cijelog ciklusa stabilnog stanja kroz koja sustav prolazi. Atraktor kao koncept koristi se u matematici, fizici, astronomiji, psihologiji, ekonomiji, dok su široj javnosti postali poznati zahvaljujući teoriji determinističkog kaosa. Razvoj informatičke znanosti, pogotovo informatičkih alata koji se koriste u grafičkoj industriji omogućili su grafički prikaz atraktora. Neke od prekrasnih grafičkih animacija fraktala i atraktora imaju status umjetničkih djela. Jedan od najpoznatijih primjera koji se koristi za objašnjenje koncepta atraktora jest savijena žica violine. Savijena žica violine ponavlja isti ciklus položaja iznova i iznova na rezonantnoj frekvenciji te taj ciklus položaja predstavlja atraktor savijene žice.

Također atraktori se pojavljuju i u medicini, posebice u matematičkim modelima funkcioniranja mozga. Treba naglasiti kako zbog same složenosti procesa koji mozak kao sustav obavlja, te zbog velikog broja vanjskih utjecaja, ova grana medicine predstavlja veliki izazov u mnogim znanstvenim istraživanjima. Bez obzira što govorimo o velikom i u potpunosti ne istraženom području, poznato je da su milijarde neurona organizirani u velikim, međusobno povezanim mrežama koje čine dinamički sustav. Upravo nam ta činjenica daje mogućnost uporabe gore navedenih modela u svrhu istraživanja funkcioniranja mozga. Ne zaboravimo također kako stanja ravnoteže bilo kojeg dinamičkog sustava možemo predstaviti atraktorima. Neki od atraktora mogu biti pojedinačna stanja, no za druge je vjerojatnije da su stabilni ciklusi stanja ili analozi viših dimenzija stabilnih ciklusa. Budući da različite komponente mozga utječu jedna na drugu, atraktori se pojavljuju i nestaju. U određenim slučajevima pojavljivanje i nestajanje atraktora se može odvijati u kratkim vremenskim intervalima, dok u nekim drugim slučajevima ti vremenski intervali mogu biti vrlo dugi. Kako jedan atraktor ustupa mjesto drugome, stabilnost sustava može ostati očuvana. Često se pak događa da stabilnost sustava biva narušena. Ukoliko se dogodi narušavanje stabilnosti sustava tada dolazi do katastrofalnog skoka u stanju mozga.



Thomova teorija navodi da su svi mogući iznenadni skokovi između najjednostavnijih atraktora, koji sami po sebi predstavljaju točke statičke ravnoteže, određeni elementarnim katastrofama. Stoga, da dinamika mozga ima samo točkaste atraktore, mogla bi imati značajke samo elementarnih katastrofa. To ovdje nije slučaj. Jedan očiti dokaz za kompliciranije atraktore jest alfa ritam moždanih valova, ciklički atraktor. Pravila koja vladaju skokovima između cikličkih atraktora i onih viših dimenzija još nisu poznata. Ona moraju uključivati ne samo elementarne katastrofe nego i generalizirane katastrofe te je njihovo proučavanje danas aktivno područje istraživanja u matematici. Stoga još nema kompletne teorije za opis cijele moždane dinamike. Ipak, elementarne katastrofe značajni su modeli nekih moždanih aktivnosti. Modeli su eksplicitni i ponekad razoružavajuće jednostavni, no snažna matematička teorija na kojima se temelje implicitno omogućava kompleksnost živčane mreže.

Promotrimo primjer katarzičnog oslobađanja samosažaljenja koje je također opisano kao šiljasta katastrofa u kojoj su tjeskoba i frustracija konfliktni faktori koji utječu na raspoloženje (graf 5.). Povećanjem tjeskobe inducira se samosažaljenje koje može biti potaknuto nekim događajem, poput sarkastičnog komentara, koji uzrokuje povećanje frustracije. Kako kontrolna točka prelazi šiljak, raspoloženje katastrofalno prelazi iz samosažaljenja u ljutnju. Smanjenjem razine nastale napetosti oslobađa se put smirenijim emocionalnim stanjima.



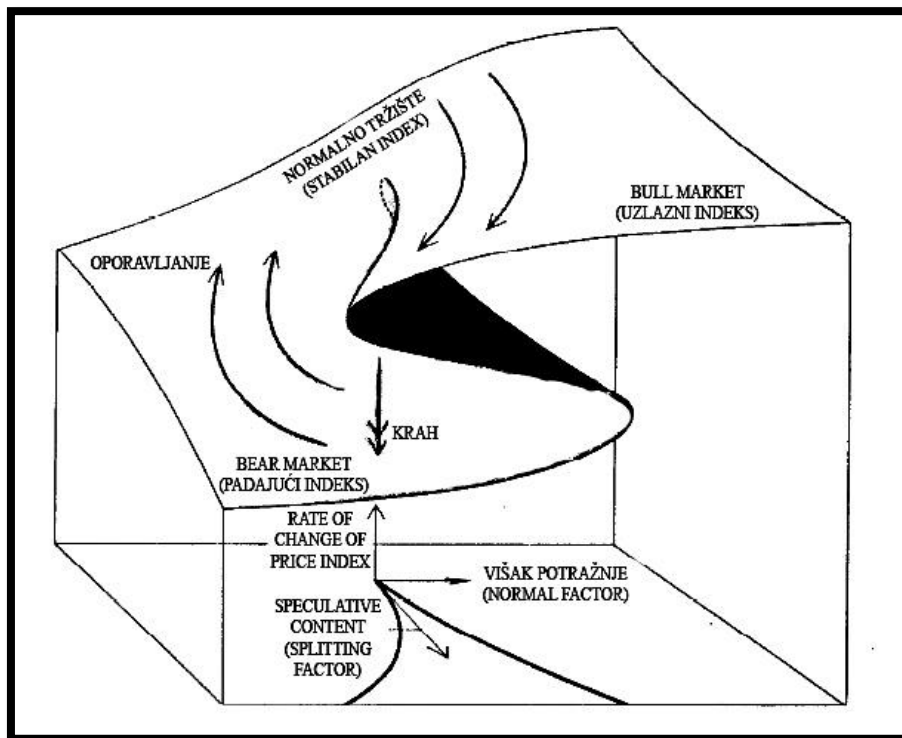
*Graf 5. katarzično oslobađanje samosažaljenja*

Koncept atraktora moždane dinamike pruža ono potrebno u našem modelu ljudskog i životinjskog ponašanja. Neuronski mehanizam odgovoran za raspoloženje poput samosažaljenja nije poznat, no postojanje tog raspoloženja kao stabilnog stanja implicira da je taj mehanizam atraktor. Uistinu, u modelu samosažaljenja svaka točka na površini ponašanja odgovara atraktoru za sustav u mozgu koji određuje raspoloženje. Ako se taj živčani sustav nekako poremeti, brzo se vraća pod utjecajem atraktora, na površinu ponašanja, baš kao što se uređaj katastrofe vraća u ravnotežu. Dolazi do naglih promjena raspoloženja kada se stabilnost atraktora raspadne, dopuštajući sustavu koji određuje raspoloženje da dođe pod utjecaj drugog atraktora, prema kojem se odmah kreće. Putem ovog hipotetskog mehanizma teorija katastrofe pruža model ne samo izraženog ponašanja nego i aktivnosti mozga koja usmjerava ponašanje. Model se najprikladnije može primijeniti na primitivne regije poput srednjeg mozga gdje su mreže visoko međusobno povezane te se stoga mogu ponašati kao cjelina, kod filogenetski mlađe moždane kore uzorci aktivnosti mnogo su kompleksniji. Psihički modeli koje smo proučili uvelike se tiču osjećaja ili raspoloženja te se smatra da je dio srednjeg mozga koji se zove limbički sustav primarno odgovoran za stvaranje raspoloženja.

#### 4.4 Burza

Još jedan kandidat za analizu šiljaste katastrofe jest ponašanje burze, gdje pojmovi „bikovo tržište“ i „medvjede tržište“ ukazuju na očitu bimodalnost. Kraha ili kolaps tržišta je objašnjen u katastrofalnom skoku s jedne plohe površine ponašanja na drugu (graf 6.). U konstrukciji ovakvog modela potrebna je manja modifikacija. U ovom slučaju kontrolne osi ne divergiraju na svakoj strani šiljka kao što je slučaj u prethodnim primjerima. Umjesto toga jedna os dolazi ravno na graf gdje prepolovljava šiljak, dok je druga os okomita na šiljak. Parametar koji prepolovljava šiljak zove se faktor razdvajanja zato što njegovo povećanje uzrokuje progresivno veću divergenciju između gornjih i donjih ploha. Drugi je faktor normalni faktor jer se na stražnjoj strani površine ponašanja ponašanje povećava kontinuirano s njim. U modelu burze normalan faktor je višak potražnje za dionicama. Može se činiti da je možda teže identificirati faktor razdvajanja, no on može biti povezan s količinom dionica koje drže špekulanti u usporedbi s onima koje drže dugoročni ulagači. Os ponašanja najbolje se mjeri stopom promjene indeksa cijena dionica. Kako bismo mogli pratiti ovaj model moramo definirati tržišta. Tržište s rastućim indeksom jest bikovo tržište, a njegova točka ponašanja se nalazi na gornjoj plohi površine ponašanja. Padajući indeks karakterizira medvjede tržište, čija se točka ponašanja nalazi na donjoj plohi površine ponašanja.

Sada možemo shvatiti mehanizam kraha. Tržište koje je karakterizirano viškom potražnje i visokim udjelom špekulanata jest bikovo tržište, te je smješteno na gornjoj plohi površine ponašanja. Kraha može biti ubrzan bilo kojim događajem koji potražnju smanjuje dovoljno da gurne točku ponašanja preko linije nabora. Što veći udio tržišta drže špekulanti, to je teži kraha. Mogli bismo se zapitati zašto je za naknadni oporavak obično potreban veliki vremenski period te zašto ne postoji neki oblik „kraha prema gore“ koji bi na isti ili sličan način transferirao točku ponašanja sa plohe medvjedeg tržišta na plohu bikovog. Vjerojatan odgovor na postavljeno pitanje jest da os ponašanja (stopa promjene indeksa) utječe na kontrolne parametre putem povratne veze. Padajuće, medvjede tržište obeshrabruje špekulaciju, no nakon nekog vremena rezultirajuća podcijenjenost potiče dugoročna ulaganja. Kao posljedica stanja koje se događa nakon kraha faktor razdvajanja se smanjuje i tržište se na grafu vraća do regije gdje površina ulaganja više nije bimodalna. Kako samopouzdanje raste tako proizvodi višak potražnje, indeks raste, no polako i glatko, bez katastrofa. Špekulacija tada biva potaknuta, a ulaganje obeshrabreno te je sustav spreman za još jedan ciklus booma i kraha.



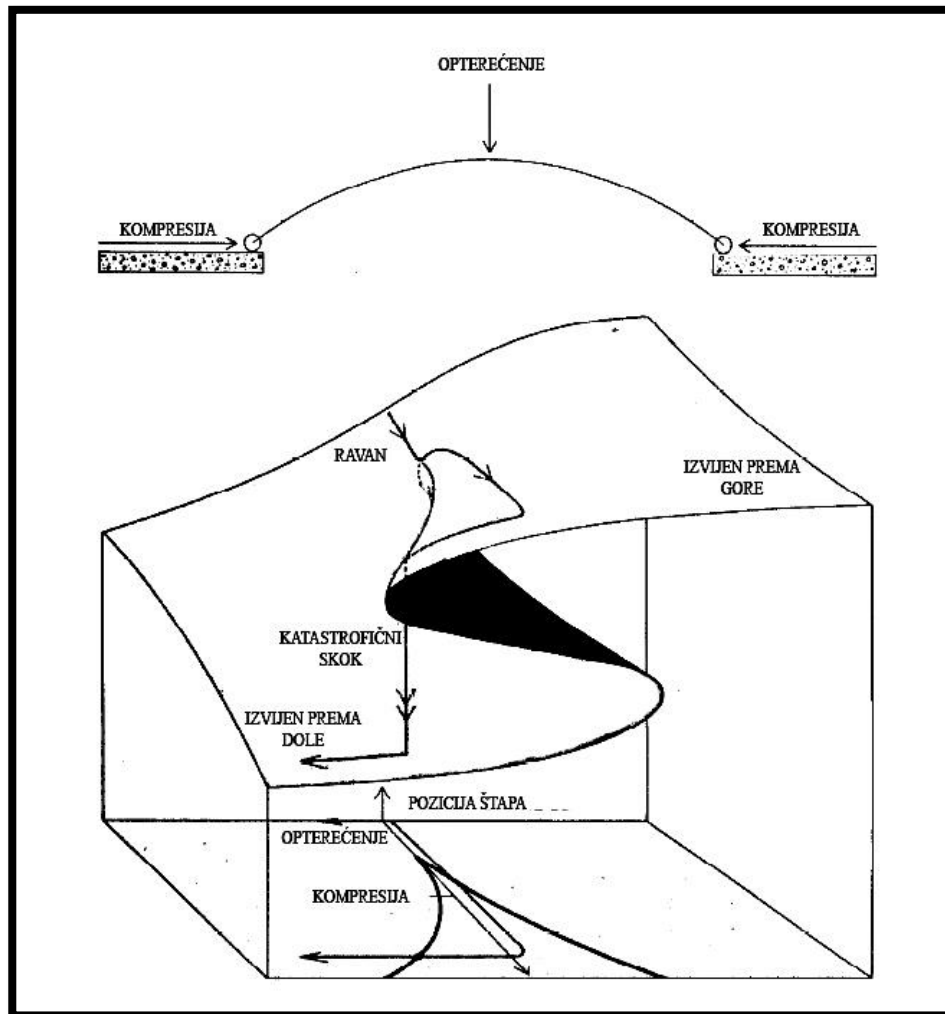
graf 6. Ponašanje tržišta

Ponašanje tržišta opisano je modelom u kojem za kontrolne parametre uzimamo višak potražnje za dionicama i udio tržišta koji drže špekulanti u odnosu na onaj koji drže ulagači. Samo ponašanje mjeri se stopom na kojoj indeks cijena dionica raste ili pada. Kontrolni faktori orijentirani su ne kao konfliktni faktori, nego kao normalni faktori i faktori razdvajanja. Pad s gornje plohe na donju predstavlja krah; polagani oporavak postiže se putem povratne informacije o indeksu cijena na kontrolnim parametrima.

#### 4.5. Izvijanje elastičnog štapa

Kao primjer šiljaste katastrofe koju susrećemo u fizici izabrao sam primjer izvijanja elastičnog štapa pod horizontalnom kompresijom i vertikalnim opterećenjem, izvedenog iz rada Leonharda Eulera iz 18. stoljeća. Kompresija je faktor razdvajanja, opterećenje normalni faktor. Povećanje kompresije uzrokuje da se točka ponašanja pomiče prema naprijed na grafu u područje šiljka gdje štap ima dva stabilna stanja. Jedno od stabilnih stanja je izvijeno prema gore dok je drugo izvijeno prema dolje. Promotrimo početno stanje u kojem je štap izvijen prema gore (graf 7.). U tom slučaju povećanje opterećenja

može pomaknuti točku ponašanja preko šiljka, uzrokujući da štap odjednom naglo padne prema dolje. Učinak se može vidjeti jednostavnim eksperimentom sa komadom kartona postavljenim među prstima. U slučaju kada se opisani primjer dogodi nosaču koji podupire most, rezultat je katastrofa kako u matematičkom smislu tako i u realnim životnim situacijama.



Graf 7. Izvijanje elastičnog štapa kontrolira se opterećenjem i kompresijom, koji su normalni faktor i faktor razdvajanja u katastrofi šiljka. Ako je štap ravan, povećanje kompresije tjera je da se savije prema gore ili dolje. Ako se savije prema gore, iduće povećanje opterećenja vodi kontrolnu točku preko šiljka, uzrokujući katastrofalni pokret prema dolje

#### 4.6. Klasifikacija katastrofa

Promotrimo sada primjer u kojemu svodimo graf na dvije dimenzije. Tada kao rezultat dobivamo još jednostavniji model: katastrofu nabora. U katastrofi nabora postoji samo jedan kontrolni parametar. Kontrolno područje prestaje biti kontrolna površina i postaje ravna crta. Bifurkacijski skup, šiljak kojeg smo proučavali na našim dosadašnjim grafovima postaje jedna točka na kontrolnoj liniji. Područje ponašanja više nije površina ponašanja već je parabola, čija jedna polovica predstavlja stabilna stanja, a druga polovica nestabilna stanja. Dva područja razdvaja točka nabora koja se nalazi neposredno iznad točke bifurkacije.

Katastrofu nabora možemo smatrati poprečnim presjekom linije nabora šiljaste katastrofe. Šiljak pak možemo smatrati nakupinom mnogih katastrofa nabora, zajedno s jednom novom singularnom točkom na ishodištu. Po istom uzorku možemo konstruirati i kompliciranije katastrofe viših dimenzija. Svaka od novokonstruiranih katastrofa sastoji se od svih katastrofa nižeg reda zajedno s jednom novom singularnosti na ishodištu.

Jedinstvenu četverodimenzionalnu katastrofu možemo konstruirati tako da kontrolno područje učinimo trodimenzionalnim, dok područje ponašanja ostavimo jednodimenzionalno. U tom slučaju površina ponašanja naše šiljaste katastrofe postaje trodimenzionalna hiperpovršina te umjesto nabora u sredini površine dobijemo konfiguraciju koju je vrlo teško vizualizirati. Bifurkacijski skup koji nam je ranije bio sastavljen od krivulja koje tvore šiljak u dvije dimenzije sada je sastavljen od površina u tri dimenzije. Nova singularnost pojavljuje se u ishodištu, koja se zove katastrofa lastinog repa. Nemoguće je nacrtati potpunu katastrofu lastinog repa jer ne možemo crtati četverodimenzionalne slike. Možemo, međutim, nacrtati njezin bifurkacijski set, koji je trodimenzionalan, i iz tog crteža moguće je izvesti neku geometrijsku intuiciju o lastinom repu. Pri izvođenju geometrijske intuicije o lastinom repu iz navedenog crteža mogli bismo se voditi analogijom opisa šiljaste katastrofe crtanjem bifurkacijskog seta (šiljka) u dvije dimenzije, imajući na umu da je površina ponašanja bimodalna preko unutrašnjosti šiljka. Ime katastrofi lastinog repa predložio je francuski Bernard Morin zato što bifurkacijski set donekle i izgleda tako.

Ako sada krenemo korak dalje i dodamo još jedan kontrolni parametar, stvaramo peterodimenzionalnu katastrofu. Nabor, šiljak i lastin rep ponovno se pojavljuju kao presjeci, a nova singularnost povezana je s „džepom“ stvorenim preklapanjem nekoliko površina. Zbog oblika nastalog džepa, ili njegovih presjeka, predloženo je da se ova

katastrofa naziva katastrofa leptira.

U leptiru je čak i bifurkacijski set četverodimenzionalan te se stoga ne može crtati. Može se ilustrirati samo putem dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih presjeka.

Jedini način da se ilustriraju preostale dvije katastrofe jest putem presjeka (slika 20.).

Njihovi bifurkacijski skupovi imaju čak i više od tri dimenzije.

Postoje još i dvije peterodimenzionalne katastrofe. Formirane su kada kontrolni prostor ima tri dimenzije i prostor ponašanja ima dvije dimenzije. Zovu se hiperbolična umbilička i eliptična umbilička katastrofa. Kao što je slučaj i sa lastinim repom, njihovi bifurkacijski skupovi se sastoje od površina sa šiljastim rubovima te se mogu nacrtati budući da su trodimenzionalni. Napokon, šesterodimenzionalna katastrofa koju stvaraju četverodimenzionalni kontrolni prostor i dvodimenzionalni prostor ponašanja zove se parabolično umbilička katastrofa. Njezina je geometrija kompleksna te se također mogu nacrtati određeni dijelovi bifurkacijskog seta.

Povećavanjem dimenzija kontrolnog prostora i prostora ponašanja može se stvoriti beskonačna lista katastrofa. Ruski matematičar V. I. Arnold klasificirao ih je do barem 25 dimenzija. Za modele fenomena koje pronalazimo u stvarnom svijetu, sedam opisanih vjerojatno su najvažnije jer jedino one imaju kontrolno područje koje nema više od četiri dimenzije.

Čak i katastrofe koje se ne mogu nacrtati mogu se upotrijebiti u modeliranju fenomena. Njihova je geometrija potpuno određena i kretanje točke preko površine ponašanja može se analitički proučavati.

katastrofa	# kontrolnih parametara	# varijabla stanja	funkcija energije
nabor	1	1	$\frac{1}{3}x^3 - ax$
šiljak	2	1	$\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$
lastin rep	3	1	$\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$
leptir	4	1	$\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$
hiperbolična	3	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$
eliptična	3	2	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$
parabolična	4	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

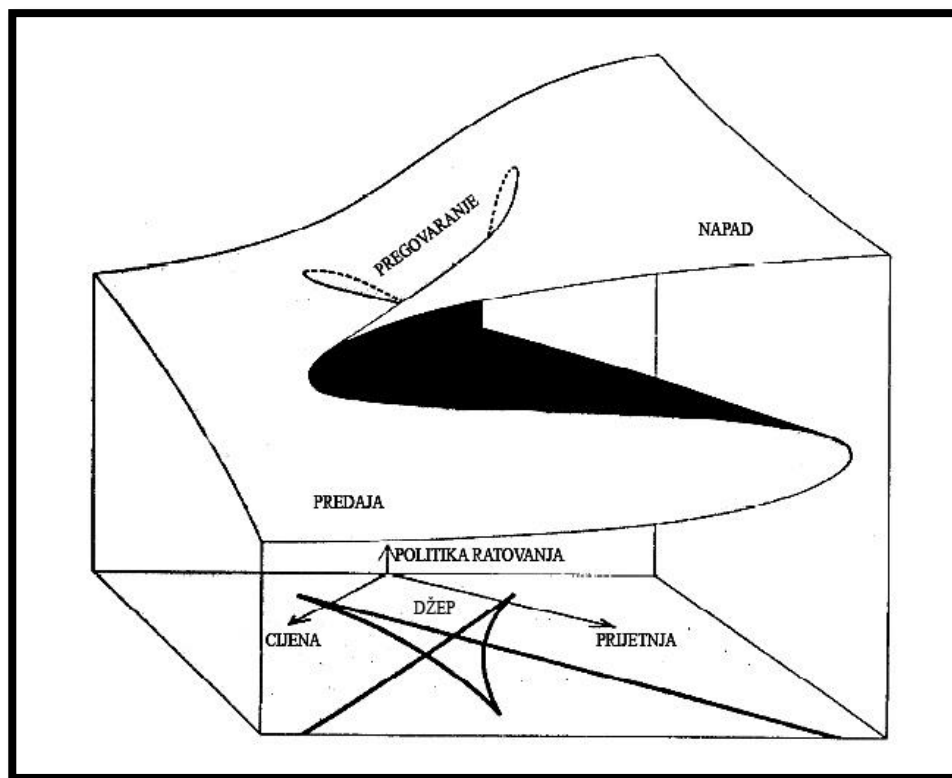
Tablica 1. sedam elementarnih katastrofa

Moć Thomove teorije leži u njezinoj općenitosti i potpunosti. Ako je proces određen minimaliziranjem ili maksimaliziranjem neke funkcije i ako ga ne kontrolira više od četiri faktora, onda bilo koji singularitet rezultirajuće površine ponašanja mora biti sličan jednoj od sedam katastrofa koje sam opisao. Ako procesom upravljaju dva kontrolna faktora, onda površina ponašanja može imati nabore i šiljke. Teorem u biti navodi da je, u bilo kojem procesu koji uključuje dva uzroka, šiljasta katastrofa najkompliciranija stvar koja se može dogoditi grafu. Dokaz teorema je previše tehnički zahtjevan i predug da bi se ovdje prikazao, no kao što smo u početku naveli njegove su posljedice izravne. Svaki put kada promjenjiva sila ima učinak koji se iznenada mijenja, proces se mora opisati katastrofom.

#### 4.7. Leptirova katastrofa

Nakon šiljaste katastrofe, katastrofa s najširim spektrom primjene je leptirova katastrofa. Baš kao što bimodalno ponašanje određuje šiljasti model, tako i trimodalno ponašanje određuje leptir. U ranije opisanom šiljastom modelu politike rata, naprimjer, gdje je javno mišljenje podijeljeno između „golubica“ i „jastrebova“, model leptira omogućava nastajanje kompromisnog mišljenja koje favorizira pregovore. Novi način ponašanja nastaje kao nova ploha površine ponašanja, glatko rastući sa stražnjeg dijela pregiba ( graf 8.).





Graf 8. Leptirova katastrofa

Politika ratovanja opisana leptirovom katastrofom omogućava nastajanje kompromisne opcije modela razvoja politike rata. U leptiru su potrebna četiri kontrolirajuća parametra, no ovdje su prikazana samo dva, prijetnja i trošak, te se smatra da druga dva ostaju konstantna. Bifurkacijski skup predstavlja presjek, kompleksna krivulja s tri šiljka i „džepom“ u sredini. Na površini ponašanja iznad džepa nalazi se nova ploha koja pruža novi, srednji način ponašanja. Kada su i prijetnja i trošak rata visoki, model šiljka dopušta samo ekstremne položaje koji zagovaraju napad ili predaju. Nova ploha u modelu leptira predstavlja kompromisno rješenje koje se zalaže za pregovore.

Učinak faktora leptira je stvaranje trećeg stabilnog načina ponašanja. Da bi se katastrofa leptira nacrtala, dva od četiri parametra moraju se potisnuti te se obično biraju faktor odstupanja i faktor leptira. No njihov utjecaj na graf ne može se ignorirati. Jedan učinak faktora odvajanja je smanjenje jedne strane džepa dok ne nestane u katastrofi lastinog repa. Faktor odvajanja stoga ima tendenciju uništiti kompromis. S obzirom na to da faktor leptira kontrolira rast srednje plohe ponašanja, povećava stabilnost kompromisa.

#### **4.8. Anorexia Nervosa**

Druga primjena leptirove katastrofe jest anorexia nervosa. Živčani poremećaj od kojeg uglavnom pate adolescentice i mlade žene kod kojih se dijeta razvija u opsesivno gubljenje apetita. Model je razvijen u suradnji E.C. Zeemana i J. Hevesijem, britanskim psihoterapeutom koji je uveo terapiju hipnozom u liječenje anoreksije. U istraživanju u kojem je sudjelovalo 1000 pacijenata s anoreksijom jedino su njegovi pacijenti izjavili da su potpuno izliječeni.

U početnoj fazi anoreksije potpuni gubitak apetita može dovesti do izgladnelosti i ponekad do smrti. Kako vrijeme prolazi, stavovi pacijentice prema hrani i njezino ponašanje postaju sve čudniji. Nakon dvije godine obično se razvije druga faza, bulimija, tijekom koje žrtva naizmjenice ne jede i prejeda se. Bimodalno ponašanje ove druge faze ukazuje na šiljastu katastrofu. Osoba s anoreksijom uhvaćena je u krug histereze, skačući između dva ekstrema te nema pristup normalnom ponašanju. Teorija katastrofe ukazuje i na teoretski lijek koji kaže da ako bi se daljnja bifurkacija mogla inducirati prema katastrofi leptira, tada bi se mogao stvoriti novi put do normalnosti. Specifičnost ovog modela je ekstremno ponašanje pacijenta, koje se kreće od nekontroliranog unosa hrane preko normalnog stadija do sitosti i opsesivnog gubljenja apetita. Kao i kod modela agresije, brinu nas emocionalna stanja koja vjerojatno nastaju u limbičkom sustavu. Psihološki dokazi ukazuju na to da varijabla ponašanja može biti mjera relativne težine koju limbički sustav pruža za informacije koje dolaze iz tijela, suprotno onima iz moždane kore. Kod normalne osobe ove informacije mogu biti na neki način balansirane, no kod osobe koja pati od anoreksije dominiraju jedna ili druga.

Među kontrolnim parametrima normalni faktor je glad, koja kod normalnih ljudi vlada ritmičkim ciklusom između normalne prehrane i sitosti. Faktor razdvajanja je stupanj abnormalnosti stavova koje osoba koja pati od anoreksije ima prema hrani. Abnormalnost postojano raste kako njezino stanje postaje sve gore. Dijete postaju teže, cijele se skupine hrane eliminiraju; ugljikohidrate prvo izbjegavaju, a onda ih se aktivno boje. Faktor odstupanja na grafu leptira jest gubitak samokontrole, što se može mjeriti gubitkom kilograma. U prvoj fazi poremećaja stav osobe koja boluje od anoreksije već je

diskutabilan, no drži se pod kontrolom. Rezultat toga jest da je zarobljena na donjoj plohi površine ponašanja.

Llimbički sustav ostaje u stanjima koja odgovaraju duševnom stanju odbijanja hrane, čak i onda kada jede svoje minimalne obroke.

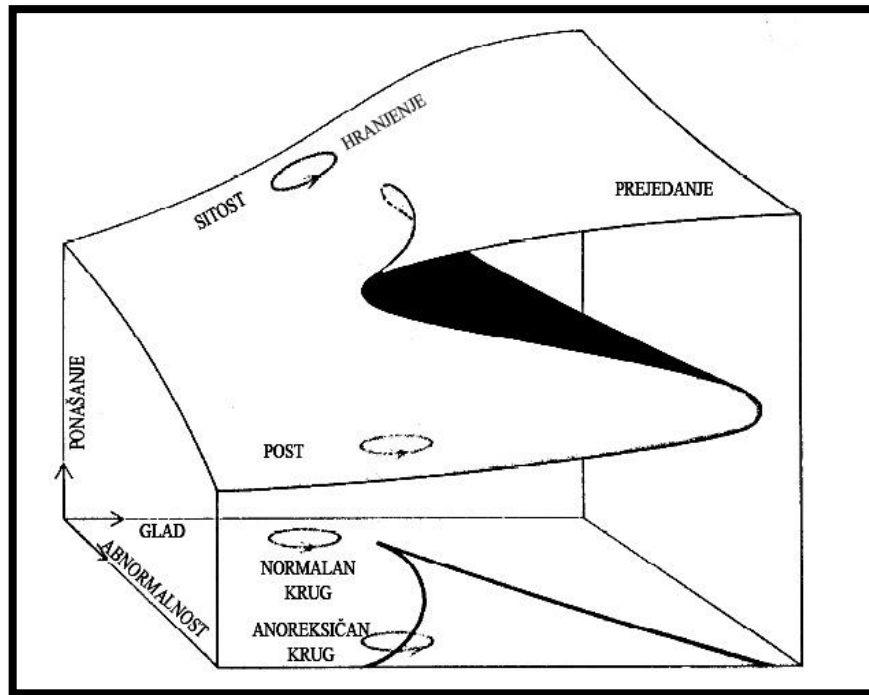
Kako osoba koja boluje od anoreksije mršavi, ona tako gubi i kontrolu te se faktor odstupanja povećava. Posljedica je micanje šiljka prema lijevoj strani grafa ako se pomakne dovoljno daleko. Desna strana šiljka presijeca ciklus anoreksije, donoseći iznenadni početak druge faze. Sada osoba koja boluje od anoreksije više nije zarobljena u ciklusu stalnog odbijanja hrane nego je uhvaćena u ciklusu histereze, skačući s donje plohe na gornju te opet natrag. Riječima tipične osobe koja boluje od anoreksije, katastrofalni skok od odbijanja hrane do prejedanja dogodi se kada se „pusti“ i bespomoćno gleda dok „čudovište unutar nje“ proždire hranu nekoliko sati, nekad i povraćajući. Katastrofalni povratak na stadij kada odbija hranu dolazi kada je obuzmu iscrpljenost, gađenje i poniženje, iskustvo koje mnoge osobe koje pate od anoreksije zovu „knockout“. Razdoblje nejedenja koje slijedi nakon „nokauta“ u ciklusu histereze drugačije je od stalnog odbijanja hrane prve faze. Leži na drugačijem položaju na osi ponašanja i bolje bi bilo da se zove pročišćavanje. Limbičkim stanjem vezanim za ranije nejedenje dominiraju informacije iz moždane kore i usmjerene su prema zabrani unosa hrane. Tijekom prejedanja limbičkim sustavom dominiraju informacije iz tijela. Limbičkim stanjem temeljenim na pročišćivanju opet dominiraju moždani podražaji, no postoji i tjelesna komponenta koja je usmjerena prema tome da se tijelo riješi kontaminacije.

Terapija hipnozom koju koristi Hevesi ohrabruje pacijenta, smanjuje njezinu nesigurnost i time joj omogućava da se opet počne normalno ponašati. Osobe koje pate od anoreksije često spavaju na mahove, a kad su budne, proživljavaju razdoblja slična transu koja se događaju prirodno. Terapeut terapiju gradi na tim činjenicama. Hipnoza može predstavljati treće stanje limbičkog sustava u inače nepristupačnoj zoni između stanja nekontroliranog unosa hrane i pročišćavanja. Kada pacijentica ne jede, gleda na vanjski svijet s tjeskobom, a kada se prejeda, preplavljena je tim svijetom. Suprotno tome tijekom hipnoze pacijentica je izolirana što omogućava situaciju u kojoj joj je um slobodan i od hrane i od planova kako da je izbjegne. Samo u takvim uvjetima jemuće ohrabrenje Ohrabrenje postaje faktor leptira u modelu. Stvara novu plohu površine ponašanja koja leži između druge dvije plohe i koja s vremenom daje pristup stabilnoj, normalnoj regiji iza

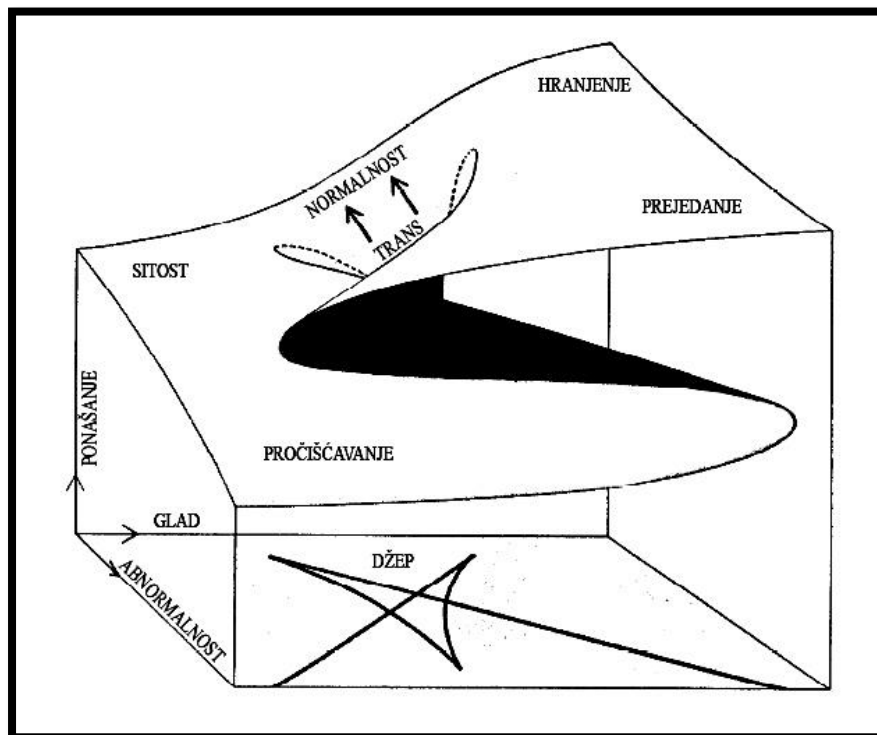
šiljka. Budući da se terapija obično odvija tijekom dijela ciklusa u kojem ne jede, ulazak u hipnozu je katastrofalni skok s donje plohe na srednju plohu. Izlazak iz hipnoze je još jedna katastrofa koja može pacijenta odvesti na donju ili gornju plohu. Nakon otprilike dva tjedna terapije i tijekom sedme sesije hipnoze nenormalni stavovi pacijentice obično se katastrofalno slome i osobnost se ponovno stopi u jednu jedinstvenu. Kada se pacijentica probudi iz hipnoze, zna to spominjati kao „trenutak ponovnog rođenja“ te otkrije da može ponovno jesti bez straha od prejedanja. Čini se da je hipnoza ponovno otvorila put u mozgu do balansiranijih limbičkih stanja tako da pacijent opet dobije pristup normalnom ponašanju. Slijedeće sesije hipnoze pojačavaju iskustvo.

Ovdje predstavljeni model anoreksije nepotpun je iz više razloga. Uklonjen je dodatni kontrolni faktor, dremljivost, koji vlada bihevioralnom razlikom između budnog stanja i sna te povezane katastrofe utonuća u san i buđenja. Kao posljedica, put od hipnoze do normalnosti u modelu obmanjujući je jer ispušta katastrofu buđenja. Nije se raspravljalo ni o drugoj polovici modela koja se tiče osobnosti za razliku od ponašanja i koja objašnjava eskalaciju poremećaja, njegovu rigidnost, stabilnost nenormalnih stavova i slom te stabilnosti u trenutku izlječenja.

Jedna od jačih strana modela teorije katastrofe anoreksije jest da objašnjava pacijentov vlastiti opis. Naizgled neshvatljivi uvjeti u kojima neke osobe koje boluju od anoreksije opisuju svoju bolest doimaju se poprilično logično kada se promotre u okviru gabarita katastrofe. Prednost matematičkog jezika u takvim primjenama jest da je psihološki neutralan. Dopušta koherentnu sintezu opažanja koja bi inače izgledala nepovezano.



Graf 9. Anorexia Nervosa



Slika 10. Liječenje anoreksije oslanja se na stvaranje trećeg, srednjeg načina ponašanja. Novo ponašanje moguće je povećavanjem četvrtog kontrolnog parametra leptirove katastrofe, ohrabrivanjem. Ovaj četvrti parametar stvara džep u bifurkacijskom skupu te stoga stvara srednju plohu u površini ponašanja. U sustavu liječenja koje je razvio J. Hevesi, britanski psihoterapeut, ohrabrenje se potiče stavljanjem pacijenta pod hipnozu.

## 5. Zaključak

Raznovrsnost obrađenih primjera u ovom radu na najbolji način prikazuje široki spektar uporabe teorije katastrofe, odnosno modela koji su temeljeni na teoriji katastrofe. Ne samo kako određene pojave možemo opisivati pomoću teorije katastrofe, već također možemo pretpostaviti i daljnji tijek promatranog procesa. Upravo u tome možemo pronaći iznimnu potrebu za modelima temeljenim na teoriji katastrofe. Ekonofizika je vrlo zaslužna za razvoj teorije. U proteklih desetak godina došlo je do velikih financijskih ulaganja koja su omogućila ubrzani razvoj ovakvih i sličnih modela. S obzirom na kompleksnost samog sustava, pružila se prilika koju matematičari i fizičari nisu propustili te su postali glavne karike u lancima financijskog sektora. Isto tako i mladi prilikom odabira studija sve više razmišljaju o novim mogućnostima koje studiranje na našem fakultetu omogućava. Interes za modelima ovog tipa raste iz godine u godinu što samo dokazuje kako će dobro plaćenih radnih mjesta za mlade koji se odluče za prirodne znanosti biti sve više.

## 6. Metodički dio – Modeli u nastavi fizike

U nastavi fizike potrebno je osim opisati prirodnu pojavu i objasniti je, rastumačiti, rasvijetliti i prezentirati je učenicima. Pri tom procesu važnu ulogu u nastavi fizike ima uporaba modela i modeliranje (proces konstruiranja modela). Također vrlo važno mjesto zauzima i sudjelovanje učenika u procesu konstruiranja modela kako bi učenici uvidjeli put kojim se došlo do određenih činjenica konzumiranih u nastavi fizike.

Model je zamjenski objekt, odnosno konceptualna prezentacija realne stvari te se kao takav može klasificirati (Gilbert J. K. et al., 2000) za potrebu nastave prirodnih znanosti pri čemu su najvažniji modeli:

- znanstveni
- mentalni
- izraženi
- povijesni
- kurikularni
- nastavni

### *Znanstveni modeli*

Znanstveni model, koji se ponekad naziva konceptualni model i povijesno-znanstveni model, omogućava nam stvaranje pojednostavljene slike određenog prirodnog fenomena, te nam u isto vrijeme daje naglasak na najvažnija svojstva tog određenog fenomena. Kako bismo pronašli zakonitosti neke prirodne pojave potrebno je ustanoviti varijable i odrediti njihovu uzajamnu vezu.

Na temelju pronađene zakonitosti možemo formirati predviđanja o događajima koji se mogu zbiti ukoliko se promatrana prirodna pojava ponovo dogodi u jednakim ili u sličnim uvjetima. Trebalo bismo odgovoriti na pitanje zašto vrijedi baš ta zakonitost i na koji način ćemo objasniti promatranu pojavu. S obzirom na to da su gore navedeni koraci bitno dva različita koraka, primjeri iz povijesti fizike nam jasno pokazuju kako je vremenski period između otkrića fizikalnog zakona i njegovog uspješnog objašnjenja vrlo dugačak, ponekad se na uspješno objašnjenje fizikalnog zakona čekalo i stotine godina. Trebali bismo uzeti u obzir činjenicu kako se ljudsko znanje akumuliralo i nadopunjavalo tijekom povijesti.

Kao primjer možemo navesti plinske zakone za idealni plin, lom svjetlosti, ohmov zakon.

Po podjeli (M. Black, 1962; J. K. Gilbert, R. j. Osborne 1980) znanstvene modele možemo podijeliti na pet karakterističnih tipova:

- razmjerni ili ikonički
- analogni
- matematički
- teorijski
- arhetipski

*Razmjerni modeli* su slični originalu po tome što zadržavaju relativne proporcije u istim omjerima kao i original. Npr. globus, model aviona, model Sunčeva sustava, model kristalne rešetke, model određene molekule itd. S obzirom da su relativno jednostavni i zorni često ih se upotrijebljava na nižim obrazovnim razinama.

*Analogni modeli* vjerno reproduciraju neka svojstva originala na temelju analogije s nekom drugom već objašnjenom pojavom. Oni moraju odgovarati originalu po odabranom skupu svojstava, po strukturi ili po uzajamnim odnosima između nekih pripadajućih veličina.

*Matematički modeli* su oni modeli koji su predočeni matematičkim jednadžbama.

Često dolazi do preklapanja matematičkih i analognih modela. Postoje brojni primjeri u kojima se matematički modeli, koji opisuju različite fizikalne pojave, reprezentirani analognim jednadžbama. U nastavi fizike konstrukcija matematičkog modela trebala bi se provoditi u tri faze:

- 1) Fizikalna pojava svodi se na skupinu oznaka i funkcija tako da svaki simbol reprezentira određeni fizikalni pojam. Postoji jednoznačna korespondencija između pojmova u originalu i simbola u matematičkoj reprezentaciji. Primjenom poznatih fizikalnih zakonitosti razmatrana pojava se svodi na matematičku jednadžbu.
- 2) Traži se rješenje matematičke jednadžbe, a fizikalni način razmišljanja dolazi do izražaja preko određivanja početnih i rubnih uvjeta.
- 3) Završna je faza fizikalna interpretacija dobivenog rješenja.

*Teorijski modeli* najčešće konkretiziraju određene fizikalne pojmove, procese ili sustave.



U nastavi fizike oni imaju veoma važnu ulogu. Kao primjere možemo navesti: silnice kao model fizičkih polja, val kao model prenošenja poremećaja.

Učenici često nisu ni svjesni intelektualne granice između modela i realnosti koju im tim modelom želimo objasniti. Smatraju da model istinito opisuje realnost.

*Arhetipski modeli* čine sustavni repertoar ideja i pojmova koji se uz pomoć analognih proširenja rabe u područjima na koja se ti pojmovi izravno ne odnose. Oni čine skupinu najapstraktnijih od svih modela.

*Mentalni modeli* uključuju prešutno znanje. Osoba nije svjesna svih konstruktivnih aspekata svojega mentalnog modela, kao niti načina na koji ga stvara.

Učenik prilikom sagledavanja nove problemske situacije unosi svoje predznanje, već postojeće iskustvo i predkonceptije, što znatno utječe na pristup razrješavanju i na razumijevanje problema. Za nastavnika je vrlo važno identificirati i prihvatiti učeničke mentalne modele.

*Izraženi modeli* su modeli koje pojedinac ili grupa javno obznanjuju u svrhu omogućavanja interakcije s drugima. Čin izražavanja utječe na mentalni model osobe i čini promjene mentalnog modela. Nastavnik treba imati na umu da je učenikov izraženi model o nekoj pojavi u pravilu siromašniji od njegovog mentalnog modela.

*Kurikularni modeli* su modeli koji su uključeni u propisani kurikulum odnosno udžbenik. Obično je to verzija povijesno znanstvenog modela, odnosno didaktički modeli koji preko jednostavnih analogija zorno predočavaju razmatranu pojavu. Za primjer možemo uzeti spužvu kao model elastične podloge.

*Nastavni modeli* su modeli koje je nastavnik pripremio za nastavu i koju prezentira u učionici. Nastavnik može biti nezadovoljan modelom predloženim iz udžbenika pa kako bi nastavni proces bio uspješniji, nastavnik razvija svoj model.

*Povijesni modeli* su modeli nastali u specifičnom povijesnom kontekstu te su u naknadnim periodima poboljšani. U njima se naglašava povijesno filozofski pristup fizike. Naročito su naglašeni u srednjoj školi što zagovaraju brojni eksperti, a glavni su argumenti slijedeći (Justi, 2000).

- PFF (povijest i filozofija fizike) pridonosi motivaciji i angažiranju učenika.

Pomaže učenicima da praktiraju kritično i reflektivno mišljenje, što prirodne znanosti čini izazovnijim.

- PFF omogućuje nastavnicima bolje razumijevanje učeničkih predkonceptija, a učenicima omogućuje mijenjanje njihovih naivnih ideja.
- PFF pridonosi boljem razumijevanju prirode znanosti.

Po jednoj od definicija znanosti to je proces u kojem se konstruiraju koncepti, modeli i načela pomoću kojih se tijek prirodnih pojava može opisivati i predviđati.

- Uključivanjem PFF-a mogu se učenicima na prirodan način približiti i epistemološki aspekti fizike.
- Uvođenje PFF-a u nastavu fizike je antidogmatski pristup. Pokazuje da znanost nije nepogrešiva i u svakom pokušaju uspješna, da ne vrijedi nit o linearnom razvoju znanstvenog znanja.
- PFF promovira vezu između različitih područja prirodnih znanosti, kao i vezu prirodnih znanosti sa drugim znanstvenim područjima i granama.
- PFF pridonosi humanizaciji nastave prirodnih znanosti i pojašnjavanja sprege između prirodnih znanosti, društvenih promjena i tehnologije.

Ne bismo trebali idealizirati uporabu modela u nastavnoj praksi. Učenici često pogrešno i naivno shvaćaju modele u nastavnoj praksi te ih smatraju igračkama ili kopijama realnosti ili apsolutnim istinama. Takve dojmove stječu i na temelju kurikularnih modela u udžbenicima koji su često predloženi kao informacija u završnom obliku, a oni su glavna referenca po kojoj se poučava. Prezentiranje modela u njegovom završnom obliku kao činjenice, iskrivljuje prirodu znanosti. To je dogmatski pristup koji je svojstven pseudoznanosti.

Modele bismo trebali prezentirati kao problemske situacije koje uključuju učenike u proces modeliranja, za što nastavnik mora ispravno razumjeti model i modeliranje. Nastavnik mora imati sposobnost razvijanja dobrih nastavnih modela na temelju znanstveno-povijesnih modela, ali i onih koji pomoću jednostavnih analogija olakšavaju učenicima razumijevanje određenih sadržaja. Također nastavnik bi morao biti u stanju demonstrirati

dinamičko isprepletanje misli i akcija u znanosti i pri tome uzeti u obzir učenikovo predznanje, sposobnosti i vještine, te sposobnost konkretnog i apstraktnog mišljenja.

Uloga modela i modeliranja je vrlo važna u nastavnoj praksi, a kakva je njihova stvarna uloga tema je mnogih znanstvenih istraživanja. Justi i Gilbert (2002) proveli su opsežno istraživanje uporabe modela u nastavi te su uvidjeli da nastavnici smatraju kako modeli apstraktno mogu činiti konkretnijim i vidljivim, kako mogu pomoći u postizanju konceptualne promjene i unaprjeđivanju znanja.

Tematika modela i modeliranja danas se eksplicite uključuje u postojeće nacionalne specifikacije prirodnoznanstvenih kurikuluma diljem svijeta.

## Literatura

- [1] Hull, J.C. Options, Futures and other derivatives. 8th ed. Prentice Hall 2011
- [2] R.Krsnik, Suvremene ideje u metodici nastave fizike, ŠK, Zagreb, 2008.
- [3] Renić, K. Financijska kriza i njeni odjeci u Hrvatskoj. Diplomski rad. Split. Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet Split.
- [4] Nešić, A. MCMC metoda u Bayesovoj statistici. Magistarski rad. Beograd. Sveučilište u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
- [5] Petersen, A. M. Wang, F. Havlin, S. Stanley H. E. Market dynamics immediately before and after financial shocks: quantifying the Omori, productivity and Bath laws. PHYSICAL REVIEW E82, 036114, 2010.
- [6] Kristoufek, L. Fractal Markets Hypothesis and the Global Financial Crisis: Scaling, Investment Horizons and Liquidity. Vol. 15, No. 6 (2012) 1250065 (13 pages)
- [7] Agaev, I. Detection of financial crisis by methods of multifractal analysis. Department of Computational Physics Saint-Petersburg State University. PPT
- [8] Barunik, J. Vosvrda M. Can a stochastic cusp catastrophe model explain stock market crashes?. Journal of Economic Dynamics & Control 33 (2009) 1824–1836
- [9] Raoul P. P. P. Grasman, Han L. J. van der Maas, Eric-Jan Wagenmakers. Fitting the Cusp Catastrophe in R: A cusp-Package Primer.
- [10] Stohastičko modeliranje, 2000, Faculty and Institute of Actuaries <http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/sm.pdf> , 23.7.2016.

- [11] Wikipedija - suradnici, Markovljev lanac, Wikipedija, Slobodna enciklopedija, 24.5.2015, 08:33 UTC  
[hr.wikipedia.org/w/index.php?title=Markovljev\\_lanac&oldid=4533451](http://hr.wikipedia.org/w/index.php?title=Markovljev_lanac&oldid=4533451)
- [12] Wikipedija - suradnici, Fraktal, Wikipedija, Slobodna enciklopedija, 4.2.2016, 21:11 UTC, [hr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fraktal&oldid=4665383](http://hr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fraktal&oldid=4665383)
- [13] Zeeman, E. C. Catastrophe Theory. Scientific American, (April 1976) 65-70, 75-83