Normalne matrice

Šimić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Šimić

NORMALNE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić
Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, rujan, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Roditeljima Stipi i Ivi, sestrama Marijani, Ružici, Tonki i Kaji, te Iki i Draganu zahvaljujem na ukazanoj podršci tijekom studiranja, te osobito što su zadnjih par godina bili uz mene... Hvala Vam!

Sadržaj

Uvod

Prvi poznati primjeri matričnih metoda pojavili su se u 2. stoljeću prije Krista kod Kineza. Iako u tragovima, matrice su se mogle vidjeti i ranije u babilonskoj kulturi. Kinezi su rješavali sustav linearnih jednadžbi preko matrica, pri čemu su koeficijente sustava zapisivali u tablicu brojeva te njenom transformacijom rješavali sustav. Unatoč ranoj spoznaji o matricama, tek u 17. stoljeću dolazi do većih napredaka u matričnoj teoriji. Za ime matrica koje i danas koristimo zaslužan je engleski matematičar James Sylvester, koji je 1850. prvi koristio taj pojam. Njegov kolega Arthur Cayley, također engleski matematičar, dao je prvu apstraktnu definiciju matrice. Prvotna primjena matrica za jednostavnije rješavanje sustava linearnih jednadžbi napredovala je, te se danas matrice primjenjuju u mehanici, statistici, elektrotehnici, programiranju, kombinatorici, teoriji grafova, ekonomiji i dr.

Matrična normalnost jedna je od zanimljivijih tema linearne algebre i matrične teorije. U ovom radu bavit ćemo se normalnim matricama, te unutar klase normalnih matrica, unitarnim matricama. Ovaj rad je podijeljen u dva poglavlja.

Prvo poglavlje posvećeno je normalnim matricama. Na početku navodimo neke osnovne rezultate matrične teorije koje koristimo u daljnjem radu. Zatim dajemo neke osnovne karakterizacije normalnih matrica. Uvodimo matrice čiji su elementi 0 ili 1, tako zvane binarne, Booleove ili (0,1)-matrice. Pokazujemo kako od zadane binarne matrice konstruirati normalnu binarnu matricu, te razmatramo uvjete uz koje je binarna matrica normalna. U posljednjoj točki prezentiramo nekoliko nejednakosti koje uključuju elemente zadane kvadratne matrice, njene svojstvene ili singularne vrijednosti, a u kojima postizanje jednakosti rezultira normalnošću promatrane matrice. Poglavlje završavamo rezultatima o normalnim matričnim perturbacijama koji su iskazani preko Frobeniusove matrične norme.

U drugom poglavlju bavimo se unitarnim matricama. Poglavlje započinjemo opisivanjem osnovnih svojstava ovih matrica. U točki 2.2 pobliže se upoznajemo s realnim ortogonalnim matricama, i to najprije s matricama reda 2 (rotacija, zrcaljenje), koje zatim dovodimo u vezu s realnim ortogonalnim matricama proizvoljnog reda. U točki 2.3 opisujemo vezu između unitarnih matrica i kontrakcija. U točki 2.4 pokazujemo da su unitarno slične realne matrice također i realno ortogonalno slične. Rad završavamo prezentacijom nejednakosti kojom se opisuje odnos između prosječnih svojstvenih vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica prema prosječnoj svojstvenoj vrijednosti umnoška tih matrica.

Poglavlje 1

Normalne matrice

1.1 Uvod

U uvodnom dijelu navest ćemo osnovne pojmove i rezultate matrične teorije koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Prostor $\mathbb{C}^n$ svih uređenih n-torki kompleksnih brojeva je unitarni prostor uz skalarni produkt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Norma vektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definira se kao

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Prema Cauchy–Schwarzovoj nejednakosti je

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

odnosno

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}, \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pritom je $|(x, y)| = \|x\| \, \|y\|$ ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Vektore prostora $\mathbb{C}^n$ označavat ćemo i kao jednostupčane matrice. Za $j = 1, \ldots, n$, označimo s $e_j^{(n)}$ vektor čija je j-ta komponenta jednaka 1, dok su sve ostale komponente 0. Ortonormirani skup vektora $\{e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}\}$ nazivamo kanonskom bazom vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$.

Ako je W potprostor prostora $\mathbb{C}^n$, tada je ortogonalni komplement prostora W prostor

$$W^\top = \{y \in \mathbb{C}^n : (y, x) = 0 \ , \forall x \in W\}.$$

Prostor $\mathbb{C}^n$ je ortogonalna suma potprostora W i $W^\top$, pišemo $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\top$. Svaki vektor $x \in \mathbb{C}^n$ možemo na jedinstven način prikazati kao sumu $x = y + z$, gdje su $y \in W$, $z \in W^\top$.

Ako je S neprazan podskup od $\mathbb{C}^n$, tada s $[S]$ označavamo skup svih konačnih lineranih kombinacija elemenata skupa S, tj

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ x_i \in S \right\}.$$

Uočimo da je $[S]$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$.

Za $x \in \mathbb{C}^n$, $[\{x\}]^\top$ označavamo kraće $x^\top$.

Skup svih kompleksnih matrica tipa $m\times n$ označavat ćemo s $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, a skup svih realnih matrica tipa $m\times n$ s $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ako je $m = n$, tada skup svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n zapisujemo kraće $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, a skup svih realnih kvadratnih matrica reda n s $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Preko kanonsih baza $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ prostora $\mathbb{C}^n$ i $\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\}$ prostora $\mathbb{C}^m$, vektorski prostor $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ svih linearnih operatora s $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$ poistovjećujemo s vektorskim prostorom matrica $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, i to na način da operator $A \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ shvaćamo kao matricu $A = (a_{ij})$, gdje je $a_{ij} = (Ae_j^{(n)}, e_i^{(m)})$, $i, = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Matricu čiji su svi elementi jednaki nula nazivamo *nul-matricom* i označavamo s 0.

Transponirana matrica matrice $A = (a_{ij})$ je matrica $A^T = (b_{ij})$, gdje je $b_{ij} = a_{ji}$ za sve indekse i, j. *Adjungirana matrica* matrice $A = (a_{ij})$ je matrica $A^* = (b_{ij})$, gdje je $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ za sve indekse i, j. Ako je $A = (a_{ij})$, tada matricu $B = (b_{ij})$ kojoj su elementi jednaki $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ označavamo s $\overline{A}$.

Kvadratna matrica je *dijagonalna* ako su svi njezini elementi koji ne leže na glavnoj dijagonali jednaki nuli. Kad želimo naznačiti dijagonalne elemente, tada za dijagonalnu matricu koristimo oznaku $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Jedinična matrica je dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1. Jediničnu matricu označavat ćemo s I odnosno I_n ako iz konteksta nije jasno o kojoj se dimenziji radi.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *regularna* ili *invertibilna* ako postoji $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tako da je $AB = BA = I$. Matricu B zovemo *inverznom matricom* ili *inverzom* matrice A i označavamo ju s A^{-1}. Regularnost matrice može se karakterizirati pomoću njezine determinante, odnosno ranga. Naime, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$, odnosno ako i samo ako je $\mathrm{r}(A) = n$, tj. A je matrica punog ranga.

Za kvadratnu matricu $A = (a_{ij})$ reda n definira se njezin *trag* kao sumu elemenata na glavnoj dijagonali, pišemo: $\operatorname{tr} A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *hermitska* ako je jednaka svojoj adjungiranoj matrici, tj. $A^* = A$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *simetrična* ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. $A^T = A$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *involutivna* ako je njezin kvadrat jedinična matrica, tj. $A^2 = I$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *normalna* ako komutira sa svojom adjungiranom matricom, tj. $A^*A = AA^*$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *unitarna* ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *ortogonalna* ako vrijedi $AA^T = A^TA = I$.

Ako je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, onda matricu $\lambda I - A$, gdje je $\lambda \in \mathbb{C}$ varijabilni parametar, nazivamo *karakterističnom matricom* matrice A. Polinom $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, gdje smo s $\det(\cdot)$ označili determinantu matrice, nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) polinomom* matrice A. Polinom $k_A(\lambda)$ ima n kompleksnih nultočaka koje nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) vrijednostima* matrice A. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A nazivamo *spektrom* od A i označavamo sa $\sigma(A)$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada postoji vektor $v \in \mathbb{C}^n$, $(v \neq 0)$ takav da je $Av = \lambda v$. Vektor v nazivamo *karakterističnim (svojstvenim) vektorom* koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. *Spektralni radijus* matrice A definira se kao

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Za matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ kažemo da je *pozitivno semidefinitna* ako je A hermitska matrica čije su sve svojstvene vrijednosti nenegativni realni brojevi. Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je *pozitivno definitna* ako je A hermitska matrica čije su sve svojstvene vrijednosti pozitivni realni brojevi. Pozitivno semidefinitnu matricu A označavano s $A \geq 0$, a pozitivno definitnu matricu A s $A > 0$. Ako su A i B hermitske matrice takve da je $A - B \geqslant 0$, tada pišemo $A \geqslant B$ ili $B \leqslant A$. Tada je $\geqslant$ relacija parcijalnog uređaja na skupu hermitskih matrica.

Za $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, uz identifikaciju prostora $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, vrijedi

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad x, \in \mathbb{C}^n,\ y \in \mathbb{C}^m.$$

Sada se lako pokaže da je

(i) $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako i samo ako je $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n$,

(ii) $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $(Ax, x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n$,

(iii) $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je pozitivno definitna ako i samo ako je $(Ax, x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Za svaku pozitivno semidefinitnu matricu A postoji jedinstvena pozitivno semidefinitna matrica B sa svojstvom $B^2 = A$. Takvu matricu B nazivamo *pozitivnim kvadratnim korijenom* od A i označavamo s $A^{1/2}$.

Za $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, matrica $A^*A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je pozitivno semidefinitna, pa stoga postoji $(A^*A)^{1/2}$. Matricu $(A^*A)^{1/2}$ označavamo s $|A|$ i nazivamo *apsolutnom vrijednošću* matrice A. Svojstvene vrijednosti matrice $|A|$ nazivamo *singularnim vrijednostima* matrice A i označavamo sa σ_i, $i = 1, \dots, n$.

Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji, za svaku matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takva da je U^*AU gornjotrokutasta matrica čiju dijagonalu čine svojstvene vrijednosti od A, pišemo

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Prema teoremu o polarnoj dekompoziciji, za svaku matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ postoje unitarne matrice $W, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takve da vrijedi

$$A = W\,|\,A\,| = |\,A^*\,|V.$$

Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, za svaku matricu $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sa ne-nul singularnim vrijednostima $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ postoje unitarne matrice $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ i $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je

$$A = U \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

gdje je blok-matrica tipa $m \times n$ i $D_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$.

Na prostoru $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ uvodimo *operatorsku normu*, u oznaci $\|\cdot\|$, na sljedeći način:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \ x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leqslant 1\}, \quad A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

Uz tako definiranu normu, $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ je normiran prostor, tj. za $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i $t \in \mathbb{C}$ vrijedi

(i) $\|A\| \geqslant 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$

(ii) $\|tA\| = |t|\,\|A\|,$

(iii) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$

Također, $\|A^*\| = \|A\|$ i $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Osim toga, operatorska norma je *unitarno invarijantna*, tj. $\|UAV\| = \|A\|$ za svake dvije unitarne matrice $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ i $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Ova norma ima i svojstvo *konzistentnosti*, tj. $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ za svake dvije matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Ako je A kvadratna matrica, onda je $\rho(A) \leqslant \|A\|$, dok za normalnu matricu A vrijedi $\rho(A) = \|A\|$.

1.2 Karakterizacije normalnih matrica

U ovoj točki dajemo razne karakterizacije normalnih matrica.

Teorem 1.2.1. *Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne.*

1.) *A je normalna tj. $A^*A = AA^*$.*

2.) *A je unitarno dijagonalizabilna, odnosno postoji unitarna matrica U reda n takva da je*
$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

3.) *Postoji polinom $p = p(x)$ takav da vrijedi $A^* = p(A)$.*

4.) *Postoji skup svojstvenih vektora matrice A koji tvore ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}^n$.*

5.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od A^*.*

6.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od $A + A^*$.*

7.) *Svaki svojstveni vektor od A je svojstveni vektor i od $A - A^*$.*

8.) *$A = B + iC$ za neke hermitske matrice B i C koje međusobno komutiraju.*

9.) *Ako je U unitarna matrica takva da je $U^*AU = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ gdje su B i D kvadratne matrice, tada su B i D normalne matrice, a $C = 0$.*

10.) *Ako je $W \subseteq C^n$ invarijantan potprostor za A (tj. $AW \subseteq W$), tada je $W^\perp$ također invarijantan potprostor za A.*

11.) *Ako je x svojstveni vektor od A, tada je $x^\perp$ invarijantan potprostor za A.*

12.) *A se može zapisati kao* $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i$ *gdje su $\lambda_i \in \mathbb{C}$, a $E_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ zadovoljavaju*

$E_i^2 = E_i = E_i^*$, $E_iE_j = 0$ *ako je $i \neq j$,* $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$.

13.) $\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

14.) *Singularne vrijednosti od A su $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|$.*

15.) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A + A^*)^2$.

16.) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2 = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A - A^*)^2$.

17.) *Svojstvene vrijednosti od* $A + A^*$ *su* $\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, \lambda_2 + \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_n + \overline{\lambda_n}$.

18.) *Svojstvene vrijednosti od* AA^* *su* $\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}}, \ldots, \lambda_n\overline{\lambda_{\pi(n)}}$ *za neku permutaciju* π *skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

19.) $\mathrm{tr}(A^*A)^2 = \mathrm{tr}((A^*)^2A^2)$.

20.) $(A^*A)^2 = (A^*)^2A^2$.

21.) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ *za svaki* $x \in \mathbb{C}^n$.

22.) $(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y)$ *za svaki* $x, y \in \mathbb{C}^n$.

23.) $|A| = |A^*|$, *gdje je* $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

24.) $A^* = AU$ *za neku unitarnu matricu* U.

25.) $A^* = VA$ *za neku unitarnu matricu* V.

26.) $UP = PU$ *ako je* $A = UP$ *polarna dekompozicija od* A.

27.) $AU = UA$ *ako je* $A = UP$ *polarna dekompozicija od* A.

28.) $AP = PA$ *ako je* $A = UP$ *polarna dekompozicija od* A.

29.) *A komutira s normalnom matricom koja nema višestrukih svojstvenih vrijednosti.*

30.) *A komutira s* $A + A^*$.

31.) *A komutira s* $A - A^*$.

32.) $A + A^*$ *i* $A - A^*$ *komutiraju.*

33.) *A komutira s* A^*A.

34.) *A komutira s* $AA^* - A^*A$.

35.) $A^*B = BA^*$ *kad god je* $AB = BA$.

36.) $A^*A - AA^*$ *je pozitivno semidefinitna matrica.*

37.) $|(Ax, x)| \leqslant (|A|x, x)$ *za svaki* $x \in \mathbb{C}^n$.

Dokaz. (2) $\Leftrightarrow$ (1). Pokažimo (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je $A = UTU^*$ Schurova dekompozicija od A. Dovoljno je pokazati da je gornjotrokutasta matrica $T = (t_{ij})$ dijagonalna. Uočavamo da je

$$AA^* = UTU^*(UTU^*)^* = UT \overbrace{U^*U}^{I} T^*U^* = UTT^*U^*,$$

$$A^*A = (UTU^*)^*(UTU^*) = UT^* \overbrace{U^*U}^{I} TU^* = UT^*TU^*,$$

pa iz $A^*A = AA^*$ slijedi $T^*T = TT^*$. Izjednačimo li (i, j)-elemente matrica T^*T i TT^*, imamo:

$$(T^*T)_{ij} = (TT^*)_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \overline{t_{ki}} t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \overline{t_{jk}}.$$

Za $i = j = 1$ slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{t_{k1}} t_{k1} = \sum_{k=1}^{n} t_{1k} \overline{t_{1k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |t_{k1}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |t_{1k}|^2 \Leftrightarrow |t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + \sum_{k=2}^{n} |t_{1k}|^2.$$

Slijedi da je $t_{1k} = 0$ za $k > 1$. Induktivno se pokaže da je $t_{ik} = 0$ za $i < k$. Prema tome, T je dijagonalna matrica.

(2) $\Rightarrow$ (1). Neka je D dijagonalna matrica, U unitarna matrica te neka vrijedi $D = U^*AU$. Tada je $A = UDU^*$. Sada imamo:

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*,$$

$$A^*A = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*.$$

Kako je je D dijagonalna matrica, vrijedi $DD^* = D^*D$, pa je stoga $AA^* = A^*A$.

(3) $\Leftrightarrow$ (2). Da bismo dokazali (2) $\Rightarrow$ (3), odabrat ćemo interpolacijski polinom $p(x)$ stupnja najviše $n - 1$ takav da je

$$p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dakle, ako je $A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\, U^*$ za neku unitarnu matricu U, tada je

$$\begin{aligned}
A^* &= U\mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n})\, U^* \\
&= U\mathrm{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n))\, U^* \\
&= Up(\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,)\, U^* \\
&= p(U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\, U^*) \\
&= p(A).
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Ako je $A^* = p(A)$ za neki polinom p, tada je

$$A^*A = p(A)A = Ap(A) = AA^*.$$

(4) $\Leftrightarrow$ (2). Pokažimo (2) $\Rightarrow$(4). Ako vrijedi $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tada množenjem ove jednakosti slijeva s U imamo

$$AU = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \ \text{ tj. } \ Au_i = \lambda_i u_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

gdje je u_i i-ti stupac od U, $i = 1, \ldots, n$. Dakle, vektori u_1, $i = 1, \ldots, n$, su svojstveni vektori od A i tvore ortonormiranu bazu od $\mathbb{C}^n$ jer je U unitarna matrica.

Obratno, pokažimo (4) $\Rightarrow$(2). Ako postoji skup svojstvenih vektora matrice A koji tvore ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}^n$, onda je matrica U, čiji stupci su upravo ti svojstveni vektori, unitarna i zadovoljava $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tj. vrijedi (2).

(5) $\Leftrightarrow$ (1). Pokažimo (1) $\Rightarrow$ (5). Pretpostavimo da je A normalna matrica i neka je u jedinični svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Proširimo u na unitarnu matricu U takvu da joj je u prvi stupac, tj. $Ue_1^{(n)} = u$. Tada je

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

za neke $\alpha \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ i $A_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Budući da je A normalna matrica, slijedi $U^*A^*AU = U^*AA^*U$, pa je $(U^*AU)^*(U^*AU) = (U^*AU)(U^*AU)^*$. Zaključujemo da je U^*AU normalna matrica. Prema tome,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^*,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ \alpha^* & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ \alpha^* & A_1^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}\alpha \\ \alpha^*\lambda & \alpha^*\alpha + A_1^*A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + \alpha\alpha^* & \alpha A_1^* \\ A_1\alpha^* & A_1A_1^* \end{pmatrix}.$$

Odavde slijedi $\alpha\alpha^* = 0$, pa je $\alpha = 0$. Tada je

$$U^*A^*U = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix},$$

odakle je $U^*A^*Ue_1^{(n)} = \overline{\lambda}e_1^{(n)}$, tj. $A^*Ue_1^{(n)} = \overline{\lambda}Ue_1^{(n)}$ odnosno $A^*u = \overline{\lambda}u$, pa je u svojstveni vektor od A^* pridružen svojstvenoj vrijednosti $\overline{\lambda}$ od A^*.

Obrat dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da iz (5) slijedi (1) za matrice reda $n-1$ te dokažimo da to vrijedi i za matrice reda n. Primjetimo da je

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (U^*AU)(U^*x) = \lambda(U^*x)$$

za bilo koju unitarnu matricu U reda n. Dakle, po Schurovoj dekompoziji bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A = (a_{ij})$ gornjotrokutasta matrica. Uzmemo li $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, onda je e_1 svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = a_{11}$. Prema pretpostavci, e_1 je svojstveni vektor od A^* tj. $A^*e_1 = \mu e_1$ za neki skalar μ. Odavde proizlazi da se prvi stupac od A^* mora sastojati od nula izuzev prve komponente. Dakle, $\overline{a_{ik}} = 0$ za $k = 2, \ldots, n$, pa je A oblika

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je B matrica reda $n-1$ koja svojstvo (5) nasljeđuje od matrice A, dakle svaki svojstveni vektor od B je ujedno i svojstveni vektor od B^*. Prema pretpostavci indukcije matrica B je dijagonalna, pa je i A dijagonalna matrica, što znači da je A normalna matrica.

(6) $\Leftrightarrow$ (5). Neka vrijedi (6). Ako je $Au = \mu u$ za neki vektor $u \neq 0$ i $\mu \in \mathbb{C}$, tada je $(A + A^*)u = \lambda u$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Odavde slijedi $A^*u = \lambda u - Au = (\lambda - \mu)u$ tj. u je svojstveni vektor od A^* pa vrijedi (5). Obratno, pretpostavimo da vrijedi (5). Neka je $Au = \mu u$ za neki vektor $u \neq 0$ i $\mu \in \mathbb{C}$. Tada je $A^*u = \lambda u$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi $(A + A^*)u = (\lambda + \mu)u$ pa vrijedi (6).

(7) $\Leftrightarrow$ (5). Dokazuje se slično kao i (6) $\Leftrightarrow$ (5).

(8) $\Leftrightarrow$ (1). Ekvivalencija se postiže ako se uzmu hermitske matrice

$$B = \mathrm{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2}, \quad C = \mathrm{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}.$$

(9) $\Leftrightarrow$ (1). Dokažimo (1) $\Rightarrow$ (9), drugi smjer je jednostavan. Kako je $A^*A = AA^*$, to je $(U^*AU)^*(U^*AU) = (U^*AU)(U^*AU)^*$ odnosno

$$\begin{pmatrix} B^*B & B^*C \\ C^*B & C^*C + D^*D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^* + CC^* & CD^* \\ DC^* & DD^* \end{pmatrix}.$$

Prema tome,

$$B^*B = BB^* + CC^* \quad \text{i} \quad C^*C + D^*D = DD^*.$$

Iz prve jednakosti imamo da je

$$\mathrm{tr}(B^*B) = \mathrm{tr}(BB^* + CC^*) = \mathrm{tr}(BB^*) + \mathrm{tr}(CC^*) = \mathrm{tr}(B^*B) + \mathrm{tr}(CC^*),$$

što znači da je $\mathrm{tr}(CC^*) = 0$. Kako je CC^* pozitivno semidefinitna matrica, odavde slijedi $CC^* = 0$. Prema tome $C = 0$. Dakle, B i D su normalne matrice, pa vrijedi (9). Obratno, pretpostavimo da vrijedi (9) i pokažimo da vrijedi (1), tj. da je A normalna matrica. Prema Schurovom teoremu postoji unitarna matrica U takva da je U^*AU gornjotrokutasta matrica. Zapišimo U^*AU kao blok-matricu $U^*AU = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Tada su, prema (9), matrice B i D normalne, a $C = 0$, pa je stoga matrica A normalna.

Time smo pokazali da su prvih devet uvjeta ekvivalentni.

(9) $\Rightarrow$ (10). Dovoljno je uočiti da je $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$, te da baza od W i baza od $W^\perp$ tvore bazu od $\mathbb{C}^n$.

(10) $\Rightarrow$ (11). (11) je reformulacija od (10) gdje je W razapet svojstvenim vektorom od A.

(11) $\Rightarrow$ (4). Neka je $Ax = \lambda x$, gdje je x jedinični svojstveni vektor. Prema (11), $x^\perp$ je invarijantan za A. Promotrit ćemo restrikciju matrice A na potprostor $x^\perp$. Induktivno, dobit ćemo skup svojstvenih vektora od A koji tvore ortonormiranu bazu od $\mathbb{C}^n$.

(12) $\Rightarrow$ (1) dobije se direktnim računom.

(2) $\Rightarrow$ (12). Neka je $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, gdje je u_i i-ti stupac od U. Tada je

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)U^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \cdots + \lambda_n u_n u_n^*.$$

Uzmemo li $E_i = u_i u_i^*,\ i = 1, \dots, n$, slijedi (12).

(13) $\Leftrightarrow$ (2). Neka je $A = U^*TU$ Schurova dekompozicija od A, gdje je U unitarna i $T = (t_{ij})$ gornjotrokutasta matrica na čijoj dijagonali su svojstvene vrijednosti od A. Tada je $A^*A = U^*T^*TU$. Dakle, $\mathrm{tr}(A^*A) = \mathrm{tr}(T^*T)$. S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A^*A) &= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 , \\ \mathrm{tr}(T^*T) &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2 . \end{aligned}$$

Slijedi da je $\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ ako i samo ako je $t_{ij} = 0$ za sve $i < j$, tj. T je dijagonalna odnosno A unitarno dijagonalizibilna.

(14) $\Rightarrow$ (13). Ako su $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ singularne vrijednosti od A, tada su $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ svojstvene vrijednosti od A^*A. Trag matrice jednak je sumi njezinih svojstvenih vrijednosti. Ako vrijedi (14), onda je

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2,$$

pa vrijedi (13). Za obratni smjer pokazali smo (13) $\Rightarrow$ (2), a očito ja da (2) $\Rightarrow$ (14).

(15) $\Rightarrow$ (13). Možemo pretpostaviti da je A gornjotrokutasta matrica, jer jednakosti vrijede kada se A zamjeni s U^*AU, gdje je U neka unitarna matrica. Kako je

$$\mathrm{tr}(A + A^*)^2 = \mathrm{tr}A^2 + 2\mathrm{tr}(A^*A) + \mathrm{tr}(A^*)^2,$$

slijedi

$$\mathrm{tr}(A^*A) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A + A^*)^2 - \mathrm{tr}A^2 - \mathrm{tr}(A^*)^2).$$

Pošto je $4(\mathrm{Re}\lambda_i)^2 = (\lambda_i + \overline{\lambda_i})^2$, prema (15) imamo

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\lambda_i)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \overline{\lambda_i})^2$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^*A) &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A + A^*)^2 - \mathrm{tr}A^2 - \mathrm{tr}(A^*)^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \overline{\lambda_i})^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (15). Iz (2) slijedi da svojstvene vrijednosti od $A + A^*$ iznose $\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n + \overline{\lambda_n}$, pa su njihovi kvadrati svojstvene vrijednosti od $(A + A^*)^2$. Stoga je

$$\mathrm{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \overline{\lambda_i})^2 = 4\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\lambda_i)^2,$$

što je (15).

Slično se pokaže (16) $\Rightarrow$ (13) i (2) $\Rightarrow$ (16).

(17) $\Rightarrow$ (15). Ako svojstvene vrijednosti od $A + A^*$ iznose $\lambda_1 + \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n + \overline{\lambda_n}$, tada su njihovi kvadrati svojstvene vrijednosti od $(A + A^*)^2$. Slijedi

$$\mathrm{tr}(A + A^*)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i + \overline{\lambda_i})^2 = 4\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\lambda_i)^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (17) je očito.

(18) $\Leftrightarrow$ (14). Očito (14) $\Rightarrow$ (18). Da bismo pokazali obrat, bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je $\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}} > 0$ najveća svojstvena vrijednost od AA^*. Označimo sa $\sigma_{\max}$ najveću singularnu vrijednost matrice A. Znamo $|\lambda_i| \leqslant \sigma_{\max}$ za $i = 1, \ldots, n$. Ako je

$|\lambda_{\pi(1)}| \neq |\lambda_1|$, onda je $|\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}}| < \sigma^2_{\max}$, što je nemoguće budući da je $\sigma^2_{\max}$ najveća svojstvena vrijednost matrice AA^*. Stoga slijedi $|\lambda_{\pi(1)}| = |\lambda_1|$. S druge strane, $\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}}$ je pozitivan broj pa je stoga $\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}} = |\lambda_1\overline{\lambda_{\pi(1)}}| = |\lambda_1||\lambda_{\pi(1)}| = |\lambda_1|^2 = \lambda_1\overline{\lambda_1}$. Dakle, $\lambda_1 = \lambda_{\pi(1)}$. Ostatak slijedi matematičkom indukcijom; promatra se restrikcija od AA^* na $x^\perp$, gdje je x svojstveni vektor od AA^* pridružen svojstvenoj vrijednosti $|\lambda_1^2|$.

(1) $\Rightarrow$ (19) je očito.

(19) $\Rightarrow$ (1). Da bismo pokazali da iz (19) slijedi (1) koristimo poznatu činjenicu da za svake dvije kvadratne matrice X i Y istog reda vrijedi

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$$

i

$$\mathrm{tr}(X^*X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0.$$

Primjetimo da je $\mathrm{tr}(AA^*)^2 = \mathrm{tr}(A^*A)^2$. Stoga, prema (19) imamo

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big((A^*A - AA^*)^*(A^*A - AA^*)\big) &= \mathrm{tr}(A^*A - AA^*)^2\\ &= \mathrm{tr}(A^*A)^2 - \mathrm{tr}((A^*)^2A^2) - \mathrm{tr}(A^2(A^*)^2) + \mathrm{tr}(AA^*)^2\\ &= \mathrm{tr}(A^*A)^2 - \mathrm{tr}((A^*)^2A^2) - \mathrm{tr}((A^*)^2A^2) + \mathrm{tr}(A^*A)^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dakle, $A^*A - AA^* = 0$, tj. vrijedi (1).

Sada imamo (20) $\Rightarrow$ (19) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (20).

(21) $\Rightarrow$ (1). Kvadriranjem obiju strana u (21) dobije se $(Ax, Ax) = (A^*x, A^*x)$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n$ što je ekivalentno s

$$(x, A^*Ax) = (x, AA^*x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

ili

$$(x, (A^*A - AA^*)x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Odavde, budući da je matrica $A^*A - AA^*$ pozitivno semidefinitna, slijedi $A^*A - AA^* = 0$, što je tvrdnja (1).

(22) $\Rightarrow$ (21) dobijemo stavimo li da je $x = y$.

(1) $\Rightarrow$ (22). Ako vrijedi (1), imamo

$$(Ax, Ay) = (A^*Ax, y) = (AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

što je tvrdnja (22).

(23) $\Leftrightarrow$ (1) je posljedica jedinstvenosti pozitivnog kvadratnog korijena pozitivno semidefinitne matrice.

(24) $\Leftrightarrow$ (1). Ako je $A^* = AU$ za neku unitarnu matricu U, onda je

$$A^*A = A^*(A^*)^* = (AU)(AU)^* = AA^*,$$

tj. A je normalna. Za obratnu implikaciju, dovoljno je pokazati (2) $\Rightarrow$ (24). Neka je $A = V^*\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)V$ gdje je V unitarna. Uzmimo $U = V^*\mathrm{diag}(l_1, l_2, \ldots, l_n)V$ gdje je $l_1 = \dfrac{\overline{\lambda_i}}{\lambda_i}$ ako je $\lambda_i \neq 0$, inače $l_i = 1$, za $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\begin{aligned} A^* &= V^*\mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n})V \\ &= V^*\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)VV^*\mathrm{diag}(l_1, l_2, \ldots, l_n)V \\ &= AU. \end{aligned}$$

Slično se pokaže (25) $\Leftrightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (26). Ako je $A = UP$, gdje je U unitarna, a P pozitivno semidefinitna, tada iz $A^*A = AA^*$ slijedi $P^*P = UPP^*U^*$ odnosno $P^2 = UP^2U^*$. Korjenovanjem dobivamo $P = UPU^*$, tj. $PU = UP$.

(26) $\Rightarrow$ (1). Iz (26) slijedi

$$A^*A = (UP)^*(UP) = P^*U^*UP = P^*P = P^2,$$

$$AA^* = (PU)(PU)^* = PUU^*P^* = PP^* = P^2,$$

pa vrijedi (1).

(26) $\Rightarrow$ (27). Neka je $A = UP$ polarna dekompozicija od A. Tada vrijedi

$$UP = PU \Rightarrow A = PU \Rightarrow UA = UPU = AU.$$

(27) $\Rightarrow$ (26). Neka je $A = UP$ polarna dekompozicija od A. Tada vrijedi

$$AU = UA \Rightarrow UPU = U^2P,$$

odakle zbog regularnosti matrice U dobivamo $PU = UP$.

(26) $\Rightarrow$ (28). Neka je $A = UP$ polarna dekompozicija od A. Množenjem jednakosti $UP = PU$ s P zdesna dobijemo $UP^2 = PUP$, odakle slijedi $AP = UP^2 = PUP = PA$.

(28) $\Rightarrow$ (26). Neka je $A = UP$ polarna dekompozicija od A. Pretpostavimo $AP = PA$, to jest, $UP^2 = PUP$. Ako je P regularna, tada je očito $UP = PU$, tj. vrijedi (26). Pretpostavimo da je P singularna. Jasno je da matrice A i P imaju jednak rang. Neka je $r = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(P)$, gdje smo s $\mathrm{r}(\cdot)$ označili rang matrice. Zapišimo matricu P kao

$$P = V^* \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V,$$

gdje je V unitarna, a D pozitivno definitna dijagonalna matrica reda r, $r < n$. Stavimo $W = VUV^*$. Tada iz $UP^2 = PUP$ slijedi

$$\begin{aligned}
W\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= VUV^*\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= VUV^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^* \\
&= VUP^2V^* \\
&= VPUPV^* \\
&= VV^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VUV^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^* \\
&= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zapišimo W kao blok-matricu

$$\begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix},$$

gdje je W_1 kvadratna matrica reda r. Tada je

$$W_1D^2 = DW_1D \quad \text{i} \quad W_3D^2 = 0$$

odakle, jer je D regularna, slijedi

$$W_1D = DW_1 \quad \text{i} \quad W_3 = 0.$$

Kako je W unitarna matrica, to iz $W^*W = I_n$ slijedi $W_1^*W_1 = I_r$, pa je matrica W_1 unitarna. Također, iz $WW^* = I_n$ slijedi $W_1W_1^* + W_2W_2^* = I_r$, odakle je $W_2W_2^* = 0$ i stoga $W_2 = 0$. Sada je

$$W\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W,$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}
UPV^* &= V^*VUPV^* \\
&= V^*VUV^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^* \\
&= V^*W\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^* \\
&= V^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}WVV^* \\
&= V^*\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VUV^*VV^* \\
&= PUV^*.
\end{aligned}$$

Dakle, zbog regularnosti matrice V^* slijedi $UP = PU$.

(26) ⇒ (28). Neka je $A = UP$ polarna dekompozicija od A, pri čemu je $UP = PU$. Množenjem $UP = PU$ zdesna s P imamo $AP = UP^2 = PUP = PA$.

(29) ⇒ (2). Neka A komutira s B, gdje je B normalna matrica čije su sve svojstvene vrijednosti međusobno različite. Zapišimo $B = V^*CV$, gdje je V unitarna, a $C = \mathrm{diag}(c_1, ..., c_n)$ dijagonalna matrica, pri čemu su svi c_i međusobno različiti. Stavimo $W = (w_{ij}) = VAV^*$. Tada iz $AB = BA$ slijedi

$$WCV = VAV^*CV = VAB = VBA = VV^*CVA = CVA = CVAV^*V = CWV,$$

odakle zbog regularnosti matrice V slijedi $WC = CW$. Stoga je $w_{ij}c_i = w_{ij}c_j$, odnosno $w_{ij}(c_i - c_j) = 0$ za $i, j = 1, \ldots, n$. Budući da je $c_i \neq c_j$ čim je $i \neq j$, imamo $w_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Dakle, VAV^* je dijagonalna, tj. A je unitarno dijagonalizibilna.

(2) ⇒ (29). Ako vrijedi (2), uzmimo $B = U\mathrm{diag}(1, 2, ..., n)U^*$. Tada je B normalna i lako se provjeri da je $AB = BA$.

(30), (31) i (32) su ekvivalentni s (2), što vidimo direktnim računom.

(33) ⇒ (20). Ako A komutira s A^*A, tada je

$$AA^*A = A^*A^2.$$

Množenjem obiju strana gornje jednakosti s A^* slijeva dobivamo

$$(A^*A)^2 = (A^*)^2A^2.$$

(34) ⇒ (19). Iz $A(AA^* - A^*A) = (AA^* - A^*A)A$ slijedi

$$A^2A^* - AA^*A = AA^*A - A^*A^2,$$

pa množenjem obiju strana ove jednakosti s A^* slijeva dobivamo

$$A^*A^2A^* - (A^*A)^2 = (A^*A)^2 - (A^*)^2A^2.$$

Odavde slijedi

$$\mathrm{tr}(A^*A^2A^*) - \mathrm{tr}(A^*A)^2 = \mathrm{tr}(A^*A)^2 - \mathrm{tr}((A^*)^2A^2).$$

Kako je osim toga $\mathrm{tr}(A^*A^2A^*) = \mathrm{tr}(A^2(A^*)^2) = \mathrm{tr}((A^*)^2A^2)$, dobivamo $\mathrm{tr}(A^*A)^2 = \mathrm{tr}(A^*)^2A^2)$.

(1)) ⇒ (33) i (1)) ⇒ (34) je očito.

(35) ⇒ (1). Dovoljno je staviti $B = A$.

(1) ⇒ (35). Pretpostavimo da je A normalna i da A i B komutiraju. Neka je $A = U^*\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U$ gdje je U unitarna. Tada iz $AB = BA$ slijedi

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(UBU^*) = (UBU^*)\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Označimo $T = UBU^* = (t_{ij})$. Tada je

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)T = T\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

iz čega slijedi $(\lambda_i - \lambda_j)t_{ij} = 0$ za $i, j = 1, \dots, n$. Stoga je $(\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_j})t_{ij} = 0$ za $i, j = 1, \dots, n$, pa je

$$\operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})T = T\operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}).$$

Množenjem obiju strana gornje jednakosti s U^* slijeva i s U zdesna, slijedi $A^*B = BA^*$.

(1) $\Rightarrow$ (36) je očito.

(36) $\Rightarrow$ (1). Vrijedi

$$\operatorname{tr}(A^*A - AA^*) = \operatorname{tr}(A^*A) - \operatorname{tr}(AA^*) = 0.$$

Kako je prema pretpostavci $A^*A - AA^*$ pozitivno semidefinitna matrica, to je $A^*A - AA^* = 0$ ako i samo ako je $\operatorname{tr}(A^*A - AA^*) = 0$. Prema tome, $A^*A - AA^* = 0$ pa je matrica A normalna.

(37) $\Leftrightarrow$ (1). Najprije uočimo da za svaku unitarnu matricu $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$|U^*AU|^2 = (U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*|A|^2U = (U^*|A|U)^2.$$

Odavde, zbog činjenice da svaka pozitivno semidefinitna matrica ima jedinstven pozitivni kvadratni korijen, slijedi

$$|U^*AU| = U^*|A|U.$$

Stoga (37) vrijedi ako i samo ako je ispunjeno

$$|(U^*AUx, x)| \leq (|U^*AU|x, x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

za bilo koju unitarnu matricu $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Stoga prema Schurovoj dekompoziciji možemo bez smanjenja općenitosti smatrati da je A gornjotroktasta matrica.

Pretpostavimo da vrijedi (1). Tada je matrica A unitarno dijagonalizabilna, pa možemo smatrati da je $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tada (37) glasi

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i||x_i|^2,$$

što očito vrijedi.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (37). Tvrdimo da je A dijagonalna matrica. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po redu matrice A. Tvrdnja je istinita za sve matrice reda 1. Pretpostavimo da je svaka gornjotrokutasta matrica C reda $n - 1$ za koju vrijedi $|(Cx, x)| \leqslant (|C|x, x)$, $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, dijagonalna matrica. Dokažimo da je tada i svaka gornjotrokutasta matrica reda n za koju vrijedi (37) isto dijagonalna matrica. Razlikujemo dva slučaja.

1. slučaj: sve svojstvene vrijednosti matrice A su nule.
Tada postoje $B \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ i gornjotrokutasta $C \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ takve da je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo

$$|A|^2 = A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^*B + C^*C \end{pmatrix}.$$

Stavimo $T = (B^*B + C^*C)^{1/2}$. Tada je

$$|A| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $B \neq 0$. Tada postoji $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ takav da je $Bv \neq 0$. Neka je

$$s = \frac{1}{\|Bv\|^2}((Tv, v) + |(Cv, v)|) + 1. \qquad (*)$$

Stavimo $u = sBv$. Neka je $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Tada je

$$(|A|x, x) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Tv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = (Tv, v),$$

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} Bv \\ Cv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = (Bv, u) + (Cv, v).$$

Prema (37) je $|(Bv, u) + (Cv, v)| \leqslant (Tv, v)$. Međutim

$$s\|Bv\|^2 - |(Cv, v)| = |(Bv, u)| - |(Cv, v)| \leqslant |(Bv, u) + (Cv, v)| \leqslant (Tv, v)$$

pa je

$$s\|Bv\|^2 \leqslant (Tv, v) + |(Cv, v)|.$$

Stoga iz $(*)$ slijedi

$$(Tv, v) + |(Cv, v)| + \|Bv\|^2 \leqslant (Tv, v) + |(Cv, v)|$$

tj. $\|Bv\|^2 = 0$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom $Bv \neq 0$. Prema tome, mora biti $B = 0$. Tada je $T = (C^*C)^{1/2} = |C|$. Kako je za svaki $x \in \mathbb{C}^{n-1}$

$$\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = (Cx, x),$$

$$\left(|A|\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}0&0\\0&T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\right) = (Tx,x) = (|C|x,x),$$

to prema (37) vrijedi $|(Cx,x)| \leqslant (|C|x,x)$ za svaki $x \in \mathbb{C}^{n-1}$. Budući da je C gornjotrokutasta matrica reda $n-1$, a to je prema pretpostavci indukcije matrice C dijagonalna. No, tada je i A dijagonalna matrica.

2. slučaj: barem jedna svojstvena vrijednost matrice A je različita od nule.

Označimo s λ neku (bilo koju) svojstvenu vrijednost matrice A koja je različita od nule. Tada postoje $B \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ i gornjotrokutasta $C \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ tako da je

$$A = \begin{pmatrix}\lambda & B\\0 & C\end{pmatrix}.$$

Neka je

$$|A| = \begin{pmatrix}t & D\\D^* & G\end{pmatrix}$$

za neke $t \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{M}_{1,n-1}(\mathbb{C}), G \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Pri tome, zbog pozitivne semidefinitnosti matrice $|A|$ vrijedi $t \geqslant 0, G \geqslant 0$. Tada je

$$A^*A = \begin{pmatrix}\overline{\lambda} & 0\\B^* & C^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & B\\0 & C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|\lambda|^2 & \overline{\lambda}B\\\lambda B^* & B^*B + C^*C\end{pmatrix},$$

$$A^*A = |A|^2 = \begin{pmatrix}t & D\\D^* & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & D\\D^* & G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2 + DD^* & tD + DG\\tD^* + GD^* & D^*D + G^2\end{pmatrix},$$

odakle se uspoređivanjem odgovarajućih elemenata matrice A^*A dobije

$$|\lambda|^2 = t^2 + DD^*,$$

$$\overline{\lambda}B = tD + DG,$$

$$B^*B + C^*C = D^*D + G^2.$$

Uzmimo $x = \begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Vrijedi

$$(Ax,x) = \left(\begin{pmatrix}\lambda & B\\0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}\lambda\\0_{n-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix}\right) = \lambda,$$

$$(|A|x,x) = \left(\begin{pmatrix}t & D\\D^* & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0_{n-1}\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}t\\D^*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = t,$$

pa prema (37) imamo $|\lambda| \leqslant t$. Sada iz $|\lambda|^2 = t^2 + DD^*$ slijedi $t^2 + DD^* \leqslant t^2$ odakle je $DD^* \leqslant 0$ pa je $D = 0$ i stoga $t = |\lambda|$. Iz $\overline{\lambda}B = tD + DG = 0$, zbog $\lambda \neq 0$ slijedi $B = 0$. Stoga imamo

$|C|^2 = C^*C = B^*B + C^*C = D^*D + G^2 = G^2$ pa je $|C| = G$. Uzmimo proizvoljan $x \in \mathbb{C}^{n-1}$. Tada je

$$\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Cx \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = (Cx, x),$$

$$\left(|A|\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |C| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ |C|x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) = (|C|x, x),$$

pa prema (37) vrijedi $|(Cx, x)| \leqslant (|C|x, x)$. Kako je C gornjotrokutasta matrica reda $n - 1$, prema pretpostavci indukcije C mora biti dijagonalna matrica. No, tada je i matrica A dijagonalna, čime je tvrdnja dokazana. □

1.3 Normalne matrice s elementima 0 i 1

U ovom dijelu ćemo se fokusirati na posebne vrste normalnih matrica čiji su elementi samo nule i jedinice. Matrice čiji su elementi samo nule i jedinice zvat ćemo $(0, 1)$-*matrice*. U literaturi se koriste i nazivi *binarna matrica* odnosno *Booleova matrica*. One imaju primjene u kombinatorici i teoriji grafova. U ovom dijelu predstavit ćemo tri teorema o (0,1)-matricama: prvi govori o tome kako konstruirati simetričnu (normalnu) $(0, 1)$-matricu od zadane $(0, 1)$-matrice, drugi daje dovoljan uvjet za normalnost (0,1)-matrice, a treći govori o komutativnosti kvadratnih (0,1)-matrica.

Neka je A $(0, 1)$-matrica tipa $m \times n$. Označimo s r_i zbroj elemenata i-tog retka matrice A, a s s_j zbroj elemenata j-tog stupca matrice A, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Neka je $R(A) = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ *vektor zbroja elemenata redaka*, a $S(A) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ *vektor zbroja elemenata stupaca* matrice A. Primjerice, ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tada je

$$R(A) = (r_1, r_2, \dots, r_4) = (1, 2, 3, 2), \quad S(A) = (s_1, s_2, \dots, s_4) = (2, 3, 1, 2).$$

Zbroj komponenti od $R(A)$ jednak je ukupnom broju jedinica u A. Isto tako, zbroj komponenti od $S(A)$ je ukupan broj jedinica matrice A. Obrat ne mora vrijediti. Ako imamo zadane vektore R i S s nenegativnim cijelim brojevima, tada ne mora postojati $(0, 1)$-matrica koja ima R kao vektor zbroja elemenata redaka i S kao vektor zbroja elemenata stupaca.

Npr. nijedna $(0, 1)$-matrica A reda 4 ne zadovoljava $R(A) = (4, 1, 1, 1)$ i $S(A) = (4, 2, 1, 0)$. Problemom određivanja uvjeta uz koje za dane vektore R i S postoji $(0, 1)$-matrica A sa svojstvom $R(A) = R$ i $S(A) = S$ bavi se kombinatorna teorija matrica.

Očito, za simetričnu $(0, 1)$-matricu, vektor zbroja elemenata redaka jednak je vektoru zbroja elemenata stupaca. Sljedeći teorem pokazuje da u nekom smislu vrijedi i obrat. Za zadani vektor R postoji $(0, 1)$-matrica čiji su vektori zbroja elemenata redaka i zbroja elemenata stupca jednaki R ako i samo ako postoji normalna, odnosno simetrična, $(0, 1)$ matrica s tim svojstvom.

Teorem 1.3.1. *Ako postoji* $(0, 1)$*-matrica A reda n sa* $R(A) = S(A) = R$*, onda postoji simetrična* $(0, 1)$*-matrica B reda n sa svojstvom* $R(B) = S(B) = R$*.*

Dokaz. Koristimo indukciju po n. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja je očita. Neka je $n > 2$. Možemo pretpostaviti da A sadrži nenul redak (ili stupac). Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za matrice reda manjeg od n. Ako je A simetrična, onda se nema što dokazivati. Dakle, pretpostavimo da $A = (a_{ij})$ nije simetrična.

Ako je prvi stupac matrice A dobiven transponiranjem prvog retka, tada tvrdnja slijedi ako primjenimo pretpostavku indukcije na kvadratnu podmatricu reda $n - 1$ smještenu u donjem desnom kutu matrice A.

Ako to nije slučaj, tada zbog nesimetričnosti matrice A i uvjeta $R(A) = S(A)$, imamo $a_{1p} = 1$, $a_{1q} = 0$, $a_{p1} = 0$, $a_{q1} = 1$ za neke p i q. Promotrimo sada redove p i q. Kada bi bilo $a_{pt} \leq a_{qt}$ za $t = 2, \ldots, n$, tada bi zbog $a_{p1} = 0$ i $a_{q1} = 1$ slijedilo $r_p < r_q$. Također, kada bi bilo $a_{tp} \geq a_{tq}$ za $t = 2, \ldots, n$, tada bi zbog $a_{1p} = 1$ i $a_{1q} = 0$ vrijedilo $s_p > s_q$. Međutim, oba slučaja se ne mogu dogoditi istovremeno, jer bi došlo do kontradikcije $r_p < r_q = s_q < s_p = r_p$. Prema tome, mora postojati takav t da je ili $a_{pt} = 1$ i $a_{qt} = 0$ ili $a_{tp} = 0$ i $a_{tq} = 1$. Ako je $a_{pt} = 1$ i $a_{qt} = 0$, tada u matrici A zamijenimo nule i jedinice na presjecima redaka p, q i stupaca $1, t$. Ako je $a_{tp} = 0$ i $a_{tq} = 1$, tada u matrici A zamijenimo nule i jedinice na presjecima stupaca p, q i redaka $1, t$. Primjetimo da takve zamjene smanjuju broj različitih elemenata u prvom retku i prvom stupcu matrice A bez utjecaja na vektore zbroja elemanata redaka i zbroja elemenata stupaca matrice A. Ponavljajući opisani postupak dolazimo do matrice u kojoj je prvi stupac dobiven transponiranjem prvog retka. Primjenimo li pretpostavku indukcije na kvadratnu podmatricu reda $n - 1$ smještenu u donjem desnom kutu te matrice, dobivamo simetričnu $(0, 1)$-matricu B reda n sa svojstvom $R(B) = S(B) = R$. $\square$

U daljnjem ćemo s J_n, ili jednostavnije J, označavati kvadratnu matricu reda n čiji su svi elementi 1.

Teorem 1.3.2. *Neka je A kvadratna* $(0, 1)$*-matrica reda n. Ako je*

$$AA^T = tI + J$$

za neki pozitivan cijeli broj t, tada je A normalna matrica.

Dokaz. Neka je $A = (a_{ij})$ te $R(A) = (r_1, \ldots, r_n)$. Promatrajući dijagonalne elemente matrica $AA^T = (b_{ij})$ i $tI + J = (c_{ij})$ imamo

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = r_i, \quad c_{ii} = t + 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Stoga iz $AA^T = tI + J$ slijedi $r_i = t + 1$ za $i = 1, \ldots, n$. Stavimo $AJ = (g_{ij})$, $(t + 1)J = (h_{ij})$. Tada je

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = r_i, \quad h_{ij} = t + 1, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

pa je stoga $g_{ij} = h_{ij}$ za $i, j = 1, \ldots, n$, odnosno

$$AJ = (t + 1)J.$$

Matrica A je regularna, jer je

$$(\det A)^2 = \det(AA^T) = \det(tI + J) = (t + n)t^{n-1} \neq 0,$$

(pri čemu se posljednja jednakost u gornjem izrazu dobije matematičkom indukcijom po n). Dakle, iz $AJ = (t + 1)J$ slijedi $J = (t + 1)A^{-1}J$ pa je

$$A^{-1}J = (t + 1)^{-1}J.$$

Množenjem zdesna obje strane jednakosti $AA^T = tI + J$ s J imamo

$$AA^T J = tJ + J^2 = (t + n)J,$$

odakle se množenjem slijeva s A^{-1} dobije

$$A^T J = (t + 1)^{-1}(t + n)J.$$

Nadalje, transponiranjem obiju strana gornje jednakosti imamo

$$JA = (t + 1)^{-1}(t + n)J,$$

odakle se množenjem zdesna s J dobije

$$JAJ = n(t + 1)^{-1}(t + n)J.$$

Pomnožimo li $AJ = (t + 1)J$ slijeva s J, dobivamo

$$JAJ = n(t + 1)J.$$

Slijedi
$$(t+1)^2 = t+n,$$
pa uvrštavajući to u $JA = (t+1)^{-1}(t+n)J$ imamo
$$JA = (t+1)J.$$
Iz $AJ = (t+1)J$ slijedi da je
$$AJ = JA$$
odnosno
$$A^{-1}JA = J.$$
Tada imamo
$$A^T A = A^{-1}(AA^T)A = A^{-1}(tI+J)A = tI + A^{-1}JA = tI + J = AA^T.$$
□

Sljedeći teorem pokazuje da ako je umnožak dviju $(0,1)$-matrica, matrica kojoj su dijagonalni elementi jednaki nula, a ostali elementi su jedinice, tada te dvije matrice komutiraju. Da bismo dokazali taj teorem koristimo pomoćni rezultat.

Lema 1.3.3. *Za* $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *i* $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ *vrijedi*
$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Dokaz. Vrijedi
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix},$$
pa je prema Binet–Cauchyjevom teoremu
$$\det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Blok-matrica $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ je gornjotrokutasta, pa je njezina determinanta jednaka umnošku elemenata na glavnoj dijagonali, dakle $\det\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1$. Razvojem blok-matrice $\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$ po elementima zadnjeg stupca uzastopce n puta dobije se
$$\det\begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m + AB).$$

Prema [4, teorem 2.2] vrijedi

$$\det\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + BA).$$

Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Teorem 1.3.4. *Neka su A i B kvadratne* $(0,1)$*-matrice reda n, tako da je*

$$AB = J_n - I_n.$$

Tada je

$$AB = BA.$$

Dokaz. Neka su a_i i b_j stupci od A i B^T redom, tj.

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad B^T = (b_1, \dots, b_n).$$

Tada je

$$0 = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} b_i^T a_i \ .$$

Dakle, obzirom da A i B imaju nenegativne elemente, $b_i^T a_i = 0$ za svaki i. Iz $AB = J_n - I_n$ imamo

$$I_n = J_n - AB \quad \text{ili} \quad I_n = J_n - \sum_{s=1}^{n} a_s b_s^T \ .$$

Tada je

$$I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T = J_n - \sum_{s \neq i,j} a_s b_s^T \ , \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Primjetimo da desna strana gornje jednakosti sadrži $n-1$ matrica, od kojih je svaka ranga najviše jedan. Matematičkom indukcijom po broju matrica lako se pokaže da se zbrajanjem tih matrica dobije matrica čiji je rang najviše $n-1$. Odatle slijedi

$$\mathrm{r}(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) \leqslant n-1, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

pa je matrica $I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T$ singularna, odnosno $\det(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) = 0$ za $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$. Nadalje, vrijedi

$$a_i b_i^T + a_j b_j^T = (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

a prema lemi1.3.3 je

$$\det(I_n + (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T) = \det(I_2 + (b_i, b_j)^T (a_i, a_j)), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Stoga za $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, imamo

$$\begin{aligned}
0 &= \det(I_n + a_i b_i^T + a_j b_j^T) \\
&= \det\left(I_n + (a_i, a_j)(b_i, b_j)^T\right) \\
&= \det\left(I_2 + (b_i, b_j)^T (a_i, a_j)\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_i^T a_j \\ b_j^T a_i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= 1 - (b_i^T a_j)(b_j^T a_i).
\end{aligned}$$

Prema tome, $b_i^T a_j = 1$ za svaki par i i j, $i \neq j$, jer su A i B $(0, 1)$-matrice. Slijedi, primjenjujući $b_i^T a_i = 0$, da je

$$BA = (b_i^T a_j) = J_n - I_n = AB.$$

□

1.4 Nejednakosti za normalne matrice

U ovom dijelu razmatrat ćemo nejednakosti koje uključuju elemente dane kvadratne matrice, te njezine svojstvene i singularne vrijednosti. Slučajevi jednakosti u promatranim nejednakostima rezultirat će normalnošću dane matrice. Također, prezentirat ćemo nekoliko rezultata o normalnim matričnim perturbacijama.

Teorem 1.4.1 (Schurova nejednakost)**.** *Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sa svojstvenim vrijendostima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 .$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je A normalna matrica.

Dokaz. Neka je $A = U^* T U$ Schurova dekompozicija od A, gdje je U unitarna, a T gornjotrokutasta matrica. Tada je $A^* A = U^* T^* T U$, pa slijedi $\mathrm{tr}(A^* A) = \mathrm{tr}(T^* T)$. Kako je

$$\mathrm{tr}(A^* A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2, \quad \mathrm{tr}(T^* T) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2,$$

to je

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 - \sum_{i<j} |t_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

čime je Schurova nejednakost dokazana. Ako pretpostavimo da je $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, tada je $t_{ij} = 0$ za $i < j$, tj. T je dijagonalna. Dakle, matrica A je unitarno dijagonalizibilna, odnosno normalna. Obrat je očit. □

Teorem 1.4.2. *Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sa singularnim vrijednostima $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Tada je*

$$|\operatorname{tr} A| \leqslant \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = uP$, za neki $P \geqslant 0$ i neki $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$. Stoga je A normalna (ali obrat ne vrijedi).

Dokaz. Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, postoje unitarne matrice $U = (u_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ i $V = (v_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ te dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, gdje je $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, $r = \mathrm{r}(A)$, tako da je $A = UDV$. Imamo

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr} A| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\sigma_j v_{ji}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_{ji}\sigma_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_{ji}\right|\sigma_j \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |u_{ij} v_{ji}|\right)\sigma_j \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\sigma_j.
\end{aligned}$$

Pritom je posljednja nejednakost u gornjem nizu posljedica Cauchy–Schwarzove nejednakosti za $(|u_{1j}|, \ldots, |u_{nj}|)$ i $(|v_{j1}|, \ldots, |v_{jn}|)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}v_{ji}| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{n} |v_{ji}|^2} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ako je $\operatorname{tr} A = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$, tada je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}v_{ji}\right| = \sum_{i=1}^{n} |u_{ij}v_{ji}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{n} |v_{ji}|^2} = 1, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Zapisat ćemo $\sum_{i=1}^{n} u_{ij}v_{ji}$ kao skalarni produkt (u_j, v_j^*) gdje smo s u_j označili j-ti stupac od U, a s v_j j-ti redak od V za $j = 1, \dots, n$. Budući da se tada postiže jednakost u Chauchy–Schwarzovoj nejednakosti, tj. vrijedi

$$|(u_j, v_j^*) = \|u_j\| \, \|v_j^*\|, \quad j = 1, \dots, r,$$

slijedi da za $j = 1, \dots, r$ postoje $c_j \in \mathbb{C}$ takvi da je $u_j = c_j v_j^*$ gdje je $|c_j| = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr} A| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_{ji} \sigma_j \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{r} (u_j, v_j^*) \sigma_j \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{r} (c_j v_j^*, v_j^*) \sigma_j \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{r} c_j (v_j^*, v_j^*) \sigma_j \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{r} c_j \sigma_j \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r} |c_j| \sigma_j \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sigma_j.
\end{aligned}$$

pa zbog $|\operatorname{tr} A| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$ slijedi $\left| \sum_{j=1}^{r} c_j \sigma_j \right| = \sum_{j=1}^{r} |c_j| \sigma_j$. Zaključujemo da postoji $\varphi \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $c_j = |c_j| e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, $j = 1, \dots, r$. Stoga za $j = 1, \dots, r$ vrijedi $u_j = u v_j^*$, gdje je $u = e^{i\varphi}$. Prema tome, $U = uV^*$ pa je $A = UDV = uV^*DV = uP$, pri čemu je $P = V^*DV$ pozitivno semidefinitna matrica.

Obratno, pretpostavimo da je $A = uP$ za neku pozitivno semidefinitnu matricu P i $u \in \mathbb{C}$ za koji je $|u| = 1$. Tada je $|A|^2 = A^*A = |u|^2 P^*P = P^2$, odakle slijedi $|A| = P$. Stoga su singularne (svojstvene) vrijednosti matrice P jednake $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Prema tome,

$$|\operatorname{tr} A| = |\operatorname{tr}(uP)| = |u \operatorname{tr} P| = |u| |\operatorname{tr} P| = \operatorname{tr} P = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n.$$

$\square$

Ako su zadane dvije kvadratne matrice, postavlja se pitanje koliko ”blizu” su te matrice u terminima njihovih svojstvenih vrijednosti. Promjenimo li elemente neke matrice za male vrijednosti, kako će se promijeniti njezine svojstvene vrijednosti? U daljnjem ćemo prezentirati tri rezultata o normalnim matričnim perturbacijama. Za normalne matrice A i B, prvi rezultat uspoređuje $|A| - |B|$ i $A - B$ u terminima Frobeniusove matrične norme. Drugi rezultat ocjenjuje koliko su blizu svojstvene vrijednosti dviju normalnih matrica A i B u terminima Frobeniusove matrične norme od $A - B$, dok je treći rezultat istog tipa, pri čemu se za samo jednu od promatranih matrica A i B zahtjeva da bude normalna.

Prije nego što prezentiramo rezultate o normalnim matričnim perturbacijama, uvest ćemo pojam Frobeniusove norme. Vektorski prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je unitarni prostor uz skalarni produkt definiran sa

$$(A, B) = \mathrm{tr}(B^*A), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Tim skalarnim produktom je inducirana norma $\|\cdot\|_F$ na prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Ovu normu zovemo *Frobeniusovom normom*, *Hilbert–Schmidtovom normom* ili *Schurovom normom*. Frobeniusova norma je matrična norma koja ima svojstvo *konzistentnosti*, tj. za svake dvije matrice $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Ako je A kvadratna matrica reda n sa singularnim vrijednostima $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, tada je očito

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2},$$

tj. $\|A\|_F$ je jedinstveno određena singularnim vrijednostima matrice A. Posljedično, Frobeniusova norma je *unitarno invarijantna*, tj. za svake dvije unitarne matrice $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi $\|UAV\|_F = \|A\|_F$. Također, vrijedi $\|A^*\|_F = \|A\|_F$.

Teorem 1.4.3 (Kittaneh)**.** *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normalne matrice, tada je*

$$\|\,|A| - |B|\,\|_F \leqslant \|\,A - B\,\|_F.$$

Dokaz. Matrice A i B su unitarno dijagonalizabilne, tj. $A = U^*\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U$ i $B = V^*\mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_n)V$, za neke unitarne matrice $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je

$$|A| = U^*\mathrm{diag}\,(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)U, \quad |B| = V^*\mathrm{diag}\,(|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|)V.$$

Zbog jednostavnosti, neka je

$$C = \mathrm{diag}\,(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|), \quad D = \mathrm{diag}\,(|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|), \quad W = (w_{ij}) = UV^*.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\|\,|A|-|B|\,\|_F &= \|\,U^*CU - V^*DV\,\|_2 \\
&= \|\,CUV^* - UV^*D\,\|_F \\
&= \|\,CW - WD\,\|_F \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} (\,|\lambda_i| - |\mu_j|\,)^2\,|w_{ij}|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\,\lambda_i - \mu_j\,|^2\,|w_{ij}|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\,(\lambda_i - \mu_j\,)\,w_{ij}|^2\right)^{1/2} \\
&= \|\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)W - W\,\mathrm{diag}\,(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,\|_F \\
&= \|\,A - B\,\|_F.
\end{aligned}$$

□

Korolar 1.4.4. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Tada je*

$$\|\,|A|-|B|\,\|_F \leqslant \sqrt{2}\,\|\,A-B\,\|_F.$$

Dokaz. Neka je $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ i $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$. Tada su $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ hermitske (normalne) matrice. Primjenjujući teorem 1.4.3 na $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, imamo

$$\|\,|\tilde{A}|-|\tilde{B}|\,\|_F^2 = \|\,|A|-|B|\,\|_F^2 + \|\,|A^*|-|B^*|\,\|_F^2 \leqslant 2\|\,A-B\,\|_F^2,$$

iz čega slijedi tražena nejednakost. □

Da bismo dokazali sljedeći rezultat o normalnim matričnim peturbacijama, potrebno je najprije uvesti neke pojmove.

Hadamardov umnožak ili *Schurov umnožak* dviju matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ istoga tipa, u oznaci $A \circ B$, definira se kao

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij}),$$

tj. $A \circ B$ je matrica istoga tipa kao i matrice A i B, čiji se element na mjestu (i, j) dobije umnoškom elemenata matrica A i B na mjestu (i, j).

Kvadratna matrica A je *permutacijska* ako svaki njezin redak i svaki stupac sadrži točno jednu jedinicu, dok su svi ostale elementi nule.

Kvadratna matrica A je *dvostruko stohastička* ako su svi njezini elementi nenegativni te ako je zbroj elemenata svakog retka matrice A jednak 1 i ujedno zbroj elemenata svakog stupca matrice A iznosi 1. Ekvivalentno, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je dvostruko stohastička matrica ako je $e^T A = e^T$ i $Ae = e$, gdje je $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Jasno je da je svaka permutacijska matrica dvostruko stohastička, te da se množenjem dvostruko stohastičkih matrica dobije dvostruko stohastička matrica. Prema Birkhoffovom teoremu (v. [4, teorem 5.21]), $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je dvostruko stohastička matrica ako i samo ako je A konveksna kombinacija permutacijskih matrica, tj. ako i samo ako postoje permutacijske matrice $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je

$$A = t_1 P_1 + \cdots + t_m P_m$$

za neke nenegativne cijele brojeve $t_1, \dots, t_m$ takve da je $t_1 + \cdots + t_m = 1$.

Teorem 1.4.5 (Hoffman–Wielandt)**.** *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normalne matrice sa svojstvenim vrijendostima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, odnosno $\mu_1, \dots, \mu_n$, redom. Tada postoji permutacija p skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takva da je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\, \lambda_i - \mu_{p(i)}\,|^2 \right)^{1/2} \leqslant \|\, A - B\,\|_F.$$

Dokaz. Neka su $A = U^* \mathrm{diag}\,(\,\lambda_1, \dots, \lambda_n\,) U$ i $B = V^* \mathrm{diag}\,(\,\mu_1, \dots, \mu_n\,) V$ spektralne dekompozicije matrica A i B redom, gdje su U i V unitarne matrice. Radi jednostavnosti, označit ćemo $E = \mathrm{diag}\,(\,\lambda_1, \dots, \lambda_n\,)$, $F = \mathrm{diag}\,(\,\mu_1, \dots, \mu_n\,)$ i $W = (w_{ij}) = UV^*$. Tada je

$$\begin{aligned} \|\, A - B\,\|_F^2 &= \|\, U^*(EUV^* - UV^*F)\, V\|_F^2 \\ &= \|\, EW - WF\|_F^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} |\, \lambda_i - \lambda_j\,|^2\, |w_{ij}|^2 \ . \end{aligned}$$

Neka je $G = (\,|\, \lambda_i - \mu_j\,|^2)$ i $S = (\,|w_{ij}|^2\,)$. Tada je

$$\|\, A - B\,\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\, \lambda_i - \mu_j\,|^2\, |w_{ij}|^2 \ = e^T(\, G \circ S\,)e,$$

gdje je $G \circ S$ Hadamardov produkt matrica G i A, a e je vektor prostora $\mathbb{C}^n$ čije su sve komponente 1. Primjetimo da je S dvostruko stohastička matrica. Prema Birkhoffovu teoremu ([4, teorem 5.21]), S je konveksna kombinacija permutacijskih matrica: $S = \sum_{i=1}^{m} t_i P_i$, gdje su svi t_i nenegativni cijeli brojevi čiji zbroj iznosi 1, a P_i su permutacijske matrice. Neka je $k \in \{1, \dots, m\}$ takav da je

$$e^T(\, G \circ P_k\,)e = \min\left\{ e^T(\, G \circ P_1\,)e, \dots, e^T(\, G \circ P_m\,)e \right\}.$$

Uočimo da P_k možemo smatrati permutacijom p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\| A - B \|_F^2 &= e^T(G \circ S)e \\
&= \sum_{i=1}^{m} t_i e^T(G \circ P_i)e \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{m} t_i e^T(G \circ P_k)e \\
&= e^T(G \circ P_k)e \\
&= \sum_{i=1}^{n} | \lambda_i - \mu_{p(i)} |^2 \ .
\end{aligned}$$

□

Hoffman–Wielandtov teorem zahtjeva da su obje matrice normalne. Nadalje, prezentirat ćemo teorem u kojemu je jedna matrica normalna, a druga proizvoljna. Za to su nam potrebne pomoćne leme. Pisat ćemo, ako je A kvadratna matrica, $A = U_A + D_A + L_A$, gdje su U_A, D_A i L_A redom gornji, dijagonalni i donji dio od A. Npr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 1.4.6. *Neka je $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ normalna matrica, gdje su B i E kvadratne matrice ne nužno istog reda. Tada je $\|C\|_F = \|D\|_F$.*

Dokaz. Neka je B matrica reda p, a E matrica reda r, gdje je $n = p + r$ red blok-matrice A. Ako je $A = (a_{ij})$, onda se izjednačavanjem dijagonalnih elemenata matrica A^*A i AA^* dobije

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

odakle slijedi

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2. \tag{1.1}$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} |a_{ki}|^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=p+1}^{n} |a_{ki}|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=p+1}^{n} |a_{ik}|^2,$$

te vrijedi

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}|a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}|^2,$$

to iz (1.1) slijedi

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ik}|^2,$$

odnosno $\|C\|_F = \|D\|_F$. □

Lema 1.4.7. *Ako je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normalna matrica, onda je*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)|a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(i-j)|a_{ij}|^2.$$

Dokaz. Uočimo da se tvrdnja leme 1.1 može iskazati u sljedećem obliku:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ki}|^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ik}|^2, \quad p = 1, \dots, n.$$

Odavde je

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ki}|^2 = \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ik}|^2.$$

Lako se provjeri da je

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ki}|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(i-j)|a_{ij}|^2, \quad \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{n}|a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)|a_{ij}|^2,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Lema 1.4.8. *Neka je $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normalna matrica. Tada je*

$$\| U_A \|_F \leqslant \sqrt{n-1}\, \| L_A \|_F, \quad \| L_A \|_F \leqslant \sqrt{n-1}\, \| U_A \|_F.$$

Dokaz. Uz primjenu leme 1.4.7, računom imamo

$$\begin{aligned}
\| U_A \|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\, |a_{ij}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (i-j)\, |a_{ij}|^2 \\
&\leqslant (n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |a_{ij}|^2 \\
&= (n-1)\, \| L_A \|_F^2 .
\end{aligned}$$

Druga nejednakost slijedi primjenom opisanog postupka na matricu A^T. □

Teorem 1.4.9 (Sun). *Neka je $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ normalna matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Tada postoji permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\, (\lambda_i - \mu_{p(i)}\,) \,|^2 \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n}\, \| A - B \|_F .$$

Dokaz. Prema Schurovom teoremu, postoji unitarna matrica U takva da je $U^* B U$ gornjotrokutasta matrica. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je B gornjotrokutasta matrica. Tada je $D_B = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Neka je $C = A - B$. Tada je

$$A - D_B = C + U_B, \quad U_B = U_A - U_C, \quad L_A = L_C .$$

Obzirom da su A i D_B normalne matrice, prema Hoffman–Wielandovom teoremu imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\, (\lambda_i - \mu_{p(i)}\,) \,|^2 \right)^{1/2} \leqslant \| A - D_B \|_F = \| C + U_B \|_F$$

za neku permutaciju p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Primjenom leme 1.4.8 imamo

$$\begin{aligned}
\| C + U_B \|_F^2 &= \| C + U_A - U_C \|_F^2 \\
&= \| L_C + D_C + U_A \|_F^2 \\
&= \| L_C \|_F^2 + \| D_C \|_F^2 + \| U_A \|_F^2 \\
&\leqslant \| L_C \|_F^2 + \| D_C \|_F^2 + (n-1)\, \| L_A \|_F^2 \\
&= \| L_C \|_F^2 + \| D_C \|_F^2 + (n-1)\, \| L_C \|_F^2 \\
&= n \| L_C \|_F^2 + \| D_C \|_F^2 \\
&\leqslant n\, \| C \|_F^2 \\
&= n \| A - B \|_F^2
\end{aligned}$$

pa je $\| C + U_B \|_F \leqslant \sqrt{n} \| A - B \|_F$. Time je teorem dokazan. $\square$

Poglavlje 2

Unitarne matrice

Jedna od podklasa normalnih matrica su unitarne matrice kojima ćemo se baviti u ovom dijelu. Navest ćemo osnovna svojstva, proučit ćemo strukturu realnih ortogonalnih matrica s obzirom na transformacije sličnosti, povezati kontrakcije s unitarnim matricama, te prezentirati nejednakost s tragom za unitarne matrice.

2.1 Svojstva unitarnih matrica

Unitarna matrica U je kvadratna kompleksna matrica koja zadovoljava $U^*U = UU^* = I$. Primijetimo da je $U^* = U^{-1}$ i $|\det U| = 1$ za svaku unitarnu maticu U. Kompleksnu (realnu) matricu A nazivamo kompleksnom (realnom) ortogonalnom matricom ako za nju vrijedi $A^TA = AA^T = I$. Općenito, za kompleksne matrice se pojmovi unitarne matrice i ortogonalne matrice razlikuju, dok se u slučaju realnih matrica pojmovi unitarne i ortogonalne matrice podudaraju.

Teorem 2.1.1. *Neka je $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

1.) $\| Ux \| = \| x \|, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$.

2.) $|\lambda| = 1$ *za svaku svojstvenu vrijednost λ od U.*

3.) $U = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^*$, *gdje je V unitarna matrica i svaki $|\lambda_i| = 1$.*

4.) *Vektori stupci matrice U čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}^n$.*

Dokaz. (1) Zapišemo li normu preko skalarnog produkta, dobivamo

$$\| Ux \| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, U^*Ux)} = \sqrt{(x, x)} = \| x \|.$$

(2) Neka je x jedinični svojstveni vektor od U kojem odgovara svojstvena vrijednost λ. Tada je

$$|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ux\| = \|x\| = 1.$$

(3) slijedi iz teorema o spektralnoj dekompoziciji (teorem 1.2.1, svojstvo (2)).

(4) Pretpostavimo da je u_i i-ti stupac od U, $i = 1, \ldots, n$. Tada se $U^*U = I$ ekvivalentno zapisuje kao

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} (u_1 \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

iz čega vidimo da je $(u_i, u_j) = u_j^* u_i = 1$ ako je $i = j$, inače je 0. □

U prethodnom teoremu smo vidjeli da su apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti unitarne matrice jednake 1. Obrat općenito ne vrijedi. Sljedeći teorem daje dodatni uvjet uz koji imamo obrat ove tvrdnje.

Teorem 2.1.2. *Neka je $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ matrica za koju su apsolutne vrijednosti njezinih svojstvenih vrijednosti jednake* 1. *Tada je A unitarna matrica ako za svaki $x \in \mathbb{C}^n$ vrijedi*

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|.$$

Dokaz. Dat ćemo dva različita dokaza ovog teorema.

Dokaz 1. Budući da je determinanta kvadratne matrice jednaka umnošku njezinih svojstvenih vrijednosti, prema pretpostavci teorema je $|\det(A)| = 1$. Neka su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ singularne vrijednosti matrice A. Maksimalnu singularnu vrijednost od A označimo sa $\sigma_{\max}$. Dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\|Ax\| \leqslant 1, \quad \text{za svaki jedinični vektor } x \in \mathbb{C}^n,$$

tj. $\|A\| \leqslant 1$, iz čega slijedi da je $\rho(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2 \leqslant 1$ pa je $\sigma_{\max} \leqslant 1$. S druge strane, $|\det A|^2 = \det(A^*A) = \det(|A|^2) = \left(\det|A|\right)^2$ implicira

$$\sigma_1 \cdots \sigma_n = \det|A| = |\det A| = 1,$$

što zajedno sa $\sigma_{\max} \leqslant 1$ daje $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$. Dakle, postoji unitarna matrica U tako da je

$$A^*A = |A|^2 = U^* \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2) U = U^*U = I,$$

te je A unitarna matrica.

Dokaz 2. Neka je $A = U^*DU$ Schurova dekompozicija od A, gdje je U unitarna matrica, a D gornjotrokutasta matrica:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

te $|\lambda_i| = \cdots = |\lambda_n| = 1$ i $t_{ij} \in \mathbb{C}$ za $i, j = 1, \ldots, n$. Uzmimo $x = U^* e_n^{(n)} = U^*(0, \ldots, 0, 1)^T$. Tada je $\| x \| = 1$. Imamo

$$\| Ax \| = \| U^*DUU^*e_n^{(n)} \| = \| De_n^{(n)} \| = (|t_{1n}|^2 + \cdots + |t_{n-1,n}|^2 + |\lambda_n|^2)^{1/2}.$$

Iz uvjeta $\| Ax \| \leqslant 1$ za jedinični vektor x i $|\lambda_n| = 1$ slijedi da je $t_{in} = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Postupak zatim ponovimo redom za vektore $e_{n-1}^{(n)}, \ldots, e_1^{(n)}$. Zaključujemo da je D dijagonalna matrica s elementima λ_i na dijagonali. Dakle, A je unitarna matrica, jer je

$$A^*A = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU = U^*U = I.$$

□

Sljedeći rezultat govori o singularnim vrijednostima glavnih podmatrica unitarne matrice.

Teorem 2.1.3. *Neka je U unitarna matrica prikazana kao blok-matrica*

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

gdje je A kvadratna matrica reda m i D kvadratna matrica reda n. Ako je $m = n$, tada A i D imaju iste singularne vrijednosti. Ako je $m < n$ i ako su $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ singularne vrijednosti matrice A, tada singularne vrijednosti matrice D su $\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n-m}$. Također, $|\det A| = |\det D|$.

Dokaz. Budući da je U unitarna, iz $U^*U = UU^* = I$ imamo da je

$$A^*A + C^*C = I_m, \quad CC^* + DD^* = I_n,$$

odakle slijedi da je

$$A^*A = I_m - C^*C, \quad DD^* = I_n - CC^*.$$

Obzirom da CC^* i C^*C imaju iste ne-nul svojstvene vrijednosti brojeći njihove kratnosti ([4, teorem 2.8]), onda matrice $I_n - CC^*$ i $I_m - C^*C$ imaju iste svojstvene vrijednosti osim

$n-m$ jedinica, to jest A^*A i DD^* imaju iste svojstvene vrijednosti osim $n-m$ jedinica. Kako je osim toga $\sigma(D^*D) = \sigma(DD^*)$, zaključujemo da A^*A i D^*D imaju iste svojstvene vrijednosti osim $n-m$ jedinica. Dakle, ako je $m = n$, tada A i D imaju iste singularne vrijednosti, te ako je $m < n$ i A ima singularne vrijednosti $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, tada singularne vrijednosti od D su $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ i $n-m$ jedinica. Posebno, vrijedi $\det|A| = \det|D|$, jer je determinanta matrice jednaka umnošku njezinih svojstvenih vrijednosti. Kako je

$$|\det T|^2 = |(\det T)^2| = |\det T^* \det T| = |\det(T^*T)| = \det(T^*T) = \det|T|^2 = (\det|T|)^2$$

za svaku kvadratnu matricu T, to iz $\det|A| = \det|D|$, slijedi $|\det A| = |\det D|$, čime je teorem dokazan. □

Prema prethodnom teoremu, apsolutne vrijednosti determinanti komplementarnih glavnih podmatrica unitarne matrice su jednake. Ako je $m = 1$ u teoremu 2.1.3, tada imamo sljedeći rezultat koji daje vezu između determinante unitarne matrice i njenih glavnih podmatrica.

Propozicija 2.1.4. *Neka je* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *unitarna matrica prikazana kao blok-matrica*

$$U = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\det D = \overline{a} \det U$.

Dokaz. Iz $UU^* = I$ slijedi $aC^* + BD^* = 0$ i $CC^* + DD^* = I_{n-1}$. Odavde je

$$U \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aC^* + BD^* \\ C & CC^* + DD^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ C & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

pa se računanjem determinanti dobije

$$\det U \det D^* = \det U \det \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} = \det\left(U \begin{pmatrix} 1 & C^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ C & I_{n-1} \end{pmatrix} = a,$$

odnosno $\det U\, \overline{\det D} = a$. Stoga slijedi $\overline{\det U} \det D = \overline{a}$ pa je

$$\det D = |\det U|^2 \det D = \det U\, \overline{\det U} \det D = \overline{a} \det U.$$

□

2.2 Realne ortogonalne matrice

U ovom dijelu bavit ćemo se realnim ortogonalnim matricama, tj. matricama za koje vrijedi $AA^T = A^T A = I$. Raspravljat ćemo o njihovoj strukturi s obzirom na transformaciju sličnosti te dati dovoljne uvjete uz koje su realne ortogonalne matrice involucije.

Krenimo s realnim ortogonalnim matricama reda 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Identiteti $AA^T = A^T A = I$ impliciraju nekoliko jednadžbi sa a, b, c, d, jedna od njih je $a^2 + b^2 = 1$. Budući da je a realan broj između -1 i 1, možemo staviti $a = \cos\theta$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$ te dobiti b, c i d ovisno o θ. Dakle, postoje samo dva tipa realnih ortogonalnih matrica reda 2. To su

$$I_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

gdje tip I_θ nazivamo *rotacija* (u xy-ravnini) oko 0 za kut θ suprotno kazaljci na satu, a tip R_θ nazivamo *zrcaljenje* točaka ravnine s obzirom na pravac $y = kx$, gdje je $\frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg} k$. Uočimo da vrijedi

$$R_\theta^2 = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_\theta = R_{-\theta}, \quad I_{-\theta} R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pokazat ćemo da je realna ortogonalna matrica proizvoljnog reda ortogonalno slična direktnoj sumi realnih ortogonalnih matrica reda 1 ili 2. Za dokaz tog rezultata koristimo sljedeći pomoćni rezultat koji se lako provjeri (v. [4, teorem 1.10]): *Za bilo koja tri nenul vektora x, y, z realnog unitarnog prostora V vrijedi $\angle_{x,z} \leqslant \angle_{x,y} + \angle_{y,z}$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je $y = tx + sz$ za neke nenegativne realne brojeve t, s.* (Oznaku $\angle$ koristimo za kut između vektora.)

Teorem 2.2.1. *Svaka realna ortogonalna matrica je realno ortogonalno slična direktnoj sumi realnih ortogonalnih matrica reda najviše 2.*

Dokaz. Neka je A realna ortogonalna matrica reda n. Primjenimo matematičku indukciju po n. Za $n = 1$ ili $n = 2$ je očito. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve realne ortogonalne matrice matrice do reda $n - 1$. Pretpostavimo da je $n > 2$.

Ako A ima realnu svojstvenu vrijednost λ s realnim jediničnim svojstvenim vektorom x, tada

$$Ax = \lambda x, \ \ x \neq 0 \ \Rightarrow \ 1 = (A^T Ax, x) = (A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x) = \lambda^2.$$

Dakle, $\lambda = \pm 1$. Uzmimo najprije da je $\lambda = 1$. Neka je P realna ortogonalna matrica čiji je prvi stupac realni jedinični svojstveni vektor x. Tada je $P^T AP$ matrica koja u prvom stupcu ima na $(1, 1)$-mjestu 1, a na ostalim mjestima 0. Pišemo:

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\lambda = -1$, tada se dobije

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalnost realne matrice A povlači da je $u = 0$ i A_1 realna ortogonalna matrica. Dakle, vrijedi

$$P^T AP = 1 \oplus A_1 \quad \text{ili} \quad P^T AP = -1 \oplus A_1$$

za neku realnu ortogonalnu matricu A_1 reda $n - 1$. Tvrdnja teorema slijedi primjenom pretpostavke indukcije na matricu A_1.

Pretpostavimo da A nema realne svojstvene vrijednosti. Tada za svaki ne-nul vektor $x \in \mathbb{R}^n$, vektori x i Ax ne mogu biti linearno zavisni. Sjetimo se da zbog ortogonalnosti od A, za kut između dva vektora x i y u oznaci $\angle_{x,y}$ vrijedi $\angle_{x,y} = \angle_{Ax,Ay}$. Definirajmo funkciju kuta

$$f(x) = \angle_{x,Ax} = \cos^{-1} \frac{(x, Ax)}{\|x\| \, \|Ax\|}.$$

Tada je f neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Neka je $\theta_0 = \angle_{x_0,Ax_0}$ minimum od f na skupu S. Neka je y_0 jedinični vektor u $[\{x_0, Ax_0\}]$ tako da je $\angle_{x_0,y_0} = \angle_{y_0,Ax_0} = \theta_0/2$. Tada imamo

$$\theta_0 \leqslant \angle_{y_0,Ay_0} \leqslant \angle_{y_0,Ax_0} + \angle_{Ax_0,Ay_0} = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} = \theta_0$$

i stoga $Ax_0 \in [\{y_0, Ay_0\}]$, pri čemu je $Ax_0 = ty_0 + sAy_0$ za neke nenegativne realne brojeve t i s. Kako je osim toga $y_0 = px_0 + rAx_0$ za neke nenegativne realne brojeve p i r, imamo $y_0 = px_0 + rAx_0 = px_0 + rty_0 + rsAy_0$, tj. $rsAy_0 = (1 - rt)y_0 - px_0$. Kada bi bilo $r = 0$, imali bismo $y_0 = px_0$ pa bi slijedilo $\theta_0/2 = \angle_{x_0,y_0} = 0$. No, tada bismo imali $0 = \theta_0 = \angle_{x_0,Ax_0}$, što znamo da ne vrijedi budući da po pretpostavci vektori x i Ax nisu linearno zavisni. Dakle, $r \neq 0$. Također, ako bi bilo $s = 0$, imali bismo $Ax_0 = ty_0$, odakle bi slijedilo $\theta_0/2 = \angle_{y_0,Ax_0} = 0$ što znamo da ne vrijedi. Prema tome, $s \neq 0$. Stoga je

$$Ay_0 = \frac{1}{rs}((1 - rt)y_0 - px_0)) \in [\{x_0, y_0\}].$$

Kako je sada i $Ax_0 \in [\{y_0, Ay_0\}] \subseteq [\{x_0, y_0\}]$, slijedi $[\{x_0, y_0\}]$ je invarijantan za A. Stoga postoji realna ortogonalna matrica R reda n tako da je

$$R^T AR = \begin{pmatrix} T_0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

gdje je T_0 realna matrica reda 2, a B je realna matrica reda $n - 2$. Obzirom da je A ortogonalna, to su ortogonalne i matrice B i T_0 te vrijedi $C = 0$. Dakle,

$$R^T AR = T_0 \oplus B,$$

za neku realnu ortogonalnu matricu T_0 reda 2 i neku realnu ortogonalnu matricu B reda $n - 2$. Tvrdnju teorema u ovom slučaju dobijemo primjenom prepostavke matematičke indukcije na matricu B. □

Sljedeći teorem kaže da matrica s izvjesnim komutativnim svojstvom nužno je involutivna. Za dokaz nam treba sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 2.2.2. *Ako matrice $F \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ i $G \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti, tada matrična jednadžba $FX - XG = 0$ ima jedinstveno rješenje $X = 0$.*

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ svojstvene vrijednosti od F. Iz $FX = XG$ slijedi da za svaki pozitivan broj k vrijedi $F^k X = XG^k$ pa je

$$f(F)X = Xf(G)$$

za svaki polinom f. Neka je $f = k_F$ karakteristični polinom od F, tj. $f(\lambda) = k_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Tada je $f(F) = 0$ te $Xf(G) = 0$. Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji, $G = U^* TU$ za neku gornjotrokutastu matricu T i unitarnu matricu U. Tada je

$$f(G) = U^* f(T)U = U^*(T - \lambda_1 I_n) \cdots (T - \lambda_m I_n)U.$$

Međutim, kako G i F nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti, to niti T i F nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti pa su matrice $T - \lambda_i I_n$,, $i = 1, \ldots, m$, regularne. Stoga je $f(G)$ regularna pa iz $Xf(G) = 0$ slijedi $X = 0$. □

Teorem 2.2.3. *Neka su A i U realne ortogonalne matrice istog reda. Ako su sve svojstvene vrijednosti matrice U međusobno različite i ako je*

$$UA = AU^T,$$

tada je A involutivna odnosno $A^2 = I$.

Dokaz. Prema teoremu 2.2.1, neka je P realna ortogonalna matrica takva da je $P^{-1}UP$ direktna suma k realnih ortogonalnih matrica V_i reda 1 ili 2. Identitet $UA = AU^T$ daje

$$(P^{-1}UP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}UP)^T. \tag{2.1}$$

Zapišimo $P^{-1}AP$ kao blok-matricu $P^{-1}AP = (B_{ij})$, gdje se rastav na blokove podudara s rastavom od $P^{-1}UP = \oplus_{i=1}^k V_i$ na blokove. Dakle, B_{ij} je matrica čiji je broj redova (ili stupaca) jednak 1 ili 2 za $i, j = 1, \ldots, k$. Tada iz (2.1) slijedi

$$V_i B_{ij} = B_{ij} V_j^T, \quad i, j = 1, \ldots, k. \tag{2.2}$$

Budući da U, dakle i $P^{-1}UP$ nema višestrukih svojstvenih vrijednosti, pa time matrice V_i i V_j^T nemaju zajedničke svojstvene vrijednosti za $i \neq j$, prema lemi 2.2.2 imamo

$$B_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Stoga, $P^{-1}AP$ je direktna suma matrica reda najviše 2 :

$$P^{-1}AP = B_{11} \oplus \cdots \oplus B_{kk}.$$

Ortogonalnost od A povlači ortogonalnost matrice $P^{-1}AP$, pa je stoga i svaka matrica B_{ii} ortogonalna reda 1 ili ortogononalna reda 2, tj. oblika I_θ ili R_θ za neki $\theta \in \mathbb{R}$. Očito $B_{ii}^2 = I$ ako je $B_{ii} = \pm 1$ ili $B_{ii} = R_\theta$.

Pretpostavimo da je $B_{ii} = I_\theta$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$ i pokažimo da je i tada $B_{ii}^2 = I$. Najprije primjetimo da V_i nije rotacija. U suprotnom, ako je $V_i = I_\varphi$ a neki $\varphi \in \mathbb{R}$, imamo $V_i B_{ii} = B_{ii} V_i$ odakle prema (2.2) slijedi $B_{ii} V_i = B_{ii} V_i^T$, odnosno zbog regularnosti matrice B_{ii} imamo $V_i = V_i^T$ pa je $V_i^2 = I$. Dakle, $I_{2\varphi} = I_\varphi^2 = V_i^2 = I$ pa je $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$ što daje $V_i = \pm I$. No, to je kontradiktorno s činjenicom da V_i ima dvije različite svojstvene vrijednosti. Dakle, V_i je zrcaljenje, tj. $V_i = R_\varphi$ za neki $\varphi \in \mathbb{R}$. Tada je

$$V_i = R_{\varphi/2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\varphi/2}$$

pa prema (2.2)imamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} V_i B_{ii} R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} B_{ii} V_i^T R_{\varphi/2}^T = R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odavde, budući da je $R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T$ realna ortogonalna matrica, slijedi

$$R_{\varphi/2} B_{ii} R_{\varphi/2}^T = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

pa je $B_{ii}^2 = I$.

Dakle, pokazali smo da u svakom slučaju imamo $B_{ii}^2 = I$. Prema tome, $(P^{-1}AP)^2 = I$ i stoga je $A^2 = I$. □

2.3 Kontrakcije i unitarne matrice

Neka je M bilo koji skup, a

$$d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$$

preslikavanje sa svojstvima:

1.) $d(x, y) \geqslant 0\ , \quad \forall x, y \in M$ (pozitivna definitnost)

2.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (strogost)

3.) $d(x, y) = d(y, x)\ , \quad \forall x, y \in M$ (simetričnost)

4.) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)\ , \quad \forall x, y, z \in M$ (nejednakost trokuta).

Kažemo da je *d funkcija udaljenosti*, *metrička funkcija* ili *metrika* na skupu M, a par (M, d) nazivamo *metričkim prostorom*.

Neka je $f : M \mapsto M$ preslikavanje na metričkom prostoru (M, d). Kažemo da je f *kontrakcija* ako postoji konstanta c, $0 \leqslant c \leqslant 1$, takva da je

$$d(f(x), f(y)) \leqslant cd(x, y), \quad \forall\, x, y \in M. \tag{2.3}$$

Ako je $0 \leqslant c < 1$, kažemo da je f *stroga kontrakcija*.

Znamo da se svaka matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ može shvatiti kao preslikavanje (linearni operator) $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Tada nejednakost (2.3) zapisujemo kao

$$\| Ax - Ay \| \leqslant c \| x - y \|.$$

Pokazujemo da se svojstvo kontrakcije matrice A može opisati na sljedeće načine.

Teorem 2.3.1. *Za $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni.*

(i) *A je kontrakcija.*

(ii) $\| A \| \leqslant 1$.

(iii) $A^*A \leqslant I$.

(iv) $AA^* \leqslant I$.

Dokaz. (i)⇔(ii). Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{C}^n$, imamo

$$\| Ax - Ay \| = \| A(x - y) \| \leqslant \| A \| \| x - y \|.$$

Slijedi da je A kontrakcija ako je $\| A \| \leqslant 1$. Obrnuto, pretpostavimo da je A kontrakcija. Tada za neki c, $0 \leqslant c \leqslant 1$ i za svaki $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\| Ax - Ay \| \leqslant c \| x - y \|.$$

Posebno, za $y = 0$ imamo $\| Ax \| \leqslant c \| x \|$ za svaki $x \in \mathbb{C}^n$. Dakle, $\| A \| \leqslant c \leqslant 1$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Uočimo da je

$$\begin{aligned} A^*A \leqslant I \quad & \Leftrightarrow \quad (A^*Ax, x) \leqslant (Ix, x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ & \Leftrightarrow \quad (Ax, Ax) \leqslant (x, x) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ & \Leftrightarrow \quad \| Ax \|^2 \leqslant \| x \|^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ & \Leftrightarrow \quad \| Ax \| \leqslant \| x \| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ & \Leftrightarrow \quad \| A \| \leqslant 1. \end{aligned}$$

(ii)$\Leftrightarrow$(iv). Uočimo da je je $\| A \| = \| A^* \|$ te da iz (ii)$\Leftrightarrow$(iii) slijedi $\| A^* \| \leqslant 1$ ako i samo ako je $(A^*)^* A^* \leqslant I$, tj. $AA^* \leqslant I$. □

Primjetimo da su unitarne matrice kontrakcije, ali ne stroge. U ovom dijelu dokazat ćemo dva teorema koja povezuju unitarne matrice i kontrakcije. Pokazat ćemo da je matrica kontrakcija ako i samo ako može biti ugrađena u unitarnu matricu, odnosno ako i samo ako je (konačna) konveksna kombinacija unitarnih matrica.

Teorem 2.3.2. *Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je kontrakcija ako i samo ako je*

$$U = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

unitarna blok-matrica za neke matrice X, Y i Z odgovarajućeg tipa.

Dokaz. Ako je $U = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ unitarna matrica, tada

$$U^*U = I \;\Rightarrow\; A^*A + Y^*Y = I \;\Rightarrow\; A^*A \leqslant I.$$

Stoga je, prema teoremu 2.3.1, matrica A kontrakcija.

Obratno, pretpostavimo da je A kontrakcija. Prema teoremu 2.3.1, matrice $I - A^*A$ i $I - AA^*$ su pozitivno semidefinitne pa imaju pozitivne kvadratne korijene. Stoga je dobro definirana blok-matrica

$$U = \begin{pmatrix} A & (I - AA^*)^{1/2} \\ (I - A^*A)^{1/2} & -A^* \end{pmatrix}.$$

Pokažimo da je U unitarna matrica.

Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, $A = VDW$, gdje su V i W unitarne matrice, D pozitivno semidefinitna dijagonalna matrica kod koje dijagonalni elementi (singularne vrijednosti od A) nisu veći od 1. Tada je $I - AA^* = V(I - D^2)V^*$ i $I - A^*A = W^*(I - D^2)W$, odakle zbog pozitivne semidefinitnosti matrice $I - D^2$ imamo

$$(I - AA^*)^{1/2} = V(I - D^2)^{1/2}V^*, \quad (I - A^*A)^{1/2} = W^*(I - D^2)^{1/2}W.$$

D je dijagonalna matrica, stoga je

$$D(I - D^2)^{1/2} = (I - D^2)^{1/2}D.$$

Množenjem gornje jednakosti slijeva s V i zdesna s W imamo

$$VDWW^*(I - D^2)^{1/2}W = V(I - D^2)^{1/2}V^*VDW$$

ili ekvivalentno

$$A(I - A^*A)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2}A.$$

Jednostavnim računom dobivamo da je $U^*U = I$. □

Teorem 2.3.3. *Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je kontrakcija ako i samo ako je A konačna konveksna kombinacija unitarnih matrica.*

Dokaz. Ako je $A = t_1U_1 + \cdots + t_kU_k$ konveksna kombinacija unitarnih matrica $U_1, \ldots, U_k$, onda je

$$\| A \| = \| t_1U_1 + \cdots + t_kU_k \| \leqslant |t_1| \| U_1 \| + \cdots |t_k| \| U_k \| = t_1 + \cdots + t_k = 1,$$

budući da su $t_1, \ldots, t_k$ neneagativni cijeli brojevi čiji zbroj iznosi 1. Prema teoremu 2.3.1, matrica A je kontrakcija.

Obratno, neka je A kontrakcija. Pokazat ćemo da je A konačna konveksna kombinacija unitarnih matrica.

Prema teoremu 2.3.1, $\| A \| \leqslant 1$ pa su sve singularne vrijednosti $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ matrice A manje ili jednake 1. Neka je A matrica ranga r. Prema teoremu o dekompoziciji singularnih vrijednosti, $A = UDV$ gdje su U i V unitarne matrice, $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ gdje je $1 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$. Možemo pretpostaviti da je $r > 0$.

Ako je D konveksna kombinacija unitarnih matrica W_i, tada je A konveksna kombinacija unitarnih matrica UW_iV. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A dijagonalna matrica oblika $A = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$. Imamo

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \\
&= (1 - \sigma_1)0 + (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) \\
&\quad + (\sigma_2 - \sigma_3)\operatorname{diag}(1, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots \\
&\quad + (\sigma_{r-1} - \sigma_r)\operatorname{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{r-1}, 0, \ldots, 0) \\
&\quad + \sigma_r \operatorname{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Kako je $1 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, slijedi da je matrica A konačna konveksna kombinacija matrica $E_i = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ koje na prvih i mjesta na dijagonali imaju jedinice, a ostali elementi su nule, $0 \leqslant i \leqslant r$. Da bismo dokazali teorem, preostaje pokazati da je svaka matrica E_i konveksna kombinacija unitarnih matrica. Neka je

$$F_i = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{n-i}), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Uočimo da su tada $E_i + F_i$ dijagonalne matrice s elementima ± 1 na dijagonali, te su stoga unitarne. Vrijedi

$$E_i = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2}(E_i + F_i), \quad i = 1, \ldots, r,$$

tj. svaka matrica E_i je konveksna kombinacija unitarnih matrica I i $E_i + F_i$. □

2.4 Unitarna sličnost realnih matrica

U ovom dijelu pokazat ćemo da se svaka sličnost dviju realnih matrica koja je ostvarena pomoću kompleksne regularne matrice, može dobiti i pomoću realne regularne matrice. Tvrdnja također vrijedi i za unitarnu sličnost. Preciznije, ako su dvije realne matrice unitarno slične, tada su one realno ortogonalno slične.

Teorem 2.4.1. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Ako je $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ regularna matrica takva da je $P^{-1}AP = B$, tada postoji regularna matrica $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takva da je $Q^{-1}AQ = B$.*

Dokaz. Zapišimo $P = P_1 + P_2 i$, gdje su P_1 i P_2 realne kvadratne matrice. Ako je $P_2 = 0$, nemamo što dokazivati. Stoga pretpostavimo da je $P_2 \neq 0$. Zapisivanjem $P^{-1}AP = B$ kao $AP = PB$, imamo $AP_1 = P_1 B$ i $AP_2 = P_2 B$, jer su A i B realne matrice. Odavde slijedi da za svaki realni broj t,

$$A(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2)B.$$

Budući da je $\det(P_1 + tP_2) = 0$ za konačno mnogo realnih brojeva t, možemo odabrati realan broj t takav da je matrica $Q = P_1 + tP_2$ regularna. Dakle, sličnost matrica A i B ostvarena je preko realne regularne matrice Q. □

Da bismo pokazali da prethodni teorem vrijedi i za unitarnu sličnost, dokazat ćemo najprije sljedeći rezultat.

Teorem 2.4.2. *Neka je $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ simetrična unitarna matrica, tj. $U^T = U$ i $U^* = U^{-1}$. Tada postoji $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ za koju vrijedi:*

1.) $S^2 = U$.

2.) *S je unitarna.*

3.) *S je simetrična.*

4.) *S je komutativna sa svakom matricom koja je komutativna sa U.*

Drugim riječima, svaka simetrična unitarna matrica U ima simetrični unitarni kvadartni korijen koji komutira sa svakom matricom koja komutira s U.

Dokaz. Budući da je U unitarna matrica, ona je unitarna dijagonalizibilna (teorem 1.2.1). Neka je $U = VDV^*$, gdje je V unitarna i $D = a_1 I_1 \oplus \cdots \oplus a_k I_k$, gdje su $a_1, \ldots, a_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti matrice U i $I_1, \ldots, I_k$ jedinične matrice određenog reda, tj. red matrice I_j jednak je kratnosti svojstvene vrijednosti a_j. Budući da je U unitarna, slijedi da su apsolutne vrijednosti svih njenih svojstvenih vrijednosti jednake 1. Pišemo $a_j = e^{i\theta_j}$ za neki realni θ_j, $j = 1, \ldots, k$. Neka je $S = V(b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)V^*$, gdje je $b_j = e^{i\theta_j/2}$, $j = 1, \ldots, k$. Očito je S unitarna matrica i vrijedi $S^2 = U$.

Ako A komutira s U, tj. $AVDV^* = VDV^*A$, onda je

$$V^*AVD = V^*(AVDV^*)V = V^*(VDV^*A)V = DV^*AV, \tag{2.4}$$

tj. V^*AV komutira s D. Zapišimo V^*AV kao blok-matricu $V^*AV = (T_{ij})$, pri čemu su blokovi T_{jj} istog reda kao i matrice I_j. Iz (2.4) slijedi $a_j T_{ij} = a_i T_{ij}$ za sve $i, j = 1, \ldots, k$, odakle zbog $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$ slijedi $T_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Dakle, V^*AV je blok-dijagonalna matrica oblika $V^*AV = T_{11} \oplus \cdots \oplus T_{kk}$. Kako je $V^*SV = b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k$, slijedi

$$(V^*SV)(V^*AV) = b_1 T_{11} \oplus \cdots \oplus b_k T_{kk} = (V^*AV)(V^*SV)$$

pa je $SA = AS$.

Obzirom da je $U = U^T$, tj. $VDV^* = (V^*)^T DV^T$ slijedi da je

$$V^T VD = V^T(VDV^*)V = V^T((V^*)^T DV^T)V = (V^*V)^T(DV^T V) = DV^T V,$$

tj. $V^T V$ komutira s D. Odavde slijedi da je $V^T V$ blok-dijagonalna matrica oblika $V^T V = R_1 \oplus \cdots \oplus R_k$, gdje su R_j matrice istog reda kao i I_j. Stoga $V^T V$ komutira s $b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k$. Prema tome,

$$V^T S = V^T V(b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)V^* = (b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)V^T VV^* = (b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)V^T,$$

odakle se transponiranjem dobije $S^T V = V(b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)$ pa je

$$S^T = S^T VV^* = V(b_1 I_1 \oplus \cdots \oplus b_k I_k)V^* = S.$$

Dakle, S je simetrična matrica. □

Teorem 2.4.3. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Ako je $A = UBU^*$ za neku unitarnu matricu $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tada postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takva da je $A = QBQ^T$.*

Dokaz. Najprije uočimo da vrijedi $(U^T\overline{U})^T = (\overline{U})^T U = U^*U = I$ pa je $U^T\overline{U} = I^T = I$.

Budući da su A i B realne, imamo $UBU^* = A = \overline{A} = \overline{U}BU^T$. Odavde slijedi

$$U^TUB = U^T(UBU^*)U) = U^T(\overline{U}BU^T)U = BU^TU.$$

Sada pošto je U^TU simetrična matrica, prema teoremu 2.4.2 postoji simetrična unitarna matrica S za koju vrijedi $U^TU = S^2$ i koja komutira s B. Neka je $Q = US^{-1}$ odnosno $U = QS$. Tada je Q također unitarna. Primjetimo da je

$$Q^TQ = (US^{-1})^T(US^{-1}) = S^{-1}U^TUS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I.$$

Dakle, Q je ortogonalna. Uočimo da je Q je realna, jer $Q^T = Q^{-1} = Q^*$ daje $Q = \overline{Q}$. Prema tome, kako S i B komutiraju, S je unitarna, a Q realna ortogonalna matrica, imamo

$$\begin{aligned} A &= UBU^* = (US^{-1})(SB)U^* = Q(BS)U^* \\ &= QB(S^{-1})^*U^* = QBQ^* = QBQ^T. \end{aligned}$$

□

2.5 Nejednakost s tragom za unitarne matrice

U ovoj točki razmatramo unitarni prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uz skalarni produkt definiran s

$$(A, B) = \operatorname{tr}(B^*A), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Prezentirat ćemo nejednakost koja govori o odnosu prosječnih svojstvenih vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica prema prosječnoj svojstvenoj vrijednosti umnoška tih matrica. No, prije toga, dokazat ćemo jednu nejednakost koja vrijedi za svaki kompleksni unitarni prostor.

Teorem 2.5.1. *Neka su u, v i w jedinični vektori kompleksnog unitarnog prostora V. Tada je*

$$\sqrt{1 - |(u, v)|^2} \leqslant \sqrt{1 - |(u, w)|^2} + \sqrt{1 - |(w, v)|^2}. \tag{2.5}$$

Jednakost vrijedi u (2.5) *ako i samo ako w je kolinearan s u ili v.*

Dokaz. Primjetimo da svaka komponenta vektora w koja je ortogonalna na $[\{u, v\}]$ nema nikakvu ulogu u (2.5). Naime, ako je $[\{u, v\}] \oplus W = V$, tada se $w \in W$ može na jedinstven način zapisati kao $w = w_1 + w_2$, gdje je $w_1 \in [\{u, v\}]$, $w_2 \in W$, $(w_1, w_2) = 0$, $\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = \|w\|^2 = 1$. Kako je $(u, w_2) = (w_2, v) = 0$, to (2.5) glasi

$$\sqrt{1 - |(u, v)|^2} \leqslant \sqrt{1 - |(u, w_1)|^2} + \sqrt{1 - |(w_1, v)|^2}.$$

Pritom je $\|w_1\| \leqslant 1$. Uočimo da ako (2.5) vrijedi za neki jedinični vektor w_1, tada će ta nejednakost vrijediti i za αw_1 gdje je $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqslant 1$, jer se u tom slučaju desna strana nejednakosti (2.5) povećava. Prema tome, da bismo dokazali (2.5), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $w \in [\{u, v\}]$ i $\|w\| = 1$.

Slučaj kada su u i v linearno zavisni je trivijalan. Naime, ako je $u = \lambda v$, onda je $|\lambda| = 1$ i vrijedi $|(u, v)| = |\lambda| = 1$ pa je desna strana u (2.5) jednaka nuli. Uočimo da je $|(u, w)| = |(w, v)|$. Stoga u (2.5) vrijedi jednakost ako i samo ako je $|(u, w)| = 1$. Kako je $|(u, w)| \leqslant \|u\|\,\|w\| = 1$, to je $|(u, w)| = 1$ ako i samo ako je $|(u, w)| = \|u\|\,\|w\|$, tj. ako i samo ako su vektori u i w linearno zavisni.

Pretpostavimo da su u i v linearno nezavisni i neka je $\{u, z\}$ ortonormirana baza prostora $[\{u, v\}]$ tako da je $v = \mu u + \lambda z$ i $w = \alpha u + \beta z$ za neke kompleksne brojeve μ, λ, α i β. Tada imamo

$$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Korištenjem ovih relacija te nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$2|\lambda||\beta| \leqslant |\lambda|^2 + |\beta|^2, \quad 2|\alpha||\mu| \leqslant |\alpha|^2 + |\mu|^2,$$

kao i nejednakosti $|c| \geqslant \mathrm{Re}\,(c)$ za bilo koji kompleksni broj c, računamo

$$\begin{aligned}
|\lambda\beta| &= \frac{1}{2}|\lambda\beta|\,(|\mu|^2 + |\lambda|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2)\\
&\geqslant |\lambda\beta|\,(|\lambda\beta| + |\alpha\mu|)\\
&= |\lambda\beta|^2 + |\lambda\beta\alpha\mu|\\
&= |\lambda\beta|^2 + |\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}|\\
&\geqslant |\lambda\beta|^2 + \mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}),
\end{aligned}$$

pa je $-2|\lambda\beta| \leqslant -2|\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
(|\lambda| - |\beta|)^2 &= |\lambda|^2 - 2|\lambda\beta| + |\beta|^2\\
&\leqslant |\lambda|^2 + |\beta|^2 - 2|\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})\\
&= |\lambda|^2 + |\beta|^2(1 - |\lambda|^2) - |\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})\\
&= (1 - |\mu|^2) + |\beta|^2|\mu|^2 - |\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})\\
&= 1 - |\mu|^2(1 - |\beta|^2) - |\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})\\
&= 1 - |\mu\alpha|^2 - |\lambda\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu})\\
&= 1 - |\alpha\overline{\mu} + \beta\overline{\lambda}|^2.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$|\lambda| - |\beta| \leqslant \sqrt{1 - |\alpha\overline{\mu} + \beta\overline{\lambda}|^2}$$

ili

$$|\lambda| \leqslant |\beta| + \sqrt{1 - |\alpha\overline{\mu} + \beta\overline{\lambda}|^2}$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt{1 - |\mu|^2} \leqslant \sqrt{1 - |\alpha|^2} + \sqrt{1 - |\alpha\overline{\mu} + \beta\overline{\lambda}|^2}.$$

Obzirom da je $|\mu|^2 = |(u, v)|^2$, $|\alpha|^2 = |(u, w)|^2$, te

$$|\alpha\overline{\mu} + \beta\overline{\lambda}|^2 = |(\alpha u + \beta z, \mu u + \lambda z)|^2 = |(w, v)|^2,$$

nejednakost (2.5) je dokazana.

Ako je w kolinearan s u ili v, tada je jasno da u (2.5) vrijedi jednakost. Obratno, pretpostavimo da u (2.5) vrijedi jednakost. Prema prvom dijelu dokaza, primjetimo da jednakost u (2.5) vrijedi ako i samo ako je

$$2|\lambda||\beta| = |\lambda|^2 + |\beta|^2, \quad 2|\alpha||\mu| = |\alpha|^2 + |\mu|^2, \quad \mathrm{Re}(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}) = |\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}|,$$

tj. ako i samo ako je $|\lambda| = |\beta|$ i $|\alpha| = |\mu|$ kao i $\mathrm{Re}(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}) = |\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}|$. To znači da je $\lambda = e^{i\theta}\beta$ i $\mu = e^{i\phi}\alpha$ za neke realne brojeve θ i ϕ, odakle se dobije $\lambda\overline{\beta} = e^{i\theta}|\beta|^2$ i $\alpha\overline{\mu} = e^{-i\phi}|\alpha|^2$ pa iz $\mathrm{Re}(\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}) = |\lambda\overline{\beta}\alpha\overline{\mu}|$ slijedi $\mathrm{Re}(|\alpha\beta|^2(e^{i(\theta-\phi)} - 1)) = 0$. Dakle, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ili $e^{i\theta} = e^{i\phi}$.

Ako je $\alpha = 0$, onda je $\mu = 0$ pa je $v = \lambda z$ i stoga $w = \beta z = \beta\overline{\lambda}v$.

Ako je $\beta = 0$, onda je $w = \alpha u$.

Ako je $e^{i\theta} = e^{i\phi}$, onda je $e^{i\theta}w = e^{i\theta}(\alpha u + \beta z) = \mu u + \lambda z = e^{i\theta}v$, tj. $w = e^{-i\theta}v$. □

Promotrimo vektorski prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ svih kompleksnih matrica reda n sa skalarnim produktom $(A, B) = \mathrm{tr}(B^*A)$ za $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Za $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ označimo s $m(A)$ prosječnu svojstvenu vrijednost od A, tj.

$$m(A) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, A.$$

Teorem 2.5.2. *Neka su $U, V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitarne matrice. Tada je*

$$\sqrt{1 - |m(UV)|^2} \leqslant \sqrt{1 - |m(U)|^2} + \sqrt{1 - |m(V)|^2}. \tag{2.6}$$

Jednakost vrijedi u (2.6) *ako i samo ako je U ili V unitarna skalarna matrica.*

Dokaz. Stavimo
$$u = \frac{1}{\sqrt{n}}V, \quad v = \frac{1}{\sqrt{n}}U^*, \quad w = \frac{1}{\sqrt{n}}I.$$
Tada je
$$\|u\|^2 = (u, u) = \frac{1}{n}(V, V) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(V^* V) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, I = 1,$$
$$\|v\|^2 = (v, v) = \frac{1}{n}(U^*, U^*) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(U U^*) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, I = 1,$$
$$\|w\|^2 = (w, w) = \frac{1}{n}(I, I) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(I^* I) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\, I = 1,$$
te vrijedi
$$(u, v) = \frac{1}{n}(V, U^*) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(UV) = m(UV),$$
$$(u, w) = \frac{1}{n}(V, I) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(V) = m(V),$$
$$(w, v) = \frac{1}{n}(I, U^*) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(U) = m(U).$$
Primjenom teorema 2.5.1 na jedinične vektore u, v, w unitarnog prostora $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dobije se nejednakost (2.6). Jednakost vrijedi ako i samo ako je w kolinearan s u ili v, tj. ako i samo ako je $U = \lambda I$ ili $V = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. □

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2010.

[3] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia, SIAM, 2000.

[4] F. Zhang, *Mathrix Theory*. *Basic Results and Techniques* (*Second Edition*), Springer-Verlag, New York, 2011.

Sažetak

Tema ovog rada su normalne matrice. U prvom poglavlju rada prikazujemo osnovne rezultate o normalnim matricama. Dajemo neke karakterizacije normalnih matrica. Razmatramo (0,1)-matrice te dajemo dovoljan uvjet za njihovu normalnost. Također razmatramo nejednakosti koje uključuju elemente matrica te svojstvene i singularne vrijednosti matrica. Slučajevi jednakosti u tim nejednakostima rezultiraju normalnošću matrica. Neki rezultati o normalnim matričnim pertubacijama su također prikazani. Drugo poglavlje usmjereno je na podklasu normalnih matrica, unitarne matrice. Prikazujemo osnovna svojstva unitarnih matrica, raspravljamo o strukturi realnih ortogonalnih matrica s obzirom na transformacije sličnosti, povezujemo kontrakcije s unitarnim matricama, te prezentiramo nejednakost koja povezuje prosječne svojstvene vrijednosti svake od dviju unitarnih matrica s prosječnom svojstvenom vrijednosti njihovog umnoška.

Summary

The subject of this work is normal matrices. In the first chapter of this work we present basic results on normal matrices. We give some characterizations of a normal matrix. We consider $(0,1)$-matrices, and give a sufficient condition on their normality. We also consider the inequalities involving entries, eigenvalues and singular values of matrices. The equality cases of these inequalities result in the normality of the matrices. Some results on normal matrix pertubations are presented as well. The second chapter focuses on a subclass of normal matrices, unitary matrices. We present basic properties of unitary matrices, discuss the structure of real orthogonal matrices under similarity, deal with the connections of contractions with unitary matrices, and present an inequality relating the average of the eigenvalues of each of two unitary matrices to that of their product.

Životopis

Rođena sam 7. srpnja 1990. u Tomislavgradu, u Bosni i Hercegovini. Osnovnu školu sam pohađala u Šujici, a Srednju ekonomsku školu u Livnu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, smjer nastavnički. Nakon završenog Prediplomskog studija, na istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika, također smjer nastavnički.