

# Normalne matrice

---

Šimić, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:325049>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ana Šimić

**NORMALNE MATRICE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Rajna Rajić  
Suvoditelj rada:  
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Roditeljima Stipi i Ivi, sestrama Marijani, Ružici, Tonki i Kaji, te Iki i Draganu  
zahvaljujem na ukazanoj podršci tijekom studiranja, te osobito što su zadnjih par godina  
bili uz mene... Hvala Vam!*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Normalne matrice</b>	<b>2</b>
1.1 Uvod . . . . .	2
1.2 Karakterizacije normalnih matrica . . . . .	6
1.3 Normalne matrice s elementima 0 i 1 . . . . .	20
1.4 Nejednakosti za normalne matrice . . . . .	25
<b>2 Unitarne matrice</b>	<b>35</b>
2.1 Svojstva unitarnih matrica . . . . .	35
2.2 Realne ortogonalne matrice . . . . .	39
2.3 Kontrakcije i unitarne matrice . . . . .	43
2.4 Unitarna sličnost realnih matrica . . . . .	46
2.5 Nejednakost s tragom za unitarne matrice . . . . .	48
<b>Bibliografija</b>	<b>52</b>

# Uvod

Prvi poznati primjeri matricnih metoda pojavili su se u 2. stoljeću prije Krista kod Kineza. Iako u tragovima, matrice su se mogle vidjeti i ranije u babilonskoj kulturi. Kinezi su rješavali sustav linearnih jednažbi preko matrica, pri čemu su koeficijente sustava zapisivali u tablicu brojeva te njenom transformacijom rješavali sustav. Unatoč ranoj spoznaji o matricama, tek u 17. stoljeću dolazi do većih napredaka u matricnoj teoriji. Za ime matrica koje i danas koristimo zaslužan je engleski matematičar James Sylvester, koji je 1850. prvi koristio taj pojam. Njegov kolega Arthur Cayley, također engleski matematičar, dao je prvu apstraktnu definiciju matrice. Prvotna primjena matrica za jednostavnije rješavanje sustava linearnih jednažbi napredovala je, te se danas matrice primjenjuju u mehanici, statistici, elektrotehnici, programiranju, kombinatorici, teoriji grafova, ekonomiji i dr.

Matrica normalnost jedna je od zanimljivijih tema linearne algebre i matricne teorije. U ovom radu baviti ćemo se normalnim matricama, te unutar klase normalnih matrica, unitarnim matricama. Ovaj rad je podijeljen u dva poglavlja.

Prvo poglavlje posvećeno je normalnim matricama. Na početku navodimo neke osnovne rezultate matricne teorije koje koristimo u daljnjem radu. Zatim dajemo neke osnovne karakterizacije normalnih matrica. Uvodimo matrice čiji su elementi 0 ili 1, tako zvane binarne, Booleove ili  $(0,1)$ -matrice. Pokazujemo kako od zadane binarne matrice konstruirati normalnu binarnu matricu, te razmatramo uvjete uz koje je binarna matrica normalna. U posljednjoj točki prezentiramo nekoliko nejednakosti koje uključuju elemente zadane kvadratne matrice, njene svojstvene ili singularne vrijednosti, a u kojima postizanje jednakosti rezultira normalnošću promatrane matrice. Poglavlje završavamo rezultatima o normalnim matricnim perturbacijama koji su iskazani preko Frobeniusove matricne norme.

U drugom poglavlju bavimo se unitarnim matricama. Poglavlje započinjemo opisivanjem osnovnih svojstava ovih matrica. U točki 2.2 pobliže se upoznajemo s realnim ortogonalnim matricama, i to najprije s matricama reda 2 (rotacija, zrcaljenje), koje zatim dovodimo u vezu s realnim ortogonalnim matricama proizvoljnog reda. U točki 2.3 opisujemo vezu između unitarnih matrica i kontrakcija. U točki 2.4 pokazujemo da su unitarno slične realne matrice također i realno ortogonalno slične. Rad završavamo prezentacijom nejednakosti kojom se opisuje odnos između prosječnih svojstvenih vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica prema prosječnoj svojstvenoj vrijednosti umnoška tih matrica.

# Poglavlje 1

## Normalne matrice

### 1.1 Uvod

U uvodnom dijelu navest ćemo osnovne pojmove i rezultate matrične teorije koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Prostor  $\mathbb{C}^n$  svih uređenih  $n$ -torki kompleksnih brojeva je unitarni prostor uz skalarni produkt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Norma vektora  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  definira se kao

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Prema Cauchy–Schwarzovoj nejednakosti je

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

odnosno

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}, \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pritom je  $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$  ako i samo ako su vektori  $x$  i  $y$  linearno zavisni.

Vektore prostora  $\mathbb{C}^n$  označavat ćemo i kao jednostupčane matrice. Za  $j = 1, \dots, n$ , označimo s  $e_j^{(n)}$  vektor čija je  $j$ -ta komponenta jednaka 1, dok su sve ostale komponente 0. Ortonormirani skup vektora  $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$  nazivamo kanonskom bazom vektorskog prostora  $\mathbb{C}^n$ .

Ako je  $W$  potprostor prostora  $\mathbb{C}^n$ , tada je ortogonalni komplement prostora  $W$  prostor

$$W^\top = \{y \in \mathbb{C}^n : (y, x) = 0, \forall x \in W\}.$$

Prostor  $\mathbb{C}^n$  je ortogonalna suma potprostora  $W$  i  $W^\top$ , pišemo  $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\top$ . Svaki vektor  $x \in \mathbb{C}^n$  možemo na jedinstven način prikazati kao sumu  $x = y + z$ , gdje su  $y \in W, z \in W^\top$ .

Ako je  $S$  neprazan podskup od  $\mathbb{C}^n$ , tada s  $[S]$  označavamo skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata skupa  $S$ , tj

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}, x_i \in S \right\}.$$

Uočimo da je  $[S]$  potprostor vektorskog prostora  $\mathbb{C}^n$ .

Za  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $[\{x\}]^\top$  označavamo kraće  $x^\top$ .

Skup svih kompleksnih matrica tipa  $m \times n$  označavat ćemo s  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , a skup svih realnih matrica tipa  $m \times n$  s  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . Ako je  $m = n$ , tada skup svih kompleksnih kvadratnih matrica reda  $n$  zapisujemo kraće  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , a skup svih realnih kvadratnih matrica reda  $n$  s  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

Preko kanonskih baza  $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$  prostora  $\mathbb{C}^n$  i  $\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\}$  prostora  $\mathbb{C}^m$ , vektorski prostor  $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  svih linearnih operatora s  $\mathbb{C}^n$  u  $\mathbb{C}^m$  poistovjećujemo s vektorskim prostorom matrica  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , i to na način da operator  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  shvaćamo kao matricu  $A = (a_{ij})$ , gdje je  $a_{ij} = (Ae_j^{(n)}, e_i^{(m)})$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

Matricu čiji su svi elementi jednaki nula nazivamo *nul-matricom* i označavamo s 0.

*Transponirana matrica* matrice  $A = (a_{ij})$  je matrica  $A^T = (b_{ij})$ , gdje je  $b_{ij} = a_{ji}$  za sve indekse  $i, j$ . *Adjungirana matrica* matrice  $A = (a_{ij})$  je matrica  $A^* = (b_{ij})$ , gdje je  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$  za sve indekse  $i, j$ . Ako je  $A = (a_{ij})$ , tada matricu  $B = (b_{ij})$  kojoj su elementi jednaki  $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$  označavamo s  $\overline{A}$ .

Kvadratna matrica je *dijagonalna* ako su svi njezini elementi koji ne leže na glavnoj dijagonali jednaki nuli. Kad želimo naznačiti dijagonalne elemente, tada za dijagonalnu matricu koristimo oznaku  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

*Jedinična matrica* je dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1. Jediničnu matricu označavat ćemo s  $I$  odnosno  $I_n$  ako iz konteksta nije jasno o kojoj se dimenziji radi.

Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *regularna* ili *invertibilna* ako postoji  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  tako da je  $AB = BA = I$ . Matricu  $B$  zovemo *inverznom matricom* ili *inverzom* matrice  $A$  i označavamo ju s  $A^{-1}$ . Regularnost matrice može se karakterizirati pomoću njezine determinante, odnosno ranga. Naime,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je regularna ako i samo ako je  $\det A \neq 0$ , odnosno ako i samo ako je  $r(A) = n$ , tj.  $A$  je matrica punog ranga.

Za kvadratnu matricu  $A = (a_{ij})$  reda  $n$  definira se njezin *trag* kao sumu elemenata na glavnoj dijagonali, pišemo:  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .



Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *hermitska* ako je jednaka svojoj adjungiranoj matrici, tj.  $A^* = A$ .  
 Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *simetrična* ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj.  $A^T = A$ .

Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *involutivna* ako je njezin kvadrat jedinična matrica, tj.  $A^2 = I$ .

Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *normalna* ako komutira sa svojom adjungiranom matricom, tj.  $A^*A = AA^*$ .

Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *unitarna* ako vrijedi  $AA^* = A^*A = I$ .

Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *ortogonalna* ako vrijedi  $AA^T = A^T A = I$ .

Ako je  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , onda matricu  $\lambda I - A$ , gdje je  $\lambda \in \mathbb{C}$  varijabilni parametar, nazivamo *karakterističnom matricom* matrice  $A$ . Polinom  $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ , gdje smo s  $\det(\cdot)$  označili determinantu matrice, nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) polinomom* matrice  $A$ . Polinom  $k_A(\lambda)$  ima  $n$  kompleksnih nultočaka koje nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) vrijednostima* matrice  $A$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice  $A$  nazivamo *spektrum* od  $A$  i označavamo sa  $\sigma(A)$ . Ako je  $\lambda \in \sigma(A)$ , tada postoji vektor  $v \in \mathbb{C}^n$ , ( $v \neq 0$ ) takav da je  $Av = \lambda v$ . Vektor  $v$  nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) vektorom* koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . *Spektralni radijus* matrice  $A$  definira se kao

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Za matricu  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  kažemo da je *pozitivno semidefinitna* ako je  $A$  hermitska matrica čije su sve svojstvene vrijednosti nenegativni realni brojevi. Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je *pozitivno definitna* ako je  $A$  hermitska matrica čije su sve svojstvene vrijednosti pozitivni realni brojevi. Pozitivno semidefinitnu matricu  $A$  označavamo s  $A \geq 0$ , a pozitivno definitnu matricu  $A$  s  $A > 0$ . Ako su  $A$  i  $B$  hermitske matrice takve da je  $A - B \geq 0$ , tada pišemo  $A \geq B$  ili  $B \leq A$ . Tada je  $\geq$  relacija parcijalnog uređaja na skupu hermitskih matrica.

Za  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , uz identifikaciju prostora  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  i  $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ , vrijedi

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m.$$

Sada se lako pokaže da je

- (i)  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je hermitska ako i samo ako je  $(Ax, x) \in \mathbb{R}$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$ ,
- (ii)  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je pozitivno semidefinitna ako i samo ako je  $(Ax, x) \geq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$ ,
- (iii)  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je pozitivno definitna ako i samo ako je  $(Ax, x) > 0$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

Za svaku pozitivno semidefinitnu matricu  $A$  postoji jedinstvena pozitivno semidefinitna matrica  $B$  sa svojstvom  $B^2 = A$ . Takvu matricu  $B$  nazivamo *pozitivnim kvadratnim korijenom* od  $A$  i označavamo s  $A^{1/2}$ .

Za  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , matrica  $A^*A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je pozitivno semidefinitna, pa stoga postoji  $(A^*A)^{1/2}$ . Matricu  $(A^*A)^{1/2}$  označavamo s  $|A|$  i nazivamo *apsolutnom vrijednošću* matrice  $A$ . Svojtvene vrijednosti matrice  $|A|$  nazivamo *singularnim vrijednostima* matrice  $A$  i označavamo sa  $\sigma_i, i = 1, \dots, n$ .

Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji, za svaku matricu  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  sa svojtvenim vrijednostima  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  postoji unitarna matrica  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  takva da je  $U^*AU$  gornjotrokutasta matrica čiju dijagonalu čine svojtvene vrijednosti od  $A$ , pišemo

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Prema teoremu o polarnoj dekompoziciji, za svaku matricu  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  postoje unitarne matrice  $W, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  takve da vrijedi

$$A = W|A| = |A^*|V.$$

Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, za svaku matricu  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  sa ne-nul singularnim vrijednostima  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  postoje unitarne matrice  $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$  i  $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  takve da je

$$A = U \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

gdje je blok-matrica tipa  $m \times n$  i  $D_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ .

Na prostoru  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  uvodimo *operatorsku normu*, u oznaci  $\|\cdot\|$ , na sljedeći način:

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq 1\}, \quad A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

Uz tako definiranu normu,  $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  je normiran prostor, tj. za  $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  i  $t \in \mathbb{C}$  vrijedi

- (i)  $\|A\| \geq 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$
- (ii)  $\|tA\| = |t|\|A\|,$
- (iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$

Također,  $\|A^*\| = \|A\|$  i  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ . Osim toga, operatorska norma je *unitarno invarijantna*, tj.  $\|UAV\| = \|A\|$  za svake dvije unitarne matrice  $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$  i  $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Ova norma ima i svojstvo *konzistentnosti*, tj.  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  za svake dvije matrice  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  i  $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ .

Ako je  $A$  kvadratna matrica, onda je  $\rho(A) \leq \|A\|$ , dok za normalnu matricu  $A$  vrijedi  $\rho(A) = \|A\|$ .

## 1.2 Karakterizacije normalnih matrica

U ovoj točki dajemo razne karakterizacije normalnih matrica.

**Teorem 1.2.1.** *Neka je  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne.*

- 1.) *A je normalna tj.  $A^*A = AA^*$ .*
- 2.) *A je unitarno dijagonalizabilna, odnosno postoji unitarna matrica U reda n takva da je*

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$
- 3.) *Postoji polinom  $p = p(x)$  takav da vrijedi  $A^* = p(A)$ .*
- 4.) *Postoji skup svojstvenih vektora matrice A koji tvore ortonormiranu bazu za  $\mathbb{C}^n$ .*
- 5.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od  $A^*$ .*
- 6.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od  $A + A^*$ .*
- 7.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od  $A - A^*$ .*
- 8.)  *$A = B + iC$  za neke hermitske matrice B i C koje međusobno komutiraju.*
- 9.) *Ako je U unitarna matrica takva da je  $U^*AU = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$  gdje su B i D kvadratne matrice, tada su B i D normalne matrice, a  $C = 0$ .*
- 10.) *Ako je  $W \subseteq \mathbb{C}^n$  invarijantan potprostor za A (tj.  $AW \subseteq W$ ), tada je  $W^\perp$  također invarijantan potprostor za A.*
- 11.) *Ako je x svojstveni vektor od A, tada je  $x^\perp$  invarijantan potprostor za A.*
- 12.) *A se može zapisati kao  $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$  gdje su  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , a  $E_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  zadovoljavaju*

$$E_i^2 = E_i = E_i^*, \quad E_i E_j = 0 \text{ ako je } i \neq j, \quad \sum_{i=1}^n E_i = I.$$
- 13.)  $\text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ .
- 14.) *Singularne vrijednosti od A su  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ .*

$$15.) \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_i)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(A + A^*)^2 .$$

$$16.) \sum_{i=1}^n (\operatorname{Im} \lambda_i)^2 = -\frac{1}{4} \operatorname{tr}(A - A^*)^2 .$$

17.) Svojsvene vrijednosti od  $A + A^*$  su  $\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, \lambda_2 + \overline{\lambda_2}, \dots, \lambda_n + \overline{\lambda_n}$ .

18.) Svojsvene vrijednosti od  $AA^*$  su  $\lambda_1 \overline{\lambda_{\pi(1)}}, \dots, \lambda_n \overline{\lambda_{\pi(n)}}$  za neku permutaciju  $\pi$  skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

$$19.) \operatorname{tr}(A^*A)^2 = \operatorname{tr}((A^*)^2 A^2).$$

$$20.) (A^*A)^2 = (A^*)^2 A^2.$$

21.)  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$ .

22.)  $(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y)$  za svaki  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

23.)  $|A| = |A^*|$ , gdje je  $|A| = (A^*A)^{1/2}$ .

24.)  $A^* = AU$  za neku unitarnu matricu  $U$ .

25.)  $A^* = VA$  za neku unitarnu matricu  $V$ .

26.)  $UP = PU$  ako je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ .

27.)  $AU = UA$  ako je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ .

28.)  $AP = PA$  ako je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ .

29.)  $A$  komutira s normalnom matricom koja nema višestrukih svojstvenih vrijednosti.

30.)  $A$  komutira s  $A + A^*$ .

31.)  $A$  komutira s  $A - A^*$ .

32.)  $A + A^*$  i  $A - A^*$  komutiraju.

33.)  $A$  komutira s  $A^*A$ .

34.)  $A$  komutira s  $AA^* - A^*A$ .

35.)  $A^*B = BA^*$  kad god je  $AB = BA$ .

36.)  $A^*A - AA^*$  je pozitivno semidefinitna matrica.

37.)  $|(Ax, x)| \leq (|A|x, x)$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$ .

*Dokaz.* (2)  $\Leftrightarrow$  (1). Pokažimo (1)  $\Rightarrow$  (2). Neka je  $A = UTU^*$  Schurova dekompozicija od  $A$ . Dovoljno je pokazati da je gornjotrokutasta matrica  $T = (t_{ij})$  dijagonalna. Uočavamo da je

$$AA^* = UTU^*(UTU^*)^* = UT \overbrace{U^*U}^I T^*U^* = UTT^*U^*,$$

$$A^*A = (UTU^*)^*(UTU^*) = UT^* \overbrace{U^*U}^I TU^* = UT^*TU^*,$$

pa iz  $A^*A = AA^*$  slijedi  $T^*T = TT^*$ . Izjednačimo li  $(i, j)$ -elemente matrica  $T^*T$  i  $TT^*$ , imamo:

$$(T^*T)_{ij} = (TT^*)_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \overline{t_{ki}} t_{kj} = \sum_{k=1}^n t_{ik} \overline{t_{jk}}.$$

Za  $i = j = 1$  slijedi da je

$$\sum_{k=1}^n \overline{t_{k1}} t_{k1} = \sum_{k=1}^n t_{1k} \overline{t_{1k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |t_{k1}|^2 = \sum_{k=1}^n |t_{1k}|^2 \Leftrightarrow |t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + \sum_{k=2}^n |t_{1k}|^2.$$

Slijedi da je  $t_{1k} = 0$  za  $k > 1$ . Induktivno se pokaže da je  $t_{ik} = 0$  za  $i < k$ . Prema tome,  $T$  je dijagonalna matrica.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Neka je  $D$  dijagonalna matrica,  $U$  unitarna matrica te neka vrijedi  $D = U^*AU$ . Tada je  $A = UDU^*$ . Sada imamo:

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*,$$

$$A^*A = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*.$$

Kako je je  $D$  dijagonalna matrica, vrijedi  $DD^* = D^*D$ , pa je stoga  $AA^* = A^*A$ .

(3)  $\Leftrightarrow$  (2). Da bismo dokazali (2)  $\Rightarrow$  (3), odabrat ćemo interpolacijski polinom  $p(x)$  stupnja najviše  $n - 1$  takav da je

$$p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dakle, ako je  $A = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^*$  za neku unitarnu matricu  $U$ , tada je

$$\begin{aligned} A^* &= U \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n}) U^* \\ &= U \text{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)) U^* \\ &= U p(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) U^* \\ &= p(U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^*) \\ &= p(A). \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (2). Ako je  $A^* = p(A)$  za neki polinom  $p$ , tada je

$$A^*A = p(A)A = Ap(A) = AA^*.$$

(4)  $\Leftrightarrow$  (2). Pokažimo (2)  $\Rightarrow$  (4). Ako vrijedi  $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , tada množenjem ove jednakosti slijeva s  $U$  imamo

$$AU = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{tj.} \quad Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je  $u_i$   $i$ -ti stupac od  $U$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dakle, vektori  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , su svojstveni vektori od  $A$  i tvore ortonormiranu bazu od  $\mathbb{C}^n$  jer je  $U$  unitarna matrica.

Obratno, pokažimo (4)  $\Rightarrow$  (2). Ako postoji skup svojstvenih vektora matrice  $A$  koji tvore ortonormiranu bazu za  $\mathbb{C}^n$ , onda je matrica  $U$ , čiji stupci su upravo ti svojstveni vektori, unitarna i zadovoljava  $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , tj. vrijedi (2).

(5)  $\Leftrightarrow$  (1). Pokažimo (1)  $\Rightarrow$  (5). Pretpostavimo da je  $A$  normalna matrica i neka je  $u$  jedinični svojstveni vektor od  $A$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Proširimo  $u$  na unitarnu matricu  $U$  takvu da joj je  $u$  prvi stupac, tj.  $Ue_1^{(n)} = u$ . Tada je

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

za neke  $\alpha \in \mathbb{M}_{1, n-1}(\mathbb{C})$  i  $A_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ . Budući da je  $A$  normalna matrica, slijedi  $U^*A^*AU = U^*AA^*U$ , pa je  $(U^*AU)^*(U^*AU) = (U^*AU)(U^*AU)^*$ . Zaključujemo da je  $U^*AU$  normalna matrica. Prema tome,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^*,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ \alpha^* & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ \alpha^* & A_1^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \bar{\lambda}\alpha \\ \alpha^*\lambda & \alpha^*\alpha + A_1^*A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + \alpha\alpha^* & \alpha A_1^* \\ A_1\alpha^* & A_1A_1^* \end{pmatrix}.$$

Odavde slijedi  $\alpha\alpha^* = 0$ , pa je  $\alpha = 0$ . Tada je

$$U^*A^*U = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix},$$

odakle je  $U^*A^*Ue_1^{(n)} = \bar{\lambda}e_1^{(n)}$ , tj.  $A^*Ue_1^{(n)} = \bar{\lambda}Ue_1^{(n)}$  odnosno  $A^*u = \bar{\lambda}u$ , pa je  $u$  svojstveni vektor od  $A^*$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\bar{\lambda}$  od  $A^*$ .

Obrat dokazujemo matematičkom indukcijom po  $n$ . Jasno je da tvrdnja vrijedi za  $n = 1$ . Pretpostavimo da iz (5) slijedi (1) za matrice reda  $n-1$  te dokažimo da to vrijedi i za matrice reda  $n$ . Primjetimo da je

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (U^*AU)(U^*x) = \lambda(U^*x)$$

za bilo koju unitarnu matricu  $U$  reda  $n$ . Dakle, po Schurovoj dekompoziji bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A = (a_{ij})$  gornjotrokutasta matrica. Uzmemo li  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , onda je  $e_1$  svojstveni vektor od  $A$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_1 = a_{11}$ . Prema pretpostavci,  $e_1$  je svojstveni vektor od  $A^*$  tj.  $A^*e_1 = \mu e_1$  za neki skalar  $\mu$ . Odavde proizlazi da se prvi stupac od  $A^*$  mora sastojati od nula izuzev prve komponente. Dakle,  $\overline{a_{ik}} = 0$  za  $k = 2, \dots, n$ , pa je  $A$  oblika

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je  $B$  matrica reda  $n-1$  koja svojstvo (5) nasljeđuje od matrice  $A$ , dakle svaki svojstveni vektor od  $B$  je ujedno i svojstveni vektor od  $B^*$ . Prema pretpostavci indukcije matrica  $B$  je dijagonalna, pa je i  $A$  dijagonalna matrica, što znači da je  $A$  normalna matrica.

(6)  $\Leftrightarrow$  (5). Neka vrijedi (6). Ako je  $Au = \mu u$  za neki vektor  $u \neq 0$  i  $\mu \in \mathbb{C}$ , tada je  $(A + A^*)u = \lambda u$  za neki  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Odavde slijedi  $A^*u = \lambda u - Au = (\lambda - \mu)u$  tj.  $u$  je svojstveni vektor od  $A^*$  pa vrijedi (5). Obratno, pretpostavimo da vrijedi (5). Neka je  $Au = \mu u$  za neki vektor  $u \neq 0$  i  $\mu \in \mathbb{C}$ . Tada je  $A^*u = \lambda u$  za neki  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Slijedi  $(A + A^*)u = (\lambda + \mu)u$  pa vrijedi (6).

(7)  $\Leftrightarrow$  (5). Dokazuje se slično kao i (6)  $\Leftrightarrow$  (5).

(8)  $\Leftrightarrow$  (1). Ekvivalencija se postiže ako se uzmu hermitske matrice

$$B = \operatorname{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2}, \quad C = \operatorname{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}.$$

(9)  $\Leftrightarrow$  (1). Dokažimo (1)  $\Rightarrow$  (9), drugi smjer je jednostavan. Kako je  $A^*A = AA^*$ , to je  $(U^*AU)^*(U^*AU) = (U^*AU)(U^*AU)^*$  odnosno

$$\begin{pmatrix} B^*B & B^*C \\ C^*B & C^*C + D^*D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^* + CC^* & CD^* \\ DC^* & DD^* \end{pmatrix}.$$

Prema tome,

$$B^*B = BB^* + CC^* \quad \text{i} \quad C^*C + D^*D = DD^*.$$

Iz prve jednakosti imamo da je

$$\operatorname{tr}(B^*B) = \operatorname{tr}(BB^* + CC^*) = \operatorname{tr}(BB^*) + \operatorname{tr}(CC^*) = \operatorname{tr}(B^*B) + \operatorname{tr}(CC^*),$$

što znači da je  $\operatorname{tr}(CC^*) = 0$ . Kako je  $CC^*$  pozitivno semidefinitna matrica, odavde slijedi  $CC^* = 0$ . Prema tome  $C = 0$ . Dakle,  $B$  i  $D$  su normalne matrice, pa vrijedi (9). Obratno, pretpostavimo da vrijedi (9) i pokažimo da vrijedi (1), tj. da je  $A$  normalna matrica. Prema Schurovom teoremu postoji unitarna matrica  $U$  takva da je  $U^*AU$  gornjotrokutasta matrica.

Zapišimo  $U^*AU$  kao blok-matricu  $U^*AU = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ . Tada su, prema (9), matrice  $B$  i  $D$  normalne, a  $C = 0$ , pa je stoga matrica  $A$  normalna.

Time smo pokazali da su prvih devet uvjeta ekvivalentni.

(9)  $\Rightarrow$  (10). Dovoljno je uočiti da je  $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$ , te da baza od  $W$  i baza od  $W^\perp$  tvore bazu od  $\mathbb{C}^n$ .

(10)  $\Rightarrow$  (11). (11) je reformulacija od (10) gdje je  $W$  razapet svojstvenim vektorom od  $A$ .

(11)  $\Rightarrow$  (4). Neka je  $Ax = \lambda x$ , gdje je  $x$  jedinični svojstveni vektor. Prema (11),  $x^\perp$  je invarijantan za  $A$ . Promotrit ćemo restrikciju matrice  $A$  na potprostor  $x^\perp$ . Induktivno, dobit ćemo skup svojstvenih vektora od  $A$  koji tvore ortonormiranu bazu od  $\mathbb{C}^n$ .

(12)  $\Rightarrow$  (1) dobije se direktnim računom.

(2)  $\Rightarrow$  (12). Neka je  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , gdje je  $u_i$   $i$ -ti stupac od  $U$ . Tada je

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \dots + \lambda_n u_n u_n^*.$$

Uzmemo li  $E_i = u_i u_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , slijedi (12).

(13)  $\Leftrightarrow$  (2). Neka je  $A = U^* T U$  Schurova dekompozicija od  $A$ , gdje je  $U$  unitarna i  $T = (t_{ij})$  gornjotrokutasta matrica na čijoj dijagonali su svojstvene vrijednosti od  $A$ . Tada je  $A^* A = U^* T^* T U$ . Dakle,  $\operatorname{tr}(A^* A) = \operatorname{tr}(T^* T)$ . S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^* A) &= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2, \\ \operatorname{tr}(T^* T) &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j}^n |t_{ij}|^2. \end{aligned}$$

Slijedi da je  $\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$  ako i samo ako je  $t_{ij} = 0$  za sve  $i < j$ , tj.  $T$  je dijagonalna odnosno  $A$  unitarno dijagonalizibilna.

(14)  $\Rightarrow$  (13). Ako su  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  singularne vrijednosti od  $A$ , tada su  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  svojstvene vrijednosti od  $A^* A$ . Trag matrice jednak je sumi njezinih svojstvenih vrijednosti. Ako vrijedi (14), onda je

$$\operatorname{tr}(A^* A) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2,$$



pa vrijedi (13). Za obratni smjer pokazali smo (13)  $\Rightarrow$  (2), a očito ja da (2)  $\Rightarrow$  (14).

(15)  $\Rightarrow$  (13). Možemo pretpostaviti da je  $A$  gornjotrokutasta matrica, jer jednakosti vrijede kada se  $A$  zamjeni s  $U^*AU$ , gdje je  $U$  neka unitarna matrica. Kako je

$$\operatorname{tr}(A + A^*)^2 = \operatorname{tr}A^2 + 2\operatorname{tr}(A^*A) + \operatorname{tr}(A^*)^2,$$

slijedi

$$\operatorname{tr}(A^*A) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A + A^*)^2 - \operatorname{tr}A^2 - \operatorname{tr}(A^*)^2).$$

Pošto je  $4(\operatorname{Re}\lambda_i)^2 = (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2$ , prema (15) imamo

$$\frac{1}{4}\operatorname{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}\lambda_i)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^*A) &= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A + A^*)^2 - \operatorname{tr}A^2 - \operatorname{tr}(A^*)^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (15). Iz (2) slijedi da svojstvene vrijednosti od  $A + A^*$  iznose  $\lambda_1 + \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_n + \bar{\lambda}_n$ , pa su njihovi kvadrati svojstvene vrijednosti od  $(A + A^*)^2$ . Stoga je

$$\operatorname{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2 = 4 \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}\lambda_i)^2,$$

što je (15).

Slično se pokaže (16)  $\Rightarrow$  (13) i (2)  $\Rightarrow$  (16).

(17)  $\Rightarrow$  (15). Ako svojstvene vrijednosti od  $A + A^*$  iznose  $\lambda_1 + \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_n + \bar{\lambda}_n$ , tada su njihovi kvadrati svojstvene vrijednosti od  $(A + A^*)^2$ . Slijedi

$$\operatorname{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2 = 4 \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}\lambda_i)^2.$$

(2)  $\Rightarrow$  (17) je očito.

(18)  $\Leftrightarrow$  (14). Očito (14)  $\Rightarrow$  (18). Da bismo pokazali obrat, bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je  $\lambda_1 \lambda_{\pi(1)} > 0$  najveća svojstvena vrijednost od  $AA^*$ . Označimo sa  $\sigma_{\max}$  najveću singularnu vrijednost matrice  $A$ . Znamo  $|\lambda_i| \leq \sigma_{\max}$  za  $i = 1, \dots, n$ . Ako je

$|\lambda_{\pi(1)}| \neq |\lambda_1|$ , onda je  $|\lambda_1 \overline{\lambda_{\pi(1)}}| < \sigma_{\max}^2$ , što je nemoguće budući da je  $\sigma_{\max}^2$  najveća svojstvena vrijednost matrice  $AA^*$ . Stoga slijedi  $|\lambda_{\pi(1)}| = |\lambda_1|$ . S druge strane,  $\lambda_1 \lambda_{\pi(1)}$  je pozitivan broj pa je stoga  $\lambda_1 \overline{\lambda_{\pi(1)}} = |\lambda_1 \overline{\lambda_{\pi(1)}}| = |\lambda_1| |\lambda_{\pi(1)}| = |\lambda_1|^2 = \lambda_1 \overline{\lambda_1}$ . Dakle,  $\lambda_1 = \lambda_{\pi(1)}$ . Ostatak slijedi matematičkom indukcijom; promatra se restrikcija od  $AA^*$  na  $x^\perp$ , gdje je  $x$  svojstveni vektor od  $AA^*$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $|\lambda_1^2|$ .

(1)  $\Rightarrow$  (19) je očito.

(19)  $\Rightarrow$  (1). Da bismo pokazali da iz (19) slijedi (1) koristimo poznatu činjenicu da za svake dvije kvadratne matrice  $X$  i  $Y$  istog reda vrijedi

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$$

i

$$\operatorname{tr}(X^*X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0.$$

Primjetimo da je  $\operatorname{tr}(AA^*)^2 = \operatorname{tr}(A^*A)^2$ . Stoga, prema (19) imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((A^*A - AA^*)(A^*A - AA^*)) &= \operatorname{tr}(A^*A - AA^*)^2 \\ &= \operatorname{tr}(A^*A)^2 - \operatorname{tr}((A^*)^2A^2) - \operatorname{tr}(A^2(A^*)^2) + \operatorname{tr}(AA^*)^2 \\ &= \operatorname{tr}(A^*A)^2 - \operatorname{tr}((A^*)^2A^2) - \operatorname{tr}((A^*)^2A^2) + \operatorname{tr}(A^*A)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle,  $A^*A - AA^* = 0$ , tj. vrijedi (1).

Sada imamo (20)  $\Rightarrow$  (19)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  (20).

(21)  $\Rightarrow$  (1). Kvadriranjem objiju strana u (21) dobije se  $(Ax, Ax) = (A^*x, A^*x)$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$  što je ekvivalentno s

$$(x, A^*Ax) = (x, AA^*x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

ili

$$(x, (A^*A - AA^*)x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Oдавde, budući da je matrica  $A^*A - AA^*$  pozitivno semidefinitna, slijedi  $A^*A - AA^* = 0$ , što je tvrdnja (1).

(22)  $\Rightarrow$  (21) dobijemo stavimo li da je  $x = y$ .

(1)  $\Rightarrow$  (22). Ako vrijedi (1), imamo

$$(Ax, Ay) = (A^*Ax, y) = (AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

što je tvrdnja (22).

(23)  $\Leftrightarrow$  (1) je posljedica jedinstvenosti pozitivnog kvadratnog korijena pozitivno semidefinitne matrice.

(24)  $\Leftrightarrow$  (1). Ako je  $A^* = AU$  za neku unitarnu matricu  $U$ , onda je

$$A^*A = A^*(A^*)^* = (AU)(AU)^* = AA^*,$$

tj.  $A$  je normalna. Za obratnu implikaciju, dovoljno je pokazati  $(2) \Rightarrow (24)$ . Neka je  $A = V^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) V$  gdje je  $V$  unitarna. Uzmimo  $U = V^* \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n) V$  gdje je  $l_i = \frac{\overline{\lambda_i}}{\lambda_i}$  ako je  $\lambda_i \neq 0$ , inače  $l_i = 1$ , za  $i = 1, \dots, n$ . Tada je

$$\begin{aligned} A^* &= V^* \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n}) V \\ &= V^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) V V^* \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n) V \\ &= AU. \end{aligned}$$

Slično se pokaže  $(25) \Leftrightarrow (1)$ .

$(1) \Rightarrow (26)$ . Ako je  $A = UP$ , gdje je  $U$  unitarna, a  $P$  pozitivno semidefinitna, tada iz  $A^*A = AA^*$  slijedi  $P^*P = UPP^*U^*$  odnosno  $P^2 = UP^2U^*$ . Korjenovanjem dobivamo  $P = UPU^*$ , tj.  $PU = UP$ .

$(26) \Rightarrow (1)$ . Iz  $(26)$  slijedi

$$A^*A = (UP)^*(UP) = P^*U^*UP = P^*P = P^2,$$

$$AA^* = (PU)(PU)^* = PUU^*P^* = PP^* = P^2,$$

pa vrijedi  $(1)$ .

$(26) \Rightarrow (27)$ . Neka je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ . Tada vrijedi

$$UP = PU \Rightarrow A = PU \Rightarrow UA = UPU = AU.$$

$(27) \Rightarrow (26)$ . Neka je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ . Tada vrijedi

$$AU = UA \Rightarrow UPU = U^2P,$$

odakle zbog regularnosti matrice  $U$  dobivamo  $PU = UP$ .

$(26) \Rightarrow (28)$ . Neka je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ . Množenjem jednakosti  $UP = PU$  s  $P$  zdesna dobijemo  $UP^2 = PUP$ , odakle slijedi  $AP = UP^2 = PUP = PA$ .

$(28) \Rightarrow (26)$ . Neka je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ . Pretpostavimo  $AP = PA$ , to jest,  $UP^2 = PUP$ . Ako je  $P$  regularna, tada je očito  $UP = PU$ , tj. vrijedi  $(26)$ . Pretpostavimo da je  $P$  singularna. Jasno je da matrice  $A$  i  $P$  imaju jednak rang. Neka je  $r = r(A) = r(P)$ , gdje smo s  $r(\cdot)$  označili rang matrice. Zapišimo matricu  $P$  kao

$$P = V^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

gdje je  $V$  unitarna, a  $D$  pozitivno definitna dijagonalna matrica reda  $r$ ,  $r < n$ . Stavimo  $W = VUV^*$ . Tada iz  $UP^2 = PUP$  slijedi

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= VUV^* \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= VUV^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VV^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VV^* \\ &= VUP^2V^* \\ &= VPUPV^* \\ &= VV^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VUV^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VV^* \\ &= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zapišimo  $W$  kao blok-matricu

$$\begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix},$$

gdje je  $W_1$  kvadratna matrica reda  $r$ . Tada je

$$W_1D^2 = DW_1D \quad \text{i} \quad W_3D^2 = 0$$

odakle, jer je  $D$  regularna, slijedi

$$W_1D = DW_1 \quad \text{i} \quad W_3 = 0.$$

Kako je  $W$  unitarna matrica, to iz  $W^*W = I_n$  slijedi  $W_1^*W_1 = I_r$ , pa je matrica  $W_1$  unitarna. Također, iz  $WW^* = I_n$  slijedi  $W_1W_1^* + W_2W_2^* = I_r$ , odakle je  $W_2W_2^* = 0$  i stoga  $W_2 = 0$ . Sada je

$$W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W,$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} UPV^* &= V^*VUPV^* \\ &= V^*VUV^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VV^* \\ &= V^*W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VV^* \\ &= V^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} WVV^* \\ &= V^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} VUV^* VV^* \\ &= PUV^*. \end{aligned}$$

Dakle, zbog regularnosti matrice  $V^*$  slijedi  $UP = PU$ .

(26)  $\Rightarrow$  (28). Neka je  $A = UP$  polarna dekompozicija od  $A$ , pri čemu je  $UP = PU$ . Množenjem  $UP = PU$  zdesna s  $P$  imamo  $AP = UP^2 = PUP = PA$ .

(29)  $\Rightarrow$  (2). Neka  $A$  komutira s  $B$ , gdje je  $B$  normalna matrica čije su sve svojstvene vrijednosti međusobno različite. Zapišimo  $B = V^*CV$ , gdje je  $V$  unitarna, a  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$  dijagonalna matrica, pri čemu su svi  $c_i$  međusobno različiti. Stavimo  $W = (w_{ij}) = VAV^*$ . Tada iz  $AB = BA$  slijedi

$$WCV = VAV^*CV = VAB = VBA = VV^*CVA = CVA = CVAV^*V = CWV,$$

odakle zbog regularnosti matrice  $V$  slijedi  $WC = CW$ . Stoga je  $w_{ij}c_i = w_{ij}c_j$ , odnosno  $w_{ij}(c_i - c_j) = 0$  za  $i, j = 1, \dots, n$ . Budući da je  $c_i \neq c_j$  čim je  $i \neq j$ , imamo  $w_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ . Dakle,  $VAV^*$  je dijagonalna, tj.  $A$  je unitarno dijagonalizibilna.

(2)  $\Rightarrow$  (29). Ako vrijedi (2), uzmimo  $B = U\text{diag}(1, 2, \dots, n)U^*$ . Tada je  $B$  normalna i lako se provjeri da je  $AB = BA$ .

(30), (31) i (32) su ekvivalentni s (2), što vidimo direktnim računom.

(33)  $\Rightarrow$  (20). Ako  $A$  komutira s  $A^*A$ , tada je

$$AA^*A = A^*A^2.$$

Množenjem objiju strana gornje jednakosti s  $A^*$  slijeva dobivamo

$$(A^*A)^2 = (A^*)^2A^2.$$

(34)  $\Rightarrow$  (19). Iz  $A(AA^* - A^*A) = (AA^* - A^*A)A$  slijedi

$$A^2A^* - AA^*A = AA^*A - A^*A^2,$$

pa množenjem objiju strana ove jednakosti s  $A^*$  slijeva dobivamo

$$A^*A^2A^* - (A^*A)^2 = (A^*A)^2 - (A^*)^2A^2.$$

Odavde slijedi

$$\text{tr}(A^*A^2A^*) - \text{tr}(A^*A)^2 = \text{tr}(A^*A)^2 - \text{tr}((A^*)^2A^2).$$

Kako je osim toga  $\text{tr}(A^*A^2A^*) = \text{tr}(A^2(A^*)^2) = \text{tr}((A^*)^2A^2)$ , dobivamo  $\text{tr}(A^*A)^2 = \text{tr}(A^*)^2A^2$ .

(1)  $\Rightarrow$  (33) i (1)  $\Rightarrow$  (34) je očito.

(35)  $\Rightarrow$  (1). Dovoljno je staviti  $B = A$ .

(1)  $\Rightarrow$  (35). Pretpostavimo da je  $A$  normalna i da  $A$  i  $B$  komutiraju. Neka je  $A = U^*\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U$  gdje je  $U$  unitarna. Tada iz  $AB = BA$  slijedi

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(UBU^*) = (UBU^*)\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Označimo  $T = UBU^* = (t_{ij})$ . Tada je

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)T = T\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

iz čega slijedi  $(\lambda_i - \lambda_j)t_{ij} = 0$  za  $i, j = 1, \dots, n$ . Stoga je  $(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)t_{ij} = 0$  za  $i, j = 1, \dots, n$ , pa je

$$\text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)T = T\text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n).$$

Množenjem objiju strana gornje jednakosti s  $U^*$  slijeva i s  $U$  zdesna, slijedi  $A^*B = BA^*$ .

(1)  $\Rightarrow$  (36) je očito.

(36)  $\Rightarrow$  (1). Vrijedi

$$\text{tr}(A^*A - AA^*) = \text{tr}(A^*A) - \text{tr}(AA^*) = 0.$$

Kako je prema pretpostavci  $A^*A - AA^*$  pozitivno semidefinitna matrica, to je  $A^*A - AA^* = 0$  ako i samo ako je  $\text{tr}(A^*A - AA^*) = 0$ . Prema tome,  $A^*A - AA^* = 0$  pa je matrica  $A$  normalna.

(37)  $\Leftrightarrow$  (1). Najprije uočimo da za svaku unitarnu matricu  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  vrijedi

$$|U^*AU|^2 = (U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*|A|^2U = (U^*|A|U)^2.$$

Odavde, zbog činjenice da svaka pozitivno semidefinitna matrica ima jedinstven pozitivni kvadratni korijen, slijedi

$$|U^*AU| = U^*|A|U.$$

Stoga (37) vrijedi ako i samo ako je ispunjeno

$$|(U^*AUx, x)| \leq (|U^*AU|x, x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

za bilo koju unitarnu matricu  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Stoga prema Schurovoj dekompoziciji možemo bez smanjenja općenitosti smatrati da je  $A$  gornjotroktasta matrica.

Pretpostavimo da vrijedi (1). Tada je matrica  $A$  unitarno dijagonalizabilna, pa možemo smatrati da je  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Tada (37) glasi

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |x_i|^2,$$

što očito vrijedi.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (37). Tvrdimo da je  $A$  dijagonalna matrica. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po redu matrice  $A$ . Tvrdnja je istinita za sve matrice reda 1. Pretpostavimo da je svaka gornjotroktasta matrica  $C$  reda  $n - 1$  za koju vrijedi  $|(Cx, x)| \leq (|C|x, x)$ ,  $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ , dijagonalna matrica. Dokažimo da je tada i svaka gornjotroktasta matrica reda  $n$  za koju vrijedi (37) isto dijagonalna matrica. Razlikujemo dva slučaja.

1. slučaj: sve svojstvene vrijednosti matrice  $A$  su nule.

Tada postoje  $B \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$  i gornjotrokutasta  $C \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  takve da je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Oдавде imamo

$$|A|^2 = A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^*B + C^*C \end{pmatrix}.$$

Stavimo  $T = (B^*B + C^*C)^{1/2}$ . Tada je

$$|A| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da je  $B \neq 0$ . Tada postoji  $v \in \mathbb{C}^{n-1}$  takav da je  $Bv \neq 0$ . Neka je

$$s = \frac{1}{\|Bv\|^2} ((Tv, v) + |(Cv, v)|) + 1. \quad (*)$$

Stavimo  $u = sBv$ . Neka je  $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Tada je

$$(|A|x, x) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ Tv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = (Tv, v),$$

$$(Ax, x) = \left( \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} Bv \\ Cv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = (Bv, u) + (Cv, v).$$

Prema (37) je  $|(Bv, u) + (Cv, v)| \leq (Tv, v)$ . Međutim

$$s\|Bv\|^2 - |(Cv, v)| = |(Bv, u)| - |(Cv, v)| \leq |(Bv, u) + (Cv, v)| \leq (Tv, v)$$

pa je

$$s\|Bv\|^2 \leq (Tv, v) + |(Cv, v)|.$$

Stoga iz (\*) slijedi

$$(Tv, v) + |(Cv, v)| + \|Bv\|^2 \leq (Tv, v) + |(Cv, v)|$$

tj.  $\|Bv\|^2 = 0$ , a to je u kontradikciji s pretpostavkom  $Bv \neq 0$ . Prema tome, mora biti  $B = 0$ . Tada je  $T = (C^*C)^{1/2} = |C|$ . Kako je za svaki  $x \in \mathbb{C}^{n-1}$

$$\left( A \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = (Cx, x),$$

$$\left( |A| \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = (Tx, x) = (|C|x, x),$$

to prema (37) vrijedi  $|(Cx, x)| \leq (|C|x, x)$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Budući da je  $C$  gornjotrokutasta matrica reda  $n - 1$ , a to je prema pretpostavci indukcije matrice  $C$  dijagonalna. No, tada je i  $A$  dijagonalna matrica.

2. *slučaj*: barem jedna svojstvena vrijednost matrice  $A$  je različita od nule.

Označimo s  $\lambda$  neku (bilo koju) svojstvenu vrijednost matrice  $A$  koja je različita od nule. Tada postoje  $B \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$  i gornjotrokutasta  $C \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$  tako da je

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Neka je

$$|A| = \begin{pmatrix} t & D \\ D^* & G \end{pmatrix}$$

za neke  $t \in \mathbb{R}$ ,  $D \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ ,  $G \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ . Pri tome, zbog pozitivne semidefinitnosti matrice  $|A|$  vrijedi  $t \geq 0$ ,  $G \geq 0$ . Tada je

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \bar{\lambda}B \\ \lambda B^* & B^*B + C^*C \end{pmatrix},$$

$$A^*A = |A|^2 = \begin{pmatrix} t & D \\ D^* & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & D \\ D^* & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + DD^* & tD + DG \\ tD^* + GD^* & D^*D + G^2 \end{pmatrix},$$

odakle se uspoređivanjem odgovarajućih elemenata matrice  $A^*A$  dobije

$$|\lambda|^2 = t^2 + DD^*,$$

$$\bar{\lambda}B = tD + DG,$$

$$B^*B + C^*C = D^*D + G^2.$$

Uzmimo  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ . Vrijedi

$$(Ax, x) = \left( \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \lambda \\ 0_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix} \right) = \lambda,$$

$$(|A|x, x) = \left( \begin{pmatrix} t & D \\ D^* & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} t \\ D^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = t,$$

pa prema (37) imamo  $|\lambda| \leq t$ . Sada iz  $|\lambda|^2 = t^2 + DD^*$  slijedi  $t^2 + DD^* \leq t^2$  odakle je  $DD^* \leq 0$  pa je  $D = 0$  i stoga  $t = |\lambda|$ . Iz  $\bar{\lambda}B = tD + DG = 0$ , zbog  $\lambda \neq 0$  slijedi  $B = 0$ . Stoga imamo



$|C|^2 = C^*C = B^*B + C^*C = D^*D + G^2 = G^2$  pa je  $|C| = G$ . Uzmimo proizvoljan  $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Tada je

$$\left( A \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ Cx \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = (Cx, x),$$

$$\left( |A| \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |C| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ |C|x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = (|C|x, x),$$

pa prema (37) vrijedi  $|(Cx, x)| \leq (|C|x, x)$ . Kako je  $C$  gornjotrokutasta matrica reda  $n - 1$ , prema pretpostavci indukcije  $C$  mora biti dijagonalna matrica. No, tada je i matrica  $A$  dijagonalna, čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

### 1.3 Normalne matrice s elementima 0 i 1

U ovom dijelu ćemo se fokusirati na posebne vrste normalnih matrica čiji su elementi samo nule i jedinice. Matrice čiji su elementi samo nule i jedinice zvat ćemo  $(0, 1)$ -matrice. U literaturi se koriste i nazivi *binarna matrica* odnosno *Booleova matrica*. One imaju primjene u kombinatorici i teoriji grafova. U ovom dijelu predstaviti ćemo tri teorema o  $(0, 1)$ -matricama: prvi govori o tome kako konstruirati simetričnu (normalnu)  $(0, 1)$ -matricu od zadane  $(0, 1)$ -matrice, drugi daje dovoljan uvjet za normalnost  $(0, 1)$ -matrice, a treći govori o komutativnosti kvadratnih  $(0, 1)$ -matrica.

Neka je  $A$   $(0, 1)$ -matrica tipa  $m \times n$ . Označimo s  $r_i$  zbroj elemenata  $i$ -tog retka matrice  $A$ , a s  $s_j$  zbroj elemenata  $j$ -tog stupca matrice  $A$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Neka je  $R(A) = (r_1, r_2, \dots, r_m)$  vektor zbroja elemenata redaka, a  $S(A) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  vektor zbroja elemenata stupaca matrice  $A$ . Primjerice, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tada je

$$R(A) = (r_1, r_2, \dots, r_4) = (1, 2, 3, 2), \quad S(A) = (s_1, s_2, \dots, s_4) = (2, 3, 1, 2).$$

Zbroj komponenti od  $R(A)$  jednak je ukupnom broju jedinica u  $A$ . Isto tako, zbroj komponenti od  $S(A)$  je ukupan broj jedinica matrice  $A$ . Obrat ne mora vrijediti. Ako imamo zadane vektore  $R$  i  $S$  s nenegativnim cijelim brojevima, tada ne mora postojati  $(0, 1)$ -matrica koja ima  $R$  kao vektor zbroja elemenata redaka i  $S$  kao vektor zbroja elemenata stupaca.

Npr. nijedna  $(0, 1)$ -matrica  $A$  reda 4 ne zadovoljava  $R(A) = (4, 1, 1, 1)$  i  $S(A) = (4, 2, 1, 0)$ . Problemom određivanja uvjeta uz koje za dane vektore  $R$  i  $S$  postoji  $(0, 1)$ -matrica  $A$  sa svojstvom  $R(A) = R$  i  $S(A) = S$  bavi se kombinatorna teorija matrica.

Očito, za simetričnu  $(0, 1)$ -matricu, vektor zbroja elemenata redaka jednak je vektoru zbroja elemenata stupaca. Sljedeći teorem pokazuje da u nekom smislu vrijedi i obrat. Za zadani vektor  $R$  postoji  $(0, 1)$ -matrica čiji su vektori zbroja elemenata redaka i zbroja elemenata stupca jednaki  $R$  ako i samo ako postoji normalna, odnosno simetrična,  $(0, 1)$  matrica s tim svojstvom.

**Teorem 1.3.1.** *Ako postoji  $(0, 1)$ -matrica  $A$  reda  $n$  sa  $R(A) = S(A) = R$ , onda postoji simetrična  $(0, 1)$ -matrica  $B$  reda  $n$  sa svojstvom  $R(B) = S(B) = R$ .*

*Dokaz.* Koristimo indukciju po  $n$ . Za  $n = 1$  i  $n = 2$  tvrdnja je očita. Neka je  $n > 2$ . Možemo pretpostaviti da  $A$  sadrži nenul redak (ili stupac). Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za matrice reda manjeg od  $n$ . Ako je  $A$  simetrična, onda se nema što dokazivati. Dakle, pretpostavimo da  $A = (a_{ij})$  nije simetrična.

Ako je prvi stupac matrice  $A$  dobiven transponiranjem prvog retka, tada tvrdnja slijedi ako primjenimo pretpostavku indukcije na kvadratnu podmatricu reda  $n - 1$  smještenu u donjem desnom kutu matrice  $A$ .

Ako to nije slučaj, tada zbog nesimetričnosti matrice  $A$  i uvjeta  $R(A) = S(A)$ , imamo  $a_{1p} = 1$ ,  $a_{1q} = 0$ ,  $a_{p1} = 0$ ,  $a_{q1} = 1$  za neke  $p$  i  $q$ . Promotrimo sada redove  $p$  i  $q$ . Kada bi bilo  $a_{pt} \leq a_{qt}$  za  $t = 2, \dots, n$ , tada bi zbog  $a_{p1} = 0$  i  $a_{q1} = 1$  slijedilo  $r_p < r_q$ . Također, kada bi bilo  $a_{tp} \geq a_{tq}$  za  $t = 2, \dots, n$ , tada bi zbog  $a_{1p} = 1$  i  $a_{1q} = 0$  vrijedilo  $s_p > s_q$ . Međutim, oba slučaja se ne mogu dogoditi istovremeno, jer bi došlo do kontradikcije  $r_p < r_q = s_q < s_p = r_p$ . Prema tome, mora postojati takav  $t$  da je ili  $a_{pt} = 1$  i  $a_{qt} = 0$  ili  $a_{tp} = 0$  i  $a_{tq} = 1$ . Ako je  $a_{pt} = 1$  i  $a_{qt} = 0$ , tada u matrici  $A$  zamijenimo nule i jedinice na presjecima redaka  $p, q$  i stupaca  $1, t$ . Ako je  $a_{tp} = 0$  i  $a_{tq} = 1$ , tada u matrici  $A$  zamijenimo nule i jedinice na presjecima stupaca  $p, q$  i redaka  $1, t$ . Primjetimo da takve zamjene smanjuju broj različitih elemenata u prvom retku i prvom stupcu matrice  $A$  bez utjecaja na vektore zbroja elemenata redaka i zbroja elemenata stupaca matrice  $A$ . Ponavljajući opisani postupak dolazimo do matrice u kojoj je prvi stupac dobiven transponiranjem prvog retka. Primjenimo li pretpostavku indukcije na kvadratnu podmatricu reda  $n - 1$  smještenu u donjem desnom kutu te matrice, dobivamo simetričnu  $(0, 1)$ -matricu  $B$  reda  $n$  sa svojstvom  $R(B) = S(B) = R$ .  $\square$

U daljnjem ćemo s  $J_n$ , ili jednostavnije  $J$ , označavati kvadratnu matricu reda  $n$  čiji su svi elementi 1.

**Teorem 1.3.2.** *Neka je  $A$  kvadratna  $(0, 1)$ -matrica reda  $n$ . Ako je*

$$AA^T = tI + J$$

za neki pozitivan cijeli broj  $t$ , tada je  $A$  normalna matrica.

*Dokaz.* Neka je  $A = (a_{ij})$  te  $R(A) = (r_1, \dots, r_n)$ . Promatrajući dijagonalne elemente matrica  $AA^T = (b_{ij})$  i  $tI + J = (c_{ij})$  imamo

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} = r_i, \quad c_{ii} = t + 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Stoga iz  $AA^T = tI + J$  slijedi  $r_i = t + 1$  za  $i = 1, \dots, n$ . Stavimo  $AJ = (g_{ij})$ ,  $(t + 1)J = (h_{ij})$ . Tada je

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} = r_i, \quad h_{ij} = t + 1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

pa je stoga  $g_{ij} = h_{ij}$  za  $i, j = 1, \dots, n$ , odnosno

$$AJ = (t + 1)J.$$

Matrica  $A$  je regularna, jer je

$$(\det A)^2 = \det(AA^T) = \det(tI + J) = (t + n)t^{n-1} \neq 0,$$

(pri čemu se posljednja jednakost u gornjem izrazu dobije matematičkom indukcijom po  $n$ ). Dakle, iz  $AJ = (t + 1)J$  slijedi  $J = (t + 1)A^{-1}J$  pa je

$$A^{-1}J = (t + 1)^{-1}J.$$

Množenjem zdesna obje strane jednakosti  $AA^T = tI + J$  s  $J$  imamo

$$AA^T J = tJ + J^2 = (t + n)J,$$

odakle se množenjem slijeva s  $A^{-1}$  dobije

$$A^T J = (t + 1)^{-1}(t + n)J.$$

Nadalje, transponiranjem objiju strana gornje jednakosti imamo

$$JA = (t + 1)^{-1}(t + n)J,$$

odakle se množenjem zdesna s  $J$  dobije

$$JAJ = n(t + 1)^{-1}(t + n)J.$$

Pomnožimo li  $AJ = (t + 1)J$  slijeva s  $J$ , dobivamo

$$JAJ = n(t + 1)J.$$

Slijedi

$$(t+1)^2 = t+n,$$

pa uvrštavajući to u  $JA = (t+1)^{-1}(t+n)J$  imamo

$$JA = (t+1)J.$$

Iz  $AJ = (t+1)J$  slijedi da je

$$AJ = JA$$

odnosno

$$A^{-1}JA = J.$$

Tada imamo

$$A^T A = A^{-1}(AA^T)A = A^{-1}(tI + J)A = tI + A^{-1}JA = tI + J = AA^T.$$

□

Sljedeći teorem pokazuje da ako je umnožak dviju  $(0, 1)$ -matrica, matrica kojoj su dijagonalni elementi jednaki nula, a ostali elementi su jedinice, tada te dvije matrice komutiraju. Da bismo dokazali taj teorem koristimo pomoćni rezultat.

**Lema 1.3.3.** Za  $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  i  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  vrijedi

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

*Dokaz.* Vrijedi

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix},$$

pa je prema Binet–Cauchyjevom teoremu

$$\det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Blok-matrica  $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$  je gornjotrokutasta, pa je njezina determinanta jednaka umnošku

elemenata na glavnoj dijagonali, dakle  $\det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1$ . Razvojem blok-matrice  $\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$  po elementima zadnjeg stupca uzastopce  $n$  puta dobije se

$$\det \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m + AB).$$

Prema [4, teorem 2.2] vrijedi

$$\det \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + BA).$$

Time je tvrdnja dokazana. □

**Teorem 1.3.4.** *Neka su  $A$  i  $B$  kvadratne  $(0, 1)$ -matrice reda  $n$ , tako da je*

$$AB = J_n - I_n.$$

Tada je

$$AB = BA.$$

*Dokaz.* Neka su  $a_i$  i  $b_j$  stupci od  $A$  i  $B^T$  redom, tj.

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad B^T = (b_1, \dots, b_n).$$

Tada je

$$0 = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n b_i^T a_i.$$

Dakle, obzirom da  $A$  i  $B$  imaju nenegativne elemente,  $b_i^T a_i = 0$  za svaki  $i$ . Iz  $AB = J_n - I_n$  imamo

$$I_n = J_n - AB \quad \text{ili} \quad I_n = J_n - \sum_{s=1}^n a_s b_s^T.$$

Tada je

$$I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T = J_n - \sum_{s \neq i, j} a_s b_s^T, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Primjetimo da desna strana gornje jednakosti sadrži  $n - 1$  matrica, od kojih je svaka ranga najviše jedan. Matematičkom indukcijom po broju matrica lako se pokaže da se zbrajanjem tih matrica dobije matrica čiji je rang najviše  $n - 1$ . Odatle slijedi

$$r(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) \leq n - 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

pa je matrica  $I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T$  singularna, odnosno  $\det(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) = 0$  za  $i, j = 1, \dots, n$   $i \neq j$ . Nadalje, vrijedi

$$a_i b_i^T + a_j b_j^T = (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

a prema lemi 1.3.3 je

$$\det(I_n + (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T) = \det(I_2 + (b_i, b_j)^T(a_i, a_j)), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Stoga za  $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ , imamo

$$\begin{aligned}
 0 &= \det(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) \\
 &= \det(I_n + (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T) \\
 &= \det(I_2 + (b_i, b_j)^T(a_i, a_j)) \\
 &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_i^T a_j \\ b_j^T a_i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
 &= 1 - (b_i^T a_j)(b_j^T a_i).
 \end{aligned}$$

Prema tome,  $b_i^T a_j = 1$  za svaki par  $i$  i  $j, i \neq j$ , jer su  $A$  i  $B$   $(0, 1)$ -matrice. Slijedi, primjenjujući  $b_i^T a_i = 0$ , da je

$$BA = (b_i^T a_j) = J_n - I_n = AB.$$

□

## 1.4 Nejednakosti za normalne matrice

U ovom dijelu razmatrat ćemo nejednakosti koje uključuju elemente dane kvadratne matrice, te njezine svojstvene i singularne vrijednosti. Slučajevi jednakosti u promatranim nejednakostima rezultirat će normalnošću dane matrice. Također, prezentirat ćemo nekoliko rezultata o normalnim matricnim perturbacijama.

**Teorem 1.4.1** (Schurova nejednakost). *Neka je  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Tada je*

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $A$  normalna matrica.*

*Dokaz.* Neka je  $A = U^* T U$  Schurova dekompozicija od  $A$ , gdje je  $U$  unitarna, a  $T$  gornjotrokutasta matrica. Tada je  $A^* A = U^* T^* T U$ , pa slijedi  $\text{tr}(A^* A) = \text{tr}(T^* T)$ . Kako je

$$\text{tr}(A^* A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2, \quad \text{tr}(T^* T) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2,$$

to je

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 - \sum_{i<j} |t_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2,$$

čime je Schurova nejednakost dokazana. Ako pretpostavimo da je  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ , tada je  $t_{ij} = 0$  za  $i < j$ , tj.  $T$  je dijagonalna. Dakle, matrica  $A$  je unitarno dijagonalizibilna, odnosno normalna. Obrat je očit.  $\square$

**Teorem 1.4.2.** *Neka je  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  sa singularnim vrijednostima  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Tada je*

$$|\operatorname{tr} A| \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $A = uP$ , za neki  $P \geq 0$  i neki  $u \in \mathbb{C}$ ,  $|u| = 1$ . Stoga je  $A$  normalna (ali obrat ne vrijedi).*

*Dokaz.* Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, postoje unitarne matrice  $U = (u_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  i  $V = (v_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  te dijagonalna matrica  $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , gdje je  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ ,  $r = r(A)$ , tako da je  $A = UDV$ . Imamo

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr} A| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} \sigma_j v_{ji} \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} v_{ji} \sigma_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n u_{ij} v_{ji} \right| \sigma_j \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |u_{ij} v_{ji}| \right) \sigma_j \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sigma_j. \end{aligned}$$

Pritom je posljednja nejednakost u gornjem nizu posljedica Cauchy–Schwarzove nejednakosti za  $(|u_{1j}|, \dots, |u_{nj}|)$  i  $(|v_{j1}|, \dots, |v_{jn}|)$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^n |u_{ij} v_{ji}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_{ij}|^2 \sum_{i=1}^n |v_{ji}|^2} = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ako je  $\operatorname{tr} A = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ , tada je

$$\left| \sum_{i=1}^n u_{ij} v_{ji} \right| = \sum_{i=1}^n |u_{ij} v_{ji}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_{ij}|^2 \sum_{i=1}^n |v_{ji}|^2} = 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Zapisat ćemo  $\sum_{i=1}^n u_{ij}v_{ji}$  kao skalarni produkt  $(u_j, v_j^*)$  gdje smo s  $u_j$  označili  $j$ -ti stupac od  $U$ , a s  $v_j$   $j$ -ti redak od  $V$  za  $j = 1, \dots, n$ . Budući da se tada postiže jednakost u Chauchy–Schwarzovoj nejednakosti, tj. vrijedi

$$|(u_j, v_j^*)| = \|u_j\| \|v_j^*\|, \quad j = 1, \dots, r,$$

slijedi da za  $j = 1, \dots, r$  postoje  $c_j \in \mathbb{C}$  takvi da je  $u_j = c_j v_j^*$  gdje je  $|c_j| = 1$ . Dakle,

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr} A| &= \left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij}v_{ji}\sigma_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^r (u_j, v_j^*)\sigma_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^r (c_j v_j^*, v_j^*)\sigma_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^r c_j (v_j^*, v_j^*)\sigma_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^r c_j \sigma_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^r |c_j| \sigma_j \\ &= \sum_{j=1}^r \sigma_j. \end{aligned}$$

pa zbog  $|\operatorname{tr} A| = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$  slijedi  $\left| \sum_{j=1}^r c_j \sigma_j \right| = \sum_{j=1}^r |c_j| \sigma_j$ . Zaključujemo da postoji  $\varphi \in \mathbb{R}$  sa svojstvom  $c_j = |c_j| e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Stoga za  $j = 1, \dots, r$  vrijedi  $u_j = u v_j^*$ , gdje je  $u = e^{i\varphi}$ . Prema tome,  $U = u V^*$  pa je  $A = U D V = u V^* D V = u P$ , pri čemu je  $P = V^* D V$  pozitivno semidefinitna matrica.

Obratno, pretpostavimo da je  $A = u P$  za neku pozitivno semidefinitnu matricu  $P$  i  $u \in \mathbb{C}$  za koji je  $|u| = 1$ . Tada je  $|A|^2 = A^* A = |u|^2 P^* P = P^2$ , odakle slijedi  $|A| = P$ . Stoga su singularne (svojstvene) vrijednosti matrice  $P$  jednake  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Prema tome,

$$|\operatorname{tr} A| = |\operatorname{tr}(uP)| = |u \operatorname{tr} P| = |u| |\operatorname{tr} P| = \operatorname{tr} P = \sigma_1 + \dots + \sigma_n.$$

□



Ako su zadane dvije kvadratne matrice, postavlja se pitanje koliko "blizu" su te matrice u terminima njihovih svojstvenih vrijednosti. Promjenimo li elemente neke matrice za male vrijednosti, kako će se promijeniti njezine svojstvene vrijednosti? U daljnjem ćemo prezentirati tri rezultata o normalnim matičnim perturbacijama. Za normalne matrice  $A$  i  $B$ , prvi rezultat uspoređuje  $|A| - |B|$  i  $A - B$  u terminima Frobeniusove matične norme. Drugi rezultat ocjenjuje koliko su blizu svojstvene vrijednosti dviju normalnih matrica  $A$  i  $B$  u terminima Frobeniusove matične norme od  $A - B$ , dok je treći rezultat istog tipa, pri čemu se za samo jednu od promatranih matrica  $A$  i  $B$  zahtjeva da bude normalna.

Prije nego što prezentiramo rezultate o normalnim matičnim perturbacijama, uvest ćemo pojam Frobeniusove norme. Vektorski prostor  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je unitarni prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(A, B) = \text{tr}(B^*A), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Tim skalarnim produktom je inducirana norma  $\|\cdot\|_F$  na prostoru  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ :

$$\|A\|_F = (\text{tr}(A^*A))^{1/2} = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Ovu normu zovemo *Frobeniusovom normom*, *Hilbert–Schmidtovom normom* ili *Schurovom normom*. Frobeniusova norma je matična norma koja ima svojstvo *konzistentnosti*, tj. za svake dvije matrice  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  vrijedi  $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ .

Ako je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$  sa singularnim vrijednostima  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , tada je očito

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{1/2},$$

tj.  $\|A\|_F$  je jedinstveno određena singularnim vrijednostima matrice  $A$ . Posljedično, Frobeniusova norma je *unitarno invarijantna*, tj. za svake dvije unitarne matrice  $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  vrijedi  $\|UAV\|_F = \|A\|_F$ . Također, vrijedi  $\|A^*\|_F = \|A\|_F$ .

**Teorem 1.4.3** (Kittaneh). *Ako su  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  normalne matrice, tada je*

$$\||A| - |B|\|_F \leq \|A - B\|_F.$$

*Dokaz.* Matrice  $A$  i  $B$  su unitarno dijagonalizabilne, tj.  $A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U$  i  $B = V^* \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)V$ , za neke unitarne matrice  $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Tada je

$$|A| = U^* \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)U, \quad |B| = V^* \text{diag}(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|)V.$$

Zbog jednostavnosti, neka je

$$C = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|), \quad D = \text{diag}(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|), \quad W = (w_{ij}) = UV^*.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\| |A| - |B| \|_F &= \| U^* C U - V^* D V \|_2 \\
&= \| C U V^* - U V^* D \|_F \\
&= \| C W - W D \|_F \\
&= \left( \sum_{i,j=1}^n (|\lambda_i| - |\mu_j|)^2 |w_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{i,j=1}^n |\lambda_i - \mu_j|^2 |w_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{i,j=1}^n |(\lambda_i - \mu_j) w_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \| \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) W - W \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \|_F \\
&= \| A - B \|_F.
\end{aligned}$$

□

**Korolar 1.4.4.** Neka su  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Tada je

$$\| |A| - |B| \|_F \leq \sqrt{2} \| A - B \|_F.$$

*Dokaz.* Neka je  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$  i  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ . Tada su  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  hermitske (normalne) matrice. Primjenjujući teorem 1.4.3 na  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$ , imamo

$$\| |\tilde{A}| - |\tilde{B}| \|_F^2 = \| |A| - |B| \|_F^2 + \| |A^*| - |B^*| \|_F^2 \leq 2 \| A - B \|_F^2,$$

iz čega slijedi tražena nejednakost. □

Da bismo dokazali sljedeći rezultat o normalnim matričnim perturbacijama, potrebno je najprije uvesti neke pojmove.

*Hadamardov umnožak* ili *Schurov umnožak* dviju matrica  $A = (a_{ij})$  i  $B = (b_{ij})$  istoga tipa, u oznaci  $A \circ B$ , definira se kao

$$A \circ B = (a_{ij} b_{ij}),$$

tj.  $A \circ B$  je matrica istoga tipa kao i matrice  $A$  i  $B$ , čiji se element na mjestu  $(i, j)$  dobije umnoškom elemenata matrica  $A$  i  $B$  na mjestu  $(i, j)$ .

Kvadratna matrica  $A$  je *permutacijska* ako svaki njezin redak i svaki stupac sadrži točno jednu jedinicu, dok su svi ostale elementi nule.

Kvadratna matrica  $A$  je *dvostruko stohastička* ako su svi njezini elementi nenegativni te ako je zbroj elemenata svakog retka matrice  $A$  jednak 1 i ujedno zbroj elemenata svakog

stupca matrice  $A$  iznosi 1. Ekvivalentno,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je dvostruko stohastička matrica ako je  $e^T A = e^T$  i  $Ae = e$ , gdje je  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

Jasno je da je svaka permutacijska matrica dvostruko stohastička, te da se množenjem dvostruko stohastičkih matrica dobije dvostruko stohastička matrica. Prema Birkhoffovom teoremu (v. [4, teorem 5.21]),  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je dvostruko stohastička matrica ako i samo ako je  $A$  konveksna kombinacija permutacijskih matrica, tj. ako i samo ako postoje permutacijske matrice  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  takve da je

$$A = t_1 P_1 + \dots + t_m P_m$$

za neke nenegativne cijele brojeve  $t_1, \dots, t_m$  takve da je  $t_1 + \dots + t_m = 1$ .

**Teorem 1.4.5** (Hoffman–Wielandt). *Neka su  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  normalne matrice sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , odnosno  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , redom. Tada postoji permutacija  $p$  skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  takva da je*

$$\left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_{p(i)}|^2 \right)^{1/2} \leq \|A - B\|_F.$$

*Dokaz.* Neka su  $A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U$  i  $B = V^* \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) V$  spektralne dekompozicije matrica  $A$  i  $B$  redom, gdje su  $U$  i  $V$  unitarne matrice. Radi jednostavnosti, označit ćemo  $E = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $F = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  i  $W = (w_{ij}) = UV^*$ . Tada je

$$\begin{aligned} \|A - B\|_F^2 &= \|U^*(EUV^* - UV^*F)V\|_F^2 \\ &= \|EW - WF\|_F^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n |\lambda_i - \mu_j|^2 |w_{ij}|^2. \end{aligned}$$

Neka je  $G = (|\lambda_i - \mu_j|^2)$  i  $S = (|w_{ij}|^2)$ . Tada je

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |\lambda_i - \mu_j|^2 |w_{ij}|^2 = e^T (G \circ S) e,$$

gdje je  $G \circ S$  Hadamardov produkt matrica  $G$  i  $S$ , a  $e$  je vektor prostora  $\mathbb{C}^n$  čije su sve komponente 1. Primjetimo da je  $S$  dvostruko stohastička matrica. Prema Birkhoffovu teoremu

([4, teorem 5.21]),  $S$  je konveksna kombinacija permutacijskih matrica:  $S = \sum_{i=1}^m t_i P_i$ ,

gdje su svi  $t_i$  nenegativni cijeli brojevi čiji zbroj iznosi 1, a  $P_i$  su permutacijske matrice. Neka je  $k \in \{1, \dots, m\}$  takav da je

$$e^T (G \circ P_k) e = \min \{e^T (G \circ P_1) e, \dots, e^T (G \circ P_m) e\}.$$

Uočimo da  $P_k$  možemo smatrati permutacijom  $p$  skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Tada je

$$\begin{aligned} \|A - B\|_F^2 &= e^T(G \circ S)e \\ &= \sum_{i=1}^m t_i e^T(G \circ P_i)e \\ &\geq \sum_{i=1}^m t_i e^T(G \circ P_k)e \\ &= e^T(G \circ P_k)e \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_{p(i)}|^2. \end{aligned}$$

□

Hoffman–Wielandtov teorem zahtjeva da su obje matrice normalne. Nadalje, prezentirat ćemo teorem u kojemu je jedna matrica normalna, a druga proizvoljna. Za to su nam potrebne pomoćne leme. Pisat ćemo, ako je  $A$  kvadratna matrica,  $A = U_A + D_A + L_A$ , gdje su  $U_A$ ,  $D_A$  i  $L_A$  redom gornji, dijagonalni i donji dio od  $A$ . Npr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lema 1.4.6.** *Neka je  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$  normalna matrica, gdje su  $B$  i  $E$  kvadratne matrice ne nužno istog reda. Tada je  $\|C\|_F = \|D\|_F$ .*

*Dokaz.* Neka je  $B$  matrica reda  $p$ , a  $E$  matrica reda  $r$ , gdje je  $n = p + r$  red blok-matrice  $A$ . Ako je  $A = (a_{ij})$ , onda se izjednačavanjem dijagonalnih elemenata matrica  $A^*A$  i  $AA^*$  dobije

$$\sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

odakle slijedi

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2. \quad (1.1)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |a_{ki}|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ki}|^2, \\ \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ik}|^2, \end{aligned}$$

te vrijedi

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p |a_{ik}|^2,$$

to iz (1.1) slijedi

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ik}|^2,$$

odnosno  $\|C\|_F = \|D\|_F$ . □

**Lema 1.4.7.** *Ako je  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  normalna matrica, onda je*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j-i)|a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (i-j)|a_{ij}|^2.$$

*Dokaz.* Uočimo da se tvrdnja leme 1.1 može iskazati u sljedećem obliku:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ik}|^2, \quad p = 1, \dots, n.$$

Odavde je

$$\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ik}|^2.$$

Lako se provjeri da je

$$\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ki}|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (i-j)|a_{ij}|^2, \quad \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^p \sum_{k=p+1}^n |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j-i)|a_{ij}|^2,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

**Lema 1.4.8.** *Neka je  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  normalna matrica. Tada je*

$$\|U_A\|_F \leq \sqrt{n-1} \|L_A\|_F, \quad \|L_A\|_F \leq \sqrt{n-1} \|U_A\|_F.$$

*Dokaz.* Uz primjenu leme 1.4.7, računom imamo

$$\begin{aligned}
 \|U_A\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j-i) |a_{ij}|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (i-j) |a_{ij}|^2 \\
 &\leq (n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n |a_{ij}|^2 \\
 &= (n-1) \|L_A\|_F^2.
 \end{aligned}$$

Druga nejednakost slijedi primjenom opisanog postupka na matricu  $A^T$ .  $\square$

**Teorem 1.4.9** (Sun). *Neka je  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  normalna matrica sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  i  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  matrica sa svojstvenim vrijednostima  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Tada postoji permutacija  $p$  skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  tako da je*

$$\left( \sum_{i=1}^n |(\lambda_i - \mu_{p(i)})|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \|A - B\|_F.$$

*Dokaz.* Prema Schurovom teoremu, postoji unitarna matrica  $U$  takva da je  $U^*BU$  gornjotrokutasta matrica. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $B$  gornjotrokutasta matrica. Tada je  $D_B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Neka je  $C = A - B$ . Tada je

$$A - D_B = C + U_B, \quad U_B = U_A - U_C, \quad L_A = L_C.$$

Obzirom da su  $A$  i  $D_B$  normalne matrice, prema Hoffman–Wielandovom teoremu imamo

$$\left( \sum_{i=1}^n |(\lambda_i - \mu_{p(i)})|^2 \right)^{1/2} \leq \|A - D_B\|_F = \|C + U_B\|_F$$

za neku permutaciju  $p$  skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Primjenom leme 1.4.8 imamo

$$\begin{aligned}
 \|C + U_B\|_F^2 &= \|C + U_A - U_C\|_F^2 \\
 &= \|L_C + D_C + U_A\|_F^2 \\
 &= \|L_C\|_F^2 + \|D_C\|_F^2 + \|U_A\|_F^2 \\
 &\leq \|L_C\|_F^2 + \|D_C\|_F^2 + (n-1) \|L_A\|_F^2 \\
 &= \|L_C\|_F^2 + \|D_C\|_F^2 + (n-1) \|L_C\|_F^2 \\
 &= n \|L_C\|_F^2 + \|D_C\|_F^2 \\
 &\leq n \|C\|_F^2 \\
 &= n \|A - B\|_F^2
 \end{aligned}$$

pa je  $\|C + U_B\|_F \leq \sqrt{n}\|A - B\|_F$ . Time je teorem dokazan.

□

## Poglavlje 2

### Unitarne matrice

Jedna od podklasa normalnih matrica su unitarne matrice kojima ćemo se baviti u ovom dijelu. Navest ćemo osnovna svojstva, proučit ćemo strukturu realnih ortogonalnih matrica s obzirom na transformacije sličnosti, povezati kontrakcije s unitarnim matricama, te prezentirati nejednakost s tragom za unitarne matrice.

#### 2.1 Svojstva unitarnih matrica

Unitarna matrica  $U$  je kvadratna kompleksna matrica koja zadovoljava  $U^*U = UU^* = I$ . Primijetimo da je  $U^* = U^{-1}$  i  $|\det U| = 1$  za svaku unitarnu maticu  $U$ . Kompleksnu (realnu) matricu  $A$  nazivamo kompleksnom (realnom) ortogonalnom matricom ako za nju vrijedi  $A^T A = AA^T = I$ . Općenito, za kompleksne matrice se pojmovi unitarne matrice i ortogonalne matrice razlikuju, dok se u slučaju realnih matrica pojmovi unitarne i ortogonalne matrice podudaraju.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  unitarna matrica. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

- 1.)  $\|Ux\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$
- 2.)  $|\lambda| = 1$  za svaku svojstvenu vrijednost  $\lambda$  od  $U$ .
- 3.)  $U = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^*$ , gdje je  $V$  unitarna matrica i svaki  $|\lambda_i| = 1$ .
- 4.) Vektori stupci matrice  $U$  čine ortonormiranu bazu za  $\mathbb{C}^n$ .

*Dokaz.* (1) Zapišemo li normu preko skalarnog produkta, dobivamo

$$\|Ux\| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, U^*Ux)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|.$$



(2) Neka je  $x$  jedinični svojstveni vektor od  $U$  kojem odgovara svojstvena vrijednost  $\lambda$ . Tada je

$$|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ux\| = \|x\| = 1.$$

(3) slijedi iz teorema o spektralnoj dekompoziciji (teorem 1.2.1, svojstvo (2)).

(4) Pretpostavimo da je  $u_i$   $i$ -ti stupac od  $U$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Tada se  $U^*U = I$  ekvivalentno zapisuje kao

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} (u_1 \dots, u_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

iz čega vidimo da je  $(u_i, u_j) = u_j^* u_i = 1$  ako je  $i = j$ , inače je 0.  $\square$

U prethodnom teoremu smo vidjeli da su apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti unitarne matrice jednake 1. Obrat općenito ne vrijedi. Sljedeći teorem daje dodatni uvjet uz koji imamo obrat ove tvrdnje.

**Teorem 2.1.2.** *Neka je  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  matrica za koju su apsolutne vrijednosti njezinih svojstvenih vrijednosti jednake 1. Tada je  $A$  unitarna matrica ako za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$  vrijedi*

$$\|Ax\| \leq \|x\|.$$

*Dokaz.* Dat ćemo dva različita dokaza ovog teorema.

*Dokaz 1.* Budući da je determinanta kvadratne matrice jednaka umnošku njezinih svojstvenih vrijednosti, prema pretpostavci teorema je  $|\det(A)| = 1$ . Neka su  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  singularne vrijednosti matrice  $A$ . Maksimalnu singularnu vrijednost od  $A$  označimo sa  $\sigma_{\max}$ . Dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\|Ax\| \leq 1, \text{ za svaki jedinični vektor } x \in \mathbb{C}^n,$$

tj.  $\|A\| \leq 1$ , iz čega slijedi da je  $\rho(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2 \leq 1$  pa je  $\sigma_{\max} \leq 1$ . S druge strane,  $|\det A|^2 = \det(A^*A) = \det(|A|^2) = (\det|A|)^2$  implicira

$$\sigma_1 \cdots \sigma_n = \det|A| = |\det A| = 1,$$

što zajedno sa  $\sigma_{\max} \leq 1$  daje  $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$ . Dakle, postoji unitarna matrica  $U$  tako da je

$$A^*A = |A|^2 = U^* \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) U = U^*U = I,$$

te je  $A$  unitarna matrica.

*Dokaz 2.* Neka je  $A = U^*DU$  Schurova dekompozicija od  $A$ , gdje je  $U$  unitarna matrica, a  $D$  gornjotrokutasta matrica:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

te  $|\lambda_i| = \dots = |\lambda_n| = 1$  i  $t_{ij} \in \mathbb{C}$  za  $i, j = 1, \dots, n$ . Uzmimo  $x = U^*e_n^{(n)} = U^*(0, \dots, 0, 1)^T$ . Tada je  $\|x\| = 1$ . Imamo

$$\|Ax\| = \|U^*DUU^*e_n^{(n)}\| = \|De_n^{(n)}\| = (|t_{1n}|^2 + \dots + |t_{n-1,n}|^2 + |\lambda_n|^2)^{1/2}.$$

Iz uvjeta  $\|Ax\| \leq 1$  za jedinični vektor  $x$  i  $|\lambda_n| = 1$  slijedi da je  $t_{in} = 0$  za  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Postupak zatim ponovimo redom za vektore  $e_{n-1}^{(n)}, \dots, e_1^{(n)}$ . Zaključujemo da je  $D$  dijagonalna matrica s elementima  $\lambda_i$  na dijagonali. Dakle,  $A$  je unitarna matrica, jer je

$$A^*A = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU = U^*U = I.$$

□

Sljedeći rezultat govori o singularnim vrijednostima glavnih podmatrica unitarne matrice.

**Teorem 2.1.3.** *Neka je  $U$  unitarna matrica prikazana kao blok-matrica*

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

gdje je  $A$  kvadratna matrica reda  $m$  i  $D$  kvadratna matrica reda  $n$ . Ako je  $m = n$ , tada  $A$  i  $D$  imaju iste singularne vrijednosti. Ako je  $m < n$  i ako su  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  singularne vrijednosti matrice  $A$ , tada singularne vrijednosti matrice  $D$  su  $\sigma_1, \dots, \sigma_m, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-m}$ . Također,  $|\det A| = |\det D|$ .

*Dokaz.* Budući da je  $U$  unitarna, iz  $U^*U = UU^* = I$  imamo da je

$$A^*A + C^*C = I_m, \quad CC^* + DD^* = I_n,$$

odakle slijedi da je

$$A^*A = I_m - C^*C, \quad DD^* = I_n - CC^*.$$

Obzirom da  $CC^*$  i  $C^*C$  imaju iste ne-nul svojstvene vrijednosti brojeći njihove kratnosti ([4, teorem 2.8]), onda matrice  $I_n - CC^*$  i  $I_m - C^*C$  imaju iste svojstvene vrijednosti osim

$n - m$  jedinica, to jest  $A^*A$  i  $DD^*$  imaju iste svojstvene vrijednosti osim  $n - m$  jedinica. Kako je osim toga  $\sigma(D^*D) = \sigma(DD^*)$ , zaključujemo da  $A^*A$  i  $D^*D$  imaju iste svojstvene vrijednosti osim  $n - m$  jedinica. Dakle, ako je  $m = n$ , tada  $A$  i  $D$  imaju iste singularne vrijednosti, te ako je  $m < n$  i  $A$  ima singularne vrijednosti  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , tada singularne vrijednosti od  $D$  su  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  i  $n - m$  jedinica. Posebno, vrijedi  $\det |A| = \det |D|$ , jer je determinanta matrice jednaka umnošku njezinih svojstvenih vrijednosti. Kako je

$$|\det T|^2 = |(\det T)^2| = |\det T^* \det T| = |\det(T^*T)| = \det(T^*T) = \det |T|^2 = (\det |T|)^2$$

za svaku kvadratnu matricu  $T$ , to iz  $\det |A| = \det |D|$ , slijedi  $|\det A| = |\det D|$ , čime je teorem dokazan.  $\square$

Prema prethodnom teoremu, apsolutne vrijednosti determinanti komplementarnih glavnih podmatrica unitarne matrice su jednake. Ako je  $m = 1$  u teoremu 2.1.3, tada imamo sljedeći rezultat koji daje vezu između determinante unitarne matrice i njenih glavnih podmatrica.

**Propozicija 2.1.4.** *Neka je  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  unitarna matrica prikazana kao blok-matrica*

$$U = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Tada je  $\det D = \bar{a} \det U$ .

*Dokaz.* Iz  $UU^* = I$  slijedi  $aC^* + BD^* = 0$  i  $CC^* + DD^* = I_{n-1}$ . Odavde je

$$U \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aC^* + BD^* \\ C & CC^* + DD^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ C & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

pa se računanjem determinanti dobije

$$\det U \det D^* = \det U \det \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \det \left( U \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ C & I_{n-1} \end{pmatrix} = a,$$

odnosno  $\det U \overline{\det D} = a$ . Stoga slijedi  $\overline{\det U} \det D = \bar{a}$  pa je

$$\det D = |\det U|^2 \det D = \det U \overline{\det U} \det D = \bar{a} \det U.$$

$\square$

## 2.2 Realne ortogonalne matrice

U ovom dijelu bavit ćemo se realnim ortogonalnim matricama, tj. matricama za koje vrijedi  $AA^T = A^T A = I$ . Raspravljat ćemo o njihovoj strukturi s obzirom na transformaciju sličnosti te dati dovoljne uvjete uz koje su realne ortogonalne matrice involucije.

Krenimo s realnim ortogonalnim matricama reda 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Identiteti  $AA^T = A^T A = I$  impliciraju nekoliko jednadžbi sa  $a, b, c, d$ , jedna od njih je  $a^2 + b^2 = 1$ . Budući da je  $a$  realan broj između  $-1$  i  $1$ , možemo staviti  $a = \cos \theta$  za neki  $\theta \in \mathbb{R}$  te dobiti  $b, c$  i  $d$  ovisno o  $\theta$ . Dakle, postoje samo dva tipa realnih ortogonalnih matrica reda 2. To su

$$I_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

gdje tip  $I_\theta$  nazivamo *rotacija* (u  $xy$ -ravnini) oko 0 za kut  $\theta$  suprotno kazaljci na satu, a tip  $R_\theta$  nazivamo *zrcaljenje* točkaka ravnine s obzirom na pravac  $y = kx$ , gdje je  $\frac{\theta}{2} = \arctg k$ . Uočimo da vrijedi

$$R_\theta^2 = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_\theta = R_{-\theta}, \quad I_{-\theta} R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pokazat ćemo da je realna ortogonalna matrica proizvoljnog reda ortogonalno slična direktnoj sumi realnih ortogonalnih matrica reda 1 ili 2. Za dokaz tog rezultata koristimo sljedeći pomoćni rezultat koji se lako provjeri (v. [4, teorem 1.10]): *Za bilo koja tri nenul vektora  $x, y, z$  realnog unitarnog prostora  $V$  vrijedi  $\angle_{x,z} \leq \angle_{x,y} + \angle_{y,z}$ , pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je  $y = tx + sz$  za neke nenegativne realne brojeve  $t, s$ . (Oznaku  $\angle$  koristimo za kut između vektora.)*

**Teorem 2.2.1.** *Svaka realna ortogonalna matrica je realno ortogonalno slična direktnoj sumi realnih ortogonalnih matrica reda najviše 2.*

*Dokaz.* Neka je  $A$  realna ortogonalna matrica reda  $n$ . Primjenimo matematičku indukciju po  $n$ . Za  $n = 1$  ili  $n = 2$  je očito. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve realne ortogonalne matrice matrice do reda  $n - 1$ . Pretpostavimo da je  $n > 2$ .

Ako  $A$  ima realnu svojstvenu vrijednost  $\lambda$  s realnim jediničnim svojstvenim vektorom  $x$ , tada

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 \Rightarrow 1 = (A^T Ax, x) = (A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x) = \lambda^2.$$

Dakle,  $\lambda = \pm 1$ . Uzmimo najprije da je  $\lambda = 1$ . Neka je  $P$  realna ortogonalna matrica čiji je prvi stupac realni jedinični svojstveni vektor  $x$ . Tada je  $P^T A P$  matrica koja u prvom stupcu ima na  $(1, 1)$ -mjestu 1, a na ostalim mjestima 0. Pišemo:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Ako je  $\lambda = -1$ , tada se dobije

$$P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalnost realne matrice  $A$  povlači da je  $u = 0$  i  $A_1$  realna ortogonalna matrica. Dakle, vrijedi

$$P^T A P = 1 \oplus A_1 \quad \text{ili} \quad P^T A P = -1 \oplus A_1$$

za neku realnu ortogonalnu matricu  $A_1$  reda  $n - 1$ . Tvrdnja teorema slijedi primjenom pretpostavke indukcije na matricu  $A_1$ .

Pretpostavimo da  $A$  nema realne svojstvene vrijednosti. Tada za svaki ne-nul vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , vektori  $x$  i  $Ax$  ne mogu biti linearno zavisni. Sjetimo se da zbog ortogonalnosti od  $A$ , za kut između dva vektora  $x$  i  $y$  u oznaci  $\angle_{x,y}$  vrijedi  $\angle_{x,y} = \angle_{Ax,Ay}$ . Definirajmo funkciju kuta

$$f(x) = \angle_{x,Ax} = \cos^{-1} \frac{(x, Ax)}{\|x\| \|Ax\|}.$$

Tada je  $f$  neprekidna funkcija na kompaktnom skupu  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ . Neka je  $\theta_0 = \angle_{x_0, Ax_0}$  minimum od  $f$  na skupu  $S$ . Neka je  $y_0$  jedinični vektor u  $\{[x_0, Ax_0]\}$  tako da je  $\angle_{x_0, y_0} = \angle_{y_0, Ax_0} = \theta_0/2$ . Tada imamo

$$\theta_0 \leq \angle_{y_0, Ay_0} \leq \angle_{y_0, Ax_0} + \angle_{Ax_0, Ay_0} = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} = \theta_0$$

i stoga  $Ax_0 \in [y_0, Ay_0]$ , pri čemu je  $Ax_0 = ty_0 + sAy_0$  za neke nenegativne realne brojeve  $t$  i  $s$ . Kako je osim toga  $y_0 = px_0 + rAx_0$  za neke nenegativne realne brojeve  $p$  i  $r$ , imamo  $y_0 = px_0 + rAx_0 = px_0 + rty_0 + rsAy_0$ , tj.  $rsAy_0 = (1 - rt)y_0 - px_0$ . Kada bi bilo  $r = 0$ , imali bismo  $y_0 = px_0$  pa bi slijedilo  $\theta_0/2 = \angle_{x_0, y_0} = 0$ . No, tada bismo imali  $0 = \theta_0 = \angle_{x_0, Ax_0}$ , što znamo da ne vrijedi budući da po pretpostavci vektori  $x$  i  $Ax$  nisu linearno zavisni. Dakle,  $r \neq 0$ . Također, ako bi bilo  $s = 0$ , imali bismo  $Ax_0 = ty_0$ , odakle bi slijedilo  $\theta_0/2 = \angle_{y_0, Ax_0} = 0$  što znamo da ne vrijedi. Prema tome,  $s \neq 0$ . Stoga je

$$Ay_0 = \frac{1}{rs}((1 - rt)y_0 - px_0) \in \{[x_0, y_0]\}.$$

Kako je sada i  $Ax_0 \in \{y_0, Ay_0\} \subseteq \{x_0, y_0\}$ , slijedi  $\{x_0, y_0\}$  je invarijantan za  $A$ . Stoga postoji realna ortogonalna matrica  $R$  reda  $n$  tako da je

$$R^T AR = \begin{pmatrix} T_0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

gdje je  $T_0$  realna matrica reda 2, a  $B$  je realna matrica reda  $n - 2$ . Obzirom da je  $A$  ortogonalna, to su ortogonalne i matrice  $B$  i  $T_0$  te vrijedi  $C = 0$ . Dakle,

$$R^T AR = T_0 \oplus B,$$

za neku realnu ortogonalnu matricu  $T_0$  reda 2 i neku realnu ortogonalnu matricu  $B$  reda  $n - 2$ . Tvrdnju teorema u ovom slučaju dobijemo primjenom prepostavke matematičke indukcije na matricu  $B$ .  $\square$

Sljedeći teorem kaže da matrica s izvjesnim komutativnim svojstvom nužno je involutivna. Za dokaz nam treba sljedeći pomoćni rezultat.

**Lema 2.2.2.** *Ako matrice  $F \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$  i  $G \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti, tada matrična jednadžba  $FX - XG = 0$  ima jedinstveno rješenje  $X = 0$ .*

*Dokaz.* Neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  svojstvene vrijednosti od  $F$ . Iz  $FX = XG$  slijedi da za svaki pozitivan broj  $k$  vrijedi  $F^k X = XG^k$  pa je

$$f(F)X = Xf(G)$$

za svaki polinom  $f$ . Neka je  $f = k_F$  karakteristični polinom od  $F$ , tj.  $f(\lambda) = k_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$ . Tada je  $f(F) = 0$  te  $Xf(G) = 0$ . Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji,  $G = U^* T U$  za neku gornjotrokutastu matricu  $T$  i unitarnu matricu  $U$ . Tada je

$$f(G) = U^* f(T) U = U^* (T - \lambda_1 I_n) \cdots (T - \lambda_m I_n) U.$$

Međutim, kako  $G$  i  $F$  nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti, to niti  $T$  i  $F$  nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti pa su matrice  $T - \lambda_i I_n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , regularne. Stoga je  $f(G)$  regularna pa iz  $Xf(G) = 0$  slijedi  $X = 0$ .  $\square$

**Teorem 2.2.3.** *Neka su  $A$  i  $U$  realne ortogonalne matrice istog reda. Ako su sve svojstvene vrijednosti matrice  $U$  međusobno različite i ako je*

$$UA = AU^T,$$

*tada je  $A$  involutivna odnosno  $A^2 = I$ .*

*Dokaz.* Prema teoremu 2.2.1, neka je  $P$  realna ortogonalna matrica takva da je  $P^{-1}UP$  direktna suma  $k$  realnih ortogonalnih matrica  $V_i$  reda 1 ili 2. Identitet  $UA = AU^T$  daje

$$(P^{-1}UP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}UP)^T. \quad (2.1)$$

Zapišimo  $P^{-1}AP$  kao blok-matricu  $P^{-1}AP = (B_{ij})$ , gdje se rastav na blokove podudara s rastavom od  $P^{-1}UP = \bigoplus_{i=1}^k V_i$  na blokove. Dakle,  $B_{ij}$  je matrica čiji je broj redova (ili stupaca) jednak 1 ili 2 za  $i, j = 1, \dots, k$ . Tada iz (2.1) slijedi

$$V_i B_{ij} = B_{ij} V_j^T, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (2.2)$$

Budući da  $U$ , dakle i  $P^{-1}UP$  nema višestrukih svojstvenih vrijednosti, pa time matrice  $V_i$  i  $V_j^T$  nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti za  $i \neq j$ , prema lemi 2.2.2 imamo

$$B_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Stoga,  $P^{-1}AP$  je direktna suma matrica reda najviše 2 :

$$P^{-1}AP = B_{11} \oplus \dots \oplus B_{kk}.$$

Ortogonalnost od  $A$  povlači ortogonalnost matrice  $P^{-1}AP$ , pa je stoga i svaka matrica  $B_{ii}$  ortogonalna reda 1 ili ortogonalna reda 2, tj. oblika  $I_\theta$  ili  $R_\theta$  za neki  $\theta \in \mathbb{R}$ . Očito  $B_{ii}^2 = I$  ako je  $B_{ii} = \pm 1$  ili  $B_{ii} = R_\theta$ .

Pretpostavimo da je  $B_{ii} = I_\theta$  za neki  $\theta \in \mathbb{R}$  i pokažimo da je i tada  $B_{ii}^2 = I$ . Najprije primjetimo da  $V_i$  nije rotacija. U suprotnom, ako je  $V_i = I_\varphi$  a neki  $\varphi \in \mathbb{R}$ , imamo  $V_i B_{ii} = B_{ii} V_i$  odakle prema (2.2) slijedi  $B_{ii} V_i = B_{ii} V_i^T$ , odnosno zbog regularnosti matrice  $B_{ii}$  imamo  $V_i = V_i^T$  pa je  $V_i^2 = I$ . Dakle,  $I_{2\varphi} = I_\varphi^2 = V_i^2 = I$  pa je  $\varphi = 0$  ili  $\varphi = \pi$  što daje  $V_i = \pm I$ . No, to je kontradiktorno s činjenicom da  $V_i$  ima dvije različite svojstvene vrijednosti. Dakle,  $V_i$  je zrcaljenje, tj.  $V_i = R_\varphi$  za neki  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Tada je

$$V_i = R_{\varphi/2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\varphi/2}$$

pa prema (2.2) imamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} V_i B_{ii} R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} B_{ii} V_i^T R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odavde, budući da je  $R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T$  realna ortogonalna matrica, slijedi

$$R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

pa je  $B_{ii}^2 = I$ .

Dakle, pokazali smo da u svakom slučaju imamo  $B_{ii}^2 = I$ . Prema tome,  $(P^{-1}AP)^2 = I$  i stoga je  $A^2 = I$ .  $\square$

## 2.3 Kontrakcije i unitarne matrice

Neka je  $M$  bilo koji skup, a

$$d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$$

preslikavanje sa svojstvima:

- 1.)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in M$  (pozitivna definitnost)
- 2.)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (strogost)
- 3.)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in M$  (simetričnost)
- 4.)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in M$  (nejednakost trokuta).

Kažemo da je  $d$  funkcija udaljenosti, metrička funkcija ili metrika na skupu  $M$ , a par  $(M, d)$  nazivamo metričkim prostorom.

Neka je  $f : M \mapsto M$  preslikavanje na metričkom prostoru  $(M, d)$ . Kažemo da je  $f$  kontrakcija ako postoji konstanta  $c$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , takva da je

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \quad \forall x, y \in M. \quad (2.3)$$

Ako je  $0 \leq c < 1$ , kažemo da je  $f$  stroga kontrakcija.

Znamo da se svaka matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  može shvatiti kao preslikavanje (linearni operator)  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Tada nejednakost (2.3) zapisujemo kao

$$\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|.$$

Pokazujemo da se svojstvo kontrakcije matrice  $A$  može opisati na sljedeće načine.

**Teorem 2.3.1.** Za  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni.

- (i)  $A$  je kontrakcija.
- (ii)  $\|A\| \leq 1$ .
- (iii)  $A^*A \leq I$ .
- (iv)  $AA^* \leq I$ .

*Dokaz.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Za proizvoljne  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , imamo

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|.$$



Slijedi da je  $A$  kontrakcija ako je  $\|A\| \leq 1$ . Obrnuto, pretpostavimo da je  $A$  kontrakcija. Tada za neki  $c$ ,  $0 \leq c \leq 1$  i za svaki  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|.$$

Posebno, za  $y = 0$  imamo  $\|Ax\| \leq c\|x\|$  za svaki  $x \in \mathbb{C}^n$ . Dakle,  $\|A\| \leq c \leq 1$ .

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Uočimo da je

$$\begin{aligned} A^*A \leq I &\Leftrightarrow (A^*Ax, x) \leq (Ix, x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow (Ax, Ax) \leq (x, x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \|A\| \leq 1. \end{aligned}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Uočimo da je  $\|A\| = \|A^*\|$  te da iz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) slijedi  $\|A^*\| \leq 1$  ako i samo ako je  $(A^*)^*A^* \leq I$ , tj.  $AA^* \leq I$ .  $\square$

Primjetimo da su unitarne matrice kontrakcije, ali ne stroge. U ovom dijelu dokazat ćemo dva teorema koja povezuju unitarne matrice i kontrakcije. Pokazat ćemo da je matrica kontrakcija ako i samo ako može biti ugrađena u unitarnu matricu, odnosno ako i samo ako je (konačna) konveksna kombinacija unitarnih matrica.

**Teorem 2.3.2.** *Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je kontrakcija ako i samo ako je*

$$U = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

*unitarna blok-matrica za neke matrice  $X, Y$  i  $Z$  odgovarajućeg tipa.*

*Dokaz.* Ako je  $U = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$  unitarna matrica, tada

$$U^*U = I \Rightarrow A^*A + Y^*Y = I \Rightarrow A^*A \leq I.$$

Stoga je, prema teoremu 2.3.1, matrica  $A$  kontrakcija.

Obratno, pretpostavimo da je  $A$  kontrakcija. Prema teoremu 2.3.1, matrice  $I - A^*A$  i  $I - AA^*$  su pozitivno semidefinitne pa imaju pozitivne kvadratne korijene. Stoga je dobro definirana blok-matrica

$$U = \begin{pmatrix} A & (I - AA^*)^{1/2} \\ (I - A^*A)^{1/2} & -A^* \end{pmatrix}.$$

Pokažimo da je  $U$  unitarna matrica.

Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti,  $A = VDW$ , gdje su  $V$  i  $W$  unitarne matrice,  $D$  pozitivno semidefinitna dijagonalna matrica kod koje dijagonalni elementi (singularne vrijednosti od  $A$ ) nisu veći od 1. Tada je  $I - AA^* = V(I - D^2)V^*$  i  $I - A^*A = W^*(I - D^2)W$ , odakle zbog pozitivne semidefinitnosti matrice  $I - D^2$  imamo

$$(I - AA^*)^{1/2} = V(I - D^2)^{1/2}V^*, \quad (I - A^*A)^{1/2} = W^*(I - D^2)^{1/2}W.$$

$D$  je dijagonalna matrica, stoga je

$$D(I - D^2)^{1/2} = (I - D^2)^{1/2}D.$$

Množenjem gornje jednakosti slijeva s  $V$  i zdesna s  $W$  imamo

$$VDWW^*(I - D^2)^{1/2}W = V(I - D^2)^{1/2}V^*VDW$$

ili ekvivalentno

$$A(I - A^*A)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2}A.$$

Jednostavnim računom dobivamo da je  $U^*U = I$ . □

**Teorem 2.3.3.** *Matrica  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  je kontrakcija ako i samo ako je  $A$  konačna konveksna kombinacija unitarnih matrica.*

*Dokaz.* Ako je  $A = t_1U_1 + \dots + t_kU_k$  konveksna kombinacija unitarnih matrica  $U_1, \dots, U_k$ , onda je

$$\|A\| = \|t_1U_1 + \dots + t_kU_k\| \leq |t_1|\|U_1\| + \dots + |t_k|\|U_k\| = t_1 + \dots + t_k = 1,$$

budući da su  $t_1, \dots, t_k$  nenegativni cijeli brojevi čiji zbroj iznosi 1. Prema teoremu 2.3.1, matrica  $A$  je kontrakcija.

Obratno, neka je  $A$  kontrakcija. Pokazat ćemo da je  $A$  konačna konveksna kombinacija unitarnih matrica.

Prema teoremu 2.3.1,  $\|A\| \leq 1$  pa su sve singularne vrijednosti  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  matrice  $A$  manje ili jednake 1. Neka je  $A$  matrica ranga  $r$ . Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti,  $A = UDV$  gdje su  $U$  i  $V$  unitarne matrice,  $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$  gdje je  $1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Možemo pretpostaviti da je  $r > 0$ .

Ako je  $D$  konveksna kombinacija unitarnih matrica  $W_i$ , tada je  $A$  konveksna kombinacija unitarnih matrica  $UW_iV$ . Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $A$  dijagonalna matrica oblika  $A = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ . Imamo

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \\ &= (1 - \sigma_1)0 + (\sigma_1 - \sigma_2) \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + (\sigma_2 - \sigma_3) \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0) + \dots \\ &\quad + (\sigma_{r-1} - \sigma_r) \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{r-1}, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \sigma_r \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^r, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Kako je  $1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , slijedi da je matrica  $A$  konačna konveksna kombinacija matrica  $E_i = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  koje na prvih  $i$  mjesta na dijagonali imaju jedinice, a ostali elementi su nule,  $0 \leq i \leq r$ . Da bismo dokazali teorem, preostaje pokazati da je svaka matrica  $E_i$  konveksna kombinacija unitarnih matrica. Neka je

$$F_i = \text{diag}(0, \dots, 0, \overbrace{-1, \dots, -1}^{n-i}), \quad i = 1, \dots, r.$$

Uočimo da su tada  $E_i + F_i$  dijagonalne matrice s elementima  $\pm 1$  na dijagonali, te su stoga unitarne. Vrijedi

$$E_i = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(E_i + F_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

tj. svaka matrica  $E_i$  je konveksna kombinacija unitarnih matrica  $I$  i  $E_i + F_i$ .  $\square$

## 2.4 Unitarna sličnost realnih matrica

U ovom dijelu pokazat ćemo da se svaka sličnost dviju realnih matrica koja je ostvarena pomoću kompleksne regularne matrice, može dobiti i pomoću realne regularne matrice. Tvrdnja također vrijedi i za unitarnu sličnost. Preciznije, ako su dvije realne matrice unitarno slične, tada su one realno ortogonalno slične.

**Teorem 2.4.1.** *Neka su  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Ako je  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  regularna matrica takva da je  $P^{-1}AP = B$ , tada postoji regularna matrica  $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  takva da je  $Q^{-1}AQ = B$ .*

*Dokaz.* Zapišimo  $P = P_1 + P_2i$ , gdje su  $P_1$  i  $P_2$  realne kvadratne matrice. Ako je  $P_2 = 0$ , nemamo što dokazivati. Stoga pretpostavimo da je  $P_2 \neq 0$ . Zapisivanjem  $P^{-1}AP = B$  kao  $AP = PB$ , imamo  $AP_1 = P_1B$  i  $AP_2 = P_2B$ , jer su  $A$  i  $B$  realne matrice. Odavde slijedi da za svaki realni broj  $t$ ,

$$A(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2)B.$$

Budući da je  $\det(P_1 + tP_2) = 0$  za konačno mnogo realnih brojeva  $t$ , možemo odabrati realan broj  $t$  takav da je matrica  $Q = P_1 + tP_2$  regularna. Dakle, sličnost matrica  $A$  i  $B$  ostvarena je preko realne regularne matrice  $Q$ .  $\square$

Da bismo pokazali da prethodni teorem vrijedi i za unitarnu sličnost, dokazat ćemo najprije sljedeći rezultat.

**Teorem 2.4.2.** *Neka je  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  simetrična unitarna matrica, tj.  $U^T = U$  i  $U^* = U^{-1}$ . Tada postoji  $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  za koju vrijedi:*

- 1.)  $S^2 = U$ .

2.)  $S$  je unitarna.

3.)  $S$  je simetrična.

4.)  $S$  je komutativna sa svakom matricom koja je komutativna sa  $U$ .

Drugim riječima, svaka simetrična unitarna matrica  $U$  ima simetrični unitarni kvadratni korijen koji komutira sa svakom matricom koja komutira s  $U$ .

*Dokaz.* Budući da je  $U$  unitarna matrica, ona je unitarna dijagonalizibilna (teorem 1.2.1). Neka je  $U = VDV^*$ , gdje je  $V$  unitarna i  $D = a_1I_1 \oplus \cdots \oplus a_kI_k$ , gdje su  $a_1, \dots, a_k$  međusobno različite svojstvene vrijednosti matrice  $U$  i  $I_1, \dots, I_k$  jedinične matrice određenog reda, tj. red matrice  $I_j$  jednak je kratnosti svojstvene vrijednosti  $a_j$ . Budući da je  $U$  unitarna, slijedi da su apsolutne vrijednosti svih njenih svojstvenih vrijednosti jednake 1. Pišemo  $a_j = e^{i\theta_j}$  za neki realni  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Neka je  $S = V(b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)V^*$ , gdje je  $b_j = e^{i\theta_j/2}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Očito je  $S$  unitarna matrica i vrijedi  $S^2 = U$ .

Ako  $A$  komutira s  $U$ , tj.  $AVDV^* = VDV^*A$ , onda je

$$V^*AVD = V^*(AVDV^*)V = V^*(VDV^*A)V = DV^*AV, \quad (2.4)$$

tj.  $V^*AV$  komutira s  $D$ . Zapišimo  $V^*AV$  kao blok-matricu  $V^*AV = (T_{ij})$ , pri čemu su blokovi  $T_{jj}$  istog reda kao i matrice  $I_j$ . Iz (2.4) slijedi  $a_jT_{ij} = a_iT_{ij}$  za sve  $i, j = 1, \dots, k$ , odakle zbog  $a_i \neq a_j$  za  $i \neq j$  slijedi  $T_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ . Dakle,  $V^*AV$  je blok-dijagonalna matrica oblika  $V^*AV = T_{11} \oplus \cdots \oplus T_{kk}$ . Kako je  $V^*SV = b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k$ , slijedi

$$(V^*SV)(V^*AV) = b_1T_{11} \oplus \cdots \oplus b_kT_{kk} = (V^*AV)(V^*SV)$$

pa je  $SA = AS$ .

Obzirom da je  $U = U^T$ , tj.  $VDV^* = (V^*)^T DV^T$  slijedi da je

$$V^T VD = V^T (VDV^*)V = V^T ((V^*)^T DV^T)V = (V^*V)^T (DV^T V) = DV^T V,$$

tj.  $V^T V$  komutira s  $D$ . Odavde slijedi da je  $V^T V$  blok-dijagonalna matrica oblika  $V^T V = R_1 \oplus \cdots \oplus R_k$ , gdje su  $R_j$  matrice istog reda kao i  $I_j$ . Stoga  $V^T V$  komutira s  $b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k$ . Prema tome,

$$V^T S = V^T V(b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)V^* = (b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)V^T VV^* = (b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)V^T,$$

odakle se transponiranjem dobije  $S^T V = V(b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)$  pa je

$$S^T = S^T VV^* = V(b_1I_1 \oplus \cdots \oplus b_kI_k)V^* = S.$$

Dakle,  $S$  je simetrična matrica. □

**Teorem 2.4.3.** *Neka su  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Ako je  $A = UBU^*$  za neku unitarnu matricu  $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , tada postoji ortogonalna matrica  $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  takva da je  $A = QBQ^T$ .*

*Dokaz.* Najprije uočimo da vrijedi  $(U^T \bar{U})^T = (\bar{U})^T U = U^* U = I$  pa je  $U^T \bar{U} = I^T = I$ .

Budući da su  $A$  i  $B$  realne, imamo  $UBU^* = A = \bar{A} = \bar{U}BU^T$ . Odavde slijedi

$$U^T UB = U^T (UBU^* U) = U^T (\bar{U}BU^T) U = BU^T U.$$

Sada pošto je  $U^T U$  simetrična matrica, prema teoremu 2.4.2 postoji simetrična unitarna matrica  $S$  za koju vrijedi  $U^T U = S^2$  i koja komutira s  $B$ . Neka je  $Q = US^{-1}$  odnosno  $U = QS$ . Tada je  $Q$  također unitarna. Primjetimo da je

$$Q^T Q = (US^{-1})^T (US^{-1}) = S^{-1} U^T U S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I.$$

Dakle,  $Q$  je ortogonalna. Uočimo da je  $Q$  realna, jer  $Q^T = Q^{-1} = Q^*$  daje  $Q = \bar{Q}$ . Prema tome, kako  $S$  i  $B$  komutiraju,  $S$  je unitarna, a  $Q$  realna ortogonalna matrica, imamo

$$\begin{aligned} A &= UBU^* = (US^{-1})(SB)U^* = Q(BS)U^* \\ &= QB(S^{-1})^* U^* = QBQ^* = QBQ^T. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Nejednakost s tragom za unitarne matrice

U ovoj točki razmatramo unitarni prostor  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  uz skalarni produkt definiran s

$$(A, B) = \text{tr}(B^* A), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Prezentirat ćemo nejednakost koja govori o odnosu prosječnih svojstvenih vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica prema prosječnoj svojstvenoj vrijednosti umnoška tih matrica. No, prije toga, dokazat ćemo jednu nejednakost koja vrijedi za svaki kompleksni unitarni prostor.

**Teorem 2.5.1.** *Neka su  $u, v$  i  $w$  jedinični vektori kompleksnog unitarnog prostora  $V$ . Tada je*

$$\sqrt{1 - |(u, v)|^2} \leq \sqrt{1 - |(u, w)|^2} + \sqrt{1 - |(w, v)|^2}. \quad (2.5)$$

*Jednakost vrijedi u (2.5) ako i samo ako  $w$  je kolinearan s  $u$  ili  $v$ .*

*Dokaz.* Primjetimo da svaka komponenta vektora  $w$  koja je ortogonalna na  $[\{u, v\}]$  nema nikakvu ulogu u (2.5). Naime, ako je  $[\{u, v\}] \oplus W = V$ , tada se  $w \in W$  može na jedinstven

način zapisati kao  $w = w_1 + w_2$ , gdje je  $w_1 \in [\{u, v\}]$ ,  $w_2 \in W$ ,  $(w_1, w_2) = 0$ ,  $\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = \|w\|^2 = 1$ . Kako je  $(u, w_2) = (w_2, v) = 0$ , to (2.5) glasi

$$\sqrt{1 - |(u, v)|^2} \leq \sqrt{1 - |(u, w_1)|^2} + \sqrt{1 - |(w_1, v)|^2}.$$

Pritom je  $\|w_1\| \leq 1$ . Uočimo da ako (2.5) vrijedi za neki jedinični vektor  $w_1$ , tada će ta nejednakost vrijediti i za  $\alpha w_1$  gdje je  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| \leq 1$ , jer se u tom slučaju desna strana nejednakosti (2.5) povećava. Prema tome, da bismo dokazali (2.5), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $w \in [\{u, v\}]$  i  $\|w\| = 1$ .

Slučaj kada su  $u$  i  $v$  linearno zavisni je trivijalan. Naime, ako je  $u = \lambda v$ , onda je  $|\lambda| = 1$  i vrijedi  $|(u, v)| = |\lambda| = 1$  pa je desna strana u (2.5) jednaka nuli. Uočimo da je  $|(u, w)| = |(w, v)|$ . Stoga u (2.5) vrijedi jednakost ako i samo ako je  $|(u, w)| = 1$ . Kako je  $|(u, w)| \leq \|u\| \|w\| = 1$ , to je  $|(u, w)| = 1$  ako i samo ako je  $|(u, w)| = \|u\| \|w\|$ , tj. ako i samo ako su vektori  $u$  i  $w$  linearno zavisni.

Pretpostavimo da su  $u$  i  $v$  linearno nezavisni i neka je  $\{u, z\}$  ortonormirana baza prostora  $[\{u, v\}]$  tako da je  $v = \mu u + \lambda z$  i  $w = \alpha u + \beta z$  za neke kompleksne brojeve  $\mu, \lambda, \alpha$  i  $\beta$ . Tada imamo

$$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Korištenjem ovih relacija te nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$2|\lambda||\beta| \leq |\lambda|^2 + |\beta|^2, \quad 2|\alpha||\mu| \leq |\alpha|^2 + |\mu|^2,$$

kao i nejednakosti  $|c| \geq \operatorname{Re}(c)$  za bilo koji kompleksni broj  $c$ , računamo

$$\begin{aligned} |\lambda\beta| &= \frac{1}{2}|\lambda\beta|(|\mu|^2 + |\lambda|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2) \\ &\geq |\lambda\beta|(|\lambda\beta| + |\alpha\mu|) \\ &= |\lambda\beta|^2 + |\lambda\beta\alpha\mu| \\ &= |\lambda\beta|^2 + |\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}| \\ &\geq |\lambda\beta|^2 + \operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}), \end{aligned}$$

pa je  $-2|\lambda\beta| \leq -2|\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu})$ . Dakle, imamo

$$\begin{aligned} (|\lambda| - |\beta|)^2 &= |\lambda|^2 - 2|\lambda\beta| + |\beta|^2 \\ &\leq |\lambda|^2 + |\beta|^2 - 2|\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) \\ &= |\lambda|^2 + |\beta|^2(1 - |\lambda|^2) - |\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) \\ &= (1 - |\mu|^2) + |\beta|^2|\mu|^2 - |\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) \\ &= 1 - |\mu|^2(1 - |\beta|^2) - |\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) \\ &= 1 - |\mu\alpha|^2 - |\lambda\beta|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) \\ &= 1 - |\alpha\bar{\mu} + \beta\bar{\lambda}|^2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$|\lambda| - |\beta| \leq \sqrt{1 - |\alpha\bar{\mu} + \beta\bar{\lambda}|^2}$$

ili

$$|\lambda| \leq |\beta| + \sqrt{1 - |\alpha\bar{\mu} + \beta\bar{\lambda}|^2}$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt{1 - |\mu|^2} \leq \sqrt{1 - |\alpha|^2} + \sqrt{1 - |\alpha\bar{\mu} + \beta\bar{\lambda}|^2}.$$

Obzirom da je  $|\mu|^2 = |(u, v)|^2$ ,  $|\alpha|^2 = |(u, w)|^2$ , te

$$|\alpha\bar{\mu} + \beta\bar{\lambda}|^2 = |(\alpha u + \beta z, \mu u + \lambda z)|^2 = |(w, v)|^2,$$

nejednakost (2.5) je dokazana.

Ako je  $w$  kolinearan s  $u$  ili  $v$ , tada je jasno da u (2.5) vrijedi jednakost. Obratno, pretpostavimo da u (2.5) vrijedi jednakost. Prema prvom dijelu dokaza, primjetimo da jednakost u (2.5) vrijedi ako i samo ako je

$$2|\lambda||\beta| = |\lambda|^2 + |\beta|^2, \quad 2|\alpha||\mu| = |\alpha|^2 + |\mu|^2, \quad \operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) = |\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}|,$$

tj. ako i samo ako je  $|\lambda| = |\beta|$  i  $|\alpha| = |\mu|$  kao i  $\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) = |\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}|$ . To znači da je  $\lambda = e^{i\theta}\beta$  i  $\mu = e^{i\phi}\alpha$  za neke realne brojeve  $\theta$  i  $\phi$ , odakle se dobije  $\lambda\bar{\beta} = e^{i\theta}|\beta|^2$  i  $\alpha\bar{\mu} = e^{-i\phi}|\alpha|^2$  pa iz  $\operatorname{Re}(\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}) = |\lambda\bar{\beta}\alpha\bar{\mu}|$  slijedi  $\operatorname{Re}(|\alpha\beta|^2(e^{i(\theta-\phi)} - 1)) = 0$ . Dakle,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  ili  $e^{i\theta} = e^{i\phi}$ .

Ako je  $\alpha = 0$ , onda je  $\mu = 0$  pa je  $v = \lambda z$  i stoga  $w = \beta z = \beta\bar{\lambda}v$ .

Ako je  $\beta = 0$ , onda je  $w = \alpha u$ .

Ako je  $e^{i\theta} = e^{i\phi}$ , onda je  $e^{i\theta}w = e^{i\theta}(\alpha u + \beta z) = \mu u + \lambda z = e^{i\theta}v$ , tj.  $w = e^{-i\theta}v$ .  $\square$

Promotrimo vektorski prostor  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  svih kompleksnih matrica reda  $n$  sa skalarnim produktom  $(A, B) = \operatorname{tr}(B^*A)$  za  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

Za  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  označimo s  $m(A)$  prosječnu svojstvenu vrijednost od  $A$ , tj.

$$m(A) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A.$$

**Teorem 2.5.2.** *Neka su  $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  unitarne matrice. Tada je*

$$\sqrt{1 - |m(UV)|^2} \leq \sqrt{1 - |m(U)|^2} + \sqrt{1 - |m(V)|^2}. \quad (2.6)$$

*Jednakost vrijedi u (2.6) ako i samo ako je  $U$  ili  $V$  unitarna skalarna matrica.*

*Dokaz.* Stavimo

$$u = \frac{1}{\sqrt{n}}V, \quad v = \frac{1}{\sqrt{n}}U^*, \quad w = \frac{1}{\sqrt{n}}I.$$

Tada je

$$\|u\|^2 = (u, u) = \frac{1}{n}(V, V) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(V^*V) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}I = 1,$$

$$\|v\|^2 = (v, v) = \frac{1}{n}(U^*, U^*) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(UU^*) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}I = 1,$$

$$\|w\|^2 = (w, w) = \frac{1}{n}(I, I) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(I^*I) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}I = 1,$$

te vrijedi

$$(u, v) = \frac{1}{n}(V, U^*) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(UV) = m(UV),$$

$$(u, w) = \frac{1}{n}(V, I) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(V) = m(V),$$

$$(w, v) = \frac{1}{n}(I, U^*) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(U) = m(U).$$

Primjenom teorema 2.5.1 na jedinične vektore  $u, v, w$  unitarnog prostora  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  dobije se nejednakost (2.6). Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $w$  kolinearan s  $u$  ili  $v$ , tj. ako i samo ako je  $U = \lambda I$  ili  $V = \lambda I$  za neki  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ .  $\square$



# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [2] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010.
- [3] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia, SIAM, 2000.
- [4] F. Zhang, *Mathrix Theory. Basic Results and Techniques (Second Edition)*, Springer-Verlag, New York, 2011.

# Sažetak

Tema ovog rada su normalne matrice. U prvom poglavlju rada prikazujemo osnovne rezultate o normalnim matricama. Dajemo neke karakterizacije normalnih matrica. Razmatramo  $(0,1)$ -matrice te dajemo dovoljan uvjet za njihovu normalnost. Također razmatramo nejednakosti koje uključuju elemente matrica te svojstvene i singularne vrijednosti matrica. Slučajevi jednakosti u tim nejednakostima rezultiraju normalnošću matrica. Neki rezultati o normalnim matričnim pertubacijama su također prikazani. Drugo poglavlje usmjereno je na podklasu normalnih matrica, unitarne matrice. Prikazujemo osnovna svojstva unitarnih matrica, raspravljamo o strukturi realnih ortogonalnih matrica s obzirom na transformacije sličnosti, povezujemo kontrakcije s unitarnim matricama, te prezentiramo nejednakost koja povezuje prosječne svojstvene vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica s prosječnom svojstvenom vrijednosti njihovog umnoška.

# Summary

The subject of this work is normal matrices. In the first chapter of this work we present basic results on normal matrices. We give some characterizations of a normal matrix. We consider  $(0, 1)$ -matrices, and give a sufficient condition on their normality. We also consider the inequalities involving entries, eigenvalues and singular values of matrices. The equality cases of these inequalities result in the normality of the matrices. Some results on normal matrix perturbations are presented as well. The second chapter focuses on a subclass of normal matrices, unitary matrices. We present basic properties of unitary matrices, discuss the structure of real orthogonal matrices under similarity, deal with the connections of contractions with unitary matrices, and present an inequality relating the average of the eigenvalues of each of two unitary matrices to that of their product.

# Životopis

Rođena sam 7. srpnja 1990. u Tomislavgradu, u Bosni i Hercegovini. Osnovnu školu sam pohađala u Šujici, a Srednju ekonomsku školu u Livnu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, smjer nastavnički. Nakon završenog Prediplomskog studija, na istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika, također smjer nastavnički.