

# Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

---

Škarjak, Barbara

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:525064>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Barbara Škarjak

**CAUCHYJEVE FUNKCIJSKE**  
**JEDNADŽBE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, srpanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe</b>	<b>2</b>
1.1 Neprekidno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe . . . . .	2
1.2 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba bez pretpostavke neprekidnosti	11
1.3 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli . . . . .	17
1.4 Aditivne funkcije u kompleksnoj ravnini . . . . .	22
1.5 Pexiderova funkcijska jednadžba . . . . .	24
<b>2 Eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jedn.</b>	<b>26</b>
2.1 Rješenje eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe . . . . .	26
2.2 Eksponencijalna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli . . . . .	30
2.3 Vinzeova funkcijska jednadžba . . . . .	32
<b>3 Logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe</b>	<b>35</b>
3.1 Rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe . . . . .	35
3.2 Logaritamska Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli . . . . .	36
<b>4 Multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jedn.</b>	<b>40</b>
4.1 Rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe . . . . .	40
4.2 Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli . . . . .	44
<b>5 Cauchyjeva NQR metoda</b>	<b>47</b>
5.1 Opis Cauchyjeve NQR metode . . . . .	47
5.2 Primjena Cauchyjeve NQR metode na određivanje neprekidnih rješenja Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi . . . . .	48
5.3 Još neki primjeri . . . . .	54
<b>Bibliografija</b>	<b>60</b>

# Uvod

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. Ponekad se zahtijeva da funkcije zadovoljavaju određene uvjete (na primjer: neprekidnost, monotonost, ograničenost, ...). Najpoznatija takva jednadžba je aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba koju ćemo opisati u prvom poglavlju ovog rada, sa i bez pretpostavke neprekidnosti. Neprekidno rješenje ove funkcijske jednadžbe odredio je Cauchy 1821. godine, a rješenje bez pretpostavke neprekidnosti Hamel 1905. godine. Osim toga, proučit ćemo aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe u kompleksnoj ravnini, kao i aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe u više varijabli. U drugom, trećem i četvrtom poglavlju proučavamo redom eksponencijalnu, logaritamsku i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, čije se rješavanje svodi na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. U petom poglavlju opisat ćemo Cauchyjevu  $\mathbb{NQR}$  metodu rješavanja funkcijskih jednadžbi te ju primijeniti na rješavanje svake od navedene četiri vrste Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi, ali i na neke druge primjere.

# Poglavlje 1

## Aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

### 1.1 Neprekidno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1.1)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ovu jednadžbu nazivamo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom*, a svako njeno rješenje aditivnom funkcijom.

Primjer aditivne funkcije je funkcija  $x \mapsto cx$ , pri čemu je  $c$  proizvoljna realna konstanta. Prema sljedećem teoremu, to je jedino rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe koje je neprekidno.

**Teorem 1.1.1.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija koja zadovoljava aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je  $f$  funkcija oblika  $x \mapsto cx$  pri čemu je  $c$  proizvoljna realna konstanta.*

*Dokaz.* Najprije fiksiramo  $x$  te integriramo obje strane jednadžbe (1.1) po varijabli  $y$  te dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x) dy = \int_0^1 [f(x + y) - f(y)] dy \\ &= \int_0^1 f(x + y) dy - \int_0^1 f(y) dy = \int_x^{1+x} f(u) du - \int_0^1 f(y) dy, \end{aligned}$$

pri čemu je uvedena supstitucija  $u = x + y$ . Kako je  $f$  neprekidna funkcija, iz osnovnog teorema diferencijalnog i integralnog računa dobivamo

$$f'(x) = f(1+x) - f(x), \quad (1.2)$$

a zbog aditivnosti od  $f$  vrijedi

$$f(1+x) = f(1) + f(x). \quad (1.3)$$

Uvrstimo li (1.3) u (1.2), dobivamo da je

$$f'(x) = c$$

pri čemu je  $c = f(1)$ . Rješavanjem dobivene diferencijalne jednadžbe prvog reda dobivamo da je

$$f(x) = cx + d, \quad (1.4)$$

pri čemu je  $d$  proizvoljna realna konstanta. Uvrstimo li (1.4) u (1.1), dobivamo da je

$$c(x+y) + d = cx + d + cy + d$$

odnosno

$$d = 2d$$

iz čega slijedi da je  $d = 0$ . Dakle,  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . □

**Napomena 1.1.2.** Svaka funkcija  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  koja zadovoljava jednadžbu  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}_+$  može se proširiti do aditivne funkcije  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dovoljno je definirati  $\tilde{f}(x) = f(x)$  ako je  $x > 0$ ,  $\tilde{f}(0) = f(0)$  i  $\tilde{f}(x) = -f(-x)$  ako je  $x < 0$ . Naime, ako su  $x, y \leq 0$ , tada je i  $x+y \leq 0$ , pa je

$$\tilde{f}(x+y) = -f(-x-y) = -(f(-x) + f(-y)) = -f(-x) - f(-y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y).$$

Ako je  $x > 0, y \leq 0$  i  $x+y > 0$ , tada je

$$\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(y) = f(x+y) + f(-y) = f((x+y) + (-y)) = f(x) = \tilde{f}(x),$$

odakle slijedi  $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$ . Analogno bi se provjerili i ostali slučajevi. Funkcije  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu ćemo također nazivati aditivnim funkcijama. Posebno, svaka neprekidna aditivna funkcija  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  je oblika  $x \mapsto cx$ , gdje je  $c$  proizvoljna konstanta.

Prisjetimo se da za funkciju  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je lokalno integrabilna ako je integrabilna na svakom ograničenom skupu. Prema teoremu 1.1.1, svako lokalno integrabilno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe je oblika  $x \mapsto cx$  za neku realnu konstantu  $c$ . Da bismo to dokazali, pretpostavimo da je  $f$  lokalno integrabilno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} yf(x) &= \int_0^y f(x) dz \\ &= \int_0^y [f(x+z) - f(z)] dz \\ &= \int_x^{x+y} f(u) du - \int_0^y f(z) dz \\ &= \int_0^{x+y} f(u) du - \int_0^x f(u) du - \int_0^y f(u) du. \end{aligned}$$

Zamijene li varijable  $x$  i  $y$  mjesta, zadnja jednakost u gornjem nizu jednakosti ostaje nepromijenjena te zbog toga vrijedi da je

$$yf(x) = xf(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Iz toga slijedi da je, za  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f(x)}{x} = c,$$

gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta. Iz posljednje jednakosti slijedi da je  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Uvrštavanjem u (1.1) dobivamo da je  $f(0) = 0$ . Dakle,  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Dokazat ćemo teorem 1.1.1 na još jedan način. Za to će nam trebati sljedeća lema.

**Lema 1.1.3.** *Ako je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe, tada je  $f$  racionalno homogena, to jest  $f(rx) = r f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i za svaki  $r \in \mathbb{Q}$ . Štoviše,  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{Q}$ , pri čemu je  $c$  proizvoljna realna konstanta.*

*Dokaz.* Uvrštavajući  $x = y = 0$  u (1.1), zaključujemo da vrijedi

$$f(0) = 0. \tag{1.5}$$

Uvrštavajući  $y = -x$  u (1.1), dobivamo da je

$$f(x-x) = f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(0) = f(x) + f(-x).$$



Koristeći (1.5), zaključujemo

$$f(-x) = -f(x) \quad (1.6)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle, do sada smo dokazali da je svako rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe neparna funkcija. Dokažimo sada da je također i racionalno homogena. Uzmimo bilo koji  $x$  te promatrajmo

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$f(nx) = nf(x) \quad (1.7)$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . U slučaju da je  $n$  negativan cijeli broj, tada je  $-n \in \mathbb{N}$  te koristeći tvrdnje (1.7) i (1.6) dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} f(nx) &= -f(-nx) \\ &= -(-n)f(x) \\ &= nf(x). \end{aligned}$$

Dokazali smo da vrijedi  $f(nx) = nf(x)$  za svaki  $n \in \mathbb{Z}$  i za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Stavimo sada da je  $r$  proizvoljan racionalan broj, odnosno da je

$$r = \frac{k}{l}$$

gdje je  $k$  cijeli broj, a  $l$  prirodan broj. Vrijedi jednakost  $kx = l(rx)$ . Iskoristimo li činjenicu da je  $f$  homogena za cijele brojeve, dobivamo da je

$$k f(x) = f(kx) = f(l(rx)) = l f(rx),$$

odnosno

$$f(rx) = \frac{k}{l} f(x) = r f(x).$$

Dakle,  $f$  je racionalno homogena. Nadalje, stavimo li da je  $x = 1$  i definiramo li  $c = f(1)$ , iz prethodne jednadžbe dobivamo da je

$$f(r) = r f(1),$$

odnosno

$$f(r) = c r$$

za svaki racionalan broj  $r$ , što je i trebalo dokazati. □

Slijedi dokaz teorema 1.1.1 na drugačiji način.

*Dokaz.* Neka je  $f$  neprekidno rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe. Za svaki realan broj  $x$  postoji niz racionalnih brojeva  $\{r_n\}$  takav da vrijedi  $r_n \rightarrow x$ . Kako  $f$  zadovoljava aditivnu Cauchyjevu jednadžbu, prema lemi 1.1.3 postoji  $c \in \mathbb{R}$  takav da je

$$f(r_n) = cr_n$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Koristeći neprekidnost funkcije  $f$ , imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} cr_n \\ &= cx. \end{aligned}$$

□

**Teorem 1.1.4.** *Neka je funkcija  $f$  rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Ako je  $f$  neprekidna u točki, onda je neprekidna na cijeloj svojoj domeni.*

*Dokaz.* Neka je  $f$  neprekidna u točki  $t$  i neka je  $x$  proizvoljna točka. Tada je  $\lim_{y \rightarrow t} f(y) = f(t)$ . Dokažimo da je  $f$  neprekidna u  $x$ .

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} f(y) &= \lim_{y \rightarrow x} f(y - x + x - t + t) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} [f(y - x + t) + f(x - t)] \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y - x + t) + \lim_{y \rightarrow x} f(x - t) \\ &= f(t) + f(x - t) \\ &= f(t) + f(x) - f(t) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je  $f$  neprekidna u  $x$ , a kako je  $x$  proizvoljna točka, zaključujemo da je  $f$  neprekidna na cijeloj svojoj domeni. □

Iz teorema 1.1.4 i 1.1.1 slijedi:

**Korolar 1.1.5.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija koja je neprekidna u točki. Tada je  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta.*

U sljedećim primjerima riješit ćemo neke funkcijske jednadžbe koje se svode na Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. U svim tim primjerima traže se neprekidna rješenja jednadžbi.

**Primjer 1.1.6.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f(x + y) = A^y f(x) + A^x f(y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje je  $A$  pozitivna konstanta.

Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = A^{-x} f(x)$ . Kako je  $f$  neprekidna, te je i  $g$  neprekidna. Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x + y) &= A^{-(x+y)} f(x + y) \\ &= A^{-(x+y)} (A^y f(x) + A^x f(y)) \\ &= A^{-x} f(y) + A^{-y} f(x) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija oblika  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Dakle, vrijedi da je  $cx = A^{-x} f(x)$ , odnosno  $f(x) = cxA^x$ , za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.7.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju Jensenovu funkcijsku jednadžbu*

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo prvo  $y = 0$  u zadanu jednadžbu i dobivamo

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + b}{2},$$

gdje je  $f(0) = b$ . Uvedemo li supstituciju  $x = y + z$ , dobivamo

$$f\left(\frac{y + z}{2}\right) = \frac{f(y + z) + b}{2}.$$

Iz zadane jednadžbe znamo da je

$$f\left(\frac{y + z}{2}\right) = \frac{f(y) + f(z)}{2}.$$

Izjednačimo li desne strane prethodnih jednadžbi, dobivamo

$$\frac{f(y) + f(z)}{2} = \frac{f(y + z) + b}{2},$$

što je ekvivalentno sa

$$f(y + z) = f(y) + f(z) - b.$$

Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = f(x) - b$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) - b \\ &= f(x) + f(y) - b - b \\ &= f(x) - b + f(y) - b \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Slijedi da je  $cx = f(x) - b$ , odnosno da je rješenje zadane jednadžbe funkcija  $f(x) = cx + b$ , gdje su  $b, c \in \mathbb{R}$ . Prema napomeni 1.1.2, isto rješenje dobivamo i ako je  $f$  funkcija sa  $\mathbb{R}_+$  u  $\mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.8.** *Odredimo sva neprekidna rješenja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = f(x) + f(y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$  konstanta.

Neka je funkcija  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $g(x^n) = f(x)$ . Tada je

$$\begin{aligned} g(x^n + y^n) &= f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) \\ &= f(x) + f(y) \\ &= g(x^n) + g(y^n), \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Promatramo dva moguća slučaja. Prvi je da je  $n \in \mathbb{N}$  neparan broj. Tada izrazi  $x^n$  i  $y^n$  mogu poprimiti bilo koju realnu vrijednost te vrijedi da je

$$g(x + y) = g(y) + g(y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Neprekidna rješenja ove jednadžbe su oblika  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Vraćanjem u izraz za  $f$ , dobivamo da je  $f(x) = g(x^n) = cx^n$ . Drugi slučaj je da je  $n \in \mathbb{N}$  paran broj. Tada argument funkcije  $g(x^n) = f(x)$  poprima samo nenegativne vrijednosti. Dakle, izrazi  $x^n$  i  $y^n$  poprimaju vrijednosti iz intervala  $[0, +\infty)$  te vrijedi da je

$$g(x + y) = g(y) + g(y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Neprekidna rješenja ove funkcijske jednadžbe su funkcije oblika  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Dakle, i u drugom slučaju rješenja zadane funkcijske jednadžbe su funkcije oblika  $f(x) = g(x^n) = cx^n$ .

**Primjer 1.1.9.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uočimo da tri argumenta funkcije možemo povezati sa

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2.$$

Uvedemo li supstituciju  $\alpha = x^2 - y^2$  i  $\beta = 2xy$ , početna jednadžba je ekvivalentna sljedećoj:

$$f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = f(\alpha) + f(\beta)$$

za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Naime, za zadane  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  stavimo

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \quad \text{i} \quad y = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Uočimo da je ovo funkcijska jednadžba koju smo rješavali u primjeru 1.1.8 za  $n = 2$ . Iz toga slijedi da je rješenje zadane jednadžbe  $f(x) = cx^2$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.10.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Definiramo neprekidnu funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ . Imamo

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) - \frac{(x + y)^2}{2} \\ &= f(x) + f(y) + xy - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} \\ &= f(x) - \frac{x^2}{2} + f(y) - \frac{y^2}{2} \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

čime smo jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Njena neprekidna rješenja su funkcije oblika  $g(x) = cx$  za neku realnu konstantu  $c$ , pa su neprekidna rješenja zadane jednadžbe funkcije oblika  $f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.11.** Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Definiramo neprekidnu funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{(x+y)^3}{3} + (x+y)^2 \\ &= x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y) - \frac{1}{3}x^3 - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + x^2 + 2xy + y^2 \\ &= f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 + f(y) - \frac{y^3}{3} + y^2 \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Neprekidna rješenja ove aditivne Cauchyjeve jednadžbe su funkcije oblika  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ . Slijedi  $cx = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2$ , odnosno neprekidna rješenja početne jednadžbe su funkcije  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.12.** Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + a(1-b^x)(1-b^y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , pri čemu su  $a, b$  realne konstante i  $b > 0$ .

Definiramo funkciju  $g(x) = f(x) - a(b^x - 1)$ . Promatramo

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - a(b^{x+y} - 1) \\ &= f(x) + f(y) + a(1-b^x)(1-b^y) - a(b^{x+y} - 1) \\ &= f(x) + f(y) + a(1-b^y - b^x + b^{x+y} - b^{x+y} + 1) \\ &= f(x) + f(y) + a - ab^y - ab^x + a \\ &= f(x) - a(b^x - 1) + f(y) - a(b^y - 1) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Neprekidne funkcije koje zadovoljavaju ovu jednadžbu su oblika  $g(x) = cx$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$ , pa su rješenja početne jednadžbe funkcije oblika  $f(x) = a(b^x - 1) + cx$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ .

**Primjer 1.1.13.** Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uočimo da je  $f(x) \geq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$  zbog toga što se radi o kvadratnom korijenu nenegativnog broja. Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = [f(x)]^2$ , za svaki  $x \geq 0$ . Uvedemo li supstituciju  $u = x^2$  i  $v = y^2$ , vrijedi

$$g(u) = [f(\sqrt{x^2})]^2 = [f(x)]^2 \quad \text{i} \quad g(v) = [f(\sqrt{y^2})]^2 = [f(y)]^2.$$

Zadana jednadžba ekvivalentna je sljedećoj:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u) + g(v)}{2},$$

za sve  $u, v \in \mathbb{R}_+$ . Uočimo da je ovo Jensenova funkcijska jednadžba koju smo riješili u primjeru 1.1.7 te je njeno rješenje funkcija

$$g(u) = cu + b,$$

gdje su  $b, c \in \mathbb{R}$ . Funkcija  $g$  će poprimiti pozitivne vrijednosti za sve vrijednosti  $u$  ako su  $b$  i  $c$  nenegativne konstante. Dakle, za sve  $x \in \mathbb{R}_+$  je  $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$ , gdje su  $b, c$  nenegativni realni brojevi.

Da bismo pronašli rješenja za  $x < 0$ , zamijenimo  $x$  sa  $-x$  u zadanoj jednadžbi te dobivamo  $[f(x)]^2 = [f(-x)]^2$  iz čega slijedi  $f(-x) = \pm f(x)$ . Ako je  $f(-x) = f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ , tada je  $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Ako je  $f(-x) = -f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ , tada je  $f(0) = 0$ , pa je  $b = 0$  i stoga je  $f(x) = ax$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $a$  nenegativan realan broj. Ako postoje  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$  takvi da je  $f(-x_1) = f(x_1) \geq 0$  i  $f(-x_2) = -f(x_2) \leq 0$ , tada zbog neprekidnosti funkcije  $f$  postoji  $x_0$  između  $-x_1$  i  $-x_2$  takav da je  $f(x_0) = 0$  (primijetimo da ne mogu oba  $f(-x_1)$  i  $f(-x_2)$  biti jednaka nuli). Odatle slijedi  $cx_0^2 + b = 0$ , pa je  $x_0 = 0$  i  $b = 0$ . Tada je  $f(x) = a|x|$ . Dakle, vrijedi jedna od sljedećih mogućnosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \sqrt{cx^2 + b} && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= a|x| && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= ax && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdje su  $a, b > 0, c \geq 0$  realni brojevi.

## 1.2 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba bez prepostavke neprekidnosti

**Lema 1.2.1.** *Ako je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe, koje nije oblika  $x \mapsto cx$  za neku realnu konstantu  $c$ , tada je graf funkcije  $f$  gust u ravnini  $\mathbb{R}^2$ .*

*Dokaz.* Graf  $G$  funkcije  $f$  je  $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Uzmimo proizvoljan  $x_1 \in \mathbb{R}$  različit od 0. Kako  $f$  nije oblika  $x \mapsto cx$ , postoji broj  $x_2 \in \mathbb{R}$  takav da je

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}. \quad (1.8)$$

Kada to ne bi vrijedilo, mogli bismo uzeti  $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$  te supstituirati  $x_1 = x$  te bismo dobili  $f(x) = cx$  za svaki  $x \neq 0$ . Znamo da je  $f(0) = 0$  pa zaključujemo da je  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Dakle, vrijedi (1.8), a to je ekvivalentno sa

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pa su vektori  $v_1 = (x_1, f(x_1))$  i  $v_2 = (x_2, f(x_2))$  linearno nezavisni. To povlači da za svaki vektor  $v = (x, f(x))$  postoje realni brojevi  $r_1$  i  $r_2$  takvi da je

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2.$$

Ako umjesto realnih brojeva  $r_1, r_2$  uzmemo racionalne brojeve  $\rho_1, \rho_2$ , linearnom kombinacijom  $\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2$  možemo se proizvoljno približiti zadanom vektoru  $v$ . Koristimo činjenicu da je skup racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$  gust u skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  pa je skup  $\mathbb{Q}^2$  gust u  $\mathbb{R}^2$ . Nadalje,

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 &= \rho_1(x_1, f(x_1)) + \rho_2(x_2, f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, \rho_1 f(x_1) + \rho_2 f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2)), \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku koristili racionalnu homogenost funkcije  $f$ . Prema tome, skup  $\hat{G} = \{(x, y) \mid x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, y = f(x), \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}\}$  je gust u  $\mathbb{R}^2$ . Kako je  $\hat{G} \subset G$ , graf  $G$  je također gust u  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Da bismo konstruirali aditivnu funkciju koja nije neprekidna, bit će nam potreban pojam Hamelove baze. Neka je skup  $S = \{s \in \mathbb{R} \mid s = u + v\sqrt{2} + w\sqrt{3}, u, v, w \in \mathbb{Q}\}$ . Njegovi elementi su racionalne linearne kombinacije brojeva  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ . Ako element  $s \in S$  ima dvije različite racionalne linearne kombinacije, primjerice

$$s = u + v\sqrt{2} + q\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{2} + w'\sqrt{3},$$

pri čemu su  $u, v, w, u', v', w' \in \mathbb{Q}$ , tada je

$$(u - u') + (v - v')\sqrt{2} + (w - w')\sqrt{3} = 0.$$



Ako supstituiramo  $a = u - u' \in \mathbb{Q}$ ,  $b = v - v' \in \mathbb{Q}$ ,  $c = w - w' \in \mathbb{Q}$ , gornja jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

odnosno

$$b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a.$$

Kvadriranjem obje strane dobivamo

$$2bc\sqrt{6} = a^2 - 2b^2 - 3c^2.$$

Iz ove jednakosti zaključujemo da je  $b = 0$  ili  $c = 0$  jer u suprotnom vrijedi da je

$$\sqrt{6} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je  $\sqrt{6}$  iracionalan broj, a brojevi  $a, b, c$  racionalni. Ako je  $b = 0$ , tada je  $a + c\sqrt{3} = 0$  iz čega slijedi da je i  $c = 0$  jer bi u suprotnom vrijedilo da je  $\sqrt{3} = -\frac{a}{c}$ , što je u kontradikciji s činjenicom da je  $\sqrt{3}$  iracionalan broj. Analogno, ako je  $c = 0$ , tada mora biti i  $b = 0$ . Iz toga zaključujemo da je  $b = 0$  i  $c = 0$  pa slijedi da je i  $a = 0$ . Prema tome, svaki element skupa  $S$  možemo zapisati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju elemenata skupa  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Skup  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$  nazivamo Hamelovom bazom skupa  $S$ . Općenito, skup  $B$  zovemo Hamelovom bazom skupa  $\mathbb{R}$  ako svaki realan broj možemo zapisati kao jedinstvenu (konačnu) racionalnu linearnu kombinaciju elemenata skupa  $B$ .

**Propozicija 1.2.2.** *Neka je  $B$  Hamelova baza za skup  $\mathbb{R}$ . Ako dvije aditivne funkcije imaju istu vrijednost u svakom elementu baze  $B$ , onda su one jednake.*

*Dokaz.* Uzmimo da su  $f_1$  i  $f_2$  dvije aditivne funkcije koje imaju istu vrijednost u svakom elementu od  $B$ . Tada je funkcija  $f = f_1 - f_2$  također aditivna. Neka je  $x$  bilo koji realan broj. Tada postoje brojevi  $b_1, b_2, \dots, b_n$  iz  $B$  i racionalni brojevi  $r_1, r_2, \dots, r_n$  takvi da je

$$x = r_1b_1 + r_2b_2 + \dots + r_nb_n.$$

Vrijedi da je

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= f(x) \\ &= f(r_1b_1 + r_2b_2 + \dots + r_nb_n) \\ &= f(r_1b_1) + f(r_2b_2) + \dots + f(r_nb_n) \\ &= r_1f(b_1) + r_2f(b_2) + \dots + r_nf(b_n) \\ &= r_1[f_1(b_1) - f_2(b_1)] + r_2[f_1(b_2) - f_2(b_2)] + \dots + r_n[f_1(b_n) - f_2(b_n)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je  $f_1 = f_2$  što je i trebalo dokazati. □

**Propozicija 1.2.3.** *Neka je  $B$  Hamelova baza za  $\mathbb{R}$  i neka je  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna funkcija definirana na  $B$ . Tada postoji aditivna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je  $f(b) = g(b)$  za svaki  $b \in B$ .*

*Dokaz.* Za svaki realan broj  $x$  postoje  $b_1, b_2, \dots, b_n$  iz  $B$  i racionalni brojevi  $r_1, r_2, \dots, r_n$  takvi da je

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n.$$

Stavimo  $f(x) = r_1 f(b_1) + r_2 f(b_2) + \dots + r_n f(b_n)$ , odnosno, ako iskoristimo činjenicu da je  $f(b) = g(b)$  za svaki  $b \in B$ , vrijedi da je

$$f(x) = r_1 g(b_1) + r_2 g(b_2) + \dots + r_n g(b_n).$$

Neka su  $x, y$  bilo koja dva realna broja. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} x &= r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n, \\ y &= s_1 b_1 + s_2 b_2 + \dots + s_m b_m, \end{aligned}$$

pri čemu su  $r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_m$  racionalni brojevi, a  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$  elementi Hamelove baze. Skupovi  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  mogu imati neke zajedničke elemente. Neka unija ova dva skupa bude skup  $\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$  pri čemu vrijedi da je  $l \leq m + n$ . Sada brojeve  $x$  i  $y$  možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} x &= u_1 c_1 + u_2 c_2 + \dots + u_l c_l, \\ y &= v_1 c_1 + v_2 c_2 + \dots + v_l c_l, \end{aligned}$$

pri čemu su  $u_1, u_2, \dots, u_l, v_1, v_2, \dots, v_l$  racionalni brojevi, od kojih neki mogu biti 0. Vrijedi

$$x + y = (u_1 + v_1)c_1 + (u_2 + v_2)c_2 + \dots + (u_l + v_l)c_l,$$

odnosno

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f((u_1 + v_1)c_1 + (u_2 + v_2)c_2 + \dots + (u_l + v_l)c_l) \\ &= (u_1 + v_1)g(c_1) + (u_2 + v_2)g(c_2) + \dots + (u_l + v_l)g(c_l) \\ &= [u_1 g(c_1) + u_2 g(c_2) + \dots + u_l g(c_l)] + [v_1 g(c_1) + v_2 g(c_2) + \dots + v_l g(c_l)] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Dakle,  $f$  je aditivna na skupu realnih brojeva što je i trebalo dokazati.  $\square$

Pomoću Hamelove baze možemo konstruirati aditivnu funkciju koja nije oblika  $x \mapsto cx$  za neki  $c \in \mathbb{R}$ . Neka je  $B$  Hamelova baza na skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  i neka je  $b \in B$  bilo koji element iz  $B$ . Definiramo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x \in B \setminus \{b\}, \\ 1 & \text{ako je } x = b. \end{cases}$$

Prema propoziciji 1.2.3 postoji aditivna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi  $f(x) = g(x)$  za svaki  $x \in B$ . Uočimo da  $f$  ne može biti oblika  $x \mapsto cx$  jer za  $x \in B \setminus \{b\}$  vrijedi da je

$$0 = \frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(b)}{b}.$$

Napomenimo da nije poznat niti jedan konkretan primjer Hamelove baze za skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , poznato je jedino da ona postoji.

Do sada smo dokazali da je aditivna funkcija  $x \mapsto cx$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta, jedino rješenje Cauchyjeve funkcijske jednadžbe koje je neprekidno. Osim neprekidnosti, postoje još neki uvjeti da aditivna funkcija bude oblika  $x \mapsto cx$ .

**Teorem 1.2.4.** *Ako je aditivna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s jedne strane ograničena, tada je ona oblika  $x \mapsto cx$  za neku realnu konstantu  $c$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, odnosno da  $f$  nije oblika  $x \mapsto cx$  za neki  $c \in \mathbb{R}$ . Tada iz leme 1.2.1 slijedi da je graf funkcije  $f$  gust u  $\mathbb{R}^2$ . Kako je  $f$  ograničena s jedne strane, recimo odozgo, zaključujemo da postoji realna konstanta  $M$  takva da vrijedi

$$f(x) \leq M, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je graf funkcije  $f$  disjunktan sa skupom  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) > M\}$ . Prema tome, graf funkcije  $f$  nije gust u  $\mathbb{R}^2$  što je kontradikcija.  $\square$

Napomenimo da aditivna ograničena funkcija mora biti nul-funkcija. U suprotnom možemo odrediti neki realan broj  $x_0$  takav da je  $f(x_0) \neq 0$ . Matematičkom indukcijom se može dokazati da je  $f(nx_0) = nf(x_0)$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Vrijednost  $|nf(x_0)|$  može biti proizvoljno velika ovisno o broju  $n$  što je u kontradikciji s činjenicom da je  $f$  ograničena funkcija.

**Teorem 1.2.5.** *Ako je aditivna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena na skupu  $[a, b]$ , tada postoji realna konstanta  $c$  takva da je  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Najprije dokažimo da je  $f$  ograničena i na intervalu  $[0, b-a]$ . Kako je  $f$  ograničena na intervalu  $[a, b]$ , postoji pozitivan realan broj  $M$  takav da je  $|f(x)| < M$  za svaki  $x \in [a, b]$ . Ako je  $x \in [0, b-a]$ , tada je  $x+a \in [a, b]$  i vrijedi  $f(x) = f(x+a) - f(a)$  pa zaključujemo

$$|f(x)| < M + |f(a)|.$$

Neka je  $c = b - a$  i neka je  $d = \frac{f(c)}{c}$ . Definirajmo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = f(x) - dx$ . Vrijedi  $g(c) = f(c) - dc = 0$  i

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - d(x+y) \\ &= f(x) + f(y) - dx - dy \\ &= f(x) - dx + f(y) - dy \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Kako je  $g(c) = 0$ , to je  $g(x + c) = g(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa zaključujemo da je  $g$  periodična funkcija s periodom  $c$ . Kako je  $g$  razlika funkcija koje su ograničene na intervalu  $[0, c]$ , ona je također ograničena na tom istom intervalu. Kako je  $g$  periodična s periodom  $c$ , to je ograničena na cijelom skupu  $\mathbb{R}$ . Slijedi  $g(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , odnosno  $f(x) = dx$  za neku realnu konstantu  $d$ .  $\square$

Pretpostavku neprekidnosti možemo zamijeniti i pretpostavkom monotonosti, kao u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.2.6.** *Pretpostavimo da funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Neka je bez smanjenja općenitosti funkcija  $f$  rastuća, odnosno neka vrijedi

$$f(x) \leq f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ . Tada je dana funkcija oblika  $x \mapsto cx$ , za neki  $c \geq 0$ .

*Dokaz.* Iz leme 1.1.3 znamo da je  $f(q) = cq$  za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ , gdje je  $c$  proizvoljna pozitivna realna konstanta. Za svaki realan broj  $x$  vrijedi

$$cq = f(q) \leq f(x) \leq f(r) = cr$$

za sve  $q, r \in \mathbb{Q}$  takve da je  $q < x < r$ . Promatramo dva niza racionalnih brojeva

$$q_1 < q_2 < \dots < x \quad \text{i} \quad r_1 > r_2 > \dots > x$$

takvih da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

Vrijedi

$$cx = \lim_{n \rightarrow \infty} cq_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} cr_n = cx.$$

Prema teoremu o sendviču,  $f(x) = cx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Primjer 1.2.7.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku nejednadžbu*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Zadanu funkcijsku nejednadžbu zovemo *Cauchyjeva nejednadžba*.

Kako bismo smanjili broj općih rješenja, pretpostavimo da vrijedi

$$f(x) \leq x \quad (1.9)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Uvedemo li supstituciju  $x = y = 0$  u zadanu nejednadžbu, dobivamo

$$f(0) \leq 2f(0),$$

odnosno

$$0 \leq f(0).$$

Iz (1.9) slijedi

$$f(0) \leq 0$$

pa zaključujemo da mora vrijediti

$$f(0) = 0.$$

Uvrstimo li  $y = -x$  u zadanu nejednadžbu, imamo

$$f(0) \leq f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(x) \geq -f(-x). \quad (1.10)$$

Iz (1.9), (1.10) i  $f(0) = 0$  slijedi

$$f(x) \geq -f(-x) \geq -(-x) = x.$$

Kako istovremeno vrijedi (1.9), zaključujemo da je  $f(x) = x$ .

### 1.3 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

**Teorem 1.3.1.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \quad (1.11)$$

za sve  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ , dano je sa

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2),$$

gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije.

*Dokaz.* Uvrstimo  $x_2 = y_2 = 0$  u (1.11) i dobivamo

$$f(x_1 + y_1, 0) = f(x_1, 0) + f(y_1, 0).$$

Definiramo li funkciju  $A_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $A_1(x) = f(x, 0)$ , prethodna jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$A_1(x_1 + y_1) = A_1(x_1) + A_1(y_1).$$

Dakle,  $A_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je aditivna funkcija.

Analogno, uvrstimo li  $x_1 = y_1 = 0$  u (1.11), dobivamo

$$f(0, x_2 + y_2) = f(0, x_2) + f(0, y_2).$$

Definiramo li funkciju  $A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $A_2(x) = f(0, x)$ , prethodna jednakost je ekvivalentna

$$A_2(x_2 + y_2) = A_2(x_2) + A_2(y_2).$$

Dakle,  $A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je također aditivna funkcija.

Uvrstimo li  $y_1 = x_2 = 0$  u (1.11), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 0) + f(0, y_2) \\ &= A_1(x_1) + A_2(y_2). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$f(x, y) = A_1(x) + A_2(y)$$

za svaki  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije. □

Jednadžbu (1.11) zvat ćemo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *aditivnom funkcijom dviju varijabli*.

Dokazat ćemo prethodni teorem na drugi način.

*Dokaz.* Neka je  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija i neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljan. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y) + 2f(a, a) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a + a, y + a + a) - 2f(a, a) \\ &= f((x + a) + a, a + (y + a)) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a, a) + f(a, y + a) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a, a) - f(a, a) + f(a, y + a) - f(a, a) \\ &= A_1(x) + A_2(y), \end{aligned}$$

gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije takve da je

$$A_1(x) = f(x + a, a) - f(a, a), \quad A_2(y) = f(a, y + a) - f(a, a).$$

Preostaje dokazati da su  $A_1$  i  $A_2$  aditivne funkcije.

$$\begin{aligned}
 A_1(x+y) &= f(x+y+a, a) - f(a, a) \\
 &= f(x+y+a, a) + f(a, a) - 2f(a, a) \\
 &= f(x+y+a+a, a+a) - 2f(a, a) \\
 &= f(x+a, a) + f(y+a, a) - 2f(a, a) \\
 &= f(x+a, a) - f(a, a) + f(y+a, a) - f(a, a) \\
 &= A_1(x) + A_1(y).
 \end{aligned}$$

Dakle,  $A_1$  je aditivna funkcija. Na analogan način dokažemo

$$A_2(x+y) = A_2(x) + A_2(y),$$

odnosno da je  $A_2$  aditivna funkcija. □

Dakle, svaku aditivnu funkciju dviju varijabli možemo zapisati kao zbroj dviju aditivnih funkcija jedne varijable.

**Korolar 1.3.2.** *Ako je funkcija  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna u  $\mathbb{R}^2$ , tada postoje aditivne funkcije  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je*

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

**Korolar 1.3.3.** *Ako je  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna aditivna funkcija u  $\mathbb{R}^2$ , onda postoje realne konstante  $c_1, c_2$  takve da vrijedi*

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Ako je  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna u  $\mathbb{R}^2$ , iz korolara 1.3.2 slijedi

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2),$$

gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije. Kako je  $f$  neprekidna, to su i  $A_1, A_2$  neprekidne funkcije. Teorem 1.1.1 povlači  $A_1(x) = c_1x$  i  $A_2(x) = c_2x$ , gdje su  $c_1, c_2$  proizvoljne realne konstante. □

**Lema 1.3.4.** *Aditivna funkcija  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je neprekidna ako je neprekidna u svakoj varijabli.*

*Dokaz.* Kako je  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna, po korolaru 1.3.2 vrijedi

$$f(x, y) = A_1(x) + A_2(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije. Funkcija  $f$  je neprekidna u svakoj varijabli, pa su i funkcije  $A_1$  i  $A_2$  neprekidne. Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A_1(x) = A_1(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} A_2(y) = A_2(y_0).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [A_1(x) + A_2(y)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} A_1(x) + \lim_{y \rightarrow y_0} A_2(y) \\ &= A_1(x_0) + A_2(y_0) \\ &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dakle,  $f$  je neprekidna. □

**Korolar 1.3.5.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1.12)$$

za sve  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dano je sa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $A_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) aditivne funkcije.

*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za  $n = 2$  tvrdnja vrijedi prema teoremu 1.3.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $A_1, A_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije.

Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $A_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) aditivne funkcije.



Provjerimo vrijedi li tvrdnja za  $n+1$ . Neka je  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$  i  $A_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $A_{n+1}(x) = f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x)$ . Iz (1.12) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, 0) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + f(y_1, y_2, \dots, y_n, 0) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), za neke aditivne funkcije  $A_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Također,

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x+y) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, x+y) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, x) + f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, y) \\ &= A_{n+1}(x) + A_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je  $A_{n+1}$  aditivna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0, 0 + x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + f(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) + A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n A_k(x_k) + A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} A_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za  $n+1$  čime je korolar dokazan. □

Jednadžbu (1.12) zvat ćemo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u  $n$  varijabli*, a svako njeno rješenje *aditivnom funkcijom  $n$  varijabli*.

## 1.4 Aditivne funkcije u kompleksnoj ravnini

Kompleksan broj  $z$  možemo poistovijetiti s uređenim parom  $(x, y)$  realnih brojeva. U zapisu kompleksnog broja  $z = x + iy$ , realan broj  $x$  zovemo realni dio i označavamo ga sa  $Re z$ , a realan broj  $y$  imaginarni dio broja  $z$  i označavamo ga sa  $Im z$ . Na skupu kompleksnih brojeva definirane su operacije zbrajanja i množenja na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v), \\ (x, y)(u, v) &= (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

Proizvoljnu funkciju  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  možemo zapisati u obliku

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z), \quad (1.13)$$

pri čemu su funkcije  $f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  definirane sa

$$f_1(z) = Re f(z), \quad f_2(z) = Im f(z). \quad (1.14)$$

Ako je  $f$  aditivna funkcija, tada koristeći (1.13) i (1.14) dobivamo

$$\begin{aligned}f_1(z_1 + z_2) &= Re f(z_1 + z_2) \\ &= Re [f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Re f(z_1) + Re f(z_2) \\ &= f_1(z_1) + f_1(z_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(z_1 + z_2) &= Im f(z_1 + z_2) \\ &= Im [f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Im f(z_1) + Im f(z_2) \\ &= f_2(z_1) + f_2(z_2).\end{aligned}$$

**Lema 1.4.1.** *Ako je  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija, onda postoje aditivne funkcije  $f_{jk}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j, k = 1, 2$ ) takve da je*

$$f(z) = f_{11}(Re z) + f_{12}(Im z) + i f_{21}(Re z) + i f_{22}(Im z).$$

*Dokaz.* Iz (1.13) slijedi

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z).$$

Kako je  $f$  aditivna funkcija, to su i  $f_1, f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivne funkcije. Funkcije  $f_1$  i  $f_2$  možemo promatrati kao funkcije dviju varijabli pa prema korolaru 1.3.2 slijedi

$$f(z) = f_{11}(Re z) + f_{12}(Im z) + i f_{21}(Re z) + i f_{22}(Im z),$$

gdje su  $f_{jk}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j, k = 1, 2$ ) aditivne funkcije. □

**Teorem 1.4.2.** *Ako je  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna aditivna funkcija, tada postoje kompleksne konstante  $c_1$  i  $c_2$  takve da je*

$$f(z) = c_1 z + c_2 \bar{z}$$

za svaki  $z \in \mathbb{C}$ .

*Dokaz.* Kako je  $f$  aditivna funkcija, prema lemi 1.4.1 vrijedi

$$f(z) = f_{11}(\operatorname{Re} z) + f_{12}(\operatorname{Im} z) + if_{21}(\operatorname{Re} z) + if_{22}(\operatorname{Im} z),$$

pri čemu su  $f_{jk}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j, k = 1, 2$ ) aditivne funkcije na skupu realnih brojeva. Zbog neprekidnosti funkcije  $f$ , zaključujemo da su i funkcije  $f_{jk}$  neprekidne i da vrijedi  $f_{jk}(x) = c_{jk}x$  za realne konstante  $c_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ). Vrijedi da je

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{11}\operatorname{Re} z + c_{12}\operatorname{Im} z + ic_{21}\operatorname{Re} z + ic_{22}\operatorname{Im} z \\ &= (c_{11} + ic_{21})\operatorname{Re} z + (c_{12} + ic_{22})\operatorname{Im} z \\ &= a\operatorname{Re} z + b\operatorname{Im} z, \end{aligned}$$

gdje je  $a = (c_{11} + ic_{21})$ ,  $b = (c_{12} + ic_{22})$ . Dalje imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= a\operatorname{Re} z - i(bi)\operatorname{Im} z \\ &= \frac{a+bi}{2}\operatorname{Re} z + \frac{a-bi}{2}\operatorname{Re} z - \frac{a+bi}{2}i\operatorname{Im} z + \frac{a-bi}{2}i\operatorname{Im} z \\ &= \frac{a-bi}{2}\operatorname{Re} z + \frac{a-bi}{2}i\operatorname{Im} z + \frac{a+bi}{2}\operatorname{Re} z - \frac{a+bi}{2}i\operatorname{Im} z \\ &= \frac{a-bi}{2}(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z) + \frac{a+bi}{2}(\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z) \\ &= \frac{a-bi}{2}z + \frac{a+bi}{2}\bar{z} \\ &= c_1 z + c_2 \bar{z}, \end{aligned}$$

gdje su  $c_1 = \frac{a-bi}{2}$  i  $c_2 = \frac{a+bi}{2}$  kompleksne konstante. □

Za funkciju  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ćemo reći da je analitička funkcija ako je  $f$  derivabilna na  $\mathbb{C}$ .

**Teorem 1.4.3.** *Ako je  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitička aditivna funkcija, tada postoji kompleksna konstanta  $c$  takva da je*

$$f(z) = cz$$

za svaki  $z \in \mathbb{C}$ .

*Dokaz.* Kako je  $f$  analitička funkcija, ona je i derivabilna. Ako deriviramo izraz

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \quad (1.15)$$

po varijabli  $z_1$ , dobivamo

$$f'(z_1 + z_2) = f'(z_1)$$

za sve  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Za  $z_1 = 0$  i  $z_2 = z$  vrijedi

$$f'(z) = c,$$

gdje je  $c = f'(0)$  kompleksna konstanta. Iz toga slijedi da je

$$f(z) = cz + b,$$

pri čemu je  $b$  kompleksna konstanta. Vraćanjem ovog oblika u izraz (1.15) zaključujemo da je  $b = 0$ , što znači da je  $f(z) = cz$  za svaki  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

## 1.5 Pexiderova funkcijska jednadžba

*Pexiderova jednadžba* je funkcijska jednadžba oblika

$$f(x + y) = g(x) + h(y), \quad (1.16)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje su  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne funkcije.

Uvrstimo li  $y = 0$  u (1.16) i definiramo li  $h(0) = b$ , dobivamo

$$g(x) = f(x) - b.$$

Uvrstimo li  $x = 0$  u (1.16) i definiramo li  $g(0) = a$ , dobivamo

$$h(y) = f(y) - a.$$

Vraćanjem u (1.16) imamo

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a - b.$$

Definiramo funkciju  $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $f_0(x) = f(x) - a - b$ . Kako je  $f$  neprekidna, to je i  $f_0$  neprekidna. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f_0(x + y) &= f(x + y) - a - b \\ &= f(x) + f(y) - a - b - a - b \\ &= f(x) - a - b + f(y) - a - b \\ &= f_0(x) + f_0(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija  $f_0(x) = cx$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta. Dakle, rješenja Pexiderove funkcijske jednadžbe su

$$f(x) = cx + a + b,$$

$$g(x) = cx + a,$$

$$h(x) = cx + b,$$

gdje su  $a, b, c$  proizvoljne realne konstante.

## Poglavlje 2

# Eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

### 2.1 Rješenje eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava jednadžbu

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (2.1)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ovu jednadžbu nazivamo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom*, a svako njeno rješenje eksponencijalnom funkcijom. Jasno je da je funkcija  $x \mapsto e^x$  rješenje te jednadžbe. Općenitije, ako je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija, tada je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana sa  $f(x) = e^{A(x)}$  također rješenje eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe:

$$f(x + y) = e^{A(x+y)} = e^{A(x)+A(y)} = e^{A(x)} \cdot e^{A(y)} = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dokazat ćemo da su sva rješenja eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe ovog oblika.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nenul-funkcija koja zadovoljava eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je  $f$  funkcija oblika  $x \mapsto e^{A(x)}$ , gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija.*

*Dokaz.* Dokažimo da je  $f(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji  $y_0$  takav da je  $f(y_0) = 0$ . Tada vrijedi

$$f(y) = f((y - y_0) + y_0) = f(y - y_0)f(y_0) = 0$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . To je kontradikcija pa je  $f(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Uvrstimo li supstituciju  $x = y = \frac{t}{2}$  u (2.1) dobivamo

$$f(t) = \left[ f\left(\frac{t}{2}\right) \right]^2$$

za svaki  $t \in \mathbb{R}$ . Ovime smo dokazali da je vrijednost funkcije  $f$  za svaki realan broj pozitivna pa zbog toga jednadžbu (2.1) možemo logaritmirati prirodnim logaritmom. Dobivamo

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Definiramo funkciju  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $A(x) = \ln f(x)$  i imamo

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Dakle, funkcija oblika  $f(x) = e^{A(x)}$  je rješenje jednadžbe (2.1).  $\square$

**Korolar 2.1.2.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nenul-funkcija koja zadovoljava eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je  $f$  funkcija oblika  $x \mapsto e^{cx} = a^x$ , gdje su  $a > 0$  i  $c$  proizvoljne realne konstante.*

*Dokaz.* Iz teorema 2.1.1 slijedi  $f(x) = e^{A(x)}$ , gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija. Kako je  $f$  neprekidna, to je i  $A$  neprekidna jer je  $A(x) = \ln f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Teorem 1.1.1 povlači  $A(x) = cx$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta.  $\square$

U sljedećim primjerima pokazat ćemo neke funkcijske jednadžbe koje se rješavaju svođenjem na eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu.

**Primjer 2.1.3.** *Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te neka je*

$$f(x+y+nx) = f(x)f(y) \tag{2.2}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  sa svojstvom  $x > -\frac{1}{n}$  i  $y > -\frac{1}{n}$ . Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe (2.2).

Danu funkcijsku jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$f\left(\frac{(1+nx)(1+ny)-1}{n}\right) = f(x)f(y).$$

Stavimo da je  $1+nx = e^u$  i  $1+ny = e^v$  iz čega slijedi da je  $u = \ln(1+nx)$  i  $v = \ln(1+ny)$ . Gornju jednadžbu možemo zapisati kao

$$f\left(\frac{e^{u+v}-1}{n}\right) = f\left(\frac{e^u-1}{n}\right)f\left(\frac{e^v-1}{n}\right)$$

za sve  $u, v \in \mathbb{R}$ . Stavimo li

$$\phi(u) = f\left(\frac{e^u - 1}{n}\right),$$

prethodna jednadžba prelazi u

$$\phi(u + v) = \phi(u)\phi(v)$$

za sve  $u, v \in \mathbb{R}$ . Kako je  $f$  nenul-funkcija, to je i  $\phi$  nenul-funkcija. Teorem 2.1.1 povlači  $\phi(x) = e^{A(x)}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija.

Slijedi da je  $f(x) = e^{A(\ln(1+nx))}$  za svaki  $x > -\frac{1}{n}$ . Ako je  $f$  neprekidna, tada je  $A$  oblika  $x \mapsto cx$ , gdje je  $c$  proizvoljna konstanta, pa je  $f(x) = (1 + nx)^c$ .

**Primjer 2.1.4.** Neka je  $\alpha$  pozitivna realna konstanta. Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe

$$f(x + y) = \alpha^{xy} f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = \alpha^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$ . Tada je

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \alpha^{-\frac{(x+y)^2}{2}} f(x + y) \\ &= \alpha^{-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}} \alpha^{xy} f(x)f(y) \\ &= \alpha^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \alpha^{-\frac{y^2}{2}} f(y) \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čija su neprekidna rješenja funkcije  $g(x) = a^x$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj. Slijedi  $f(x) = \alpha^{\frac{x^2}{2}} a^x$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj.

**Primjer 2.1.5.** Odredimo sve neprekidne nenul-funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Neka je funkcija  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana sa  $g(x) = f(x) + 1$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) + 1 \\ &= f(x) + f(y) + f(x)f(y) + 1 \\ &= (1 + f(x))(1 + f(y)) \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$



Neprekidna rješenja ove jednadžbe su oblika  $g(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $g(x) = a^x$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj. Iz toga slijedi  $f(x) = -1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $f(x) = a^x - 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj. Uočimo da je  $f$  nenul-funkcija ako je  $a \neq 1$ .

**Primjer 2.1.6.** *Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$\left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo prvo  $y = 0$  u zadanu jednadžbu i dobivamo

$$\left[ f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 = f(x)f(0).$$

Ako je  $f(0) = 0$  slijedi da je  $\left[ f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa je  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f(0) \neq 0$ . Zamijenimo  $x$  u prethodnoj jednakosti sa  $x + y$  i dobivamo

$$\left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 = f(x+y)f(0).$$

Uočimo da su lijeve strane dobivene jednakosti i zadane jednadžbe jednake pa vrijedi

$$f(x+y)f(0) = f(x)f(y).$$

Neka je  $b = f(0)$ . Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = \frac{f(x)}{b}$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \frac{f(x+y)}{b} \\ &= \frac{f(x)f(y)}{b^2} \\ &= \frac{f(x)}{b} \cdot \frac{f(y)}{b} \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Kako je  $f$  nenul-funkcija, to je i  $g$  nenul-funkcija, pa je  $g(x) = a^x$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj. Zaključujemo  $f(x) = b a^x$ , gdje su  $a > 0$  i  $b$  proizvoljni realni brojevi.

**Primjer 2.1.7.** *Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uzmimo  $x_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(x_0) \neq 0$ . Vrijedi

$$f(x_0)f(-y) = f(\sqrt{x_0^2 + y^2}) = f(x_0)f(y).$$

Slijedi da je  $f(y) = f(-y)$  za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f$  je parna funkcija pa je dovoljno promatrati vrijednosti od  $f$  za  $x \geq 0$ . Definiramo funkciju  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $g(x) = f(\sqrt{x})$ . Uvedemo li supstituciju  $u = x^2$  i  $v = y^2$ , dobivamo

$$g(u + v) = g(u)g(v)$$

za sve  $u, v \in \mathbb{R}_+$ . Kako je  $f$  nenul-funkcija, to je i  $g$  nenul-funkcija, pa je  $g(u) = a^u$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj. Slijedi da je  $f(x) = a^{x^2}$ , gdje je  $a$  pozitivan realan broj.

## 2.2 Eksponencijalna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

**Teorem 2.2.1.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2)f(y_1, y_2) \quad (2.3)$$

za sve  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ , dano je sa

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1)E_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $E_1, E_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eksponencijalne funkcije.

*Dokaz.* Uvrstimo li  $x_2 = y_2 = 0$  u (2.3), dobivamo

$$f(x_1 + y_1, 0) = f(x_1, 0)f(y_1, 0).$$

Definiramo funkciju  $E_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $E_1(x) = f(x, 0)$ . Prethodnu jednakost sada možemo zapisati kao

$$E_1(x_1 + y_1) = E_1(x_1)E_1(y_1).$$

Uočimo da  $E_1$  zadovoljava Cauchyjevu eksponencijalnu funkcijsku jednadžbu pa se radi o eksponencijalnoj funkciji.

Uvrstimo li  $x_1 = y_1 = 0$  u (2.3), dobivamo

$$f(0, x_2 + y_2) = f(0, x_2)f(0, y_2).$$

Definiramo funkciju  $E_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $E_2(x) = f(0, x)$  pa prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$E_2(x_2 + y_2) = E_2(x_2)E_2(y_2).$$

Dakle,  $E_2$  je također eksponencijalna funkcija.

Uvrstimo li  $y_1 = x_2 = 0$  u (2.3), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 0)f(0, y_2) \\ &= E_1(x_1)E_2(y_2). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1)E_2(x_2)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje su  $E_1$  i  $E_2$  eksponencijalne funkcije.  $\square$

Jednadžbu (2.3) zvat ćemo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *eksponencijalnom funkcijom dviju varijabli*.

**Korolar 2.2.2.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.4)$$

za sve  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dano je sa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n E_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $E_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) eksponencijalne funkcije.

*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za  $n = 2$  tvrdnja vrijedi prema teoremu 2.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1)E_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $E_1, E_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eksponencijalne funkcije.

Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n E_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $E_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) eksponencijalne funkcije.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja za  $n+1$ . Neka je  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$  i  $E_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $E_{n+1}(x) = f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x)$ . Iz (2.4) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, 0) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)f(y_1, y_2, \dots, y_n, 0) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n)g(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n E_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), za neke eksponencijalne funkcije  $E_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Također,

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x+y) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, x+y) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, x) f(\underbrace{0, \dots, 0}_n, y) \\ &= E_{n+1}(x) E_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je  $E_{n+1}$  ekponencijalna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0, 0 + x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^n A_k(x_k) A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} A_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za  $n + 1$  čime je korolar dokazan.  $\square$

Jednadžbu (2.4) zvat ćemo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u  $n$  varijabli*, a svako njeno rješenje *eksponencijalnom funkcijom  $n$  varijabli*.

## 2.3 Vinczeova funkcijska jednadžba

*Vinczeova jednadžba* je funkcijska jednadžba oblika

$$f(x+y) = g(x)k(y) + h(y), \quad (2.5)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje su  $f, g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne funkcije.

Neka je  $k(0) = a$  i  $h(0) = b$ . Ako je  $a = 0$ , tada je

$$f(x) = f(x+0) = g(x)a + b = b.$$

Dakle,  $f$  je konstantna funkcija. Pretpostavimo da je  $a \neq 0$ . Uvrstimo li  $y = 0$  u (2.5), dobivamo

$$g(x) = \frac{f(x) - b}{a}.$$

Neka je  $\phi(x) = \frac{k(x)}{a}$  i  $\psi(x) = h(x) - b\phi(x)$ . Jednadžbu (2.5) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{f(x) - b}{a} a\phi(y) + \psi(y) + b\phi(y) \\ &= f(x)\phi(y) - b\phi(y) + \psi(y) + b\phi(y) \\ &= f(x)\phi(y) + \psi(y). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vrijedi da je  $\phi(0) = \frac{k(0)}{a} = \frac{a}{a} = 1$  i  $\psi(0) = h(0) - b\phi(0) = b - b = 0$ .

Definiramo funkciju

$$\chi(x) = f(x) - f(0). \quad (2.7)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \chi(x+y) &= f(x+y) - f(0) \\ &= f(x)\phi(y) + \psi(y) - f(0) \\ &= (\chi(x) + f(0))\phi(y) + \psi(y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + (f(0)\phi(y) + \psi(y)) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + f(0+y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + f(y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + \chi(y), \end{aligned} \quad (2.8)$$

pri čemu smo dva puta primijenili (2.6). Slijedi

$$\chi(x)\phi(y) + \chi(y) = \chi(x+y) = \chi(y+x) = \chi(y)\phi(x) + \chi(x),$$

odnosno

$$[\phi(y) - 1]\chi(x) = [\phi(x) - 1]\chi(y). \quad (2.9)$$

Ako je  $\phi(y) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , tada vrijedi  $\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $\chi$  zadovoljava aditivnu Cauchyjevu jednadžbu pa postoji  $d \in \mathbb{R}$  takav da je  $\chi(x) = dx$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Slijedi da je

$$f(x) = dx + c, \quad (2.10)$$

gdje je  $c = f(0)$ . Iz (2.6) slijedi da je

$$\begin{aligned} \psi(y) &= f(x+y) - f(x)\phi(y) \\ &= (d(x+y) + c) - (dx + c) \cdot 1 \\ &= dy. \end{aligned}$$

Dakle, rješenja zadane funkcijske jednadžbe su

$$\begin{aligned} f(x) &= dx + c, \\ k(x) &= a, \\ g(x) &= \frac{dx + c - b}{a}, \\ h(x) &= dx + b. \end{aligned}$$

U drugom slučaju vrijedi  $\phi(y_0) \neq 1$  za neki  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Uvrstimo li  $y = y_0$  u (2.9), dobivamo

$$\frac{\chi(x)}{\phi(x) - 1} = \frac{\chi(y_0)}{\phi(y_0) - 1} = s$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Slijedi

$$\chi(x) = s[\phi(x) - 1]. \quad (2.11)$$

Uvrstimo li (2.11) u (2.8), dobivamo

$$s[\phi(x + y) - 1] = [\phi(x) - 1]s\phi(y) + s[\phi(y) - 1].$$

Ako je  $s = 0$ , tada je  $\chi$  nul-funkcija, odakle slijedi da je  $f$  konstantna funkcija. Kako je  $s \neq 0$ , vrijedi da je

$$\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y).$$

Dakle,  $\phi$  zadovoljava ekponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu pa je

$$\phi(x) = t^x,$$

gdje je  $t$  pozitivan realan broj. Iz (2.11) slijedi da je  $\chi(x) = st^x - s$ . Iz (2.7) slijedi da je  $f(x) = st^x + c$ , gdje je  $c$  realna konstanta. Iz (2.6) slijedi

$$\psi(y) = (st^{x+y} + c) - (st^x + c)t^y = c(1 - t^y)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Dakle, rješenja početne funkcijske jednadžbe su

$$\begin{aligned} f(x) &= st^x + c, \\ k(x) &= at^x, \\ g(x) &= \frac{st^x + c - b}{a}, \\ h(x) &= c + (b - c)t^x. \end{aligned}$$

## Poglavlje 3

# Logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

### 3.1 Rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom zovemo jednadžbu oblika

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3.1)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Svako rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe nazivamo *logaritamskom funkcijom*. Funkcija  $x \mapsto \ln x$  je rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe, a vrijedi i općenitije: funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana sa  $f(x) = A(\ln x)$  je rješenje te jednadžbe za svaku aditivnu funkciju  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jer je

$$f(xy) = A(\ln xy) = A(\ln x + \ln y) = A(\ln x) + A(\ln y) = f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Dokazat ćemo da su sva rješenja logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe ovog oblika.

**Teorem 3.1.1.** *Neka je  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava logaritamsku Cauchyjevu jednadžbu. Tada je  $f$  funkcija oblika*

$$f(x) = A(\ln x),$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija. Ako je  $f$  neprekidna, tada je  $f(x) = c \ln x$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta.

*Dokaz.* Uvedimo supstituciju  $x = e^s$  i  $y = e^t$ , gdje su  $s, t \in \mathbb{R}$ . Iz toga slijedi da je  $s = \ln x$  i  $t = \ln y$ . Jednadžbu (3.1) sveli smo na

$$f(e^{s+t}) = f(e^s) + f(e^t).$$

Definiramo funkciju  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $A(s) = f(e^s)$  i imamo

$$A(s+t) = A(s) + A(t)$$

za sve  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . Dakle,  $A$  je aditivna funkcija. Vrijedi da je  $f(x) = A(\ln x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ . Ako je  $f$  neprekidna, tada je i  $A$  neprekidna, pa je  $A(x) = cx$  za neku realnu konstantu  $c$ , odakle slijedi  $f(x) = c \ln x$ .  $\square$

**Napomena 3.1.2.** *Opće rješenje funkcijske jednadžbe  $f(xy) = f(x) + f(y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  je nul-funkcija. Naime, uvrštavanjem  $y = 0$  dobivamo*

$$f(0) = f(x) + f(0),$$

odnosno

$$f(x) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

**Napomena 3.1.3.** *Opće rješenje funkcijske jednadžbe  $f(xy) = f(x) + f(y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  je funkcija*

$$f(x) = A(\ln |x|),$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija. Takve ćemo funkcije također zvati logaritamskim funkcijama. Naime, prema teoremu 3.1.1, restrikcija funkcije  $f$  na  $x, y \in \mathbb{R}_+$  je oblika  $x \mapsto A(\ln x)$ , gdje je  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija. Ako je  $x < 0$ , tada je

$$2f(x) = f(x) + f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) + f(-x) = 2f(-x),$$

pa je  $f(x) = A(\ln(-x))$ . Dakle,  $f(x) = A(\ln |x|)$  za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ako je  $f$  neprekidna, tada je  $f(x) = c \ln |x|$  za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gdje je  $c$  proizvoljna realna konstanta.

## 3.2 Logaritamska Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

**Teorem 3.2.1.** *Opće rješenje  $f: (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \tag{3.2}$$



za sve  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dano je sa

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gdje su  $L_1, L_2: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  logaritamske funkcije.

*Dokaz.* Uvrstimo li  $x_2 = y_2 = 1$  u (3.2), dobivamo

$$f(x_1 y_1, 1) = f(x_1, 1) + f(y_1, 1).$$

Definiramo funkciju  $L_1: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $L_1(x) = f(x, 1)$ . Vrijedi da je

$$L_1(x_1 y_1) = L_1(x_1) + L_1(y_1).$$

Zaključujemo da  $L_1$  zadovoljava logaritamsku Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu pa se radi o logaritamskoj funkciji.

Analogno, uvrstimo li  $x_1 = y_1 = 1$  u (3.2), dobivamo

$$f(1, x_2 y_2) = f(1, x_2) + f(1, y_2).$$

Definiramo funkciju  $L_2: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $L_2(x) = f(1, x)$ . Vrijedi da je

$$L_2(x_2 y_2) = L_2(x_2) + L_2(y_2).$$

Dakle,  $L_2$  je također logaritamska funkcija.

Uvrstimo li  $y_1 = x_2 = 1$  u (3.2), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 1) + f(1, y_2) \\ &= L_1(x_1) + L_2(y_2). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gdje su  $L_1, L_2: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  logaritamske funkcije.  $\square$

Jednadžbu (3.2) zvat ćemo *logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *logaritamskom funkcijom dviju varijabli*.

**Korolar 3.2.2.** *Opće rješenje  $f: (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (3.3)$$

za sve  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dano je sa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n L_k(x_k),$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $L_k: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) logaritamske funkcije.

*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za  $n = 2$  tvrdnja vrijedi prema teoremu 3.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $L_1, L_2: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  logaritamske funkcije.

Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n L_k(x_k),$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $L_k: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) logaritamske funkcije.

Dokažimo tvrdnju za  $n + 1$ . Neka je  $g: (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$  i  $L_{n+1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $L_{n+1}(x) = f(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, x)$ . Iz (3.3) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) &= f(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n, 1) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) + f(y_1, y_2, \dots, y_n, 1) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n L_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), za neke logaritamske funkcije  $L_k: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Također,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(xy) &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, xy) \\ &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, x) + f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, y) \\ &= L_{n+1}(x) + L_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je  $L_{n+1}$  logaritamska funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \dots, x_n \cdot 1, 1 \cdot x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) + f(1, 1, \dots, 1, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) + L_{n+1}(x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n L_k(x_k) + L_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} L_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za  $n + 1$  čime je korolar dokazan. □

Jednadžbu (3.3) zvat ćemo *logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u  $n$  varijabli*, a svako njeno rješenje *logaritamskom funkcijom  $n$  varijabli*.

## Poglavlje 4

# Multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

### 4.1 Rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba je jednadžba oblika

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (4.1)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Svako rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe zvat ćemo *multiplikativnom funkcijom*. Funkcija signum definirana sa

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \\ -1 & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

zadovoljava multiplikativnu funkcijsku jednadžbu.

**Teorem 4.1.1.** *Opća rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe su funkcije*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= 1 && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{ako je } x = 0, \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x > 0, \\ 0 & \text{ako je } x = 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

gdje je  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija.

*Dokaz.* Uvrstimo li  $x = y = 0$  u (4.1), dobivamo

$$f(0) = f(0)f(0),$$

odnosno

$$f(0)[1 - f(0)] = 0,$$

iz čega slijedi da je  $f(0) = 0$  ili  $f(0) = 1$ . Analogno dobivamo, uvrstimo li  $x = y = 1$  u (4.1),

$$f(1)[1 - f(1)] = 0,$$

iz čega slijedi  $f(1) = 0$  ili  $f(1) = 1$ . Pretpostavimo da postoji  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 0$ , takav da je  $f(x_0) = 0$ . Neka je  $x \in \mathbb{R}$  proizvoljan. Vrijedi

$$f(x) = f\left(x_0 \cdot \frac{x}{x_0}\right) = f(x_0)f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Time smo dobili prvo rješenje.

Pretpostavimo da je  $f(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Postoje dvije mogućnosti:  $f(0) = 0$  ili  $f(0) = 1$ . U slučaju da je  $f(0) = 0$ , tvrdimo da  $f$  ne poprima vrijednost 0 na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \neq 0$ , takav da je  $f(y_0) = 0$ . Uvrstimo li  $y = y_0$  u (4.1), dobivamo

$$f(xy_0) = f(x)f(y_0) = 0$$

odnosno

$$f(x) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . To je kontradikcija. Dakle,  $f(0) = 1$ . Uvođenjem supstitucije  $y = 0$  u (4.1) dobivamo

$$f(0) = f(x)f(0)$$

iz čega slijedi da je

$$f(x) = 1$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Time smo dobili drugo rješenje.

Neka je  $x$  pozitivan realan broj. Ima smisla promatrati  $\sqrt{x}$  te vrijedi

$$f(x) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0.$$

Iz ove nejednakosti i činjenice da  $f$  ne poprima vrijednost 0 na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  imamo  $f(x) > 0$  za svaki  $x > 0$  realan broj. Uvedimo supstituciju  $x = e^s$  i  $y = e^t$ , gdje su  $s, t \in \mathbb{R}$ . Iz toga slijedi da je  $s = \ln x$  i  $t = \ln y$ . Uvrštavanjem u (4.1) dobivamo

$$f(e^{s+t}) = f(e^s)f(e^t).$$

Kako je  $f(t) > 0$  za svaki  $t > 0$ , možemo logaritmirati posljednju jednakost prirodnim logaritmom. Dobivamo

$$A(s + t) = A(s) + A(t),$$

gdje je funkcija  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $A(s) = \ln f(s)$  za svaki  $s \in \mathbb{R}$ . Slijedi da je

$$f(x) = e^{A(\ln x)}$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Ako je  $f(1) = 0$ , uvrštavanjem u (4.1) dobivamo  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . To je kontradikcija s činjenicom da  $f$  ne poprima vrijednost 0 na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dakle,  $f(1) = 1$ . Uvrstimo li  $x = y = -1$  u (4.1), dobivamo

$$f(1) = [f(-1)]^2$$

iz čega slijedi da je  $f(-1) = -1$  ili  $f(-1) = 1$ .

Ako je  $f(-1) = 1$ , uvrštavanjem  $y = -1$  u (4.1) dobivamo

$$f(-x) = f(x)f(-1) = f(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pa je  $f$  parna funkcija. Iz toga i iz činjenice da je  $f(0) = 0$  zaključujemo

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Time smo dobili treće rješenje.

Ako je  $f(-1) = -1$ , uvrštavanjem  $y = -1$  u (4.1) dobivamo

$$f(-x) = f(x)f(-1) = -f(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pa je  $f$  neparna funkcija. Slijedi

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x > 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Zajedno s činjenicom da je  $f(0) = 0$ , vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x > 0, \\ 0 & \text{ako je } x = 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Time smo dobili četvrto rješenje. □

Primijetimo da u slučaju kada je  $A$  nul-funkcija, za  $f$  dobivamo funkcije  $x \mapsto |\operatorname{sgn}(x)|$  i  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$  koje nisu neprekidne. Neprekidna rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe opisana su u sljedećem korolaru.

**Korolar 4.1.2.** *Neprekidna rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe su*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= 1 && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= |x|^\alpha && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= |x|^\alpha \operatorname{sgn}(x) && \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdje je  $\alpha$  pozitivna realna konstanta.

*Dokaz.* Kako je  $f$  neprekidna funkcija, to je i aditivna funkcija  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  iz teorema 4.1.1 također neprekidna. Dakle,

$$A(x) = \alpha x,$$

gdje je  $\alpha \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada je

$$e^{A(\ln|x|)} = e^{\alpha \ln|x|} = \left(e^{\ln|x|}\right)^\alpha = |x|^\alpha$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa tvrdnja slijedi iz teorema 4.1.1.

Dokažimo još da je  $\alpha > 0$ . Ako je  $\alpha = 0$ , a  $f$  nije oblika  $x \mapsto 0$  niti  $x \mapsto 1$ , tada je  $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)| = 1$  za svaki  $x \neq 0$  ili  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  za svaki  $x \neq 0$ . U prvom slučaju neprekidnost funkcije  $f$  povlači  $f(0) = 1$ , pa je  $f(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , suprotno pretpostavci. U drugom slučaju je  $f(x) = 1$  za  $x > 0$  i  $f(x) = -1$  za  $x < 0$ , pa  $f$  ne može biti neprekidna funkcija. Ako je  $\alpha < 0$ , tada je

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \infty,$$

pa  $f$  ne može biti neprekidna u 0. Dakle,  $\alpha > 0$ . □

**Propozicija 4.1.3.** *Neka funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava aditivnu i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tada je  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $f(x) = x$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Uočimo da za svaki realan broj  $z \geq 0$  postoji realan broj  $w$  takav da je  $z = w^2$ . Uvrstimo li  $x = w$  i  $y = w$  u multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, dobivamo  $f(z) = [f(w)]^2$  iz čega možemo zaključiti da je

$$f(z) \geq 0 \tag{4.2}$$

za svaki  $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$ .

Pretpostavimo da je  $x \leq y, x, y \in \mathbb{R}$  pa  $y$  zamijenimo sa  $y - x$  u aditivnoj Cauchyjevoj funkcijskoj jednadžbi. Dobivamo:

$$f(y) = f(x) + f(y - x).$$

Iz (4.2) slijedi da je  $f(y - x) \geq 0$  pa je  $f(y) \geq f(x)$ . Zaključujemo da je  $f$  padajuća funkcija pa iz propozicije 1.2.6 slijedi da je  $f(x) = cx$  za neku realnu konstantu  $c$ .

Uvrstimo li dobiveno rješenje i  $x = y = 1$  u multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, dobivamo  $c = c^2$  iz čega slijedi da je  $c = 0$  ili  $c = 1$ . Uvrstimo li  $f(x) = 0$  u aditivnu i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, vidimo da jednakosti vrijede pa je to jedno rješenje. Analogno provjerimo uvrštavanjem  $f(x) = x$  pa zaključujemo da je i to rješenje.  $\square$

## 4.2 Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

**Teorem 4.2.1.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1y_1, x_2y_2) = f(x_1, x_2)f(y_1y_2) \quad (4.3)$$

za sve  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ , dano je sa

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2),$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $M_1, M_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  multiplikativne funkcije.

*Dokaz.* Uvrstimo li  $x_2 = y_2 = 1$  u (4.3), dobivamo

$$f(x_1y_1, 1) = f(x_1, 1)f(y_1, 1).$$

Definiramo funkciju  $M_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $M_1(x) = f(x, 1)$ . Vrijedi

$$M_1(x_1y_1) = M_1(x_1)M_1(y_1).$$

Zaključujemo da je  $M_1$  multiplikativna funkcija.

Uvrstimo li  $x_1 = y_1 = 1$  u (4.3), dobivamo

$$f(1, x_2y_2) = f(1, x_2)f(1, y_2).$$

Definiramo funkciju  $M_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $M_2(x) = f(1, x)$ . Vrijedi

$$M_2(x_2y_2) = M_2(x_2)M_2(y_2).$$



Zaključujemo da je  $M_2$  također multiplikativna funkcija.

Uvrstimo li  $y_1 = x_2 = 1$  u (4.3), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 1)f(1, y_2) \\ &= M_1(x_1)M_2(y_2). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2),$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $M_1, M_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  multiplikativne funkcije.  $\square$

Jednadžbu (4.3) zvat ćemo *multiplikativnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *multiplikativnom funkcijom dviju varijabli*.

**Korolar 4.2.2.** *Opće rješenje  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (4.4)$$

za sve  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), dano je sa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n M_k(x_k),$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $M_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) multiplikativne funkcije.

*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za  $n = 2$  tvrdnja vrijedi prema teoremu 4.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2)$$

za sve  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , gdje su  $M_1, M_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  multiplikativne funkcije.

Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n M_k(x_k),$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gdje su  $M_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) multiplikativne funkcije.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja za  $n+1$ . Neka je  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$  i  $M_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $M_{n+1}(x) = f(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, x)$ . Iz (4.4) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) &= f(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, 1) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)f(y_1, y_2, \dots, y_n, 1) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n)g(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n M_k(x_k)$$

za sve  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), za neke multiplikativne funkcije  $M_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Također,

$$\begin{aligned} M_{n+1}(xy) &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, xy) \\ &= f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, x) f(\underbrace{1, \dots, 1}_n, y) \\ &= M_{n+1}(x) M_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je  $M_{n+1}$  multiplikativna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \dots, x_n \cdot 1, 1 \cdot x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)(1, 1, \dots, 1, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) M_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^n M_k(x_k) M_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} M_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za  $n + 1$  čime je korolar dokazan.  $\square$

Jednadžbu (4.4) zvat ćemo *multiplikativnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u  $n$  varijabli*, a svako njeno rješenje *multiplikativnom funkcijom  $n$  varijabli*.

# Poglavlje 5

## Cauchyjeva NQR metoda

### 5.1 Opis Cauchyjeve NQR metode

U ovom poglavlju promatrat ćemo funkcijske jednadžbe općeg oblika

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)).$$

Navest ćemo korake u pronalaženju neprekidnih rješenja funkcijske jednadžbe

$$f(x + y) = F(f(x), f(y), f(x - y); x, y). \quad (5.1)$$

Prvo uvodimo supstituciju  $x = y = 0$  u (5.1) te dobivamo:

$$f(0) = F(f(0), f(0), f(0); 0, 0).$$

Rješavajući ovu jednadžbu dobivamo vrijednost funkcije  $f$  za  $x = 0$ . Zatim umjesto  $x$  uvrštavamo redom  $2x, 3x, \dots, (n - 1)x$ , a umjesto  $y$  uvrštavamo  $x$  i dobivamo:

$$\begin{aligned} f(2x) &= F(f(x), f(x), f(0); x, x) = F_2(f(x), x), \\ f(3x) &= F(f(2x), f(x), f(x); 2x, x) = F_3(f(x), x), \\ f(4x) &= F(f(3x), f(x), f(2x); 3x, x) = F_4(f(x), x), \\ &\vdots \\ f(nx) &= F(f((n - 1)x), f(x), f((n - 2)x); (n - 1)x, x) = F_n(f(x), x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ako u posljednjoj jednakosti uvedemo supstituciju  $x = \frac{m}{n}y$ , dobivamo:

$$f(my) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}y\right), \frac{m}{n}y\right).$$

Zbog jednakosti (5.2), lijevu stranu možemo zapisati kao  $F_m(f(y), y)$ , pa imamo

$$F_m(f(y), y) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}y\right), \frac{m}{n}y\right).$$

Pretpostavimo da se ova funkcijska jednadžba može riješiti po  $f\left(\frac{m}{n}y\right)$ , odakle je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = \mathcal{F}\left(f(y), y; \frac{m}{n}\right)$$

za neku funkciju  $\mathcal{F}(a, y; x)$ . Uvedemo li supstituciju  $y = 1$ , dobivamo

$$f(q) = \mathcal{F}(f(1), 1; q),$$

za svaki  $q \in \mathbb{Q}_+$ . Neka je  $x$  proizvoljan nenegativan realan broj. Tada postoji niz nenegativnih racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  koji konvergiraju u  $x$ . Pretpostavimo li da su  $f$  i  $\mathcal{F}$  neprekidne funkcije, iz posljednje jednakosti slijedi

$$f(x) = \mathcal{F}(f(1), 1; x),$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ . Da bismo pronašli funkciju  $f$  za  $x < 0$ , uvodimo supstituciju  $y = -x$  pa uvrštavanjem u (5.1) imamo:

$$\begin{aligned} f(0) &= F(f(x), f(-x), f(2x); x - x) \\ &= F(f(x), \mathcal{F}(f(1), 1; -x), F_2(f(x), x); x, -x). \end{aligned}$$

Posljednju jednadžbu riješimo po  $f(x)$  te dobivamo konačno rješenje

$$f(x) = \mathcal{G}(x),$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}, x < 0$ .

## 5.2 Primjena Cauchyjeve NQR metode na određivanje neprekidnih rješenja Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi

### Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Cauchyjevom NQR metodom odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo li  $x = y = 0$  u zadanu jednadžbu dobivamo  $f(0) = 2f(0)$  iz čega slijedi da je

$$f(0) = 0.$$

Uvrstimo li  $x = -y$  u zadanu jednadžbu imamo  $f(0) = f(x) + f(-x)$  iz čega slijedi da je

$$f(-x) = -f(x). \quad (5.3)$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n). \quad (5.4)$$

Za  $n = 2$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1$ . Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.4). Uvrstimo li  $x_i = x$  za svaki  $i$  u (5.4), dobivamo

$$f(nx) = nf(x).$$

Za  $x = \frac{m}{n}y$ , gdje su  $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ , imamo

$$f(my) = nf\left(\frac{m}{n}y\right),$$

odnosno

$$\frac{m}{n}f(y) = f\left(\frac{m}{n}y\right).$$

Iz posljednje jednakosti i (5.3) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(-\frac{m}{n}y\right) = -\frac{m}{n}f(y).$$

Konačno,

$$f(qy) = qf(y)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$  i za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ . Definiramo li  $c = f(1)$ , imamo da je

$$f(q) = cq$$

za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}$ . Postoji niz racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = r.$$

Kako je  $f$  neprekidna funkcija, vrijedi

$$f(r) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} cq_n = cr.$$

Dakle, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je  $f(x) = cx$ , pri čemu je  $c \in \mathbb{R}$ .

### Eksponecijalna Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Cauchyjevom NQR metodom odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju eksponecijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo li  $x = y = 0$  u zadanu jednadžbu, dobivamo  $f(0) = f(0)^2$  iz čega slijedi da je  $f(0) = 0$  ili  $f(0) = 1$ . Ako pretpostavimo da  $f$  nije nul-funkcija, onda je  $f(0) = 1$ .

Uvrstimo li  $x = -y$  u zadanu jednadžbu, dobivamo  $f(0) = f(x)f(-x)$  iz čega slijedi

$$f(-x) = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}. \quad (5.5)$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n). \quad (5.6)$$

Za  $n = 2$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$$

za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1$ . Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.6). Uvrstimo li  $x_i = x$  za svaki  $i$  u (5.6), dobivamo

$$f(nx) = f(x)^n.$$

Ako je  $x = \frac{m}{n}y$ , gdje su  $y \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , slijedi redom

$$\begin{aligned} f(my) &= f\left(\frac{m}{n}y\right)^n, \\ f(y)^m &= f\left(\frac{m}{n}y\right)^n, \\ f\left(\frac{m}{n}y\right) &= f(y)^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.5) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(-\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}.$$

Konačno,  $f(qy) = f(y)^q$  za svaki  $y \in \mathbb{R}$  i za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ . Definiramo li  $a = f(1)$ , imamo da je

$$f(q) = a^q$$

za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}$ . Postoji niz racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = r.$$

Kako je  $f$  neprekidna funkcija, vrijedi

$$f(r) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n} = a^r.$$

Dakle, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je  $f(x) = a^x$ .

## Logaritamska Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju logaritamsku Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}_+$ .

Uvrstimo li  $x = y = 1$  u zadanu jednadžbu, dobivamo  $f(1) = 2f(1)$  iz čega slijedi da je

$$f(1) = 0.$$

Uvrstimo li  $y = \frac{1}{x}$  u zadanu jednadžbu, dobivamo  $f(1) = f(x) + f(x^{-1})$  iz čega slijedi da je

$$f(x^{-1}) = -f(x). \quad (5.7)$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n). \quad (5.8)$$

Za  $n = 2$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ . Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1$ . Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}) &= f((x_1 x_2 \cdots x_n) x_{n+1}) \\ &= f(x_1 x_2 \cdots x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.8). Stavimo li  $x_i = x$  za svaki  $i$ , dobivamo

$$f(x^n) = n f(x).$$

Ako je  $x = y^{\frac{m}{n}}$ , gdje su  $y \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , slijedi redom

$$\begin{aligned} f(y^m) &= n f\left(y^{\frac{m}{n}}\right), \\ m f(y) &= n f\left(y^{\frac{m}{n}}\right), \\ f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) &= \frac{m}{n} f(y). \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.7) zaključujemo da je

$$f\left(y^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n} f(y).$$

Konačno,

$$f(y^q) = q f(y)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$  i za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}$ . Tada postoji niz racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = r.$$

Prema dokazanom vrijedi

$$f(y^{q_n}) = q_n f(y).$$

Zbog neprekidnosti funkcije  $f$  imamo

$$f(y^r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y)^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n f(y) = r f(y).$$

Stavimo li  $y = a$ , gdje je  $a$  proizvoljna realna konstanta i  $x = a^r$ , vrijedi

$$f(x) = f(a) \log_a x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x = \log_b x,$$

gdje je  $b$  pozitivna realna konstanta takva da je  $f(a) = \frac{1}{\log_a b}$ .



### Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednađba

Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednađbu

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo li najprije  $x = y = 0$  u zadanu jednađbu, imamo

$$f(0)[f(0) - 1] = 0,$$

pa je  $f(0) = 0$  ili  $f(0) = 1$ . Uvrstimo li  $x = y = 1$  u zadanu jednađbu, imamo

$$f(1)[f(1) - 1] = 0,$$

iz čega slijedi da je  $f(1) = 0$  ili  $f(1) = 1$ . Neka je  $f(1) = 0$ . Tada za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ , pa je  $f$  nul-funkcija.

Neka je  $f(1) = 1$ . Ako je  $y = \frac{1}{x}$  za  $x \neq 0$ , imamo

$$f(1) = f(x)f(x^{-1}),$$

odnosno

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}. \quad (5.9)$$

Primijetimo da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n), \quad (5.10)$$

što se lako dokaže matematičkom indukcijom. Za  $n = 2$  tvrdnja slijedi iz same definicije multiplikativne Cauchyjeve funkcije. Pretpostavimo da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$$

za sve  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Dokađimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1$ . Imamo

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}) &= f((x_1 x_2 \cdots x_n) x_{n+1}) \\ &= f(x_1 x_2 \cdots x_n) f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.10). Uvrstimo li  $x_i = x$  za svaki  $i$  u (5.10), dobivamo

$$f(x^n) = f(x)^n.$$

Ako je  $x = y^{\frac{m}{n}}$ , za  $y \in \mathbb{R}_+$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , slijedi redom

$$\begin{aligned} f(y^m) &= f\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^n, \\ f(y)^m &= f\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^n, \\ f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) &= f(y)^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.9) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(y^{-\frac{m}{n}}\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}.$$

Konačno,

$$f(y^q) = f(y)^q$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}_+$  i za  $q \in \mathbb{Q}$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}$ . Tada postoji niz racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  takav da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = r.$$

Prema dokazanom imamo

$$f(y^{q_n}) = f(y)^{q_n}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije  $f$  vrijedi

$$f(y^r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y^{q_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y)^{q_n} = f(y)^r.$$

Stavimo li  $y = a$ , gdje je  $a$  proizvoljna realna konstanta i  $x = a^r$ , vrijedi

$$f(x) = f(a^r) = f(a)^r = f(a)^{\log_a x}.$$

Ako je  $f(a) = 1$ , tada je  $f(x) = 1$  za svaki  $x > 0$ . Ako je  $x < 0$ , tada je  $f(x)^2 = f(x^2) = 1$ , pa je  $f(x) = 1$  ili  $f(x) = -1$ . Zbog neprekidnosti funkcije  $f$  zaključujemo  $f(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Ako je  $f(a) \neq 1$ , onda je  $f(a) = a^\alpha$ , gdje je  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Slijedi da je, za svaki  $x > 0$ ,

$$f(x) = x^\alpha,$$

gdje je  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

### 5.3 Još neki primjeri

**Primjer 5.3.1.** Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) = a^{xy} f(x)f(y),$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , pri čemu je  $a$  pozitivna realna konstanta.

Funkcija  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  je očito rješenje zadane jednačbe. Da bismo dobili preostala rješenja, uvrstimo  $x = y = 0$  te dobivamo

$$f(0) = f(0)f(0),$$

odnosno

$$f(0)[1 - f(0)] = 0.$$

Kako promatramo netrivialna rješenja, promatramo slučaj kada je  $f(0) = 1$ , inače je

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo li redom  $y = x, 2x, \dots, (n-1)x$  u zadanu jednačbu, imamo

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = a^{x^2} f(x)^2, \\ f(3x) &= f(2x+x) = a^{(1+2)x^2} f(x)^3, \\ f(4x) &= f(3x+x) = a^{(1+2+3)x^2} f(x)^4, \\ &\vdots \\ f(nx) &= f((n-1)x+x) = a^{(1+2+3+\dots+(n-1))x^2} f(x)^n. \end{aligned}$$

Posljednju jednakost možemo zapisati kao

$$f(nx) = a^{\frac{n(n-1)}{2}x^2} f(x)^n. \quad (5.11)$$

U (5.11) uvedimo supstituciju  $x = \frac{m}{n}y$ , gdje su  $m, n \in \mathbb{N}$ , pa imamo

$$f(my) = a^{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m}{n}y\right)^2} f\left(\frac{m}{n}y\right)^n.$$

Ako u (5.11) uvrstimo  $(m, y)$  umjesto  $(n, x)$ , dobivamo

$$f(my) = a^{\frac{m(m-1)}{2}y^2} f(y)^m.$$

Izjednačavanjem desnih strana dobivenih jednakosti dobivamo

$$a^{\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{m}{n}y\right)^2} f\left(\frac{m}{n}y\right)^n = a^{\frac{m(m-1)}{2}y^2} f(y)^m.$$

Slijedi da je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = a^{\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m-1}{n}\right)y^2} f(y)^{\frac{m}{n}}.$$

Neka je  $y = 1$  i neka je  $c = f(1)$ . Primijetimo da je

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{4}} f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ako je  $f(1) = 0$ , tada je

$$f(x) = f((x-1) + 1) = a^{x-1} f(x-1) f(1) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $c > 0$ . Vrijedi

$$f(x) = a^{\frac{x(x-1)}{2}} c^x, \quad (5.12)$$

za svaki  $x \in \mathbb{Q}_+$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}_+$  i neka niz racionalnih brojeva  $\{q_n\}$  konvergira u  $r$ . Kako je  $f$  neprekidna, vrijedi:

$$f(r) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{q_n(q_n-1)}{2}} c^{q_n} = a^{\frac{r(r-1)}{2}} c^r.$$

Da bismo odredili  $f$  za  $x < 0$ , koristimo činjenicu da je  $f(0) = 1$  i supstituiramo  $y = -x$ , pri čemu je  $x > 0$ . Dobivamo

$$1 = a^{-x^2} f(x) f(-x),$$

odnosno

$$f(-x) = a^{x^2} f(x)^{-1} = a^{\frac{-x(-x-1)}{2}} c^{-x}.$$

Dakle, uz trivijalno rješenje, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je

$$f(x) = a^{\frac{x(x-1)}{2}} c^x,$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c$  pozitivna realna konstanta.

**Primjer 5.3.2.** Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2,$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvrstimo li  $x = y = 0$  u zadanu jednadžbu, dobivamo

$$f(0)^4 = f(0)^2$$

iz čega slijedi da je  $f(0) = 0$  i  $f(0) = \pm 1$ .

Ako je  $f(0) = 0$ , uvrštavajući  $y = x$  u zadanu jednadžbu dobivamo  $f(2x)f(0) = f(x)^4$  iz čega slijedi da je

$$f(x) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$  jedno rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

Primijetimo da  $f$  nema nultočka ako nije nul-funkcija. Naime, ako postoji  $x_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(x_0) = 0$ , tada je  $f(x + x_0)f(x - x_0) = 0$  pa za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $f(x + x_0) = 0$  ili  $f(x - x_0) = 0$ , odakle je  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Ako je  $f(0) = 1$ , zamijenimo redom  $x$  i  $y$  sa  $x, 2x, 2^2x, \dots$  te imamo

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x)^4 = f(x)^{2^2}, \\ f(4x) &= f(2x)^4 = f(x)^{4^2}, \\ f(8x) &= f(4x)^4 = f(x)^{8^2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Možemo naslutiti da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(nx) = f(x)^{n^2}. \quad (5.13)$$

Dokažimo tu slutnju matematičkom indukcijom. Za  $n = 1$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $1, 2, \dots, n$  i dokažimo da vrijedi i za  $n + 1$ . Uvrstimo  $x = ny$  u zadanu jednadžbu te dobivamo

$$f((n + 1)y)f((n - 1)y) = f(ny)^2 f(y)^2.$$

Prema pretpostavci indukcije je  $f((n - 1)y) = f(y)^{(n-1)^2}$  i  $f(ny) = f(y)^{n^2}$ , pa imamo

$$f((n + 1)y) = f(y)^{-(n-1)^2} f(y)^{2n^2} f(y)^2 = f(y)^{(n+1)^2},$$

iz čega zaključujemo da (5.13) vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

Neka je  $x = \frac{m}{n}y$ , gdje su  $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ . Kako je

$$f(nx) = f(x)^{n^2} = f\left(\frac{m}{n}y\right)^{n^2} \quad \text{i} \quad f(my) = f(y)^{m^2},$$

to je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{\frac{m^2}{n^2}}.$$

Stavimo li  $y = 1$  i definiramo li  $c = f(1) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^4 > 0$ , dobivamo

$$f(x) = c^{x^2}$$

za svaki  $x \in \mathbb{Q}_+$ . Zbog neprekidnosti funkcije  $f$ , vrijedi da je  $f(x) = c^{x^2}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ . Da bismo odredili  $f$  za  $x < 0$ , uvrstimo  $x = 0$  u zadanu jednadžbu. Vrijedi

$$f(y)f(-y) = f(y)^2,$$

odnosno

$$f(-y) = f(y)$$

iz čega slijedi da je

$$f(x) = c^{x^2}$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Preostaje slučaj kada je  $f(0) = -1$ . Uočimo da funkcija  $-f$  također zadovoljava zadanu funkcijsku jednadžbu. Iz prethodnog slučaja možemo zaključiti da je

$$-f(x) = c^{x^2},$$

odnosno

$$f(x) = -c^{x^2},$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c$  pozitivna realna konstanta.

**Primjer 5.3.3.** *Odredimo sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Uvedimo supstituciju  $x = y = \frac{z}{2}$  pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu imamo

$$f(z) = 2f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right)^2 = \left(1 + f\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 - 1.$$

Zaključujemo da je  $f(x) \geq -1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Ako je  $f(1) = -1$ , slijedi

$$f(x) = f(x - 1 + 1) = f(x - 1) + f(1) + f(x - 1)f(1) = -1$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Promatramo slučaj kada je  $f(1) > -1$ . Uvrstimo li u zadanu jednadžbu redom  $y = x, 2x, \dots$  dobivamo

$$\begin{aligned} f(2x) &= 2f(x) + f(x)^2 = (f(x) + 1)^2 - 1, \\ f(3x) &= f(2x) + f(x) + f(2x)f(x) = f(x)^3 + 3f(x)^2 + 3f(x) = (f(x) + 1)^3 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Možemo naslutiti da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(nx) = (f(x) + 1)^n - 1. \quad (5.14)$$

Dokažimo tu slutnju matematičkom indukcijom. Za  $n = 1$  tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $n \in \mathbb{N}$  te dokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n + 1$ . Imamo:

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(x) + f(nx) + f(x)f(nx) \\ &= f(x) + (f(x) + 1)^n - 1 + f(x)(f(x) + 1)^n - f(x) \\ &= (f(x) + 1)^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Zaključujemo da (5.14) vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

Uvedemo supstituciju  $x = \frac{m}{n}y$ , gdje su  $y \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  i uvrstimo u (5.14) te dobivamo

$$f(my) = \left( f\left(\frac{m}{n}y\right) + 1 \right)^n - 1.$$

Iz (5.14) slijedi i

$$f(my) = (f(y) + 1)^m - 1.$$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih jednakosti dobivamo

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = (f(y) + 1)^{\frac{m}{n}} - 1.$$

Uvrstimo li  $y = 1$  i definiramo li  $c = 1 + f(1) > 0$ , slijedi da je

$$f(x) = c^x - 1$$

za svaki  $x \in \mathbb{Q}_+$ . Zbog neprekidnosti funkcije  $f$  vrijedi da je  $f(x) = c^x - 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}_+$ . Da bismo odredili  $f$  za  $x < 0$ , uvrstimo  $y = -x$ ,  $x > 0$ , u zadanu jednadžbu te imamo

$$0 = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x).$$

Ako postoji  $x$  takav da je  $f(x) = -1$ , tada iz gornje jednakosti dobivamo  $0 = -1$ , što je kontradikcija. Dakle,  $f(x) \neq -1$  za svaki  $x$ , pa imamo

$$f(-x) = \frac{-f(x)}{1 + f(x)} = \frac{-c^x + 1}{c^x} = -1 + \frac{1}{c^x} = c^{-x} - 1.$$

Dakle,

$$f(x) = c^x - 1$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c$  pozitivna realna konstanta.

# Bibliografija

- [1] C. Efthimiou, *Introduction to functional equations*, MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [2] P. Kannappan, *Functional equations and inequalities with applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.
- [3] P.K. Sahoo, P. Kannappan, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- [4] C.G. Small, *Functional equations and how to solve them*, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.



# Sažetak

Cauchyjeve funkcijske jednađbe se smatraju najvažnijim funkcijskim jednađbama (to su jednađbe u kojima su nepoznanice funkcije, ovdje prvenstveno realne funkcije realne varijable). U ovom radu dana su rješenja za četiri tipa Cauchyjevih funkcijskih jednađbi:

1. aditivnu  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,
2. eksponencijalnu  $f(x + y) = f(x)f(y)$ ,
3. logaritamsku  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,
4. multiplikativnu  $f(xy) = f(x)f(y)$ .

Opisana je i takozvana Cauchyjeva  $\mathbb{N}\mathbb{Q}\mathbb{R}$  metoda za rješavanje funkcijskih jednađbi općeg oblika  $f(x + y) = F(f(x), f(y))$ . Dobiveni rezultati i korištena metodologija se često primjenjuju u rješavanju nekih drugih funkcijskih jednađbi.

# Summary

The Cauchy functional equations are considered the most important functional equations. Functional equations are equations in which the unknowns are functions, here mostly real functions of a real variable. In this thesis we give solutions for four types of the Cauchy functional equations:

1. additive  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,
2. exponential  $f(x + y) = f(x)f(y)$ ,
3. logarithmic  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,
4. multiplicative  $f(xy) = f(x)f(y)$ .

We also describe Cauchy's  $\mathbb{NQR}$  method for solving the functional equations of the form  $f(x + y) = F(f(x), f(y))$ . The results obtained and the methodology used are often applied when solving some other functional equations.

# Životopis

Rođena sam 27. prosinca 1992. godine u Karlovcu. Odrasla sam i živim s roditeljima i dvije mlađe sestre u Jarčem Polju, malom mjestu pored Karlovca. Školovanje sam započela 1999. godine u Područnoj školi Jarče Polje, Osnovna škola Netretić. Od 2007. godine pohađala sam Gimnaziju Karlovac, opći smjer te svaki razred završila s odličnim uspjehom. Prirodoslovno matematički fakultet, Matematički odsjek upisala sam 2011. godine na kojem sam 2015. godine završila sveučilišni preddiplomski studij Matematika; smjer nastavnički. Godinu dana držala sam demonstrature iz kolegija Elementarna geometrija. Poznajem engleski jezik izvrsno u govoru i pismu. Otvorena sam i komunikativna osoba, volim nova iskustva i rad s ljudima.