

# Fabry-Perot interferometar

---

Šimunjak, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:110425>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Šimunjak

Fabry-Perot interferometar

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Ivan Šimunjak**

Diplomski rad

# **Fabry-Perot interferometar**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Damir Veža

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.

Zahvalio bih se roditeljima i prijateljima na svojoj podršci koju su mi dali tokom studija, kao i mentoru prof. Damiru Veži uz čije strpljenje i savjete pisanje ovog rada ne bi bilo moguće. Također bi se želio zahvaliti Maji Piljek na nesebičnoj potpori, korisnim komentarima i prijedlozima.



## Sažetak

Danas Fabry-Perot interferometar je neizbježan dio većine optičkih sustava. U ovom radu izložen je detaljan opis principa rada idealnog Fabry – Perot interferometra, kao i tri njegove primjene. Kao rješenje problema difrakcije zračenja na zrcalima opisan je rad konfokalnog interferometra. Također je opisan rad analizatora spektra koji je imao veliku ulogu u spektroskopiji. Obzirom da interferometriju danas koristimo i u komercijalne svrhe, ne samo istraživačke, odabran je i opisan rad temperaturnog senzora koji koristi Fabry – Perot interferometar za mjerenje temperatura u uređajima koji postižu vrlo visoke radne temperature kao što je mlazni pogon.

Ključne riječi: Fabry-Perot interferometar, interferencija, finesa, razlučenje, širina spektralnih linija, slobodni spektralni interval, reflektancija, transmitancija

# Diploma thesis title

## **Abstract**

Today Fabry – Perot interferometer is integral part of most optical systems. In this work, detailed description of Fabry – Perot interferometer and three applications are presented. Confocal interferometer is presented as a solution to mirror diffraction problem. By allowing mirrors to move we can change cavity space and analyse different wave lengths of incident light. For the purpose of spectroscopic analysis, detailed description of spectrum analyser is presented. Interferometry today is used not only in research but also in commercial purposes. To illustrate this temperature sensor using Fabry – Perot interferometer is chosen and described as commercial sensor used in devices with high working temperature such as jet engines.

Keywords: Fabry–Perot interferometer, interference, finesse, spectral resolution, spectral linewidth, free spectral range, reflectance, transmittance

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Interferencija</b>	<b>5</b>
2.1	Koherentni izvori elektromagnetskih valova . . . . .	5
2.2	Interferencija dva vala . . . . .	6
2.2.1	Općenito o interferenciji dva vala . . . . .	6
2.2.2	Princip superpozicije . . . . .	8
2.2.3	Fraunhoferova aproksimacija . . . . .	9
2.3	Interferencija mnogostrukih valova . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Fabry-Perot interferometar</b>	<b>16</b>
3.1	Pohlov eksperiment . . . . .	16
3.2	Hidingerov eksperiment . . . . .	17
3.2.1	Reflektirana svjetlost . . . . .	17
3.2.2	Transmitirana svjetlost . . . . .	21
3.3	Interferencija višestruko reflektiranih zraka . . . . .	24
3.4	Širina spektralnih linija . . . . .	28
3.5	Razlučivanje spektralnih linija . . . . .	30
3.6	Slobodni spektralni interval . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Primjene Fabry-Perot interferometara</b>	<b>34</b>
4.1	Realni Fabry-Perot interferometar . . . . .	34
4.2	Konfokalni Fabry-Perot interferometar . . . . .	36
4.3	Analizator spektra . . . . .	39
4.3.1	Slobodni spektralni interval . . . . .	39
4.3.2	Finesa i razlučivanje . . . . .	43
4.4	Temperaturni senzor na osnovu Fabry-Perot interferometra . . . . .	46
4.4.1	Optički sustav . . . . .	46
4.4.2	Temperaturna ovisnost reflektancije . . . . .	47
4.4.3	Temperaturno ovisni materijal . . . . .	50
4.4.4	Određivanje debljine filma temperaturnog senzora . . . . .	53

<b>5 Metodički dio</b>	<b>57</b>
5.1 Nastavna priprema . . . . .	58
<b>Literatura</b>	<b>70</b>

# 1 Uvod

Prvi spektrometar konstruirao je Isaac Newton u želji da objasni lom svjetlosti. Koristeći prizmu Isaac Newton je prvi razložio svjetlost na komponente. Kasnije se konstruirao prvi spektrometar s rešetkom koji umjesto prizme difrakciju svjetlosti postiže na malim pukotinama koje su urezane u staklenu pločicu. U nastojanju za boljom analizom spektra svjetlosti nakon otkrića interferencije konstruirani su prvi interferometri. Umjesto difrakcije interferometri su kroz interferenciju svjetlosti mogli puno preciznije prikazati spektralnu sliku svjetlosti. Prvi takav uređaj su konstruirali Michelson i Morley u želji da ispituju svojstva pretpostavljenog medija kroz koji se svjetlost giba kojega su nazvali eter. Nakon Michelsona i Morleja u želji za boljom i jasnijom interferentnom slikom Fabry i Perot su konstruirali svoj interferometrar čije razlučenje je nadmašilo Michelsonov interferometar. Kako bismo bolje razumjeli motivaciju koja stoji iza povijesnog slijeda istraživanja spektra svjetlosti prvo moramo malo pažljivije upoznati se s povijesti i motivacijom istraživanja svjetlosti.

Jedno od dugogodišnjih pitanja koje je privlačilo pažnju fizičara u 19. stoljeću bilo je porijeklo svjetlosti. U 17. stoljeću Isaac Newton opisuje bijelu svjetlost kao mješavinu različitih boja što je demonstrirao refrakcijom svjetlosti na prizmi, ali kasnije opisuje svjetlost kao roj svjetlosnih čestica. Newton je bio vrlo utjecajan fizičar svojeg vremena i malo koja osoba je propitivala njegove tvrdnje. Jedan od utjecajnijih fizičara tog vremena, Christiaan Huygens, je smatrao svjetlost valom koji se širi kroz neki medij. Svjetlost za razliku od zvuka nije mogla proći kroz zakrivljenu cijev što je bio argument u korist čestične prirode svjetlosti. Takav model prirode svjetlosti nije mogao opisati refrakciju svjetlosti na prizmi, iako valni model svjetlosti nije imao problema u opisu refrakcije. Kroz stoljeća se postavljalo isto pitanje je li svjetlost val ili čestica i koji od ta dva modela zapravo opisuje prirodu svjetlosti.

Čestični model svjetlosti prvi je osporio Thomas Young pokušavajući objasniti zašto se svjetlost različitih boja transmitira kroz prizmu pod različitim kutovima. Young je usporedio svjetlost sa zvukom pritom promatrajući interferenciju zvučnih valova. Pustimo li zvuk iz dva identična izvora dolazi do interferencije, obzirom da su zvuk i svjetlost valovi, tada bi svjetlost trebala stvarati interferentnu sliku pod

sličnim uvjetima. Na taj način je Young osmislio svoj pokus na dvije pukotine koje obasjamo svjetlošću iz istog izvora, pa na zastoru vidimo interferencijske pruge. Young je također izračunao valne duljine različitih boja svjetlosti koje su bile vrlo blizu današnjim mjerenjima. Zadnji čavao čestičnom modelu svjetlosti je zabio James C. Maxwell koji je matematički opisao svjetlost kao elektromagnetski val kroz set od 4 jednačbe koje danas zovemo Maxwellove jednačbe.

Valna priroda svjetlosti opisana Maxwellovim jednačbama je imala jednu veliku manu koja se odnosila na samu brzinu širenja vala. Maxwell je iz jednačbi zaključio kako je brzina svjetlosti jednaka  $c$ , međutim nije uspio odgovoriti kroz što se svjetlost giba. Galileo Galilei je opisao brzinu kao relativan pojam ovisno o promatraču i u tom kontekstu se znalo da je prilikom opisa brzine predmeta potrebno reći u odnosu na što je ta brzina mjerena. Kako bi riješili takav problem fizičari su opisali svjetlost kao elektromagnetski val koji se giba brzinom  $c$  u odnosu na neko sredstvo koje su nazvali eter pokušavajući povezati svoje znanje o drugim valovima koje su poznavali primarno zvuk i valove na vodi.

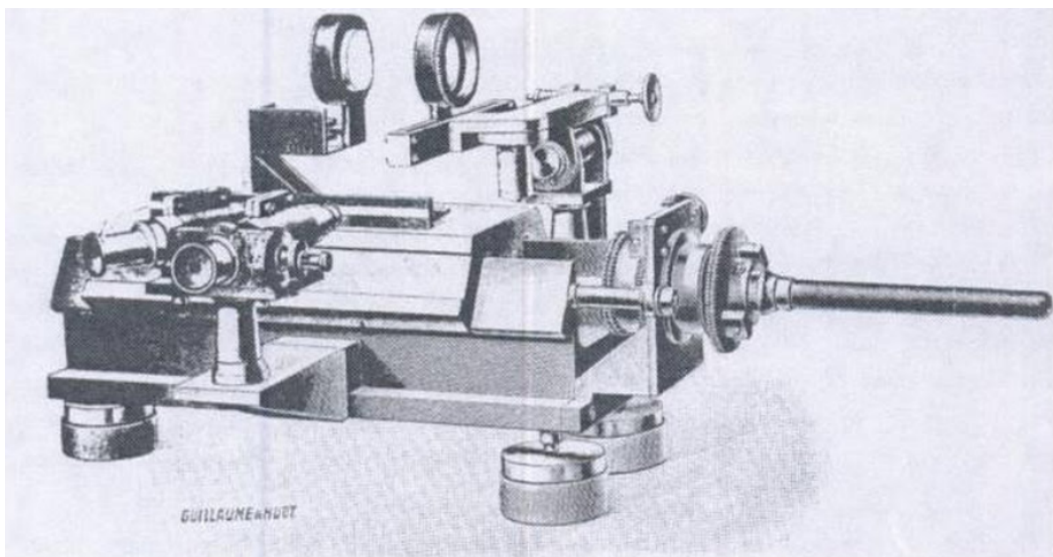
Kako bi istražili svojstva etera Michelson i Morley su konstruirali prvi interferometar. Puštajući bijelu svjetlost kroz polupropusno zrcalo dobili su dvije koherentne zrake svjetlosti koje su zatim bile reflektirane na dva zrcala. Na zastoru su dobili interferentne pruge nastale razlikom optičkih puteva dvije zrake. Danas znamo da za širenje svjetlost nije potreban medij.

Početak 19. stoljeća William H. Wollaston je unaprijedio Newtonov model difrakcije svjetlosti na prizmi i konstruirao prvi spektroskop kojim je promatrao spektar Sunca pritom primjećujući u njemu tamne pruge. Veliki iskorak u konstrukciji spektrometara je napravio Joseph von Fraunhofer zamjenom prizme spektrometra s difrakcijskom rešetkom. Povećavajući rezoluciju spektroskopa Fraunhofer je promatrao svjetlost plamena i Sunca pritom detaljno opisujući tamne pruge koje danas zovemo Fraunhoferove linije.

Charles Wheatstone je promatrao električne izboje s različitim metalima, time pokazavši kako spektralna slika izboja ovisi o metalu, te da se i uz pomoć spektroskopa može raspoznati vrsta materijala. J. B. L. Foucault je kasnije promatrajući emisijski i apsorpcijski spektar određenog materijala pokazao kako analizom spektra možemo utvrditi od kojih čestica je tvoren materijal, otvarajući novu mogućnost upotrebe spektroskopa. G. Stokes i W. Thomson su paralelno s Foucaultom promatrali spektre vodika i primjetili što se kasnije zvalo Balemrovim linijama. Time se otvorila mogućnost korištenja spektroskopije u proučavanju atoma.

Obzirom da je spektroskopija bila jedina mogućnost proučavanja atoma povećanje razlučivosti samih mjernih instrumenata postalo je vrlo važno za daljnja istraživanja. Problem razlučenja bliskih linija su riješili Fabry i Perot uzevši dva vrlo reflektivna posrebrana zrcala kroz koja su pustili bijelu svjetlost. Obzirom da dolazi do interferencije više izvora postoji točno određen uvjet koji treba biti zadovoljen kako bi svjetlost mogla biti transmitirana kroz zrcalo. Zbog takvog efekta koji ovisi o udaljenosti zrcala je moguće promatrati spektar koji sadrži vrlo bliske spektralne linije.

Fabry i Perot bili su vrlo predani fizičari o kojima se danas malo zna, djelom vjerojatno zato što nikada nisu bili ekscentrični. Rad na samom interferometru su počeli slučajno kada se Perot konzultirao s Fabry-em oko načina na koji može vrlo precizno odrediti udaljenost dvije bliske spektralne linije nastale izbojima na metalnim pločama udaljenim manje od mikrometra, Fabry je tada proučavao interferenciju i shvatio da jedini način na koji to može postići jest interferencijom [1]. Tokom 6 godina rada Fabry i Perot izdali su 15 članaka na temu metrologije, spektroskopije i astrofizike. Nakon što se Fabry odselio iz Marseilla u Pariz, Perot je nastavio usavršavati interferometar pomoć Henrija Buisson. Perot i Buisson počinju koristiti interferometar u novim situacijama i 1908. godine postavljaju sustav spektroskopskih standarda [2]. 1912. godine dokazuju proširenje spektralnih linija zbog Dopplerovog učinka u emisijskom spektru helija, neona i kalija. Usporedbom spektralnih valnih duljina i standarda metra 1913. godine uvelike poboljšavaju prijašnji rad Michelsona, dok 1914. godine uspijevaju u laboratorijskim uvjetima pakazati Dopplerov učinak na atomskim linijama, koji je do tada bio promatran isključivo u spektrima zvijezda.



Slika 1.1: Slika Faby-Perot interferometra kojega je izgradio Jobin za Fabry-ja i Perota. [13]

Još tokom studentskih dana Fabry je razvio ljubav prema astronomiji zbog čega je odlučio primijeniti interferometar u istraživanjima spektara zvijezda. Fabry – Perot interferometar se pokazao kao jako prikladan spektrometar za promatranje spektralnih linija objekata čija kutna veličina nije velika, kao što su udaljene zvijezde ili planeti, ili za spektralnu analizu objekata malih intenziteta svjetlosti kao što su maglice ili galaksije. 1911. godine mjere spektralne linije u spektru Orionove maglice što je ukazivalo na postojanje novog elementa kojega su nazvali Nebulium. Kasnijim istraživanjem se pokazalo kako su emisijske linije Nebuliuma zelene boje zapravo bile emisijske linije dvostruko ioniziranog atoma kisika. 1913. godine prvi objašnjavaju apsorpciju ultraljubičastog zračenja u gornjim slojevima atmosfere zbog postojanja ozona [3]. Danas se Fabry – Perot interferometar više koristi nego u bilo kojem trenutku u svojoj 100 godišnjoj povijesti.



## 2 Interferencija [4]

### 2.1 Koherentni izvori elektromagnetskih valova

Kako bismo bolje razumjeli interferenciju potrebno je promotriti svjetlost kao val. Znamo da se elektromagnetski valovi šire jednoliko u prostoru što nam sugerira da su valne fronte elektromagnetskih valova sferne. Shodno tome električna i magnetska komponenta elektromagnetskog vala moraju zadovoljavati jednadžbu kuglastog vala

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \frac{1[m]}{r} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta)}, \quad (2.1)$$

gdje je  $k$  valni broj,  $r$  udaljenost od izvora,  $t$  vrijeme,  $\omega$  kutna frekvencija i  $\delta$  fazna vala. Promotrimo li samo električnu komponentu vala dobijemo relaciju 2.1. Vidimo da amplituda sfernog vala opada obrnuto proporcionalno udaljenosti  $r$  od izvora. Pretpostavili smo da nam je izvor točkast, odnosno da mu je promjer beskonačno malen. Promotrimo li val na vrlo velikim udaljenostima od izvora sferni val 2.1 prelazi u ravni val 2.2.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta)} \quad (2.2)$$

Koherentni izvori su oni koji emitiraju valove konstantne faze i linearne polarizacije. Time smo zapravo definirali koherentne izvore kao one čiji emitirani val ima konstantnu kružnu frekvenciju  $\omega$ , valni vektor  $\vec{k}$  i fazu  $\delta$ . Elektromagnetsko polje koje emitira koherentni izvor je vremenski i prostorno koherentno. Pogledamo li relacije 2.1 i 2.2 vidimo da izvor emitira beskonačno dugi niz elektromagnetskih valova stalne faze. Iz toga možemo zaključiti da je interval vremena  $\Delta t$ , unutar kojeg su valni vektor i frekvencija konstantne, beskonačno velik. Time smo zadovoljili vremensku koherenciju našeg vala. Prostorna koherencija izražena prostornim intervalom  $\Delta x$  je posljedica vremenske koherencije. Dužina koherencije  $\Delta x = c\Delta t$  savršeno monokromatskog zračenja je beskonačna. Ovakve idealizacije valnih polja nam omogućuju lakše opisivanje pojave interferencije. Vremenska koherencija nam određuje širinu vrpce emitiranih linija. Smanjenjem vremenske koherencije se širina vrpce povećava. Valja napomenuti da je za idealni slučaj koherentnog zračenja  $\Delta t = \infty$  i  $\Delta \nu = 0$ .

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = E_0^{(1)} \frac{1[m]}{r_1} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t - \delta_1)} \quad (2.3)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_0^{(2)} \frac{1[m]}{r_2} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t - \delta_2)} \quad (2.4)$$

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = 0 \quad (2.5)$$

Dva izvora elektromagnetskog zračenja koji emitiraju valove 2.3 i 2.4, a ispunjavaju uvjet 2.5 su međusobno koherentni. Ako između izvora nema razlike u fazi takvi izvori su sinkroni. Elektromagnetski valovi koje ova polja emitiraju su međusobno koherentni.

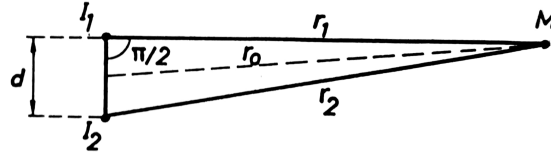
## 2.2 Interferencija dva vala

### 2.2.1 Općenito o interferenciji dva vala

Promatrajući dva koherentna izvora valova na površini vode Thomas Young je 1802. otkrio pojavu koju je nazvao interferencija. Otkriće interferencije je bilo od velikog značaja u istraživanju svojstava valnih pojava. Interferencija dva vala u bilo kojoj točki prostora je posljedica superpozicije. Promotrimo dva koherentna vala u slobodnom homogenom i izotropnom prostoru. Svaki izvor je matematička točka i emitira savršeno monokromatsko zračenje. Ovakva tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji da svaki od izvora emitira sinusoidalni niz sfernih valova 2.3 i 2.4 čiji izvori su međusobno koherentni.

Interferencija preraspodjeljuje zračenje u prostoru unutar kojeg valno polje interferira, čija se prisutnost može eksperimentalno potvrditi. Ovisno o udaljenosti od izvora preraspodjela energije interferirajućeg zračenja se značajno mijenja. Promatramo li valove zračenja daleko od izvora valne fronte postaju ravnine, što nam značajno olakšava matematički opis interferentne slike. Takav model interferentne slike zovemo Fraunhoferova aproksimacija, odnosno interferenciju polja daleko od izvora (eng. far field). Približimo li se našem izvoru i promotrimo interferenciju (eng. near field) vidimo da se situacija znatno promijenila, te dolazimo u područje Fresnelove aproksimacije. Na tako malenim udaljenostima valne fronte nisu ravnine

i moramo uzeti u obzir njihovu sfernu prirodu zbog čega se promijeni interferentna slika. Moguće je u grubo odrediti arbitrarnu graničnu udaljenost  $r_0$  nakon koje se promatrano zračenje ponaša po Fraunhoferovoj aproksimaciji.



Slika 2.1

Na slici 2.1  $I_1$  i  $I_2$  su dva koherentna izvora zračenja razmaknuta za  $d$ . Odabrali smo proizvoljnu točku  $M$  u prostoru udaljenu od izvora  $I_1$  za  $r_1$  i  $I_2$  za  $r_2$ . Uvjet Fraunhoferove aproksimacije je da su udaljenosti  $r_1$  i  $r_2$  približno jednake. Uz pomoć Pitagorinog poučka 2.6 dobijemo relaciju 2.7.

$$r_2^2 = r_1^2 + d^2, \quad (2.6)$$

$$d^2 = r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1). \quad (2.7)$$

Budući da nam vrijedi  $r_2 \approx r_1$  tada mora vrijediti  $r_2 \approx r_1 \approx r_0$ . Uvrstimo aproksimaciju u 2.7.

$$d^2 = 2r_0(r_2 - r_1). \quad (2.8)$$

Smatra se da je  $r_0$  granična udaljenost od izvora ako je razlika udaljenosti točke promatranja  $M$  od izvora  $I_2$  i  $I_1$  manja od polovine valne duljine zračenja 2.9.

$$r_2 - r_1 < \frac{\lambda}{2}. \quad (2.9)$$

Iz 2.8 i 2.9 dobijemo relaciju 2.10 uz pomoć koje možemo procijeniti udaljenost nakon koje vrijedi Fraunhoferova aproksimacija:

$$r_0 > \frac{d^2}{\lambda}. \quad (2.10)$$

Ako promatramo interferenciju izvora koji su međusobno razmaknuti za pola milimetra koristeći relaciju 2.10 vidimo da nam Fraunhoferova aproksimacija vrijedi na

udaljenostima većim od 42cm.

### 2.2.2 Princip superpozicije

Koristeći se principom superpozicije možemo u nekoj točki prostora matematički opisati interferenciju dva međusobno koherentna vala paralelnih valnih ploha.

$$E_1(x, t) = E_1 e^{-i(kx - \omega t - \delta_1)}, \quad (2.11)$$

$$E_2(x, t) = E_2 e^{-i(kx - \omega t - \delta_2)}. \quad (2.12)$$

Obzirom da promatramo nepolarizirano zračenje možemo prikazivati valove 2.11 i 2.12 u skalarnom obliku čime smo pojednostavili pisanje. Možemo odabrati prostorno i vremensko ishodište takvo da realni dio u 2.11 i 2.12 ima oblik

$$E_1(x, t) = E_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1), \quad (2.13)$$

$$E_2(x, t) = E_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2). \quad (2.14)$$

Rezultantni harmonični val dobiven superpozicijom valova 2.13 i 2.14 možemo pojednostaviti primjenom trigonometrijskih funkcija

$$E(x, t) = E_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1) + E_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2), \quad (2.15)$$

$$E(x, t) = (E_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \delta_2) \sin(\omega t - kx) + (E_1 \sin \delta_1 + E_2 \sin \delta_2) \cos(\omega t - kx). \quad (2.16)$$

Rezultantni val 2.16 možemo zapisati u obliku

$$E(x, t) = E \sin(\omega t - kx + \psi), \quad (2.17)$$

uz uvjet da vrijede 2.18 i 2.19

$$E^2 = (E_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \delta_2)^2 + (E_1 \sin \delta_1 + E_2 \sin \delta_2)^2, \quad (2.18)$$

$$\tan \psi = \frac{E_1 \sin \delta_1 + E_2 \sin \delta_2}{E_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \delta_2}. \quad (2.19)$$

Promjenom odabira ishodišta rezultat će se promijeniti. Odaberemo li takvo ishodište da je  $\delta_1=0$ , tada 2.15 prelazi u 2.20 za  $\delta_2 = \delta$ .

$$E(x, t) = E_1 \sin(\omega t - kx) + E_2 \sin(\omega t - kx + \delta). \quad (2.20)$$

Rezultantni val će poprimi oblik 2.17 ako vrijedi 2.21 i 2.22.

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \delta, \quad (2.21)$$

$$\tan \psi = \frac{E_2 \sin \delta}{E_1 + E_2 \cos \delta}. \quad (2.22)$$

Promotrimo li naše jednadžbe možemo uočiti da superpozicija dva međusobno koherentna sinusoidalna vala daje harmonijski val 2.17. Amplitudu vala možemo dobiti iz jednadžbi 2.18 i 2.21, dok nam relacije 2.19 i 2.22 daju razliku u fazama  $\psi$ . U posebnom slučaju kada je  $E_1 = E_2$  2.21 prelazi u

$$E^2 = 2E_1^2 + 2E_1^2 \cos \delta, \quad (2.23)$$

budući da je  $1 + \cos \delta = 2 \cos(\delta/2)$ , 2.23 prelazi u

$$E^2 = 4E_1^2 \cos^2 \delta. \quad (2.24)$$

### 2.2.3 Fraunhoferova aproksimacija

Već smo ranije spomenuli kako postoje dva režima u kojima možemo promatrati interferenciju valova. Ovisno o udaljenosti od izvora koristimo dvije različite aproksimacije Fresnelovu i Fraunhoferovu. Promatramo dva izvora čija razlika u fazi je neprestano jednaka nuli i intenziteti međusobno jednaki. Dva koherentna izvora sfernih valova daju rezultantni sferni val. Neka svaki izvor emitira sferni val:

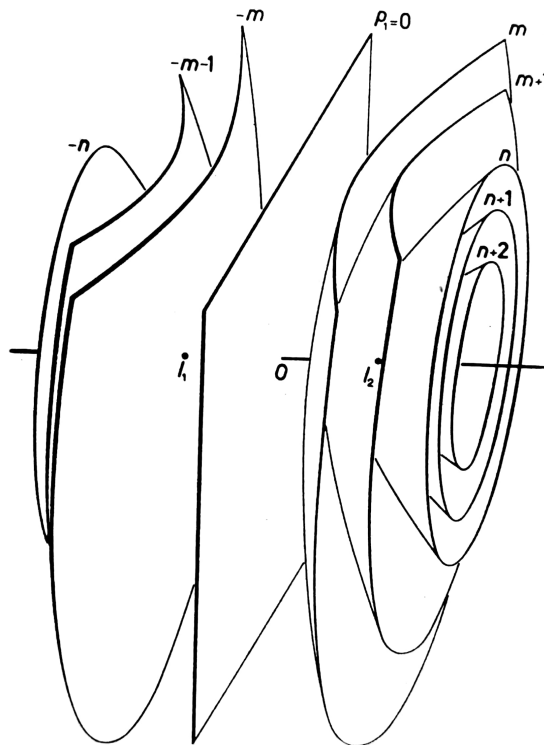
$$E_1(r_1, t) = E_1 \frac{1[m]}{r_1} \cos(\omega t - kr_1), \quad (2.25)$$

$$E_2(r_2, t) = E_2 \frac{1[m]}{r_2} \cos(\omega t - kr_2). \quad (2.26)$$

Interferencija ovakva dva vala ovisiti će o razlici faza valova 2.25 i 2.26 na danom mjestu u prostoru u nekom vremenskom trenutku. Zbog koherentnosti izvora razlika faza  $\delta$  promatranih valova neovisna je o vremenu i jednaka je

$$\delta = k(r_1 - r_2). \quad (2.27)$$

Obzirom da razlika u fazi ne ovisi o vremenu već samo o razlici radijalnih udaljenosti oba vala od izvora možemo primijetiti da naša razlika  $\Delta r$  mora biti konstantna. Iz geometrije znamo da plohe za koje vrijedi  $\Delta r = r_1 - r_2 = \pm \text{const}$  su konfokalni rotacioni hiperboloidi s dva plašta. Svakoј vrijednosti  $+\text{const}$  pripada jedan plašt, a vrijednosti  $-\text{const}$  njemu zrcalno simetričan drugi plašt kao što je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2: Konfokalni hiperboloidi konstantne razlike faza prikazani u kosoј projekciji.  $I_1$  i  $I_2$  su fokusi, dok su  $n$  i  $m$  plohe interferencije. [4]

Fokusi hiperboloida leže u ishodištima radijalnih vektora  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  što su ujedno i izvori zračenja  $I_1$  i  $I_2$ . Obzirom da je razlika hoda  $\Delta r$  konstantna i 2.27 svaki hiper-

boloid je mjesto na kojem je razlika u fazi konstantna. Ako je razlika hoda jednaka čitavom broju valnih duljina tada je zbog 2.27 razlika faza jednaka cjelobrojnomo višekratniku broja  $2\pi$ . Na tom mjestu dolazi do konstruktivne interferencije, dok destruktivnu interferenciju imamo na plaštu svakog pojedinog hiperboloida za koje je razlika hoda jednaka neparnom broju polovica valnih duljina. Uvjeti konstruktivne i destruktivne interferencije dani su izrazima 2.28 i 2.29 pri čemu je  $p_1$  prirodan broj.

$$\text{Konstruktivna interferencija: } \Delta r = p_1 \lambda \quad \forall p_1 \in \mathbb{N} \quad (2.28)$$

$$\text{Destruktivna interferencija: } \Delta r = (2p_1 + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \forall p_1 \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

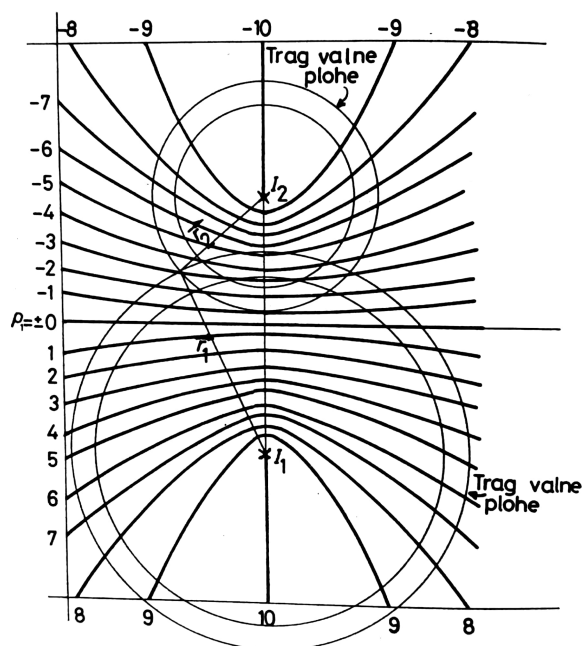
Red interferencije  $p$  izražava razliku hoda u broju valnih duljina

$$p = \frac{\Delta r}{\lambda}. \quad (2.30)$$

Omjer razlike hoda i valne duljine biti će cijeli broj samo u slučaju konstruktivne interferencije, razlika faza koja pripada tom redu interferencije  $n$  dana je u

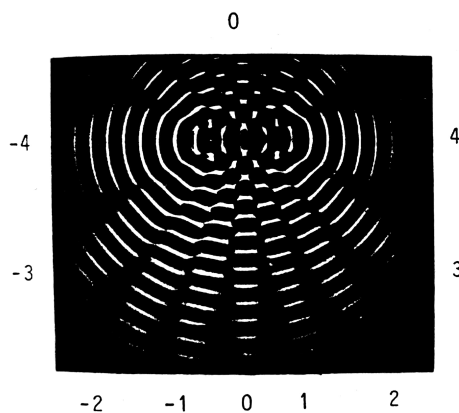
$$\delta = 2\pi p. \quad (2.31)$$

Na slici 2.2 prikazano je nekoliko redova interferencije koji odgovaraju plohama od  $\dots, -n, \dots, -m-1, -m, \dots, \pm 0, \dots, m, m+1, \dots, n, n+1, \dots, n > m+1$ , su cijeli brojevi pa su prikazani hiperboloidi mjesta konstruktivne interferencije. U slučaju kada je  $n = \pm 0$  hiperboloidi postaju ravnine koja je ujedno i ravnina zrcalne simetrije interferencijskog uređaja. Pogledamo li poprečni presjek interferencijskih ploha sa slike 2.2 vidimo da će se interferencijske pruge zrcaliti kroz ravninu za koju vrijede da je  $n=0$ . Skup hiperboloida tvore figuru interferencije koju možemo prikazati na zastoru.



Slika 2.3: Prikaz interferencije u ravnini unutar koje leže dva koherentna izvora  $I_1$  i  $I_2$ . Figuru interferencije tvore konfokalni hiperboloidi. Polje interferencije je zakrenuto za  $90^\circ$  u odnosu na sliku 2.2. [4]

Valja napomenuti kako se valovi na vodi promatraju u ravnini unutar koje leži pravac koji presjeca izvore  $I_1$  i  $I_2$ , tada su presjeci meridijani hiperboloida. Takva figura interferencije prikazana je na slici 2.3. Uzmemo li dva međusobno čvrsto vezana šiljka koji se stalnom frekvencijom umaču u vodu i napravimo li sliku interferencije možemo vidjeti interferentne pruge ravnih valova na vodi u ravnini  $I_1-I_2$ . Slika 2.4 je prikaz interferencije ravnih valova na kojoj možemo vidjeti konfokalnu hiperboloidnu figuru interferencije valova na vodi.

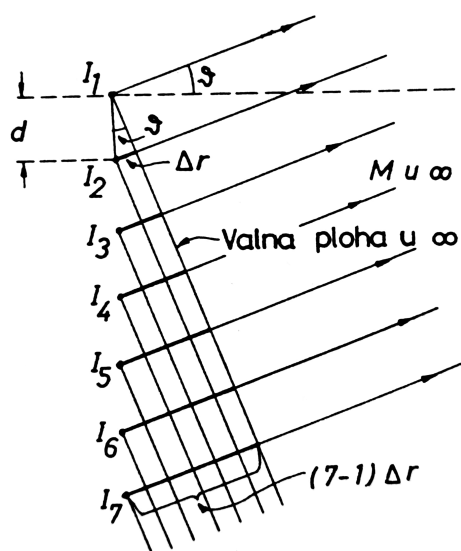


Slika 2.4: Fotografija interferencije valova na vodi iz dva koherentna izvora. Ekspozicija  $1/500[s]$  (R. W. Pohl, *Mechanik*) [4]



## 2.3 Interferencija mnogostrukih valova

Promotrimo slučaj kada umjesto dva koherentna izvora zračenja imamo niz od  $N$  takvih izvora. Pretpostavimo da su izvori jednakih intenziteta  $i$  da se nalazimo u Fresnelovoj aproksimaciji (eng. far field). Valne fronte su tada ravnine, a amplitude su međusobno jednake. Možemo prikazati takav snop zraka kao na slici 2.5.



Slika 2.5: Prikaz niza  $N$  koherentnih izvora zračenja, razmaka  $d$ , postavljenih na istom pravcu. Razliku hoda dva izvora  $\delta r$  promatramo u okolini točke  $M$  jako daleko od izvora zračenja gdje svaka valna fronta zatvara kut  $\theta$  s pravcem na kojem leže izvori zračenja.

Vidimo da između valova iz izvora  $I_1$  i  $I_2$  imamo razliku hoda

$$\Delta r = d \sin \vartheta. \quad (2.32)$$

Razlika hoda se povećava s promatranim izvorom  $I_i$  tako za izvor  $I_3$  vrijedi

$$2\Delta r = 2d \sin \vartheta. \quad (2.33)$$

Razlika hoda  $I_7$  i  $I_1$  je

$$(7-1)\Delta r = (7-1)d \sin \vartheta. \quad (2.34)$$

Vidimo da se povećanjem broja izvora razlika hoda mijenja za  $(N-1)$  tako da za  $N$ -ti izvor razlika hoda je jednaka

$$(N - 1)\Delta r = (N - 1)d \sin \vartheta. \quad (2.35)$$

Pripadajuća razlika u fazi  $\delta$  za danu razliku hoda  $\Delta r$  je  $k\Delta r$ . Valni broj  $k = 2\pi/\lambda$  tada je razlika u fazi jednaka

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta. \quad (2.36)$$

Ukupna razlika u fazi za N izvora biti će jednaka sumi svih razlika u fazi pojedinih izvora.

$$\sum_{j=1}^N \delta_j = (N - 1)\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (N - 1)d \sin \vartheta. \quad (2.37)$$

Interferencija u dalekoj točki prostora rezultat je doprinosa valova iz svakog izvora. U skladu s principom superpozicije ukupna kompleksna amplituda  $E_c$  jednaka je sumi svih pojedinih kompleksnih amplituda  $P_n$

$$E_c = \sum_{n=1}^N P_n, \quad (2.38)$$

$$P_n = E_1 e^{i(N-1)\delta}. \quad (2.39)$$

Sumu iz 2.38 možemo zapisati kao zbroj

$$E_c = E_1 [1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}]. \quad (2.40)$$

Suma 2.40 je geometrijski red od N članova pa možemo zapisati ukupnu kompleksnu amplitudu  $E_c$  kao

$$E_c = E_1 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}. \quad (2.41)$$

Kvadrat amplitude dobijemo množenjem kompleksne amplitude  $E_c$  s konjugirano kompleksnom amplitudom  $E_c^*$ .

$$E^2 = E_1^2 \frac{2 - (e^{iN\delta} + e^{-iN\delta})}{2 - (e^{i\delta} + e^{-i\delta})}. \quad (2.42)$$

Primijenimo li Eulerovu jednadžbu

$$e^{i\phi} = \cos \psi + i \sin \psi, \quad (2.43)$$

na 2.42 koristeći pritom identitete 2.44 i 2.45 možemo izračunati omjer  $E^2/E_1^2$  2.46.

$$\cos x \equiv \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad (2.44)$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1, \quad (2.45)$$

$$\frac{E^2}{E_1^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \quad (2.46)$$

Ako iskoristimo razliku u fazi danu u jednadžbi 2.36 u jednadžbi 2.46 omjer amplituda  $E$  i  $E_1$  prelazi u

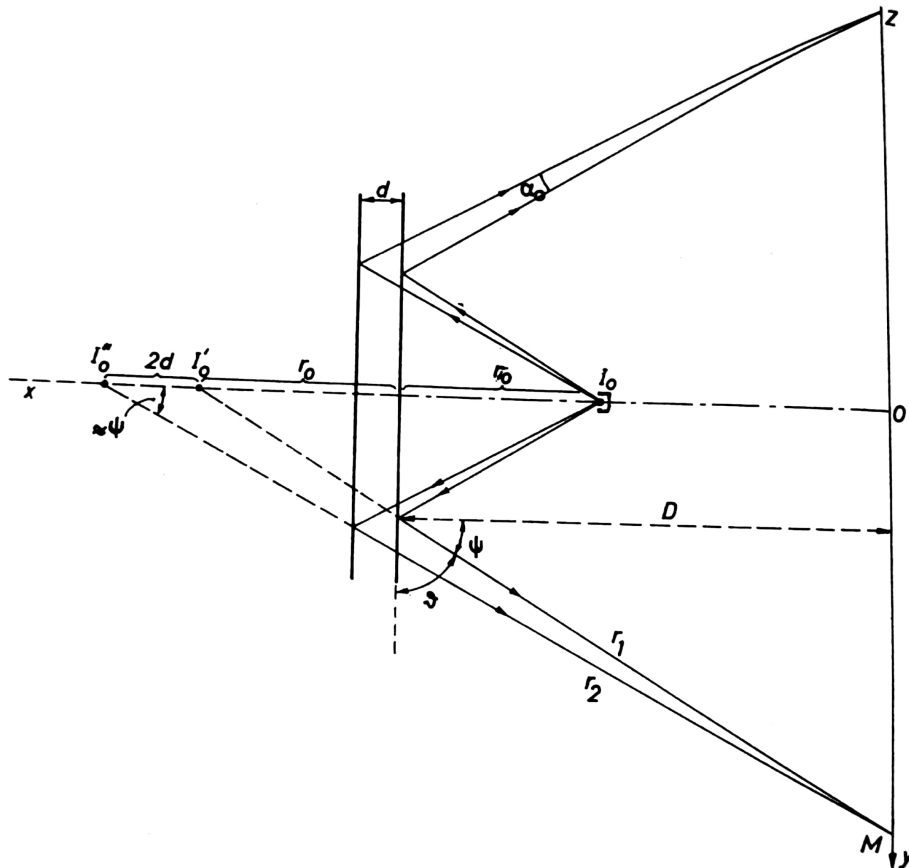
$$\frac{E^2}{E_1^2} = \frac{\sin^2\left[\pi N \frac{d}{\lambda} \sin \vartheta\right]}{\sin^2\left[\pi \frac{d}{\lambda} \sin \vartheta\right]}. \quad (2.47)$$

Omjer kvadrata amplituda  $E$  i  $E_1$  koji smo izrazili u 2.47 vrlo je bitna kod razmatranja difrakcijskih rešetki, međutim biti će nam potreban koncept višestruke interferencije kada budemo razmatrali Fabry Perot interferometar.

### 3 Fabry-Perot interferometar [4], [5], [6]

#### 3.1 Pohlov eksperiment [4]

R. W. Pohl je iskoristio Fresnelov uređaj s dva jednaka zrcala za dobivanje interferentne slike, približivši zrcala na vrlo malu međusobnu udaljenost i pritom pazeći da budu paralelna. Promotrimo idealiziran slučaj zračenja iz točkastog izvora  $I_0$ .



Slika 3.1: Shematski prikaz Pohlovog interferencijskog uređaja. [4]

Upadno zračenje se djelomično reflektira na zrcalima zbog čega nastaju dvije virtualne slike  $I'_0$  i  $I''_0$ . Dva virtualna izvora  $I'_0$  i  $I''_0$  ponašaju se kao dva koherentna izvora zračenja čiji razmak je jednak dvostrukoj udaljenosti  $d$  zrcala. Na ovaj način smo dobili interferenciju dva koherentna izvora čiju interferentnu sliku možemo promatrati na zastoru  $Z$  postavljenom u bilo koji položaj iza izvora  $I_0$ . Pogledamo li trokut  $\triangle Dr_1\Psi$  vidimo da razlika hoda odgovara relaciji

$$\Delta r \approx 2d \cos \Psi. \quad (3.1)$$

Model interferencije u Pohlovom uređaju zanemaruje višestruke refleksije zraka svjetlosti između zrcala kao i debljine zrcala. Također zanemaren je skok u fazi za  $\pi$  zbog prelaska iz gušćeg u rijede optičko sredstvo. Zbog velikog toka zračenja dolazi do interferencije velikog intenziteta kako je prikazano na slici 3.2.



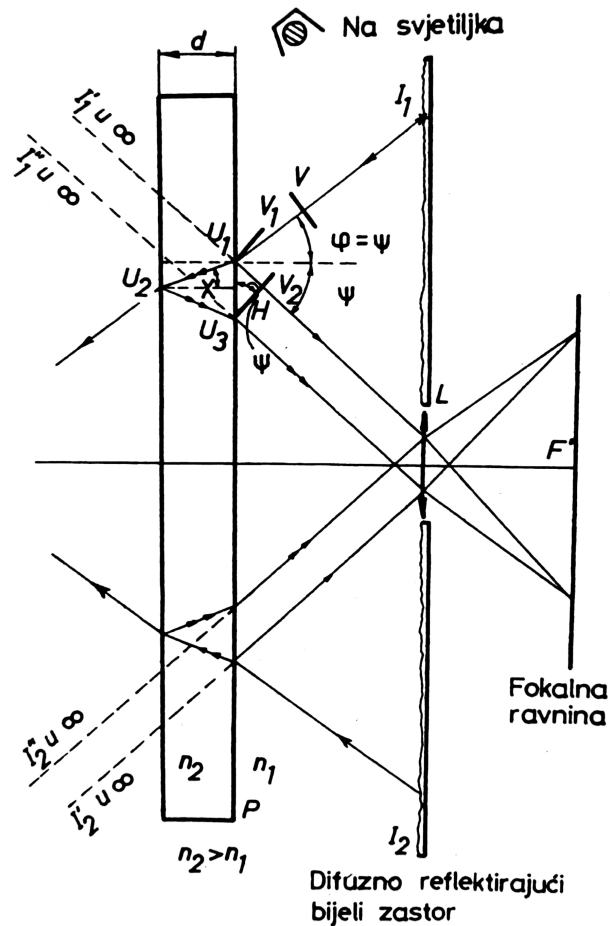
Slika 3.2: Pohlov eksperiment interferencije svjetlosti pomoću planparalelnih zrcala od liskuna. [4]

## 3.2 *Hidingerov eksperiment [4]*

### 3.2.1 Reflektirana svjetlost

U Pohlovom eksperimentu promatrali smo interferenciju točkastih izvora zračenja, međutim izvori zračenja u stvarnosti nisu točkasti već ih možemo aproksimirati kao mnoštvo točkastih izvora. Svaka točka takvog realnog izvora stvara dvije točkaste virtualne slike uvijek razmaknute za dvostruki razmak zrcala. Obzirom da imamo u realnom izvoru beskonačno takvih točkastih izvora koji nisu međusobno koherentni tada niti emitirani valovi nisu koherentni. Dolazi do nastanka polja interferencije u kojem su samo parovi valova koji dolaze iz dva pripadna točkasta virtualna izvora međusobno koherentni. Svaki od ovakvih parova daje u određenom smjeru isti efekt interferencije. Obzirom da su figure interferencije lokalizirane u beskonačnosti možemo promatrati sliku interferencije tako da postavimo zastor dovoljno daleko

od izvora odnosno u "beskonačnost". Praktičniji način dobivanja interferentne slike jest korištenje konvergentne leće koja će naše paralelne zrake dovesti u jednu točku fokalne ravnine i time nam na zastoru prikazati interferentnu sliku lokaliziranu u fokalnoj ravnini. Konvergentni optički sustav je ključan dio eksperimentalnog postava.



Slika 3.3: Shematski prikaz Hidingerovog eksperimenta. Mnogostruke refleksije su zanemarive. [4]

Iz točkastog izvora  $I_1$  koji predstavlja jednu točku realnog izvora zračenja, izlazi monokromatska zraka svjetlosti  $V$  koja se nalazi u sredstvu indeksa loma  $n_1$ . U trenutku kada zraka padne na prvu plohu plan paralelne ploče  $P$  dolazi do djelomične refleksije i transmisije vala. Transmitiran val ulazi u sredstvo indeksa loma  $n_2$  unutar kojeg dolazi do druge plohe plan paralelne ploče, zatim dolazi do ponovne transmisije i refleksije vala. Reflektiran val s prve plohe  $V_1$  i reflektirani val s druge plohe  $V_2$  tvore par međusobno paralelnih i koherentnih valova koji dolaze prividno iz koherentnih virtualnih izvora  $I_1'$  i  $I_1''$  u "beskonačnosti". Ploča  $P$  je od jednog vala emitiranog iz izvora  $I_1$  refleksijom i transmisijom stvorila dva međusobno koherentna vala manjih amplituda emitiranih prividno iz dva međusobno koherentna virtualna

izvora  $I'_1$  i  $I''_1$ . Amplituda rezultatnog vala nastalog interferencijom valova  $V_1$  i  $V_2$  ovisi o razlici optičkih puteva i o skoku u fazi zbog promjene optičkog sredstva. Unutar ploče val  $V_2$  je prošao optički put  $\overline{U_1U_2} + \overline{U_2U_3}$  pa će razlika puteva  $\Delta l$  biti jednaka

$$\Delta l = n_2(\overline{U_1U_2} + \overline{U_2U_3}) - n_1\overline{U_1H}. \quad (3.2)$$

Promotrimo li pripadne trokute kutovima  $\chi$  i  $\Psi$  možemo uz pomoć trigonometrijskih identiteta pridodati vrijednosti duljinama  $\overline{U_1U_2}$ ,  $\overline{U_1U_3}$  i  $\overline{U_1H}$ .

$$\overline{U_1U_2} = \frac{d}{\cos \chi}, \quad (3.3)$$

$$\overline{U_1U_3} = 2d \tan \chi, \quad (3.4)$$

$$\overline{U_1H} = \overline{U_1U_3} \sin \Psi. \quad (3.5)$$

Uvrstimo li 3.4 u 3.5 dobijemo 3.6.

$$\overline{U_1H} = 2d \tan \chi \sin \Psi, \quad (3.6)$$

$$n_1 \sin \Psi = n_2 \chi. \quad (3.7)$$

Iskoristimo li Snellov zakon 3.7 tada 3.6 prelazi u

$$\overline{U_1H} = 2d \frac{n_2}{n_1} \tan \chi \sin \Psi, \quad (3.8)$$

$$\Delta l = \frac{2dn_2}{\cos \chi} (1 - \sin^2 \chi). \quad (3.9)$$

Možemo zapisati 3.9 kao 3.10 ako iskoristimo  $\cos^2 \chi \equiv 1 - \sin^2 \chi$ .

$$\Delta l = 2dn_2 \cos \chi. \quad (3.10)$$

Iz relacije 3.10 možemo vidjeti da razlika puteva zraka  $V_1$  i  $V_2$  ovisi za danu ploču P o kutu refrakcije  $\chi$  vezanim preko Snellovog zakona s kutom refleksije. Razlika u fazi promatranih valova  $\delta_{tot}$  dana je

$$\delta_{tot} = (\Phi_2 - \Phi_1)_{tot} = k\Delta l = k[\Delta l \pm \cdot (\frac{\lambda}{2})] \quad (3.11)$$

Veličina  $\delta_{tot}$  i  $(\Phi_2 - \Phi_1)_{tot}$  zovemo totalnim razlikama faza, dok veličinu  $\Delta l \pm (\frac{\lambda}{2}) \equiv (\Delta l)_{tot}$  zovemo totalnom razlikom hoda. Po definiciji red interferencije će nam tada biti

$$p = \frac{(\Delta l)_{tot}}{\lambda}. \quad (3.12)$$

Iskoristimo li 3.10 i 3.11, gdje je  $\lambda$  valna duljina, možemo zapisati totalnu razliku faza dva vala kao

$$(\Phi_2 - \Phi_1)_{tot} = k(2dn_2 \cos \chi - \frac{\lambda}{2}). \quad (3.13)$$

Zbog Snellovog zakona i identiteta  $\cos \chi \equiv (1 - \sin^2 \chi)$ , možemo jednadžbu 3.13 izraziti preko kuta refleksije  $\Psi$

$$(\Delta l)_{tot} = 2d(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \Psi)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2}. \quad (3.14)$$

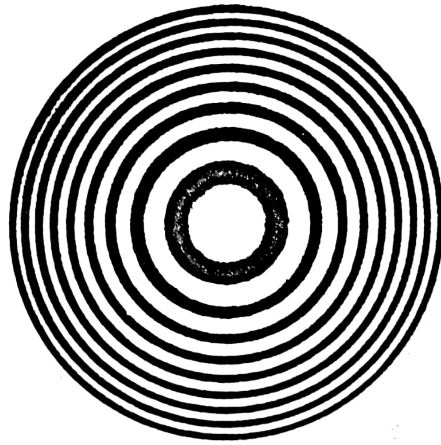
Iskoristimo definiciju reda interferencije 3.12 zajedno s izrazom za totalnu razliku hoda 3.14 dobijemo

$$\frac{(\Delta l)_{tot}}{\lambda} = 2\frac{d}{\lambda}(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \Psi)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

Ako je  $p$  prirodan broj i vrijedi  $p = p_1$ ,  $p_1$  isti onaj prirodan broj koji se pojavio u uvjetima konstruktivne 2.28 i destruktivne 2.29 interferencije, tada će postojati minimumi i maksimumi pruga reda interferencije 3.15. Za promatranu ploču razlika faza između dva koherentna para zraka ovisi o kutu upada monokromatskog zračenja. To vrijedi za bilo koji parcijalni točkasti izvor  $I_i$ . To znači da svaki par koherentnih monokromatskih zraka reflektiran pod istim kutom jednako pridonosi interferenciji. Dobivena slika interferencije sastoji se od prstenova koji pripadaju svaki svojem kutu refleksije, takvu pojavu zovemo pruge jednakog nagiba (eng. fringes of equal inclination). Zbog malog indeksa refleksije svo zračenje koje se višestruko reflektira unutar promatranog uređaja možemo zanemariti obzirom da njezin intenzitet naglo opada. Red interferencije 3.12 biti će maksimalan ako je hod  $(\Delta l)_{tot}$  maksimalan. Maksimalni red interferencije postićemo za kut refleksije  $\Psi = 0$ , što možemo vidjeti



iz relacije 3.14. Ako je  $\Psi = 0$  tada sinusni član iščezava i ostaju samo nepromijenjeni parametri koji ovise o vrsti zračenja, materijalnoj i geometrijskoj prirodi ploče.



Slika 3.4: Pozitiv fotografije Haidingerove slike interferencije. [4]

Na slici 3.4 prikazana je fotografija Haidingerove slike interferencije. Ovisno o parametrima centralna pruga može biti minimum ili maksimum. Naš uređaj indeksa loma  $n_2$  nalazio se u zraku indeksa loma  $n_1 = 1$  tada relacija 3.16 koju možemo dobiti kombinacijom 3.14 i 3.12 prelazi u puno jednostavniji oblik 3.17 ako je  $n_1 < n_2$ , odnosno za zrak kada je  $n_1 = 1$  u 3.18.

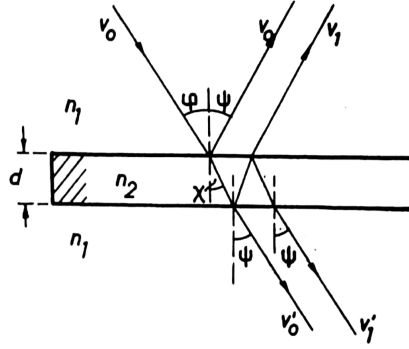
$$p\lambda = 2d(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \Psi)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.16)$$

$$p\lambda = 2dn_1 \cos \Psi - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.17)$$

$$p\lambda = 2d \cos \Psi - \frac{\lambda}{2}. \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Transmitirana svjetlost

Promotrimo li sliku 3.3 vidimo da osim refleksije zraka dolazi i do transmisije koju smo prethodno zanemarili. Budući da transmitirani valovi  $V'_0$  i  $V'_1$  dolaze iz istog izvora i oni također mogu interferirati. Valja napomenuti da će amplituda transmitiranih valova ovisiti o indeksu refleksije planparalelnih zrcala. Sliku interferencije možemo dobiti ako stavimo konvergentnu leću iza zrcala. Transmisijom vala ne dolazi do skoka u fazi pa će totalna razlika hoda biti jednaka razlici optičkih puteva.



Slika 3.5: Shematski prikaz transmitiranih zraka  $V_0'$  i  $V_1'$  kroz planparalelna zrcala. [4]

Iz slike 3.5 možemo vizualno predočiti na koji način dolazi do transmisije valova na zrcalima. Ukupnu razliku hoda  $(\Delta l)_{tot}$  dobijemo na jednak način kao i u prethodnim primjerima.

$$(\Delta l)_{tot} = 2dn_2 \cos \chi. \quad (3.19)$$

Obzirom da amplituda transmitiranih valova ovisi o broju refleksija i koeficijentu refleksije i transmisije samog zrcala interferentna slika biti će slabije vidljiva. Iradijancija direktno transmitiranog vala  $V_0$  proporcionalna je kvadratu transmitancije, dok je dvaput reflektirana zraka  $V_1$  proporcionalna s umnoškom kvadrata radijancije i reflektancije. Maksimalna relativna iradijancija  $E(ir)_{max}$  proporcionalna je zbroju svih doprinosa iradijancije transmitiranih i reflektiranih zraka.

$$E(ir)_{max} \propto \tau^2 + \tau^2 \rho^2 + 2\tau^4 \rho^2, \quad (3.20)$$

dok je minimalna iradijancija  $E(ir)_{min}$

$$E(ir)_{min} \propto \tau^2 + \tau^2 \rho^2 - 2\tau^4 \rho^2. \quad (3.21)$$

Koeficijenti refleksije 3.22 i transmisije 3.23 nam govore kolika biti će reflektirana ili transmitirana amplituda promatranog zračenja. Koeficijent refleksije možemo računati kao omjer reflektirane i upadne amplitude vala ili kao omjer intenziteta upadnog i reflektiranog zračenja. Koeficijent transmisije je shodno tome omjer transmitirane amplitude ili intenziteta i upadne amplitude i intenziteta.

$$r = \frac{E_r}{E_i}, \quad (3.22)$$

$$t = \frac{E_t}{E_i}. \quad (3.23)$$

Reflektancija je omjer reflektiranog toka zračenja  $\Phi_{e,r}$  i upadnog toka zračenja  $\Phi_{e,i}$  na neku promatranu površinu.

$$\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}. \quad (3.24)$$

Transmitancija je omjer transmitiranog toka zračenja  $\Phi_{e,t}$  i upadnog toka zračenja  $\Phi_{e,i}$  na neku promatranu površinu.

$$\tau = \frac{\Phi_{e,t}}{\Phi_{e,i}}. \quad (3.25)$$

Iradijancija ili ozračenje  $E_{ir}$

$$E(ir) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A}, \quad (3.26)$$

nam govori koliko je određena ploha ozračena. Iradijanciju možemo izračunati kao omjer toka zračenja i površine na koju to zračenje pada. Michelson je definirao bez dimenzionalnu veličinu  $V$

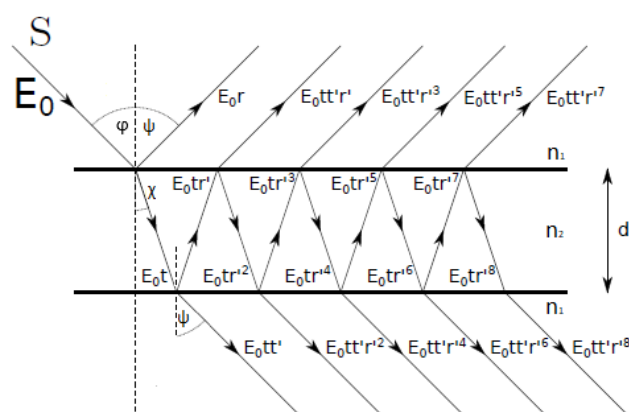
$$V \equiv \frac{E(ir)_{max} - E(ir)_{min}}{E(ir)_{max} + E(ir)_{min}}, \quad (3.27)$$

iz koje možemo odrediti vidljivost slike interferencije, a koja je karakterizirana izvorima zračenja koji interferiraju. Pri čemu su  $E(ir)_{max}$  i  $E(ir)_{min}$  maksimalna iradijancija i minimalna iradijancija pruga interferencije. Ako su valovi jednakih amplituda tada je  $E(ir)_{max} = 4E_1^2$ , a  $E(ir)_{min} = 0 \frac{W}{m^2}$  pa je vidljivost maksimalna. Kada izvori ne bi bili idealno koherentni, odnosno amplitude se razlikovale, tada bi se vidljivost slike intrerferencije smanjila. Shodno tome vidljivost interferentne slike ćemo dobiti uvrštavanjem 3.25 i 3.26 u 3.27.

$$V = \frac{4\tau^4 \rho^2}{2(\tau^2 + \tau^2 \rho^2)} \quad (3.28)$$

### 3.3 Interferencija višestruko reflektiranih zraka

Do sada smo razmatrali interferenciju reflektirane svjetlosti kakvu su Pohl i kasnije Hidinger promatrali. Zatim smo razmatrali kako se ponaša zraka koja je jednostruko reflektirana između dva polupropusna zrcala u transmitiranoj svjetlosti. Sva tri primjera su se odnosila na materijale slabije reflektancije međutim povećamo li reflektanciju samih zrcala, pritom smanjujemo transmitanciju i gubitak amplitude tokom refleksije, cijela priča se bitno mijenja. Ono što smo ranije promatrali kao jednostruku refleksiju prikazanu na slici 3.5 sada postaje višestruka refleksija. Naša interferentna slika više nije posljedica interferencije dva vala već interferencije mnogostrukih valova.



Slika 3.6: Shematski prikaz višestruko reflektirane zrake između dva planparalelna zrcala. [6]

Prije samog početka kvantitativnog opisa Fabry Perot interferometra možemo prijetiti se mnogostruke interferencije iz poglavlja 2.3 i kvalitativno zaključiti kako će slika interferencije za ovakav uređaj mnogostruko inerferiranih valova u fokalnoj ravnini biti niz koncentričnih vrlo uskih prstenova. Bez daljnje kvantitativne obrade interferencije ne možemo više od ovoga zaključiti obzirom da nam se amplituda vala smanjuje nakon svake refleksije.

Promotrimo slučaj transmitirane svjetlosti kada je između plan paralelnih zrcala zrak indeksa loma  $n_2 = 1$ . Transmitirani snop pada na leću koja ga zatim fokusira u svoju fokalnu ravninu. U neku točku u fokalnoj ravnini dolaze valovi razlikom faza  $\Delta\delta$  prouzrokovano planparalelnim zrcalima, ovisno o kutu transmisije  $\chi$ . Prepos-

tavljamo da su reflektancije i transmitancije oba zrcala međusobno jednake, također zanemarujemo skokove u fazi pri refleksiji koje za metalne površine zrcala nisu jednake nuli niti  $\pi$ . Zbog 2.31 i 3.18 tada ako znamo iz 2.30 red interferencije p možemo odrediti razliku faza dva uzastopno transmitirana vala  $\delta$

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = k2d \cos \Psi. \quad (3.29)$$

Neka je kompleksna amplituda upadnog vala  $E_i$

$$E_i e^{-i(kx - \omega t)} \equiv E_i e^{i\Phi}. \quad (3.30)$$

Kao što smo napravili u poglavlju 2.3 sumirali sve transmitirane valove tako moramo i u ovom slučaju. Kompleksna amplituda takvog rezultatnog transmitiranog vala nakon mnogostruko reflektiranih i transmitiranih valova

$$\tau E_i e^{i\phi} + \rho\tau E_i e^{i\phi - \delta} + \rho^2 \tau E_i e^{i\phi - 2\delta} + \dots \quad (3.31)$$

Nakon što val uđe u prostor između zrcala dolazi do transmisije vala na prvom i na drugom zrcalu. Zbog toga amplituda transmitiranog vala kroz drugo zrcalo ovisi o umnošku koeficijenata transmisije prvog i drugog zrcala. Obzirom da su zrcala jednaka dobijemo kvadrat koeficijenta transmisije t što nam je zapravo transmitancija  $\tau = t^2$ , zbog toga imamo faktor  $\tau$  u kompleksnim amplitudama. Drugi malo kompliciraniji faktor koji dolazi u obzir se odnosi na refleksiju valova. Treba obratiti pozornost da dolazi do dvostruke refleksije u prostoru između zrcala prije nego se svjetlost transmitira kroz zrcalo koje mi promatramo. Svako zrcalo ima transmitanciju određenu kvadratom koeficijenata refleksije r odnosno  $\rho = r^2$ . Kada prvi val uđe u prostor i transmitira se na zrcalu nakon kojeg promatramo interferenciju dio zračenja se samo jednom reflektirao zbog čega u kompleksnu amplitudu ulazi samo član  $\rho$  kod prve transmisije. Idući transmitirani val kojeg promatramo je val koji se unutar zrcala dva puta transmitira, odnosno napravi "puni krug", prije nego što dođe do željene transmisije. Za svaku od tih refleksija amplituda se promijeni za reflektanciju  $\rho$  pa shodno tome imamo kvadrat reflektancije u drugom članu transmitirane amplitude. Ako imamo n takvih transmisija tada će amplituda biti

$$P = E_i (\tau + \rho\tau e^{-i\delta} + \rho^2 \tau e^{-2i\delta} + \dots + \rho^n \tau e^{-ni\delta} + \dots). \quad (3.32)$$

Ako malo pažljivije pogledamo 3.32, možemo primijetiti da se radi o geometrijskom redu modula  $\rho e^{-i\delta}$  kojemu za dovoljno velik  $n$  suma prelazi u

$$P = E_1 \frac{\tau}{1 - \rho e^{-i\delta}}. \quad (3.33)$$

Konjugirano kompleksna amplituda je tada

$$P^* = E_1 \frac{\tau}{1 - \rho e^{i\delta}}. \quad (3.34)$$

Tada je relativna iradijancija  $E(ir)_{rel}$  vala

$$E(ir)_{rel} = \frac{PP^*}{E_i^2} = \frac{\tau^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta}. \quad (3.35)$$

Možemo dodatno srediti jednadžbu 3.35 ako preuredimo nazivnik

$$(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos \delta) = (1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = (1 - \rho)^2 \left[ 1 + \frac{4\rho \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)}{(1 - \rho)^2} \right]. \quad (3.36)$$

Zbog 3.36 jednadžba 3.35 prelazi u

$$E(ir)_{rel} = \frac{\tau^2}{(1 - \rho)^2} \left[ \frac{1}{\frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)} \right]. \quad (3.37)$$

Radi lakšeg pisanja možemo definirati konstantu  $A$

$$A = \frac{4\rho}{(1 - \rho)^2}, \quad (3.38)$$

i zatim nam iradijancija 3.37 prelazi u

$$E(ir)_{rel} = \frac{\tau^2}{(1 - \rho)^2} \left[ \frac{1}{1 + A \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)} \right]. \quad (3.39)$$

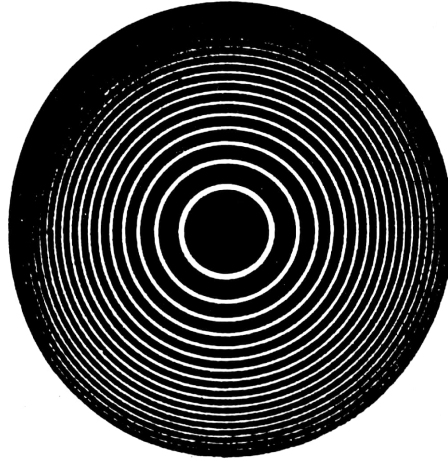
Maksimumi iradijancije pojavljuju se za razlike faza  $\delta = 2p_1\pi$ , a minimumi za  $\delta = (2p_1 + 1)\pi$  pri čemu je  $p_1$  prirodan broj. Tada dobijemo

$$E(ir)_{rel.max} = \frac{\tau^2}{(1 - \rho)^2}, \quad (3.40)$$

$$E(ir)_{rel.min} = \frac{\tau^2}{(1 + \rho)^2}, \quad (3.41)$$

$$\frac{E(ir)_{rel.max}}{E(ir)_{rel.min}} = \frac{(1 + \rho)^2}{(1 - \rho)^2}. \quad (3.42)$$

Minimum iradijancije nije jednak nuli što nam govori da omjer maksimalne i minimalne iradijancije, je to veći što je reflektivnost samih zrcala veća. Sam položaj interferentne slike ovisi o kutu transmisije  $\Psi$  prema relaciji  $p_1\lambda = 2d \cos \Psi$ . Ako se razlika u fazi malo razlikuje od  $2p_1\pi$  tada zbog velike reflektancije konstanta  $A$  poprima vrijednost mnogo veću od 1 i iradijancija  $E(ir)_{rel}$  naglo opada. Krivulja  $E(ir)_{rel} = f(\delta)$  će zbog toga imati jako oštre maksimume kao što je prikazano na slici 3.7.



Slika 3.7: Slika interferencije mnogostrukih valova u transmitiranoj svjetlosti, dobivena s plan paralelnim polumetaliziranim zrcalima između kojih se nalazio zrak. Fotografski pozitiv.

Možemo usporediti sliku 3.7 sa slikom 3.4 koju je dobio Hiding. Vidimo da smo dobili također koncentrične prstenove međutim jasnije su definirani, tanji i oštrije.

Također možemo definirati konstantu  $C_{peak}$

$$C_{peak} = \frac{\tau^2}{(1 - \rho)^2}. \quad (3.43)$$

Za realne površine konstanta  $C_{peak}$  ovisiti će i o apsorpciji zračenja  $\alpha$ . Znamo da zbroj koeficijenata apsorpcije, transmitancije i reflektancije mora biti jednak 1 kako bi energija ostala očuvana  $\alpha + \tau + \rho = 1$ . Tada možemo zapisati  $C_{peak}$  kao

$$C_{peak} = \left( \frac{1 - \alpha - \rho}{1 - \rho} \right)^2. \quad (3.44)$$

U ovom razmatranju smo prepostavili da ne dolazi do apsorpcije na zrcalima i da je sva energija transmitirana ili reflektirana. Ako je apsorpcija zračenja vrlo malena odnosno  $\alpha \rightarrow 0$  tada nam  $C_{peak} \rightarrow 1$  što možemo vidjeti iz 3.44. Ako nam je konstanta  $C_{peak} \simeq 1$  možemo pojednostaviti jednadžbu 3.39.

$$E(ir)_{rel} = \frac{1}{1 + A \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)}. \quad (3.45)$$

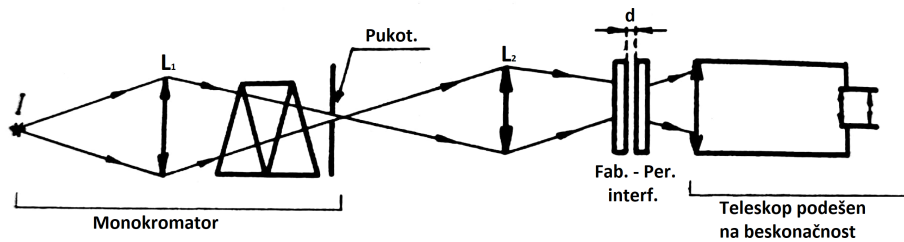
### 3.4 Širina spektralnih linija

Fabry i Perot su zapravo iskoristili Hidingerov eksperiment inzistirajući na strogo paralelnim zrcalima velike reflektancije koja mogu omeđivati sloj plina ili nekog drugog čvrstog optičkog sredstva. Slika interferencije se promatra konvergentnom lećom u transmitiranoj svjetlosti. Detaljno smo opisali u poglavlju 3.3 način na koji nastaje interferencija djelomično transmitiranih zraka koje se višestruko reflektiraju između zrcala. U fokalnoj ravnini konvergentne leće vide se koncentrični prstenovi od kojih svaki zadovoljava relaciju

$$p_1 \lambda = 2nd \cos \Psi. \quad (3.46)$$

Ako fiksiramo udaljenost između ploča  $d$  i obasjamo interferometar divergentnom svjetlošću tada će transmitirana svjetlost imati točno određen kut transmisije. Svjetlost druge valne duljine biti će transmitirana pod drugim kutom. Obzirom da promatramo samo kutove transmisije uglavnom će razlika kutova biti od interesa u mjerenju. Baždarenje vršimo svjetlošću poznate valne duljine. Ovakva mjerenja se vrše na svjetlosti koja je već prošla kroz monokromator i uglavnom služi za razlučivanje bliskih linija u spektru odnosno hiperfine strukture spektralnih linija.





Slika 3.8: Shematski prikaz Fabry Perot interferometra fiksnog razmaka između zrcala.

Dozvolimo li jednom od ta dva zrcala da se giba možemo tokom mjerenja mijenjati razmak  $d$  između ploča. Promjenom razmaka naša slika interferencije se mijenja. Razmak ploča uglavnom se mijenja u malim intervalima i pritom nam je kut transmisije približno nula. Ranije smo vidjeli da iradijancija  $E(ir)_{rel}$  poprima oblik 3.39 u kojoj je konstanta  $A$  jednaka 3.38 daje ovisnost transmitiranog toka zračenja kroz paralelna zrcala između kojih se nalazi zrak. Za promatrani idealni sustav transmitancija i reflektancija sustava se ne mijenja, a u idealnom slučaju apsorpcija nam je zanemariva pa nam je od interesa samo pojednostavljen oblik iradijancije 3.45. Budući da je razlika u fazi jednaka umnošku ukupnog puta  $\Delta l$  i valnog broja  $k$  znamo da zbog

$$p\lambda = 2d \cos \Psi, \quad (3.47)$$

vrijedi

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2d \cos \Psi. \quad (3.48)$$

Za

$$\delta = 2\pi p_1, \quad (3.49)$$

gdje je  $p_1$  prirodan broj odnosno red interferencije, iradijancija  $E(ir)_{rel}$  poprima maksimalnu vrijednost. U poglavlju 3.3 smo već razmotrili i vidjeli da minimum iradijancije nije jednak nuli odnosno da transmitirani tok zračenja u minimumu nije nula. Iradijancija iz neke minimalne vrijednosti naglo raste do maksimuma i zatim pada na iradijanciju pozadine koja je donekle tamna. Širina baze linije  $\epsilon$  nam ovisi o razlici faza  $\Delta\delta$ . Na polovici maksimalne iradijancije pripadno povećanje razlike faza

jednako je  $\epsilon/2$ . Tada zbog 3.45 i 3.48 imamo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + A \sin^2 \left[ \frac{2\pi p_1 + \epsilon}{2} \right]}. \quad (3.50)$$

Povećanjem konstante  $A$  smanjuje se debljina prstenova interferencije, odnosno  $\epsilon$  se smanjuje. Ako razvijemo sinusni član u Taylorov red jednačba 3.50 prelazi u 3.51 jer nam  $\sin(\epsilon/4)$  prelazi u  $\epsilon/4$ .

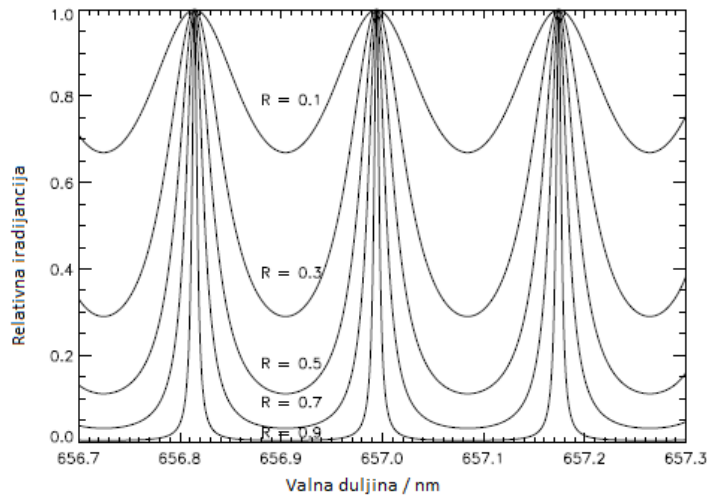
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + A \left( \frac{\epsilon}{4} \right)^2}. \quad (3.51)$$

Slijedi da je  $\epsilon$  jednak

$$\epsilon = \frac{4}{\sqrt{A}}. \quad (3.52)$$

### 3.5 Razlučivanje spektralnih linija

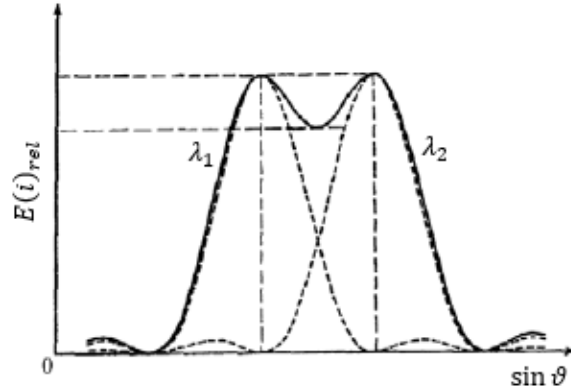
Mjerimo li iradijanciju transmitirane svjetlosti znamo da će ovisiti o valnoj duljini svjetlosti. Slika interferencije ovisi o reflektanciji  $\rho$  i podsjeća na češalj s mnoštvom vrhova odnosno maksimuma.



Slika 3.9: Maksimumi i minimumi slike interferencije za različite vrijednosti reflektancije  $R = \rho$ , interferencije višestrukih valova.

Promotrimo li spektar dvaju valova valnih dužina  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  prikazan na slici 3.10 možemo reći da su razlučeni ako su maksimumi svakog pojedinog vala u spektru smješteni tako da glavni maksimum vala  $\lambda_2$  nalazi u prvom minimumu vala  $\lambda_1$ , tada je  $\Delta\lambda_R = \lambda_2 - \lambda_1$ . Možemo povezati širinu linije  $\epsilon$  s ukupnim putem koji zraka

prođe  $\Delta l$ . Rayleigh je dao jednostavan kriterij razlučivanja, međutim u ovom slučaju smatramo ćemo dvije linije razlučenima ako su im maksimumi razmaknuti za  $\epsilon$ . Time smo zapravo rekli da linije valova valnih duljina  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  moraju biti razmaknuti za udaljenost  $\epsilon$  kako bismo ih mogli raspoznati.



Slika 3.10: Definicija razlučivanja linija valnih duljina  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Razliku faza  $\partial\delta$  za pripadnu promjenu valnih duljina  $\partial\lambda$  dobijemo deriviranjem jednadžbe 3.48 po valnoj duljini  $\lambda$ .

$$\partial\delta = \frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\lambda^2}\right) 2d \cos(\Psi) \partial\lambda. \quad (3.53)$$

Ako nam je  $\epsilon = \partial\delta$  tada je  $\partial\lambda$  najmanji interval valne duljine koji u danom trenutku možemo razlučiti. To zovemo instrumentalnom širinom spektralne linije. Vezu između  $\partial\lambda$  i  $\partial\delta$  dobijemo djelići 3.48 i 3.53

$$\frac{\delta}{\partial\delta} = \frac{\lambda}{\partial\lambda}. \quad (3.54)$$

Substituiramo  $\epsilon = \partial\delta$  i  $\delta = 2\pi p_1$  dobijemo

$$\frac{\delta}{\partial\delta} = \frac{2\pi p_1}{\epsilon}. \quad (3.55)$$

Sada možemo uvesti veličinu  $\mathcal{F}$  koju zovemo Finesa (eng. finesse)

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\epsilon}. \quad (3.56)$$

Tada nam moć razlučivanja poprima oblik

$$\frac{\lambda}{\partial\lambda} = p_1 \mathcal{F}. \quad (3.57)$$

Moć razlučivanja raste s porastom reda interferencije, shodno tome i finesa raste s porastom reda interferencije.  $\mathcal{F}$  se može povezati s efektivnim brojem transmitiranih snopova. Njegova uloga je slična broju izvora  $N$  koju smo koristili kod mnogostruke interferencije u poglavlju 2.3. Poznajući konstantu  $A$  iz 3.38 i širinu linije  $\epsilon$  iz 3.52 možemo zapisati finesu 3.56 kao

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\rho^{1/2}}{1-\rho}. \quad (3.58)$$

### 3.6 Slobodni spektralni interval

Ranije smo rekli kako jednom zrcalu možemo dozvoliti gibanje i time mijenjati razmak između zrcala. Pretpostavimo da je interferometar obasjan zračenjem valnih duljina  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$ , pritom valna duljina  $\lambda$  je poznata. Obzirom da ne poznajemo red interferencije  $p_1$  možemo odrediti valnu duljinu  $\Delta\lambda$  ako znamo da su približno istog reda interferencije. Ovakvu pretpostavku možemo napraviti ako je  $\Delta\lambda$  dovoljno malen da red interferencije od  $\lambda + \Delta\lambda$  pada između redova interferencije  $p_1$  i  $p_1 + 1$  od  $\lambda$ . Ako ne zadovoljimo ovaj kriterij više ne možemo sa sigurnošću utvrditi koja valna duljina pripada kojem prstenu interferencije. Granični slučaj vrijedi ako red  $p_1 + 1$  od  $\lambda$  koincidira s redom  $p_1 + 1$  od  $\Delta\lambda$ . Pritom je  $\Delta\lambda$  maksimalni interval valnih duljina kojima možemo obasjati interferometar i njega zovemo slobodnim spektralnim intervalom (eng. free spectral range, FSR). Pošto znamo da u transmitiranoj svjetlosti vrijedi  $p\lambda = 2d \cos \Psi$  možemo zapisati za kut transmisije  $\Psi = 0$

$$(p_1 + 1)\lambda = 2d, \quad (3.59)$$

$$(\lambda + \Delta\lambda)p_1 = 2d. \quad (3.60)$$

Uvrstimo 3.59 u 3.60

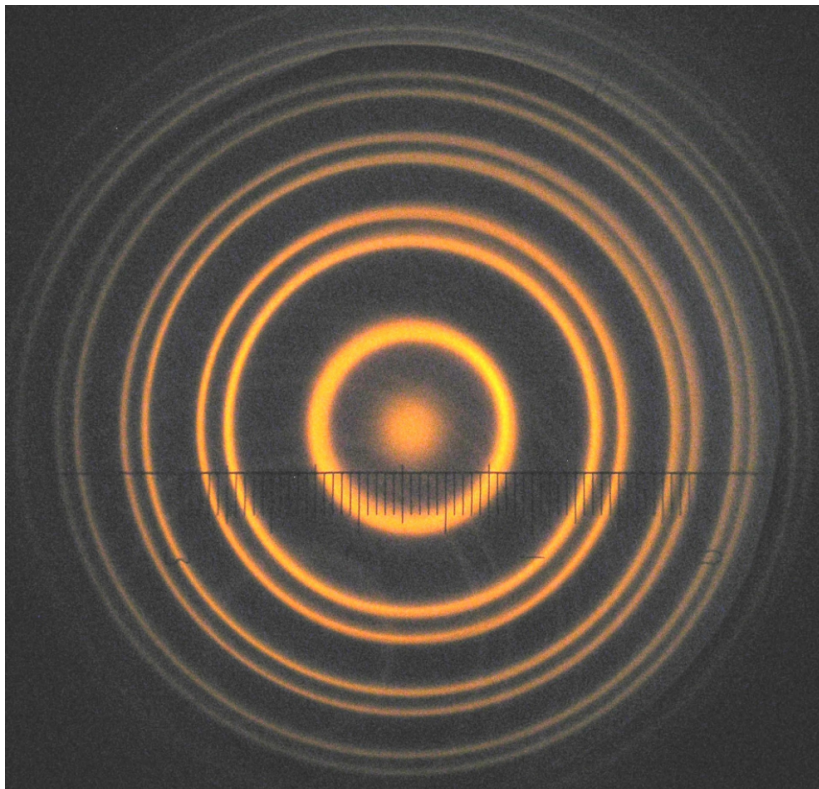
$$(2d - \lambda)\Delta\lambda = \lambda^2. \quad (3.61)$$

Obzirom da je valna duljina vrlo malena vrijednost tada znamo da je  $2d \gg \lambda$ , odnosno možemo zanemariti valnu duljinu  $\lambda$  u odnosu na  $2d$ . Tada nam slobodan spektralni interval  $\Delta\lambda$  iz 3.61 prelazi u

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2d}. \quad (3.62)$$

Veza između spektralne granice razlučivanja  $(\Delta\lambda)_{min}$  i slobodnog spektralnog intervala dana je relacijom 3.63 u kojoj je FSR kratica za engleski naziv slobodnog spektralnog puta.

$$(\Delta\lambda)_{min} = \frac{\Delta\lambda(FSR)}{\mathcal{F}}. \quad (3.63)$$



Slika 3.11: Interferentne pruge D-linija Natrija. [14]

## 4 Primjene Fabry-Perot interferometara

### 4.1 Realni Fabry-Perot interferometar [15] [16]

Promotrimo li realna zrcala možemo primjetiti da svako zrcalo ima određenu debljinu. Zbog toga na rubovima zrcala, odnosno granici između sredstava, dolazi do transmisije i refleksije valova. Ako nam se na izlaznom zrcalu reflektira i transmitira val na vanjskoj granici zrcala dolazi do djelomičnog smanjenja amplitude. Obzirom da je cilj zadržati izlaznu i upadnu amplitudu jednakim, tada moramo smanjiti refleksiju na vanjskom sloju zrcala. Najjednostavniji način kojim možemo smanjiti refleksiju na jednoj od strana zrcala je premazivanjem vanjske strane zrcala antirefleksivnim slojem. Poželjno bi bilo da antirefleksivni sloj ima veliki indeks refleksije odnosno da je reflektancija sloja velika. Mogu se koristiti keramike poput cirkonijevog dioksida ( $ZrO_2$ ), titanijev dioksid ( $TiO_2$ ), cink sulfid ( $ZnS$ ) ili cink selenid ( $ZnSe$ ) [7]. Ako je refleksija na vanjskom sloju zrcala zanemarivo malena tada možemo aproksimirati zrcalo kao idealno.

Prilikom mjerenja hiperfinskih struktura potrebna je velika preciznost mjerenja. Želimo li razlučiti i odrediti širinu spektralnih linija moramo uzeti u obzir difrakciju zračenja na zrcalima. Interferentnu sliku "prstenova" možemo opisati Airjevom funkcijom. Red interferencije  $p$  u centru interferentne slike zadovoljava relaciju

$$p \equiv P + \epsilon = 2d\sigma, \quad (4.1)$$

gdje je  $P$  cjelobrojni dio (eng. integer part),  $\epsilon$  djelomični dio (eng. fractional part),  $d$  razmak između zrcala i  $\sigma = 1/\lambda$  valni broj. Analizom interferentne slike možemo odrediti djelomični dio reda interferencije za centralnu interferentnu prugu. Cjelobrojni dio reda interferencije se može odrediti Michelsonovim valnim metrom. Razmak između zrcala može se odrediti iz simultanih mjerenja valnog broja  $\sigma$  i  $\epsilon$  u rasponu od  $\sim 1000\text{cm}^{-1}$  za organski laser (eng. dye laser). Također možemo izračunati cijelobrojni dio standardnog lasera  $P_{ref}$  iz njegovog valnog broja  $\sigma_{ref}$ . Red  $p_{ref}$  koji smo izračunali koristeći  $P_{ref}$  i  $\epsilon_{ref}$  daje preciznije vrijednosti razmaka između zrcala  $d$ . Koristeći Michelsonov valni metar odredimo nepoznat valni broj, iz kojega možemo izračunati  $P$ ,  $t$  i red interferencije. Valni broj bez Doplerovog širenja spek-

trajnih linija jednak je

$$\sigma = \frac{P + \epsilon}{P_{ref} + \epsilon_{ref}}. \quad (4.2)$$

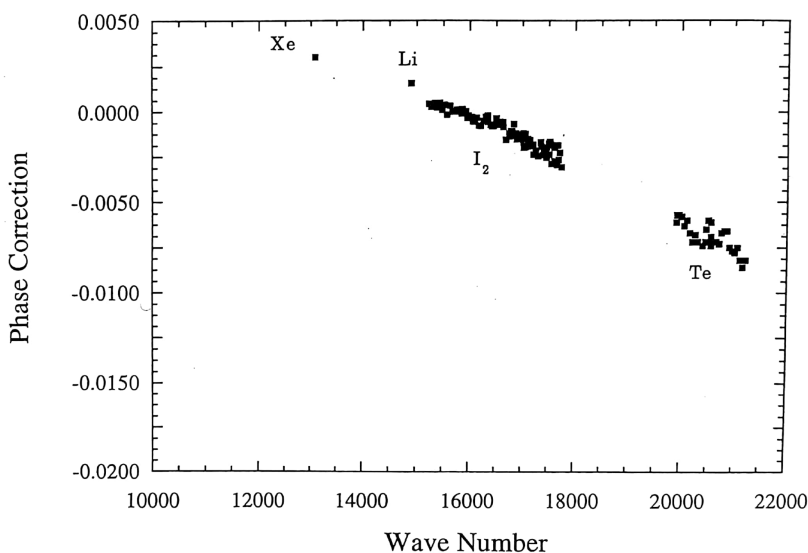
Kako bismo dobili preciznije mjerenje reda interferencije moramo dodati korekciju faze koja ovisi o valnom broju zračenja  $\delta(\sigma)$  koja nastaje refleksijom na zrcalima. Zbog korekcije faze moramo modificirati 4.1 u

$$P + \epsilon + \delta(\sigma) = 2d\sigma. \quad (4.3)$$

Korekcija faze standardnog lasera  $\delta(\sigma_{ref}) \equiv 0$ , znači da radimo relativnu korekciju faze. stvarna korekcija faze valnog broja  $\sigma$  ovisi o izmjerenoj vrijednosti valnog broja  $\sigma_{izmjereno}$ , što nam iz 4.2 daje

$$\sigma = \sigma_{izmjereno} + \frac{\delta(\sigma)}{2d} \quad (4.4)$$

### Phase Correction (all data) -- 20 September 1994



Slika 4.1: Fazne korekcije  $\delta(\sigma)$  u ovisnosti o valnom broju  $\sigma$  uzrokovane refleksijom zračenja na zrcalima. [15] [16].

Mjerenje i računanje korekcija u fazi su bitan korak u analizi sistematskih pogrešaka.

Osvijetlimo planparalelna zrcala svjetlošću konačne optičke debljine. Za vidljivu svjetlost zrak je potpuno transparentan pa nam je apsorpcija  $\alpha = 0$  bez obzira struji

li zrak ili ne, kao što smo već pretpostavili u prijašnjim razmatranjima. Dok zrak miruje transmitancija i reflektancija se ne mijenjaju pa je optička debljina svuda jednaka. Međutim ako zrak počne strujiti dolazi do promjene optičke debljine između zrcala pa će zrake koje padnu u točku  $M_i(y_i, z_i)$  i  $M_j(y_j, z_j)$  imati različite optičke puteve. Iako imamo odsustvo apsorpcije između zrcala nehomogenost sustava nastala uslijed strujanja zraka postaje vidljiva. Povećanje optičke debljine mogu također izazvati i nesavršeno paralelna zrcala. Osim paralelnosti samih zrcala možemo imati problema ako zrcala nisu ravna već klinasta. Tada moramo promatrati nominalnu udaljenost između zrcala kada računamo finesa uređaja. Efektivnu finesu možemo izračunati ako sumiramo sve doprinose finesa nastalih zbog raznih defekata zrcala, strujanja zraka, šumova nastalih na površini nakon poliranja, itd...

$$\frac{1}{\mathcal{F}_E^2} = \sum_i \frac{1}{\mathcal{F}_i^2}, \quad (4.5)$$

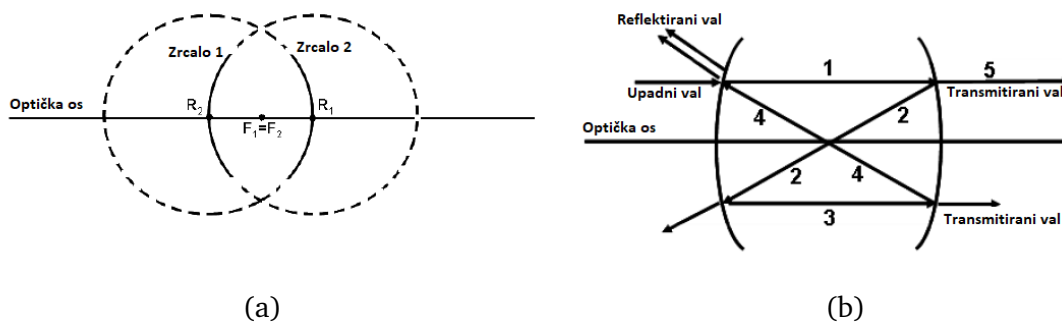
$$\mathcal{F}_E = \left( \sum_i \frac{1}{\mathcal{F}_i^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

Jednadžba 4.6 nam opisuje realan Fabry-Perot interferometar. Usporedimo li idealnu finesu i efektivnu finesu vidimo da je efektivna finesa manja od idealne što nam kao posljedicu daje proširenje spektralnog profila. Valja primijetiti da se slobodni spektralni interval (FSR) 3.62 nije promijenio. Zbog proširenja spektralnog profila dolazi do smanjenja razlučivanja. Također iradijancija se smanji kao rezultat utjecaja neželjenih efekata.

## 4.2 Konfokalni Fabry-Perot interferometar [8], [9]

Spomenuli smo u prethodnom poglavlju proširenje optičke širine upadnog zračenja na sami interferometar kao nepoželjno odstupanje od homogenosti. Sličan efekt osim strujanja zraka izaziva refrakcija na zrcalima. Zbog difrakcije na zrcalima dolazi do nepoželjnog proširenja optičke debljine. Kako bismo izbjegli promjenu optičke debljine umjesto planparalelnih zrcala možemo koristiti konfokalna ili koncentrična zrcala. Konfokalni Fabry-Perot interferometar koristi dva sferna zrcala koja dijele jedan od fokusa kao što je prikazano na slici 4.2a.





Slika 4.2: (a) Shematski prikaz konfokalnog Fabry-Perot interferometra, (b) Shematski prikaz zraka

Promotrimo li putanje zraka prikazane na slici 4.2b vidimo da se upadni val transmitira unutar prostora između zrcala gdje se zbog velike reflektancije transmitira oko 1% upadnog zračenja. Zatim paralelno optičkoj osi zraka 1 dolazi do zrcala 2 gdje imamo transmisiju i refleksiju. Kada bi imali realna ravna zrcala došlo bi do povećanja optičke debljine. Međutim obzirom da imamo sferno zrcalo na kojima dolazi do refleksije zraka paralelnih optičkoj osi u fokus zrcala. Reflektirana zraka 2 prolazi kroz zajednički fokus i reflektira se paralelno od zrcala 1. Paralelna zraka 3 prolazi isti proces kao i zraka 1. Vidimo da ukupni put koji jedna zraka prođe jednak je dvostrukoj udaljenosti između zrcala  $d$ . Namjestimo li razmak takav da dobijemo kao i kod planparalelnog interferometra stojne valove konstruktivne interferencije tada na izlazu imamo amplitudu vala jednaku onoj upadnog. Promotrimo li sliku 4.2b vidimo da optička širina upadnog i transmitiranog vala ostaje očuvana. Radius zakrivljenosti  $R$  konfokalnog zrcala mora biti jednak udaljenosti između zrcala  $R = d$ . Obzirom da zraka mora proći 4 puta između zrcala uvjet za dobivanje stojnog vala je sljedeći

$$p_1 \lambda = 4d. \quad (4.7)$$

Kako bismo odredili slobodan spektralni interval za konfokalni interferometar  $\Delta\lambda_{conf}$  potrebno je provesti isti postupak kao i u poglavlju 3.6. Pretpostavimo da je interferometar obasjan zračenjem valnih duljina  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$  pritom poznajemo valnu duljinu  $\lambda$ . Ako znamo da su valne duljine  $\lambda$  i  $\Delta\lambda$  približno jednakog reda interferencije tada se one nalaze između redova interferencije  $p_1$  i  $p_1 + 1$ . Granični slučaj vrijedi ako red interferencije  $p_1 + 1$  od  $\lambda$  koincidira s redom interferencije  $p_1 + 1$  od  $\Delta\lambda$ . Za kut transmisije  $\Psi = 0$  vrijedi

$$(p_1 + 1)\lambda = 4d, \quad (4.8)$$

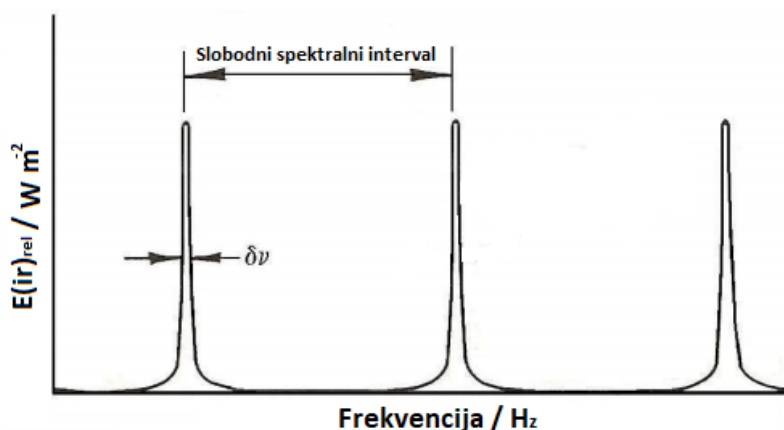
$$(\lambda + \Delta\lambda)p_1 = 4d. \quad (4.9)$$

Uvrstimo 4.8 u 3.8

$$(4d + \lambda)\Delta\lambda = \lambda^2. \quad (4.10)$$

Ako znamo da je valna duljina puno manja od razmaka između zrcala  $4d \gg \lambda$  možemo zanemariti član  $\lambda$  u jednadžbi 4.10. Tada je slobodni spektralni interval za konfokalni Fabry-Perot interferometar dan s

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4d}. \quad (4.11)$$



Slika 4.3: Graf ovisnosti iradijancije o frekvenciji zračenja.

Promotrimo li graf na slici 4.3 vidimo da će širina na pola maksimuma biti jednaka razlici frekvencija  $\nu_n$  i  $\nu_{n-1}$  na pola maksimuma. Frekvenciju  $\nu_n$  možemo izraziti kao kvocijent brzine svjetlosti  $c$  i valne duljine  $\lambda$  [9]. Obzirom da znamo valnu duljinu  $\lambda$  iz jednadžbe 4.7 naša frekvencija tada postaje

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{p_1 c}{4d}. \quad (4.12)$$

Pomak u frekvenciji  $\Delta\nu$  koji odgovara  $\Delta\lambda$  približno je jednak

$$\Delta\nu \approx \frac{C}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (4.13)$$

Pretvorimo li valnu duljinu u frekvenciju i iskoristimo jednadžbu 4.11 dobijemo slobodni spektralni interval  $\Delta\nu(FSR)$

$$\Delta\nu(FSR) = \frac{c}{4d}. \quad (4.14)$$

Ako znamo debljinu spektralne linije  $\delta\nu = \epsilon_{conf}$  tada je finesa  $\mathcal{F}$  dana

$$\mathcal{F}_{conf} = \frac{\Delta\nu(FSR)}{\delta\nu} = \frac{c}{4d\epsilon_{conf}}. \quad (4.15)$$

Spektralna granica razlučivanja  $(\Delta\lambda_{conf})_{min}$  je tada

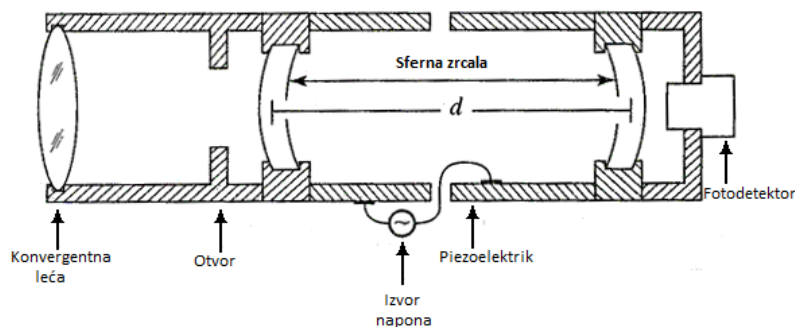
$$(\Delta\lambda)_{min} = \frac{\Delta\lambda_{conf}(FSR)}{\mathcal{F}_{conf}}. \quad (4.16)$$

Ako udaljenost odgovara četvrtini valne duljine dobijemo maksimum, shodno tome povećanjem udaljenosti zrcala za četvrtinu valne duljine dobijemo novi maksimum.

### 4.3 Analizator spektra [10], [11]

#### 4.3.1 Slobodni spektralni interval

Jezgra skenirajućeg Fabry-Perot interferometra su dva gotovo identična sferna zrcala u konfokalnoj konfiguraciji. Ovakva konfiguracija zrcala stvara degenerirane modove frekvencije što pojednostavljuje podešavanje interferometra s izvorom zračenja, eliminirajući potrebu savršenog podudaranja optičke osi upadnog zračenja i optičke osi samih zrcala.



Slika 4.4: Shematski prikaz skenirajućeg Fabry-Perot interferometra s piezoelektričnim pomicanjem zrcala.

Postoji više načina na koji se može mijenjati širina šupljine interferometra. Danas se najčešće koristi piezoelektrik uz pomoć kojega možemo precizno mijenjati udaljenost  $d$  zrcala. Ovisno o udaljenosti između zrcala razlika u fazi biti će za valni broj  $k = 2\pi/\lambda$  dana kao

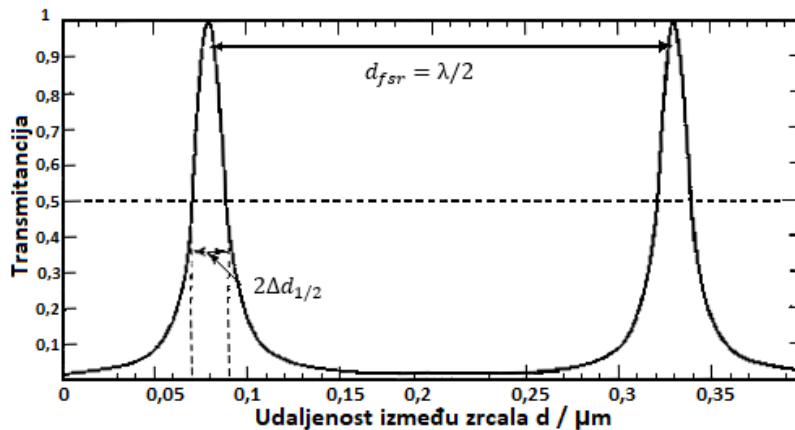
$$\delta = 2kd = 2\frac{2\pi}{\lambda}d. \quad (4.17)$$

Spojimo li 4.17 i 2.30 dobijemo

$$d_m = \frac{m\lambda}{2}. \quad (4.18)$$

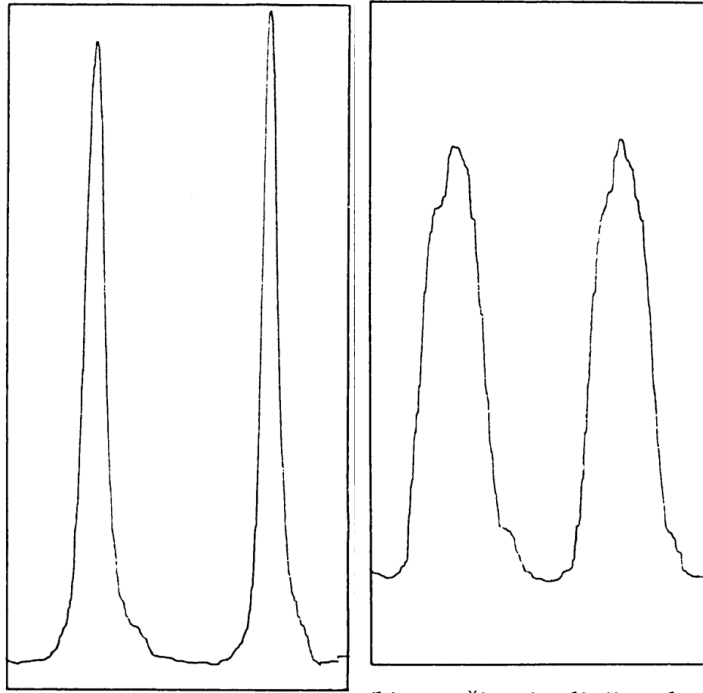
Slobodni spektralni interval možemo dobiti iz razlike dva maksimuma interferencije kao razliku udaljenosti zrcala  $d_{m+1} - d_m$ . Tada nam je slobodni spektralni interval

$$d_{FSR} = d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2}. \quad (4.19)$$

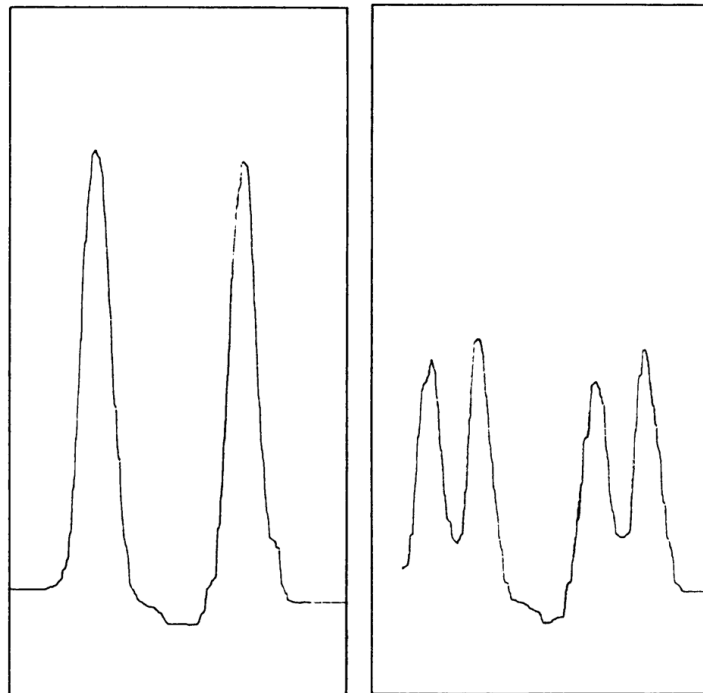


Slika 4.5: Ovisnost transmitancije o udaljenosti između zrcala  $d$ .

Vidimo da je promjena udaljenosti zrcala  $d$  između dva maksimuma određena valnom duljinom upadnog zračenja. Ako želimo promotriti prvi sljedeći maksimum moramo povećati ili smanjiti razmak između zrcala za polovinu valne duljine upadnog zračenja. Valja naglasiti kako ovim postupkom se ne može eksperimentalno utvrditi valna duljina upadnog zračenja obzirom da se ne može dovoljno precizno mjeriti promjena udaljenosti samih zrcala. Umjesto određivanja valne duljine 4.20 nam služi za određivanje razlike u valnoj duljini dvije vrlo bliske spektralne linije. Promotrimo ovisnost transmitancije o promjeni udaljenosti između zrcala  $\Delta d$  za svjetlost koja se sastoji od dvije valne duljine  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

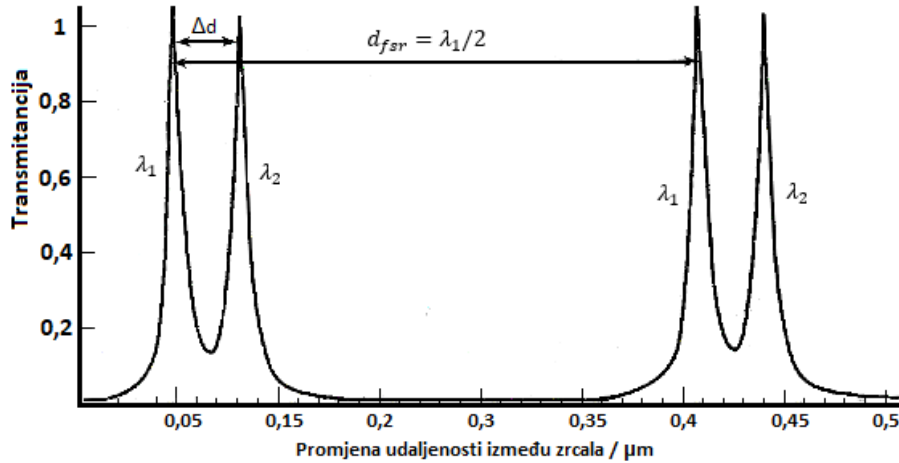


(a) Dvije pruge interferencije nastale bez utjecaja magnetskog polja.  
 (b) Proširenje linija zbog utjecaja magnetskog polja, vidi se slabo odvajanje linija.



(c)  $\pi$ -komponenta tripleta (d)  $\sigma$ -komponente dobijena uz pomoć polaroidnog filtera rotiranjem polaroida za  $90^\circ$ .

Slika 4.6: Zeemanov efekt zelenih linija žive  $Hg^{198}$ .



Slika 4.7: Ovisnost transmitancije o promjeni udaljenosti između zrcala  $\Delta d$  za spektralne linije valnih duljina  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Nominalna valna duljina 500nm, nominalna udaljenost zrcala 5cm

Ako su valne duljine  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  poznate i bliske nominalnoj valnoj duljini  $\lambda = 2d_{FSR}$ , tada možemo odrediti razliku valnih duljina između pojedinih spektralnih linija. Također nam je poznato da obje zrake pripadaju istom redu interferencije  $p$ , tada moraju zadovoljavati relacije

$$\lambda_1 = \frac{2d_1}{p}, \quad (4.20)$$

$$\lambda_2 = \frac{2d_2}{p}. \quad (4.21)$$

Razlika valnih duljina promatranih zraka

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{2}{p}(d_2 - d_1) = \frac{2}{\frac{2d_1}{\lambda_1}} \Delta d = \frac{\lambda_1}{d_1} \Delta d, \quad (4.22)$$

iz čega proizlazi

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{\Delta d}{d_1}. \quad (4.23)$$

Iako ne možemo s velikom preciznošću mjeriti promjenu udaljenosti  $d$ , možemo iskoristiti nominalnu udaljenost zrcala  $d \approx d_1$ . Valnu duljinu  $\lambda_1$  zamijenimo nominalnom valnom duljinom  $\lambda$  u 4.23. Za slučaj prikazan na slici 4.6

$$\Delta d = \frac{d_{FSR}}{8} = \frac{\lambda}{16} = \frac{500 \cdot 10^{-9} m}{16} = 3,125 \cdot 10^{-8} m, \quad (4.24)$$

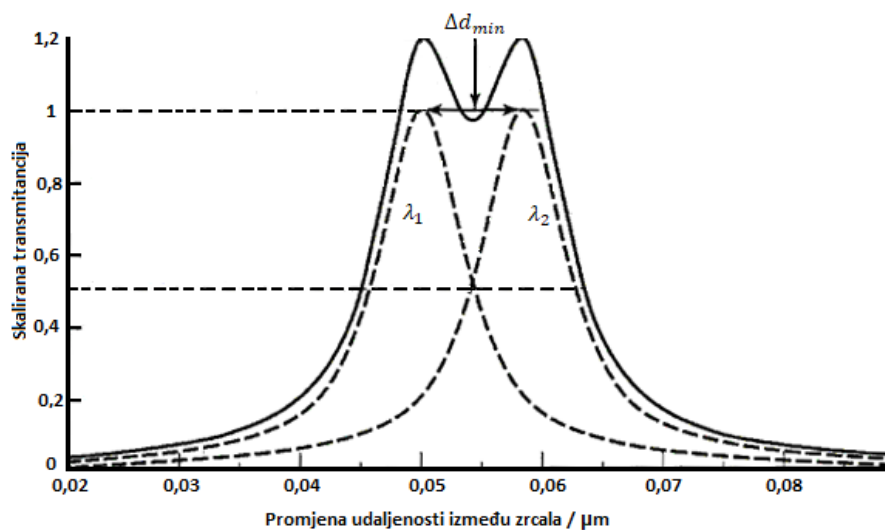
za  $d=5\text{cm}$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{\Delta d}{d_1} \approx \frac{3,1254 \cdot 10^{-8}\text{m}}{0,05\text{m}} = 6,25 \cdot 10^{-7}. \quad (4.25)$$

Ovakav Fabry-Peort interferometar može razlučiti razlike u valnim duljinama reda veličine jednog milijuntog dijela.

### 4.3.2 Finesa i razlučivanje

Minimalna razlika valnih duljina  $\Delta\lambda_{min}$  koju interferometar može razlučiti određena je debljinom maksimuma dvije vrlo bliske spektralne linije. Ako je minimalna razlika promjene udaljenosti  $\Delta d_{min}$  kao funkcija transmitancije jednaka ukupnoj širini na pola maksimuma (eng. Full width at half maximum, FWHM), tada možemo razlučiti dvije bliske spektralne linije. U tom slučaju dolina između dva vrha spektralnih linija neće biti viša od polovine maksimuma iradijancije svakog vrha spektralne linije. Tada nam je kriterij razlučivanja  $\Delta d \geq 2\Delta d_{1/2} = \Delta d_{min}$ .



Slika 4.8: Ovisnost transmitancije o promjeni udaljenosti između zrcala  $\Delta d$  za dvije bliske spektralne linije valnih duljina  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Isprekidane linije prikazuju zasebne spektralne linije, puna linija prikazuje dvije bliske spektralne linije nakon mjerenja.

Minimalna razlika valnih duljina koje možemo razlučiti ovisi o finesi interferometra. Iz 3.58 znamo da finesa Fabry-Perot interferometra ovisi samo o reflektanciji  $\rho$ . Slobodni spektralni interval možemo izračunati kao

$$\delta_{FSR} = \delta_{m+1} - \delta_m = 2\pi(p+1) - 2\pi p = 2\pi \quad (4.26)$$

Da bismo lakše izračunali polovinu širine linije na pola maksimuma (eng. half-width at half maximum, HWHM)  $\delta_{1/2}$  možemo izračunati transmitanciju  $\tau$  iz omjera upadne i transmitirane iradijancije. Iz 3.39

$$\tau = \frac{1}{1 + \left[ \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \right]}. \quad (4.27)$$

Iskoristimo li 3.38 i 3.58 transmitancija nam prelazi u

$$\tau = \frac{1}{1 + \left[ \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \right]}. \quad (4.28)$$

Za  $\tau = 1/2$  dobijemo

$$\sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4\mathcal{F}^2}. \quad (4.29)$$

Na pola maksimuma  $\delta = 2m\pi + \delta_{1/2}$ , iskoristimo li aproksimaciju malih kutova za sinus dobijemo

$$\sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = \sin^2 \left( m\pi + \frac{\delta_{1/2}}{2} \right) = \sin^2 \left( \frac{\delta_{1/2}}{2} \right) \approx \left( \frac{\delta_{1/2}}{2} \right)^2. \quad (4.30)$$

Polovina širine linije na pola maksimuma u aproksimaciji malih kutova

$$\delta_{1/2} = \frac{\pi}{\mathcal{F}}. \quad (4.31)$$

Veza finese i slobodnog spektralnog intervala dana je kao

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{2\delta_{1/2}} = \frac{\delta_{FSR}}{2\delta_{1/2}}, \quad (4.32)$$

U terminima razmaka između zrcala  $d$ , iz 4.17 finesa nam postane

$$\mathcal{F} = \frac{kd_{FSR}}{2k\Delta d_{1/2}} = \frac{d_{FSR}}{\Delta d_{1/2}}. \quad (4.33)$$

4.23 uz kriterij  $\Delta d_{min} = 2\Delta d_{1/2}$  vodi na

$$\frac{\Delta \lambda_{min}}{\lambda} = \frac{\Delta d_{min}}{d} = \frac{2\Delta d_{1/2}}{d} = \frac{\lambda}{2d\mathcal{F}}, \quad (4.34)$$

iz čega možemo izračunati moć razlučivanja interferometra



$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = \frac{2d\mathcal{F}}{\lambda} = p\mathcal{F}. \quad (4.35)$$

Vidimo da skenirajući Fabry-Perot interferometar za velike redove interferencije  $p$ , kada je mod titranja velik ima bolju moć razlučivanja. Također za interferometre s većom finesom dobijemo bolje razlučivanje linija. Možemo primijetiti ako želimo maksimalizirati mod titranja odnosno promatrati maksimalni red interferencije moramo povećati razmak između zrcala što je moguće više. Do sada smo odredili minimalni razmak dvije linije moraju imati kako bi ih mogli razlučiti. Međutim trebamo pogledati koliki može biti maksimalni razmak  $\Delta\lambda_{max}$  za koji ćemo vidjeti dvije linije. Za dovoljno velik razmak vrh valne duljine  $\lambda_1$  će se poklopiti s vrhom valne duljine  $\lambda_2$ . Razlika udaljenosti dva zrcala povezana za valne duljine  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  istog reda interferencije  $p$  dana je kao

$$\Delta d = \frac{p\lambda_2}{2} - \frac{p\lambda_1}{2} = \frac{p\Delta\lambda}{2}. \quad (4.36)$$

Razlika u udaljenosti zrcala za dvije spektralne linije modova titranja  $p+1$  i  $p$   $d_{FSR}$

$$d_{FSR} = (p+1)\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}. \quad (4.37)$$

Maksimalna razlika valnih duljina koje možemo razlučiti je

$$\Delta\lambda_{max} = \frac{\lambda_1}{p} \approx \frac{\lambda}{p}, \quad (4.38)$$

gdje je  $\lambda$  nominalna valna duljina upadnog zračenja koje se sastoji od dvije vrlo bliske valne duljine. Izračunamo li omjer maksimalne i minimalne valne duljine koju može razlučiti interferometar dobiti ćemo finesu

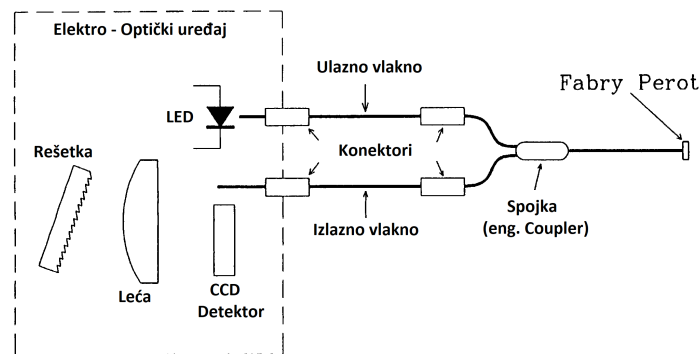
$$\frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta\lambda_{min}} = \frac{\lambda/p}{\lambda/(p\mathcal{F})} = \mathcal{F}. \quad (4.39)$$

Nije neočekivano da ovaj omjer bude jednak finesi interferometra. Promotrimo li interferometar s fiksnim zrcalima vidimo da je  $\Delta\lambda_{min} = \lambda/p\mathcal{F}$ , a maksimalan  $\Delta\lambda_{max} = \lambda/p$ . Sferna zrcala su za razliku od ravnih puno češća kod skenirajućih interferometara zbog manje zahtjevnog baždarenja. Neovisno o orijentaciji svo upadno zračenje se reflektira unutar šupljine u obliku "leptir kravate". Sferna zrcala osim što

su lakša za proizvesti također imaju veću moć sakupljanja svjetlosti od ravnih. Za razliku od ravnih, sferna zrcala osim odvajanja longitudinalnih modova titranja imaju i odvajanje transverzalnih modova titranja zbog zakrivljenosti samih zrcala.

## 4.4 Temperaturni senzor na osnovu Fabry-Perot interferometra [12]

### 4.4.1 Optički sustav



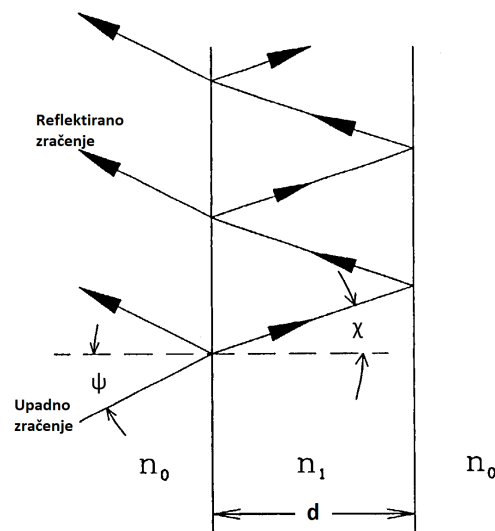
Slika 4.9: Shematski prikaz Optičkog termometra koji koristi Fabry-Perot interferometar.

Koristi se MM (eng. Multimode) umjesto SM (eng. Single mode) optičkog vlakna zbog manje cijene i veće pouzdanosti MM vlakana. MM vlakna imaju  $100\mu m$  promjer dok SM ima samo  $\sim 8\mu m$ . Tanki film Fabry Perot interferometra je nanesen na odrezani kraj kratkog optičkog vlakna. Interferometar je napravljen od silicija čije razloge će se detaljnije razjasniti kada se budu uspoređivali materijal za izradu senzora. Omotač i jezgra vlakna su napravljeni od silicija čiji indeksi loma moraju biti jednaki što se postigne dodavanjem dopanata u jedan ili oba sloja dok se indeksi loma ne izjednače. Vlakna moraju biti premazana hidrofobnim materijalom koji mora biti otporan na abraziju i koroziju. Ako nema zaštitnog premaza dolazi do mikroskopskih pukotina u vlaknu što naposljetku rezultira pucanjem vlakana. Materijali koji se koriste na visokim temperaturama od  $275^{\circ}C$  su sintetički polimeri poliamidi, zlato i aluminij. Poliamid je jeftiniji materijal međutim na temperaturama od  $300^{\circ}C$  dolazi do zamora materijala, radi smanjenja cijene može se koristiti u dijelu senzora koji se nalazi na temperaturama od  $-55^{\circ}C$  do  $200^{\circ}C$ .

Zlato i aluminij su testirani na visokim temperaturama od  $300^{\circ}C$  do  $500^{\circ}C$  u vremenu do 7 dana. Vlakna premazana aluminijem su zadržala svoja svojstva na

temperaturama do  $300^{\circ}C$ , međutim nakon 24 sata na temperaturi od  $400^{\circ}C$  aluminij postaje lomljiv. Zlato za razliku od aluminija slabije drži vlakna čvrstima. Korištena su vlakna profila  $100/140\mu m$  jezgra/omotač. Vlakno s interferometrom je spojeno na 3db 2x1 optičku spojnicu (eng coupler). Ulazna i izlazna vlakna su spojena na udaljen senzor. Svako zračenje koje je reflektirano na konektorima je snažno atenuirano jer mora interferirati zračenje mora dvaput proći kroz spojnicu koja povećava signal za 3db. Na avionu se koristi spektrometar s rešetkom za analiziranje spektra nastalog nakon prolaska zračenja kroz interferometar. CCD (eng. charge-coupled device) silicijske mreže su jeftina i pouzdana metoda detekcije zračenja manjih valnih duljina. Izvor zračenja odnosno svjetlosti se koristi AlGaAs LED sustav čije zračenje ima valnu duljinu od  $830 \pm 50nm$  i spektralnu širinu (FWHM) od 60nm.

#### 4.4.2 Temperaturna ovisnost reflektancije



Slika 4.10: Shematski prikaz Fabry Perot interferometra napravljenog od tankog filma indeksa loma  $n_0$ .

Promotrimo interferometar napravljen od tankog filma indeksa loma  $n_1$  koji se nalazi u sredstvu indeksa loma  $n_0$ , gdje je  $n_1 > n_0$ . Pretpostavljamo da su rubovi filma jednako reflektivni i na njima ne dolazi do apsorpcije zračenja. Također pretpostavljamo da je upadno zračenje kolimirano odnosno paralelno s optičkom osi promatranog tankog filma. Fazni pomak  $\delta$  ovisi o razlici optičkih puteva (ROP)  $\Lambda_{ROP}$  zrake unutar filma

$$\delta = \pi \frac{\Lambda_{ROP}}{\lambda}. \quad (4.40)$$

Razliku optičkih puteva  $\Lambda_{ROP}$  poznajemo iz poglavlja 3

$$\Lambda_{ROP} = 2n_1d \cos(\chi). \quad (4.41)$$

Iz reflektancije  $R_F$

$$R_F(\delta) = \frac{A \sin^2(\delta)}{1 + A \sin^2(\delta)}, \quad (4.42)$$

možemo izraziti preko koeficijenta  $\mathcal{F}$  finesu interferometra

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} A^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

Reflektivnost filma  $R$  je povezana s indeksom loma samog materijala filma i indeksom loma okoline u kojoj se nalazi

$$R = \frac{(n_1 - n_0)^2}{(n_1 + n_0)^2}. \quad (4.44)$$

Reflektivnost interferometra za zrak smo razmatrali u 3,  $R$  je jednak omjeru 3.42. Osjetljivost interferometra na promjenu faznog pomaka dobijemo iz derivacije

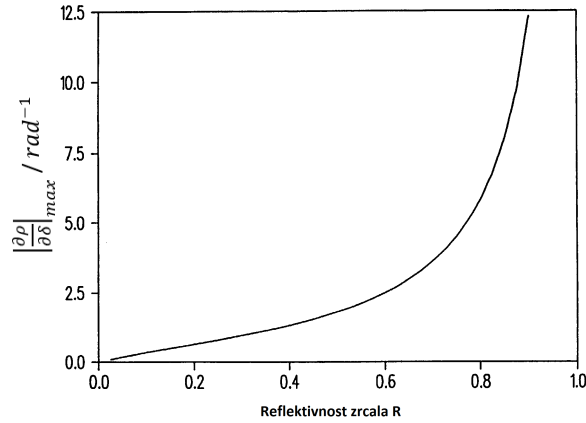
$$\frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} = \frac{A \sin(2\delta)}{(1 + A \sin^2(\delta))^2}. \quad (4.45)$$

Maksimalna osjetljivost na promjenu faze dobijemo na  $\delta = \pi m \pm \delta_0$ , gdje je  $m$  cijeli broj, a

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{1}{2} \sqrt{9 + \frac{4}{A} + \frac{4}{A^2} - \frac{1}{A} - \frac{1}{2}} \right). \quad (4.46)$$

Za male reflektivnosti  $R$   $\delta_0 \approx \pi/4$ , porastom  $R$   $\delta_0 \rightarrow 0$ . Maksimalna osjetljivost na fazu interferometra jednaka je

$$\left| \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right|_{max} = \frac{1}{A} \left[ \frac{1}{\sin^3(2\delta_0)} - \frac{1}{\sin(2\delta_0)} \right]. \quad (4.47)$$



Slika 4.11: Ovisnost maksimalne fazne osjetljivosti Fabry Perot interferometra  $\left| \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right|_{max}$  o reflektivnosti R rubova filma.

Za dovoljno veliku reflektivnost R interferometar postaje vrlo osjetljiv na fazu. Za reflektivnosti veće od 0,3 Fabry-Perot interferometar postaje osjetljiviji od Michelsonovog interferometra. Minimalna razlika u fazi  $\delta_N$  koju intrerferometar može osjetiti ako postoji šum  $\delta i_N$  ovisi o osjetljivošću detektora  $S_D$  (eng. Sensitivity of detector  $S_D$ ), transmitanciji optičkog sustava  $\tau_{OS}$  i intenzitetu upadnog zračenja  $I_0$

$$\delta_N = \left[ S_D \tau_{OS} I_0 \left| \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right|_{max} \right]^{-1} \delta i_N. \quad (4.48)$$

Ovisno o temperaturi dolazi do pomaka faze. Temperaturnu osjetljivost Fabry-Perot interferometra možemo dobiti deriviranjem faznog pomaka po temperaturi

$$\frac{\partial \delta}{\partial T} = \pi \frac{\Lambda_{ROP}}{\lambda} K_\delta, \quad (4.49)$$

gdje je

$$K_\delta = K_n + K_L. \quad (4.50)$$

$K_n$  je termo optički koeficijent

$$K_n = \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial T}, \quad (4.51)$$

a  $K_L$  je termalni koeficijent ekspanzije

$$K_d = \frac{1}{d} \frac{\partial d}{\partial T}. \quad (4.52)$$

Temperaturnu osjetljivost interforometra je tada

$$\frac{\partial R_F}{\partial T} = \frac{\partial R_F}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial T}. \quad (4.53)$$

#### 4.4.3 Temperaturno ovisni materijal

Prilikom odabira materijala potrebno je pripaziti na cijenu i svojstva materijala. Osjetljivost samog interferometra ne bi trebala ovisiti o debljini filma. Ako pretpostavimo da je temperatura funkcija rezonantne frekvencije  $\lambda_m$ , tada će relativna temperaturna osjetljivost rezonantne frekvencije biti

$$K_s = \frac{1}{\lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial T}. \quad (4.54)$$

Tablica 4.1: Svojstva kandidata materijala za Fabry Perot interferometar. [12]

Materijal	$\lambda/\mu m$	n	$K_n/10^{-6}C$	$K_d/10^{-6}C$	$K_\delta/10^{-6}C$
GaAs	0,9	3,6	120	5,7	126
Ge	2,55	4,06	100	5,7	106
Si	2,5	3,44	46	2,6	79
	1,5	3,5	53		
	1,26	3,51	59		
	0,78	3,695	76		
cdTe	1,15	2,79	53	5,0	58
<i>TiO</i> <sub>2</sub>	0,7	2,55	16	7,1	23
Rutil		2,83	35	9,2	44
ZnS	0,63	2,35	27	6,9	34
Al	—	—	—	23	23
MgO	0,77	1,74	8,1	14	22
<i>Si</i> <sub>3</sub> <i>N</i> <sub>4</sub>	0,80	2,01	NA	2,8	19
SiC	0,83	2,61	NA	4,2	17
<i>SiO</i> <sub>2</sub>	0,63	1,46	15	0,5	15
<i>Al</i> <sub>2</sub> <i>O</i> <sub>3</sub>	0,85	1,76	10	5	15

Tablica 4.1 rangira materijale prema  $K_\delta$  od najvišeg prema najnižem. Također u tablici se nalaze informacije o n,  $K_d$  i  $K_n$  kao i valna duljina na kojoj su vršena mjerenja. Za sve materijale prikazane u tablici osim za aluminij interferometar se može napraviti u obliku tankog filma.  $K_d$  aluminijski daje osjetljivost interferometra napravljenog od dva zrcala razmaknuta aluminijskom razmaknicom (eng. Spacer). Osjetljivost aluminijskog interferometra koji je ispunjen zrakom je vrlo malena, također aluminijski interferometar je skup za proizvodnju i velikih dimenzija.

Ako vrijedi da je  $K_n \gg K_d$  tada će temperaturno induciran fazni pomak biti uzrokova isključivo radi promjene reflektancije  $R_F$  rubova filma. Termo optički koeficijent je veći za poluvodičke elemente kao što su GaAs, Ge i Si. Poluvodiči jako ovise o valnoj duljini. Vidimo iz tablice da opadanjem valne duljine  $\lambda$  dolazi do povećanja termo optičkog koeficijenta  $K_n$  kod silicija. Najveću temperaturnu osjetljivost ima silicij koji je ujedno i najprikladniji materijal za visoko temperaturne senzore kao što su senzori temperature mlaznih pogona zrakoplova. Na temperaturama višim od  $275^\circ C$  GaAs postaje nestabilan, na temperaturama od  $450^\circ C$  arsen počinje sublimirati. Na visokim temperaturama dolazi do razdvajanja Ga i As što rezultira stohiometrijskom neravnotežom kristala. Germanij koji ima drugi najveći koeficijent  $K_\delta$  možemo dodavati primjese, međutim germanij ima veliki koeficijent apsorpcije za zračenje valnih duljina oko 830nm. Kod silicija koji je čista tvar ne dolazi do stohiometrijske neravnoteže kao kod GaAs i nema apsorpciju zračenja valnih duljina od 830nm.

Tablica 4.2: Svojstva Fabry Perot interferometrijskih senzora. [12]

Materijal	n	$\left  \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right _{max}$	$[R_F]_{max}$	$\Delta T_\Psi / ^\circ C$
GaAs	3,6	0,58	0,51	12
Ge	4,06	0,71	0,59	12
Si	3,695	0,60	0,53	19
cdTe	2,79	0,34	0,32	44
$TiO_2$	2,55	0,26	0,26	23
Rutil	2,83	0,35	0,34	130
ZnS	2,35	0,20	0,20	110
Al	—	—	23	58
MgO	1,74	0,03	0,03	300
$Si_3N_4$	2,01	0,10	0,10	250
SiC	2,61	0,28	0,27	170
$SiO_2$	1,46	0	0	630
$Al_2O_3$	1,76	0,03	0,03	430

Osim velike osjetljivosti na temperaturu materijal od kojeg želimo napraviti interferometar mora imati i veliku reflektanciju, odnosno veliki indeks refleksije. Materijali s većim indeksom loma imaju i veću reflektivnost  $R$  što nam ujedno povećava maksimalnu reflektanciju  $[R_F]_{max}$  i maksimalnu osjetljivost na promjenu faze  $\left| \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right|_{max}$ . Pretpostavimo da je tanki film nanesen na vrh optičkog vlakna i prekriven je debelim sloje  $SiO_2$  tako da je indeks loma okoline  $n_0 = 1,64$ . Tablica 4.2 daje vrijednosti  $\left| \frac{\partial R_F(\delta)}{\partial \delta} \right|_{max}$  i  $[R_F]_{max}$  za svaki materijal od kojeg je napravljen interferometar. Zane-marujemo u daljnjem razmatranju apsorpciju zračenja. Za silicij maksimalna reflek-

tancija  $[R_F]_{max} = 0,53$  , što je dovoljno velika reflektancija da se može napraviti senzor bez dodatnih reflektivnih premaza.

Prilikom odabira materijala potrebno je pripaziti i na osjetljivost interferometra na prostornu raspodjelu zračenja. Modovi višeg reda imaju veći kut propagacije u optičkom vlaknu, što znači da će imati ujedno i veći kut upada  $\Psi$ . Izmjerena reflektancija  $R_F(\lambda)$  je prosjek reflektancije za svaki individualni mod titranja. Reflektancija se razlikuje po modovima zbog ovisnosti razlike u fazi  $\delta$  o kutu  $\chi$ . Maksimalni kut  $\chi_{max}$  ovisi o sinusnu najvećeg kuta upada  $\Psi$  za koje će doći do totalne refleksije u optičkom vlaknu, tako zvanom numeričkom aperturom (eng. Numerical aperture) NA

$$\chi_{max} = \sin^{-1} \left( \frac{NA}{n_1} \right). \quad (4.55)$$

NA za optičko vlakno napravljeno od vrlo transparentnog stakla (eng. Fused silica) kreće se od 0,2 do 0,3. Za kutove od  $0 < \chi < \chi_{max}$  fazni pomak se kreće između  $\delta_0$  i  $\delta_0 - \Delta\delta_\Psi$ , gdje je  $\delta_0$  fazni pomak normalnog upadnog zračenja a

$$\Delta\delta_\Psi = \pi \frac{\Lambda_{ROP}}{\lambda} \frac{(NA)^2}{2n_1^2}. \quad (4.56)$$

Za konstantnu razliku optičkih puteva  $\Lambda_{ROP}$ ,  $\Delta\delta_\Psi$  se može smanjiti povećanjem indeksa loma materijala  $n_1$ . Kvocijent  $(NA/n_1)^2 \ll 1$ . Vrijednost  $\Delta\delta_\Psi$  mora biti manja od  $\pi/2$  kako bi se spriječilo smanjenje vidljivosti interferencijskih pruga, ako je  $\Delta\delta_\Psi > \pi$  tada pruge više nisu vidljive. To nam daje limit omjera razlike optičkih puteva i valne duljine zračenja  $\Lambda_{ROP}/\lambda$  nakon što odaberemo materijal odnosno odaberemo indeks loma filma  $n_1$ .

Distribucija snage modova može varirati zbog perturbacija kao što su mikroskopska i makroskopska iskrivljavanja materijala, kao rezultat dobijemo vezanje određenih modova. Takve varijacije u modovima mogu pomaknuti rezonantnu frekvenciju što nam ujedno i pomakne vrijednost izmjerene temperature. Razlika u fazi između najnižeg i najvišeg upadnog kuta zračenja  $\Delta\delta_\Psi$  je ekvivalentna razlici temperature

$$\Delta T_\Psi = \frac{(NA)^2}{2n_1^2 K_\delta}. \quad (4.57)$$



Na niskim razlika ma temperatura  $\Delta T_\Psi$  osjetljivost senzora je smanjena. Tablica 4.2 nam daje vrijednosti  $\Delta T_\Psi$  za različite materijale kada je  $NA=0,2$ . Najnižu razliku u temperaturi ima GaAs, Ge i Si. Svi ostali materijali imaju veću osjetljivost. U praksi temperaturne varijacije zbog efekata nastalih promjenom modova biti će manje od  $\Delta T_\Psi$  zbog toga što nisu prisutne samo promjene između maksimalnog i minimalnog kuta upada zračenja. Stvarna osjetljivost senzora se može utvrditi jedino eksperimentom. Najbolji materijal za visoko temperaturne senzore je silicij.

#### 4.4.4 Određivanje debljine filma temperaturnog senzora

Optička debljina je vrlo važna karakteristika poluvodičkog optičkog sustava. Porastom transparentnih elementa optičkog sustava u dimenzijama počinje dolaziti do izražaja potreba za preciznim mjerenjima geometrijskih svojstava i površine elementa. Poredak interferentnih pruga je jedan od bitnih elemenata prilikom izrade senzora

$$m = \frac{\Lambda_{ROP}}{\lambda_m}, \quad (4.58)$$

gdje je  $\lambda_m$  promatrana rezonantna valna duljina, a  $m$  cijeli broj. Iz jednadžbe 4.49 vidimo da povećanjem  $m$  dolazi do povećanja temperaturne osjetljivosti faznog pomaka  $\delta$ . Povećanjem  $m$  također dolazi do smanjenja periodičnosti funkcije  $R_F(\lambda)$  zbog čega analiza  $R_F$  zahtjeva razlučenje manjih razlika u valnim duljinama. Slobodni spektralni interval  $\Delta\lambda_{FSR}$  koji dobijemo za razliku u fazi od  $\pi$  za veliki  $m$ ,

$$\frac{\Delta\lambda_{FSR}}{\lambda_m} \approx \frac{\lambda_m}{\Lambda_{ROP}}. \quad (4.59)$$

Kroz cijelu raspravu se pretpostavljalo da je spektralna širina pojasa analizatora  $\delta\lambda_A$  i interval uzorka koji se promatra  $\delta\lambda_U$  dovoljno maleni da se mogu razlučiti spektralne linije. U ovom slučaju  $\delta\lambda_A$  je ograničavajući faktor i spektar uzorka mora biti manji od pojasa analizatora  $\delta\lambda_A > \delta\lambda_u$ . Mreža fotodioda ima razmak između dva centra dioda od  $25\mu m$ , obzirom da foto diode imaju promjer mnogo manji od  $100\mu m$  spektralna širina analizatora  $\delta\lambda_A$  je približno jednaka produktu promjera jezgre i linearne disperzije  $\partial\lambda/\partial x$ . Širina uzorka je produkt disperzije i razmaka između centara dioda u ovom senzoru je 4 puta manja od širine analizatora.

Za malu reflektivnost R funkcija reflektancije  $R_F(\lambda)$  je gotovo sinusoidan i širina pojasa analizatora doseći vrijednost  $\Delta\lambda_{FSR}/2$ . Povećanjem R funkcija  $R_F(\lambda)$  postaje manje sinusoidan i modovi višeg reda dolaze do izražaja. Za velike R  $\delta\lambda_A$  mora biti manja od FWHM što je približno jednako kvocijentu slobodnog spektralnog intervala i finese. Kako bismo odredili fazni pomak neovisno o jačini signala spektralna širina optičkog izvora  $\Delta\lambda_{LED}$  mora biti veća od polovine slobodnog spektralnog intervala  $\Delta\lambda_{LED} > \Delta\lambda_{FSR}/2$ , tada je

$$\frac{\Delta\lambda_{LED}}{\lambda_m} \geq \frac{\lambda_m}{2\Lambda_{ROP}}. \quad (4.60)$$

Povećanje temperature stvara razliku u fazi  $\Delta\delta = \pi$ , zbog čega se pomakne  $\lambda_{m+1}$  na mjesto  $\lambda_m$ , obrnuto je proporcionalno m i iznosi

$$\Delta T_{FSR} = \frac{\lambda_m}{\Lambda_{ROP} K_\delta}. \quad (4.61)$$

Ako se mjeri razlika rezonantnih valnih duljina ili ako se ekvivalentno razlika u temperaturi izračunava iz promjene faze za fiksnu valnu duljinu tada maksimalni raspon temperatura  $T_{max} - T_{min}$  ne može biti veći od  $\Delta T_{FSR}$ . Veći raspon temperatura možemo postići mjerenjem periodičnosti funkcije  $R_F(\lambda)$  umjesto promjena faze. Obzirom da je  $\Delta\lambda_{FSR} = \lambda_m - \lambda_{m+1}$  temperaturna osjetljivost  $\Delta\lambda_{FSR}$  je jednaka

$$\frac{\partial(\Delta\lambda_{FSR})}{\partial T} = -\frac{\lambda_m^2 K_\delta}{\Lambda_{ROP}}. \quad (4.62)$$

Kako bi se mogla odrediti promjena temperature  $\delta T$ ,  $\Delta\lambda_{FSR}$  mora biti izmjeren s rezolucijom od  $\delta[\Delta\lambda_{FSR}]$ ,

$$\frac{\delta[\Delta\lambda_{FSR}]}{\Delta\lambda_{FSR}} \leq K_\delta \delta T. \quad (4.63)$$

Obzirom da je temperaturna rezolucija oko  $1^\circ C$  i  $K_\delta$  nije veći od  $10^{-4}/^\circ C$  potrebno je vršiti vrlo precizna mjerenja  $\Delta\lambda_{FSR}$  što nije praktično. Kako bismo umanjili pogreške nastale nepreciznim mjerenjima  $\Delta\lambda_{FSR}$  možemo dodatno mjeriti periodičnost funkcije  $R_F(\lambda)$ . Ako je temperaturni raspon veći od  $\Delta T_{FSR}$  redosljed pruga neće biti poznat, ali se može odrediti iz mjerenja slobodnog spektralnog intervala  $\Delta\lambda_{FSR} = \lambda_m - \lambda_{m+1}$ . Kako bismo odredili red interferencije m preciznost mjerenja  $\Delta\lambda_{FSR}$  mora biti manja od jednog pomaka pruge odnosno

$$\frac{\delta[\Delta\lambda_{FSR}]}{\Delta\lambda_{FSR}} \leq \frac{\lambda_m}{\Lambda_{ROP}}. \quad (4.64)$$

Kako bi se odredilo temperaturno razlučenje  $\delta T$  rezonantna valna duljina mora biti određena razlučenjem

$$\delta\lambda_m = \lambda_m K_\delta \delta T. \quad (4.65)$$

Razlučenje rezonantne valne duljine ne ovisi o  $m$ . Red interferencije može odrediti  $\delta\lambda_m$ , za veće redove interferencije pruge postaju oštrije time je razlučenje veće. Minimalna razlučiva promjena u razlici faza

$$m \geq \frac{\Delta\delta}{\pi K_\delta \delta T}, \quad (4.66)$$

ne može biti manja od šuma  $\Delta\delta_N$ . Treba napomenuti da odabirom većeg reda interferencije dolazi do veće promjene razlike u fazi. Za silicij debljine  $d = 2\mu m$ , za  $\delta T = 1^\circ C$  daje  $\Delta\delta = 4mrad$ .

Donju granicu reda interferencije dobijemo tražeći da širina spektra izvora zračenja  $\Delta\lambda_{LED}$  mora biti jednaka minimalno polovini slobodnog spektralnog intervala

$$m \geq \frac{\lambda_m}{2\Delta\lambda_{LED}}. \quad (4.67)$$

Za AlGaAs LED  $\lambda = 830nm$  i  $\Delta\lambda_{LED} = 60nm$  što nam daje  $m \geq 7$ . Silicijska pločica mora biti debela minimalno  $d \geq 0,6\mu m$ . Gornja granica reda interferencije nam je ograničena širinom spektra analizatora  $\delta\lambda_A$ ,

$$m \leq \frac{\lambda_m}{2\delta\lambda_A}. \quad (4.68)$$

Gornja granica nije problematičan konstrukcijski zahtjev za ispuniti, ako je  $\delta\lambda_A = 10nm$  onda  $m \leq 40$ .

Pretpostavimo da se temperatura mjeri u intervalu od  $T_{min}$  do  $T_{max}$  kao funkcija rezonantne frekvencije  $\lambda_m$ . Tada  $T_{max}$  ne može biti veći od temperature na kojoj se preklapaju linije  $\lambda_{m+1}(T) = \lambda_m(T)$ , stoga vrijedi da je

$$m \leq \frac{1}{K_{\delta}(T_{max} - T_{min})}. \quad (4.69)$$

Za silicijski senzor raspona temperatura od  $-55^{\circ}C$  do  $275^{\circ}C$ ,  $m$  mora biti manji od 38 odnosno  $d < 4,3\mu m$ . Silicijski filmovi deblji od  $4\mu m$  nisu praktični za nanositi na vrhove optičkih vlakana. Stoga razlike u fazi biti će manje od  $\pi$  u temperaturnom intervalu od  $-55^{\circ}C$  do  $275^{\circ}C$ . Ako određujemo red interferencije iz mjerenja  $\Delta\lambda_{FSR}$  tada nam vrijedi

$$m \leq \frac{\Delta\lambda_{FSR}}{\delta[\Delta\lambda_{FSR}]}, \quad (4.70)$$

gdje je  $\delta[\Delta\lambda_{FSR}]$  rezolucija mjerenja spektralnog intervala. Deblji silicijski filmovi su podložniji pucanju i odljepljivanju s vlakna zbog razlike u termalnom koeficijentu ekspanzije za silicij i transparentni silicij (eng. Fused silica). Kod interferometra čija je debljina  $d > 2\mu m$  jako dolaze do izražaja površinski defekti na vrhovima optičkih vlakana. Kako bi se izbjeglo smanjenje vidljivosti interferentnih pruga razlika u fazi  $\delta$  mora biti manja od  $\pi/2$  na vlaknu čiji je promjer jezgre  $100\mu m$ . U terminima  $d$  dobijemo da je

$$\delta d = \frac{\lambda_m}{4n_1}. \quad (4.71)$$

Za silicij  $\delta d \leq 60nm$  tako da je nejednolikost površine manja od  $0,7\%$  za  $d = 4\mu m$ . Za film debljine  $d \approx 2\mu m$  vidljivost pruga je bila približno jednaka idealnom filmu bez defekata. Za debljine  $d \approx 4\mu m$  vidljivost je jako narušena što sugerira izraženoj nejednakosti površine vlakna.

Debljina silicijskog filma za svrhe termalnih senzora unutar mlaznog pogona moraju biti u intervalu od  $0,8\mu m$  do  $4,3\mu m$ . Osjetljivost na temperaturne promjene je izraženija kod debljeg filma iako se povećanjem debljine pločice pojavila izražena nejednolikost površine materijala. Zbog nejednolikosti silicijski film ne bi trebao prelaziti debljinu od  $2\mu m$ .

## 5 Metodički dio [4] [17] [18] [19] [21]

Samo mali broj eksperimenata napravljenih u fizici mogu tvrditi da su fundamentalno promijenili fiziku i naše shvaćanje prirode oko sebe. Jedan od takvih eksperimenata zasigurno je eksperiment Michelsona i Morleya. U 19. stoljeću fizičari su znali da se zvuk širi kroz zrak iz toga su zaključili da se svjetlost također mora gibati kroz neki medij. Nazvali su taj hipotetski medij eter (eng. Luminiferous aether). Pretpostavili su da je eter potreban kako bi se svjetlost mogla gibati kroz vakuum svemira jednako kao što je zvuku potreban zrak. Eter je zamišljen kao medij koji je nevidljiv i prožima cijeli svemir. Jedino fizikalno svojstvo etera je omogućavanje svjetlosti da se giba kroz vakuum svemira. U trenutku kada su mjerenja brzine svjetlosti postala dovoljno precizna postalo je moguće eksperimentalno istražiti postojanje etera.

Zemlja se giba brzinom  $30 \cdot 10^3$  m/s oko Sunca. Ako se svjetlost emitirana na Zemlji giba kroz eter zbog gibanja Zemlje oko Sunca brzina svjetlosti će se mijenjati ovisno o trenutnom smjeru brzine Zemlje. Brzina svjetlosti bi trebala biti veća ako se svjetlost giba u smjeru prividnog gibanja etera, a manja ako se giba u suprotnom smjeru. Albert Michelson i Edward Morley su 1887. godine proveli eksperiment u podrumu danas privatnog sveučilišta Case Western Reserve University u Clevelandu. Michelson je osmislio eksperiment u kojem je mogao izmjeriti razlike u brzini svjetlosti u smjeru gibanja i okomito na smjer gibanja Zemlje. Zemlja se giba brzinom 0,001% brzine svjetlosti, kako bi se utvrdile promjene u brzini na ovako malenoj skali potrebna je preciznost mjerenja za koju su mnogi smatrali da je nemoguće postići.

Michelson–Morleyev interferometar se sastojao od izvora svjetlosti, polupropusnog zrcala, dva zrcala i detektora. Zraka svjetlosti iz izvora bi na polupropusnom zrcalu bila razdijeljena u dvije koherentne zrake koje su se zatim reflektirale na zrcalima i rekombinirale u trenutku povratka na polupropusno zrcalo. Rekombinirane zrake bi pokazivale interferentnu sliku čije interferentne pruge bi mijenjale položaj kako bismo rotirali eksperiment. Iz pomaka pruga bismo mogli odrediti promjenu brzine svjetlosti ovisno o orijentaciji eksperimentalnog postava.

Nakon provedenog eksperimenta Michelson i Morley su primijetili da neovisno o položaju eksperimentalnog postava interferentne pruge se nisu pomaknule i svaki puta su vidjeli istu interferentnu sliku. Jedini zaključak koji su mogli donijeti nakon eksperimenta nije išao u korist postojanja etera. Mnogi fizičari tada nisu znali što bi mislili o ovom nevjerojatnom otkriću, neki poput Kelvina i Thomsona smatrali su da je prilikom izvedbe eksperimenta napravljena pogreška i da mora postojati eter. Sve sumnje u ishod ovog eksperimenta naposljetku je razriješio Einstein nakon što je predstavio teoriju relativnosti koja je pokazala da se svjetlost giba uvijek jednakom brzinom  $C$  neovisno o brzini gibanja izvora svjetlosti. Einsteinov opis svemira se u potpunosti podudara sa zaključcima koje su donijeli Michelson i Morley. Ishod ovog eksperimenta je značajno pridonio razumijevanju prirode i bio poticaj za daljnja istraživanja u fizici i znanosti.

## **5.1 Nastavna priprema**

Nastavna priprema namijenjena je uvođenju učenika u problematiku Einsteinove teorije relativnosti. Primjerena je za gimnazijske programe na kraju 3. razreda srednje škole kao uvod u specijalnu teoriju relativnosti.

### **Obrazovni ishodi**

- Opisati riječima Michelson–Morleyev eksperiment
- Opisati kako je testirana hipoteza o postojanju etera
- Matematički izraziti ukupna vremena potrebna da zrake svjetlosti dođu do zastora u slučaju postojanja etera
- Aktivno, samostalno i logički razmišljati
- Razvijati sposobnost pismenog i usmenog izražavanja
- Razvijati znanstveni način izražavanja

### **Odgojni ishodi**

- Uvažavati tuđe i vlastito mišljenje
- Poštivati osnovna pravila komunikacije

## **Vrsta nastave**

- Istraživački usmjerena nastava
- Interaktivna nastava

## **Nastavne metode**

- Demonstracija
- Metoda razgovora-razredna rasprava
- Metoda pisanja/crtanja

## **Oblici rada**

- Frontalni
- Individualni
- Grupni

## **Nastavna pomagala**

- Računalo
- Simulacija

## **Tijek nastavnog sata**

### **Uvodni dio**

**Koje valove ste do sada upoznali, kroz što su se oni gibali?**

- Učenici nabrajaju valove koje su do sada učili na nastavi.
- Želimo povezati prethodna znanja o valovima sa svjetlošću.

**Usporedite mehaničke valove i svjetlost.**

- Očekujemo da će učenici povezati gibanje zvuka kroz zrak i vodenih valova kroz vodu, te doći do zaključka da se i svjetlost giba kroz neko sredstvo.

- Želimo dovesti učenike do istog zaključka koji su Michelsona i Morleya motivirali za provođenje svojeg eksperimenta.

### **Kroz koje sredstvo se giba svjetlost? Gdje je brzina svjetlosti najveća?**

- Očekujemo da će učenici predložiti različita sredstva s kojima su se susreli u životu kao što su voda ili zrak. Očekujemo da će suočavanjem s odsutstvom spomenutih medija doći do zaključka da u svemiru postoji neko novo sredstvo koje nisu još vidjeli.
- Želimo skrenuti pažnju na problematiku gibanja svjetlosti kroz sredstva s kakvima se susrećemo u stvarnom životu i pokazati da se svjetlost može gibati u svemiru gdje takvih sredstava nema. Također želimo skrenuti pažnju da je brzina svjetlosti najveća u vakuumu.

### **Pišem na ploču naslov:**

- Michelson – Morleyev eksperiment

**U 19. stoljeću fizičari su znali da se zvuk širi kroz zrak iz toga su zaključili da se svjetlost također mora gibati kroz neki medij. Nazvali su taj hipotetski medij eter. Pretpostavili su da je eter potreban kako bi se svjetlost mogla gibati kroz vakuum svemira jednako kao što je zvuku potreban zrak. Eter je zamišljen kao medij koji je nevidljiv i prožima cijeli svemir. Jedino fizikalno svojstvo etera je omogućavanje svjetlosti da se giba kroz vakuum svemira.**

### **Pišem na ploču:**

- Pretpostavka: Svjetlost se giba kroz eter

### **Središnji dio**

### **Pišem na ploču istraživačko pitanje:**

- Postoji li eter?

### **Miruje li eter za promatrača koji se nalazi na Zemlji?**

- Očekujemo da će učenici reći kako za promatrača koji se nalazi na Zemlji eter ne miruje. Ako se Zemlja giba brzinom  $V$  tada će se eter gibati brzinom  $-V$  u odnosu na promatrača na zemlji.



- Pokušavamo učenicima skrenuti pažnju da Zemljino gibanje. Ukoliko se Zemlja kroz eter giba brzinom  $V$ , onda se u sustavu promatrača koji miruje na Zemlji eter gibati brzinom  $-V$ .

### Kako bismo mogli testirati hipotezu o eteru?

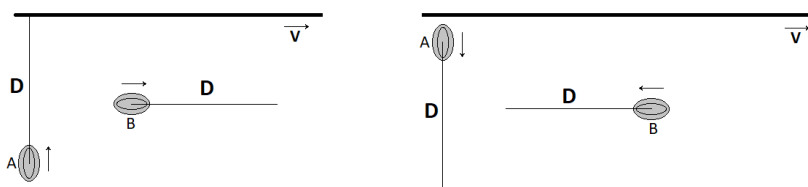
- Učenici prelažu različite moguće pokuse. Predlažu da promotrimo brzine zraka svjetlosti u smjeru gibanja i okomito na smjer gibanja Zemlje.
- Potičemo učenike da samostalno konstruiraju eksperiment.

### Kakve bi bile brzine zraka svjetlosti koje se gibaju okomito i u smjeru gibanja Zemlje?

- Očekujemo da će većina reći da su brzine različite ovisno o smjeru gibanja zraka i Zemlje.
- Zbog gibanja Zemlje kroz njega eter zrake svjetlosti emitirane u smjeru gibanja ili okomito na smjer gibanja Zemlje ne bi imale jednake brzine.

Michelson i Morley osmislili su pokus u kojemu su promatrali gibanje dvije koherentne zrake svjetlosti. Jedna zraka svjetlosti se gibala okomito na smjer gibanja Zemlje, a druga u smjeru gibanja Zemlje. Koji bi bio ishod eksperimenta ako je naša hipoteza točna?

- Učenici predlažu da vremena gibanja dviju zraka ne bi bila jednaka.
- Opisujemo učenicima ideju Michelson-Morleyevog eksperimenta.



Slika 5.1: Prikaz utrke dva glisera na rijeci stalne brzine  $V$ .

Kako bismo lakše mogli vidjeti što se točno događa u našem eksperimentu probajmo zamisliti dvije zrake svjetlosti kao dva glisera na rijeci koji se utrkuju tko će prvi prijeći put  $D$  i vratiti se u startni položaj. Rijeka ima stalnu brzinu  $V$

u desno. Zbog gibanja Zemlje naš eter također ima stalnu brzinu. Gliser A se biva brzinom  $v$  okomito na smjer gibanja rijeke, dok se gliser B giba istom brzinom  $v$  uzvodno i nizvodno. Obzirom da rijeka gura gliser vektor brzine glisera mora biti jednak zbroju vektora brzine rijeke i vektora brzine  $v'$  okomitog na vektor  $V$ .

Koliko je vrijeme potrebno gliserima A i B da završe utrku?

- Učenici u grupama računaju vremena potrebna da svaki pojedini gliser završi utrku.
- Vremena svake od pojedinih zraka želimo izračunati kroz jedan nama intuitivniji problem.

### Okomito na rijeku

$$v^2 = v'^2 + V^2 \quad (5.1)$$

$$v'^2 = v^2 - V^2 \quad (5.2)$$

$$t_a = \frac{2D}{v'} \quad (5.3)$$

$$\frac{2D}{t_a} = v \sqrt{1 - \left(\frac{V^2}{v^2}\right)} \quad (5.4)$$

$$t_a = \frac{2D}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V^2}{v^2}\right)}} \quad (5.5)$$

### Uzvodno

$$t_u = \frac{D}{v + V} \quad (5.6)$$

**Nizvodno**

$$t_n = \frac{D}{v - V} \quad (5.7)$$

$$t_b = t_u + t_n \quad (5.8)$$

$$t_b = \frac{D}{v + V} + \frac{D}{v - V} \quad (5.9)$$

$$t_b = \frac{2D}{v} \frac{1}{1 - \left(\frac{V^2}{v^2}\right)} \quad (5.10)$$

**Koliki je omjer vremena glisera A i B? Ako gliseri predstavljaju dvije zrake svjetlosti u MM eksperimentu, što nam govori različito vrijeme potrebno da svjetlost dođe do zastora o konačnom odnosu faza svjetlosnih valova koje su početno bile jednake?**

- Očekujemo da će učenici reći kako nam vrijeme određuje razliku u fazi između dva vala i oni valovi koji ne dođu u isto vrijeme nisu u fazi.
- Želimo povezati naš misaoni eksperiment s valnim svojstvima svjetlosti.

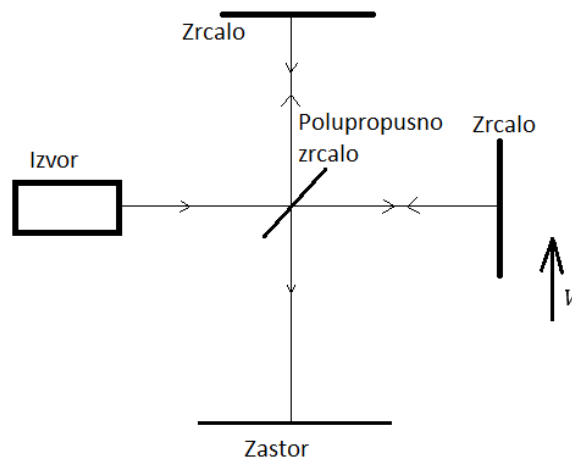
$$\frac{t_a}{t_b} = \sqrt{1 - \left(\frac{V^2}{v^2}\right)} \quad (5.11)$$

**Možemo li izmjeriti sa štopericom vremena utrke dvije zrake svjetlosti? Koju valnu pojavu u fizici možemo iskoristiti umjesto da mjerimo vrijeme?**

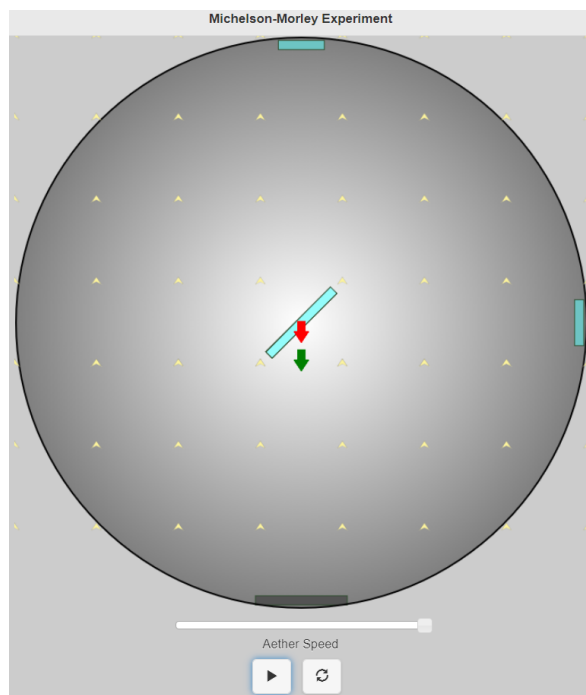
- Očekujemo da će predložiti interferenciju dvije zrake svjetlosti. Obzirom na brzinu svjetlosti očekujemo da će većina smatrati kako ne možemo mjeriti kratke vremenske intervale.
- Navodimo učenike na interferenciju kao pomagalo u određivanju malih razlika u vremenu između dvije koherentne zrake svjetlosti.

**Michelson i Morley umjesto glisera promatrali su utrku dvije zrake svjetlosti. Zrake svjetlosti iz izvora podijelili su na dvije koherentne zrake koristeći polupropusno zrcalo. Svaka zraka je prošla put  $D$  do zrcala i vratila se do polupropusnog zrcala. Nakon što su se zrake rekombinirale stavili su detektor i gledali interferentnu sliku. Žuta strelica nam označava svjetlost koja se giba od izvora do polupropusnog zrcala. Zatim nam crvena i zelena strelica prikazuju gibanje dvije zrake svjetlosti nastale na polupropusnom zrcalu.**

- Opisujemo učenicima simulaciju.



Slika 5.2: Shematski prikaz Michelson Morley eksperimenta.



Slika 5.3: Simulacija Michelson Morley eksperimenta [19].

[http://galileoand爱因斯坦.physics.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html](http://galileoand爱因斯坦.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html)

**Zapišite što očekujete kakva biti će vremena potrebna da zrake svjetlosti dođu do detektora, ako se eter giba prema gore.**

- Učenici pišu i čitaju pretpostavke, očekujemo da će pretpostaviti različito vrijeme gibanja zraka.
- Očekujemo da će vidjeti razliku u vremenima potrebnim da zrake dođu do detektora.

**Zapišite što ste primijetili.**

- Učenici pišu i čitaju opažanje.
- Nakon izvedene simulacije učenici mogu primijetiti da uz postojanje etera zrake svjetlosti ne dolaze u isto vrijeme na zastor.

**Zapišite što očekujete da će se dogoditi ako malo zarotiramo naš pokus i ponovo promotrimo gibanje naših zraka svjetlosti.**

- Učenici pišu i čitaju pretpostavke.

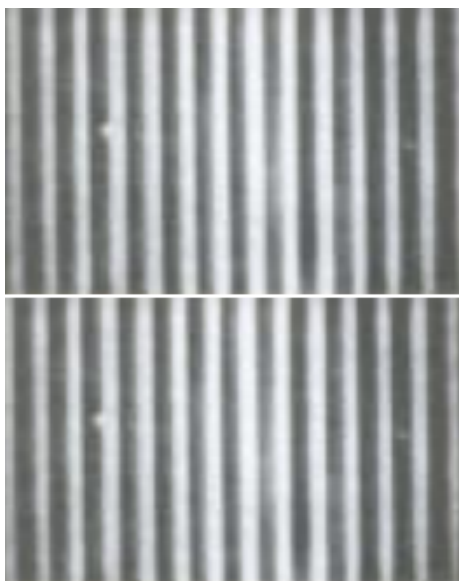
- Učenici primjećuju da rotiranjem eksperimentalnog postava promijeni se razlika vremena zraka A i B.

**Pustimo simulaciju na više različitih kutova uključujući kut od  $45^\circ$ . Zapišite što ste mogli primijetiti.**

- Učenici pišu i čitaju zaključke. Očekujemo da će zaključiti kako se vremena gibanja zraka postaju sve sličnija i u  $45^\circ$  imamo jednako vrijeme potrebno da zrake dođu na zastor.
- Pokušavamo pokazati da razlika vremena potrebnih da zrake dođu do detektora ovisi o relativnom smjeru gibanja u odnosu na gibanje etera.

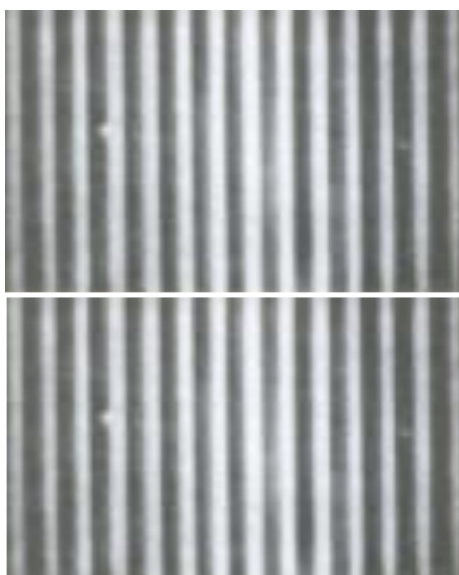
**Rekli smo da su razlike vremena povezani s razlikom faza dva vala. Ako vrtimo naš eksperiment kako će se mijenjati interferentna slika na zastoru?**

- Očekujemo da će povezati promjenu faze dva vala i pomak interferentnih pruga. Očekujemo da će reći kako će se pruge pomicati biti sve slabijeg intenziteta dok slika ne nestane a zatim će se pruge opet pojaviti i nastajati sve dok ne postanu maksimalno svijetle.
- Želimo s učenicima raspraviti na koji način se mijenja interferentna slika promjenom relativnog smjera gibanja zraka svjetlosti u odnosu na gibanje etera, odnosno Zemlje.



Slika 5.4: Usporedba slika interferentnih pruga kakve bi dobili Michelson i Morley kada bi postojao eter. Vidi se pomak interferentnih pruga. [18]

**Michelson i Morley pretpostavili su ukoliko postoji eter promjenom orijentacije eksperimentalnog postava mora doći do pomicanja interferentnih pruga. Na slici 5.4 možemo vidjeti interferentnu sliku za dva različita položaja eksperimentalnog postava kakve su očekivali Michelson i Morley.**



Slika 5.5: Usporedba slika interferentnih pruga kakve bi dobili Michelson i Morley za dva različita položaja. Vidi se da nema pomaka interferentnih pruga. [18]

**Na slici 5.5 vidimo interferentnu sliku za dva položaja eksperimentalnog postava kakvu su u stvarnosti dobili Michelson i Morley. Što iz nje možemo zaključiti?**

- Očekujemo da će učenici primjetiti kako nema nikakvog pomaka interferentnih pruga i zaključiti kako hipoteza o eteru nije podržana. također možemo primjetiti da u svim smjerovima brzina svjetlosti je jednaka.
- Suočavamo učenike s rezultatima eksperimenta i pokušavamo ih interpretirati. Zaključujemo da ako nema promjene interferentne slike onda ne postoji eter.

### **Završni dio**

**Na temelju čega su Michelson i Morley donijeli svoj zaključak o postojanju etera? [21]**

- (a) Na temelju mjerenja vremena potrebnih da svjetlost prođe neki put u različitim smjerovima
- (b) Analizom interferentne slike dvije zrake svjetlosti
- (c) Mjerenju vremena potrebnih da zrake svjetlosti iz početnog položaja nakon refleksije na zrcalu dođu u početni položaj
- (d) Sve od navedenog

**Fizičari su obasnili rezultate eksperimenta rekavši da: [21]**

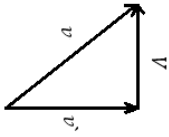
- (a) Ne možemo detektirati gibanje zemlje kroz eter.
- (b) Udaljenost zrcala u eksperimentu ovisi o smjeru gibanja Zemlje.
- (c) Eter ne postoji.
- (d) Sve od navedenog.



# Plan Ploče

Pretpostavka: Svjetlost se giba kroz Eter.  
**Postoji li eter?**

Okomito na rijeku



$$v'^2 = v^2 + V^2$$

$$v'^2 = v^2 - V^2$$

$$v'^2 = \sqrt{v^2 - V^2}$$

$$t_a = \frac{2D}{v'}$$

$$\frac{2D}{t_a} = v \sqrt{1 - \frac{V^2}{v^2}}$$

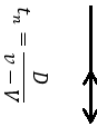
$$t_a = \frac{2D}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v^2}}}$$

Uzvodno



$$t_u = \frac{D}{v + V}$$

Nizvodno



$$t_n = \frac{D}{v - V}$$

$$t_b = t_u + t_n$$

$$t_b = \frac{D}{v + V} + \frac{D}{v - V}$$

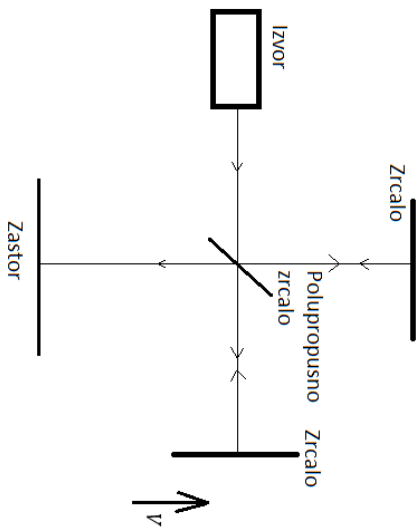
$$t_b = D \left( \frac{v - V + v + V}{(v + V)(v - V)} \right)$$

$$t_b = \frac{2Dv}{v^2 - V^2}$$

$$t_b = \frac{2D}{v} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{v^2}}$$

$$\frac{t_a}{t_b} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{v}\right)^2}$$

$$V = v \sqrt{1 - \left(\frac{t_a}{t_b}\right)^2}$$



# Bibliography

- [1] Joseph F. Mulligan : Who where Fabry and Perot? // American Association of Physics Teachers, 1998.
- [2] Fabry, C. Buisson, H. : Wave-Length Measurements for the Establishment of a System of Spectroscopic Standards // Astrophysical Journal, vol. 28, p.169, 10/1908.
- [3] Fabry, C. Buisson, H. : L'absorption de l'ultra-violet par l'ozone et la limite du spectre solaire // J. Phys. Theor. Appl, p.196-206, 1913.
- [4] Mladen Paić : Osnove fizike IV dio // SNL, Zagreb 1991.
- [5] J M Vaughan : The Fabry-Perot Interferometer History, Theory, Practice and Applications // Taylor & Francis group, New York 1989.
- [6] Luca Giovannelli : Study of a Fabry-Perot interferometer prototype for space applications // Master Thesis, Universita degli studi di Roma Tor Vergata, Roma, Anno Accademico 2010./2011.
- [7] Wijk Robert Jan Van : Fabry-perot with coated mirrors, European patent office, EP Patent App. EP19,930,201,364, Google Patents, 1993.,  
<https://www.google.sr/patents/EP0571022A1?cl=en>
- [8] Kerry Ann Neal : A confocal Fabry-perot interferometer for use in LIDAR receivers // Master Thesis in electrical engineering, Montana state university, Bozeman, Montana, 2009.
- [9] E. K. A. Advanced physics laboratory : THE He-Ne laser nad optical resonators // PHYSICS 3081, 4051, Columbia University, New York,  
[http://www.phys.columbia.edu/~w3081/exp\\_files/laser\\_exp.pdf](http://www.phys.columbia.edu/~w3081/exp_files/laser_exp.pdf)
- [10] Klaus D. Mielenz, Robert B. Stephens, Karl F. Nefflen: Fabry-Perot Spectrometer for High-Resolution Spectroscopy and Laser Work // Journal of research of the National Bureau of Standards - C. Engineering and Instrumentation, Vol. 68C, No. 1, January-March 1964.

- [11] Frank L. Pedrotti, Leon M. Pedrotti, Leon S. Pedrotti : Introduction to optics third edition // Person Education limited, Edinburgh gate, 2014.
- [12] Glenn Beheim : Fiber optic temperature sensor using a thin film Fabry-Perot interferometer // PhD Dissertation, Case Western Reserve University, NASA Lewis Research Center, Patent number: NASA-TM-107459, NAS 1.15:107459, E-10745, <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19970025057>, 1997.
- [13] G. Hernandez : Cambridge studies in modern optics 3: Fabry-Perot interferometers // Cambridge university press, 1988.
- [14] Lambda Scientific Systems, Inc. : Lab Equipment for Teaching Physics // <http://lambdasys.com/uploads/201602/20160226-145045400502.jpg>
- [15] Craig J Sansonetti and Damir Veza : Doppler-free measurement of the 546 nm line of mercury // National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899, USA, 5 October 2010.
- [16] T. J. Scholl, S. J. Rehse, R. A. Holt, and S. D. Rosner : Absolute wave-number measurements in  $^{130}\text{Te}_2$ : reference lines spanning the 420.9–464.6-nm region // Department of Physics and Astronomy, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada N6A 3K7, May 2005.
- [17] Jakov Labor, "Fizika 3 udžbenik za 3. razred gimnazije" // Alfa, 1. izdanje, Zagreb, 2014.
- [18] David Butler : How Fast Is It – The Speed of Light // <http://howfarawayisit.com/wp-content/uploads/2015/12/The-Speed-of-Light.pdf>
- [19] Michael Fowler: The Michelson-Morley Experiment // University of Virginia Physics Department, [http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html](http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/MichelsonMorley/michelsonmorley.html)
- [20] Nada Brković, Planinka Pećina : "Fizika u 24 lekcije" // 1. izdanje, Zagreb, 2010.
- [21] Eugenia Etkina, Michael Gentile, Alan Van Heuvelen : "Collage physics" // Pearson education, 2013