SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Škarjak

CAUCHYJEVE FUNKCIJSKE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, srpanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. Ponekad se zahtijeva da funkcije zadovoljavaju određene uvjete (na primjer: neprekidnost, monotonost, ograničenost, ...). Najpoznatija takva jednadžba je aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba koju ćemo opisati u prvom poglavlju ovog rada, sa i bez pretpostavke neprekidnosti. Neprekidno rješenje ove funkcijske jednadžbe odredio je Cauchy 1821. godine, a rješenje bez pretpostavke neprekidnosti Hamel 1905. godine. Osim toga, proučit ćemo aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe u kompleksnoj ravnini, kao i aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe u više varijabli. U drugom, trećem i četvrtom poglavlju proučavamo redom eksponencijalnu, logaritamsku i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, čije se rješavanje svodi na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. U petom poglavlju opisat ćemo Cauchyjevu $\mathbb{N}\mathbb{Q}\mathbb{R}$ metodu rješavanja funkcijskih jednadžbi te ju primijeniti na rješavanje svake od navedene četiri vrste Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi, ali i na neke druge primjere.

Poglavlje 1

Aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

1.1 Neprekidno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava jednadžbu

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ovu jednadžbu nazivamo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom*, a svako njeno rješenje aditivnom funkcijom.

Primjer aditivne funkcije je funkcija $x \mapsto cx$, pri čemu je c proizvoljna realna konstanta. Prema sljedećem teoremu, to je jedino rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe koje je neprekidno.

Teorem 1.1.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je f funkcija oblika $x \mapsto cx$ pri čemu je c proizvoljna realna konstanta.*

Dokaz. Najprije fiksiramo x te integriramo obje strane jednadžbe (1.1) po varijabli y te dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)\,dy = \int_0^1 [f(x+y) - f(y)]\,dy \\ &= \int_0^1 f(x+y)\,dy - \int_0^1 f(y)\,dy = \int_x^{1+x} f(u)\,du - \int_0^1 f(y)\,dy, \end{aligned}$$

pri čemu je uvedena supstitucija $u = x + y$. Kako je f neprekidna funkcija, iz osnovnog teorema diferencijalnog i integralnog računa dobivamo

$$f'(x) = f(1 + x) - f(x), \tag{1.2}$$

a zbog aditivnosti od f vrijedi

$$f(1 + x) = f(1) + f(x). \tag{1.3}$$

Uvrstimo li (1.3) u (1.2), dobivamo da je

$$f'(x) = c$$

pri čemu je $c = f(1)$. Rješavanjem dobivene diferencijalne jednadžbe prvog reda dobivamo da je

$$f(x) = cx + d, \tag{1.4}$$

pri čemu je d proizvoljna realna konstanta. Uvrstimo li (1.4) u (1.1), dobivamo da je

$$c(x + y) + d = cx + d + cy + d$$

odnosno

$$d = 2d$$

iz čega slijedi da je $d = 0$. Dakle, $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Napomena 1.1.2. *Svaka funkcija $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava jednadžbu $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$ može se proširiti do aditivne funkcije $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dovoljno je definirati $\tilde{f}(x) = f(x)$ ako je $x > 0$, $\tilde{f}(0) = f(0)$ i $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ ako je $x < 0$. Naime, ako su $x, y \leq 0$, tada je i $x + y \leq 0$, pa je*

$$\tilde{f}(x + y) = -f(-x - y) = -(f(-x) + f(-y)) = -f(-x) - f(-y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y).$$

Ako je $x > 0, y \leq 0$ i $x + y > 0$, tada je

$$\tilde{f}(x + y) - \tilde{f}(y) = f(x + y) + f(-y) = f((x + y) + (-y)) = f(x) = \tilde{f}(x),$$

odakle slijedi $\tilde{f}(x + y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$. Analogno bi se provjerili i ostali slučajevi. Funkcije $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu ćemo također nazivati aditivnim funkcijama. Posebno, svaka neprekidna aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ je oblika $x \mapsto cx$, gdje je c proizvoljna konstanta.

Prisjetimo se da za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je lokalno integrabilna ako je integrabilna na svakom ograničenom skupu. Prema teoremu 1.1.1, svako lokalno integrabilno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe je oblika $x \mapsto cx$ za neku realnu konstantu c. Da bismo to dokazali, pretpostavimo da je f lokalno integrabilno rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
yf(x) &= \int_0^y f(x)\,dz \\
&= \int_0^y [f(x+z) - f(z)]\,dz \\
&= \int_x^{x+y} f(u)\,du - \int_0^y f(z)\,dz \\
&= \int_0^{x+y} f(u)\,du - \int_0^x f(u)\,du - \int_0^y f(u)du.
\end{aligned}$$

Zamijene li varijable x i y mjesta, zadnja jednakost u gornjem nizu jednakosti ostaje nepromijenjena te zbog toga vrijedi da je

$$yf(x) = xf(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je, za $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = c,$$

gdje je c proizvoljna realna konstanta. Iz posljednje jednakosti slijedi da je $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uvrštavanjem u (1.1) dobivamo da je $f(0) = 0$. Dakle, $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokazat ćemo teorem 1.1.1 na još jedan način. Za to će nam trebati sljedeća lema.

Lema 1.1.3. *Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe, tada je f racionalno homogena, to jest $f(rx) = r\,f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $r \in \mathbb{Q}$. Štoviše, $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$, pri čemu je c proizvoljna realna konstanta.*

Dokaz. Uvrštavajući $x = y = 0$ u (1.1), zaključujemo da vrijedi

$$f(0) = 0. \tag{1.5}$$

Uvrštavajući $y = -x$ u (1.1), dobivamo da je

$$f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(0) = f(x) + f(-x).$$

Koristeći (1.5), zaključujemo

$$f(-x) = -f(x) \tag{1.6}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, do sada smo dokazali da je svako rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe neparna funkcija. Dokažimo sada da je također i racionalno homogena. Uzmimo bilo koji x te promatrajmo

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$f(nx) = nf(x) \tag{1.7}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. U slučaju da je n negativan cijeli broj, tada je $-n \in \mathbb{N}$ te koristeći tvrdnje (1.7) i (1.6) dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} f(nx) &= -f(-nx) \\ &= -(-n)f(x) \\ &= nf(x). \end{aligned}$$

Dokazali smo da vrijedi $f(nx) = nf(x)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$. Stavimo sada da je r proizvoljan racionalan broj, odnosno da je

$$r = \frac{k}{l}$$

gdje je k cijeli broj, a l prirodan broj. Vrijedi jednakost $kx = l(rx)$. Iskoristimo li činjenicu da je f homogena za cijele brojeve, dobivamo da je

$$k\,f(x) = f(kx) = f(l(rx)) = l\,f(rx),$$

odnosno

$$f(rx) = \frac{k}{l}\,f(x) = r\,f(x).$$

Dakle, f je racionalno homogena. Nadalje, stavimo li da je $x = 1$ i definiramo li $c = f(1)$, iz prethodne jednadžbe dobivamo da je

$$f(r) = r\,f(1),$$

odnosno

$$f(r) = c\,r$$

za svaki racionalan broj r, što je i trebalo dokazati. □

Slijedi dokaz teorema 1.1.1 na drugačiji način.

Dokaz. Neka je f neprekidno rješenje aditivne Cauchyjeve jednadžbe. Za svaki realan broj x postoji niz racionalnih brojeva $\{r_n\}$ takav da vrijedi $r_n \to x$. Kako f zadovoljava aditivnu Cauchyjevu jednadžbu, prema lemi 1.1.3 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(r_n) = cr_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Koristeći neprekidnost funkcije f, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} cr_n \\ &= cx. \end{aligned}$$

□

Teorem 1.1.4. *Neka je funkcija f rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Ako je f neprekidna u točki, onda je neprekidna na cijeloj svojoj domeni.*

Dokaz. Neka je f neprekidna u točki t i neka je x proizvoljna točka. Tada je $\lim_{y\to t} f(y) = f(t)$. Dokažimo da je f neprekidna u x.

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} f(y) &= \lim_{y\to x} f(y - x + x - t + t) \\ &= \lim_{y\to x} [f(y - x + t) + f(x - t)] \\ &= \lim_{y\to x} f(y - x + t) + \lim_{y\to x} f(x - t) \\ &= f(t) + f(x - t) \\ &= f(t) + f(x) - f(t) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je f neprekidna u x, a kako je x proizvoljna točka, zaključujemo da je f neprekidna na cijeloj svojoj domeni. □

Iz teorema 1.1.4 i 1.1.1 slijedi:

Korolar 1.1.5. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija koja je neprekidna u točki. Tada je $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je c proizvoljna realna konstanta.*

U sljedećim primjerima riješit ćemo neke funkcijske jednadžbe koje se svode na Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. U svim tim primjerima traže se neprekidna rješenja jednadžbi.

Primjer 1.1.6. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f(x+y) = A^y f(x) + A^x f(y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje je A pozitivna konstanta.

Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = A^{-x} f(x)$. Kako je f neprekidna, te je i g neprekidna. Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= A^{-(x+y)} f(x+y) \\ &= A^{-(x+y)}(A^y f(x) + A^x f(y)) \\ &= A^{-x} f(y) + A^{-y} f(x) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija oblika $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Dakle, vrijedi da je $cx = A^{-x} f(x)$, odnosno $f(x) = cxA^x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.1.7. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju Jensenovu funkcijsku jednadžbu*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo prvo $y = 0$ u zadanu jednadžbu i dobivamo

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+b}{2},$$

gdje je $f(0) = b$. Uvedemo li supstituciju $x = y + z$, dobivamo

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{f(y+z)+b}{2}.$$

Iz zadane jednadžbe znamo da je

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{f(y)+f(z)}{2}.$$

Izjednačimo li desne strane prethodnih jednadžbi, dobivamo

$$\frac{f(y)+f(z)}{2} = \frac{f(y+z)+b}{2},$$

što je ekvivalentno sa
$$f(y+z) = f(y) + f(z) - b.$$
Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) - b$. Vrijedi
$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - b \\ &= f(x) + f(y) - b - b \\ &= f(x) - b + f(y) - b \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$
Ovime smo zadanu jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Slijedi da je $cx = f(x) - b$, odnosno da je rješenje zadane jednadžbe funkcija $f(x) = cx + b$, gdje su $b, c \in \mathbb{R}$. Prema napomeni 1.1.2, isto rješenje dobivamo i ako je f funkcija sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$.

Primjer 1.1.8. *Odredimo sva neprekidna rješenja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*
$$f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = f(x) + f(y),$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ konstanta.

Neka je funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x^n) = f(x)$. Tada je
$$\begin{aligned} g(x^n + y^n) &= f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) \\ &= f(x) + f(y) \\ &= g(x^n) + g(y^n), \end{aligned}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Promatramo dva moguća slučaja. Prvi je da je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj. Tada izrazi x^n i y^n mogu poprimiti bilo koju realnu vrijednost te vrijedi da je
$$g(x+y) = g(y) + g(y),$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neprekidna rješenja ove jednadžbe su oblika $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Vraćanjem u izraz za f, dobivamo da je $f(x) = g(x^n) = cx^n$. Drugi slučaj je da je $n \in \mathbb{N}$ paran broj. Tada argument funkcije $g(x^n) = f(x)$ poprima samo nenegativne vrijednosti. Dakle, izrazi x^n i y^n poprimaju vrijednosti iz intervala $[0, +\infty\rangle$ te vrijedi da je
$$g(x+y) = g(y) + g(y),$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$. Neprekidna rješenja ove funkcijske jednadžbe su funkcije oblika $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Dakle, i u drugom slučaju rješenja zadane funkcijske jednadžbe su funkcije oblika $f(x) = g(x^n) = cx^n$.

Primjer 1.1.9. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty\rangle$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x^2+y^2) = f(x^2-y^2) + f(2xy)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uočimo da tri argumenta funkcije možemo povezati sa

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2.$$

Uvedemo li supstituciju $\alpha = x^2-y^2$ i $\beta = 2xy$, početna jednadžba je ekvivalentna sljedećoj:

$$f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) = f(\alpha) + f(\beta)$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Naime, za zadane $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stavimo

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \quad \text{i} \quad y = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}.$$

Uočimo da je ovo funkcijska jednadžba koju smo rješavali u primjeru 1.1.8 za $n = 2$. Iz toga slijedi da je rješenje zadane jednadžbe $f(x) = cx^2$, gdje je $c \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.1.10. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Definiramo neprekidnu funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Imamo

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} \\ &= f(x) + f(y) + xy - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} \\ &= f(x) - \frac{x^2}{2} + f(y) - \frac{y^2}{2} \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

čime smo jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Njena neprekidna rješenja su funkcije oblika $g(x) = cx$ za neku realnu konstantu c, pa su neprekidna rješenja zadane jednadžbe funkcije oblika $f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.1.11. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Definiramo neprekidnu funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x+y) - \frac{(x+y)^3}{3} + (x+y)^2 \\
&= x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y) - \frac{1}{3}x^3 - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + x^2 + 2xy + y^2 \\
&= f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 + f(y) - \frac{y^3}{3} + y^2 \\
&= g(x) + g(y).
\end{aligned}$$

Neprekidna rješenja ove aditivne Cauchyjeve jednadžbe su funkcije oblika $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Slijedi $cx = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2$, odnosno neprekidna rješenja početne jednadžbe su funkcije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.1.12. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + a(1-b^x)(1-b^y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pri čemu su a, b realne konstante i $b > 0$.

Definiramo funkciju $g(x) = f(x) - a(b^x - 1)$. Promatramo

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x+y) - a(b^{x+y} - 1) \\
&= f(x) + f(y) + a(1-b^x)(1-b^y) - a(b^{x+y} - 1) \\
&= f(x) + f(y) + a(1 - b^y - b^x + b^{x+y} - b^{x+y} + 1) \\
&= f(x) + f(y) + a - ab^y - ab^x + a \\
&= f(x) - a(b^x - 1) + f(y) - a(b^y - 1) \\
&= g(x) + g(y).
\end{aligned}$$

Neprekidne funkcije koje zadovoljavaju ovu jednadžbu su oblika $g(x) = cx$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, pa su rješenja početne jednadžbe funkcije oblika $f(x) = a(b^x - 1) + cx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Primjer 1.1.13. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uočimo da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$ zbog toga što se radi o kvadratnom korijenu nenegativnog broja. Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = [f(x)]^2$, za svaki $x \geq 0$. Uvedemo li supstituciju $u = x^2$ i $v = y^2$, vrijedi

$$g(u) = [f(\sqrt{x^2})]^2 = [f(x)]^2 \quad \text{i} \quad g(v) = [f(\sqrt{y^2})]^2 = [f(y)]^2.$$

Zadana jednadžba ekvivalentna je sljedećoj:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2},$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}_+$. Uočimo da je ovo Jensenova funkcijska jednadžba koju smo riješili u primjeru 1.1.7 te je njeno rješenje funkcija

$$g(u) = cu + b,$$

gdje su $b, c \in \mathbb{R}$. Funkcija g će poprimiti pozitivne vrijednosti za sve vrijednosti u ako su b i c nenegativne konstante. Dakle, za sve $x \in \mathbb{R}_+$ je $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$, gdje su b, c nenegativni realni brojevi.

Da bismo pronašli rješenja za $x < 0$, zamijenimo x sa $-x$ u zadanoj jednadžbi te dobivamo $[f(x)]^2 = [f(-x)]^2$ iz čega slijedi $f(-x) = \pm f(x)$. Ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$, tada je $f(x) = \sqrt{cx^2 + b}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$, tada je $f(0) = 0$, pa je $b = 0$ i stoga je $f(x) = ax$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je a nenegativan realan broj. Ako postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $f(-x_1) = f(x_1) \geq 0$ i $f(-x_2) = -f(x_2) \leq 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije f postoji x_0 između $-x_1$ i $-x_2$ takav da je $f(x_0) = 0$ (primijetimo da ne mogu oba $f(-x_1)$ i $f(-x_2)$ biti jednaka nuli). Odatle slijedi $cx_0^2 + b = 0$, pa je $x_0 = 0$ i $b = 0$. Tada je $f(x) = a|x|$. Dakle, vrijedi jedna od sljedećih mogućnosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \sqrt{cx^2 + b} && \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= a|x| && \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= ax && \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdje su $a, b > 0, c \geq 0$ realni brojevi.

1.2 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba bez prepostavke neprekidnosti

Lema 1.2.1. *Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rješenje aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe, koje nije oblika $x \mapsto cx$ za neku realnu konstantu c, tada je graf funkcije f gust u ravnini $\mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Graf G funkcije f je $\{(x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Uzmimo proizvoljan $x_1 \in \mathbb{R}$ različit od 0. Kako f nije oblika $x \mapsto cx$, postoji broj $x_2 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}. \tag{1.8}$$

Kada to ne bi vrijedilo, mogli bismo uzeti $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$ te supstituirati $x_1 = x$ te bismo dobili $f(x) = cx$ za svaki $x \neq 0$. Znamo da je $f(0) = 0$ pa zaključujemo da je $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Dakle, vrijedi (1.8), a to je ekvivalentno sa

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pa su vektori $v_1 = (x_1, f(x_1))$ i $v_2 = (x_2, f(x_2))$ linearno nezavisni. To povlači da za svaki vektor $v = (x, f(x))$ postoje realni brojevi r_1 i r_2 takvi da je

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2.$$

Ako umjesto realnih brojeva r_1, r_2 uzmemo racionalne brojeve ρ_1, ρ_2, linearnom kombinacijom $\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2$ možemo se proizvoljno približiti zadanom vektoru v. Koristimo činjenicu da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ gust u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ pa je skup $\mathbb{Q}^2$ gust u $\mathbb{R}^2$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 &= \rho_1(x_1, f(x_1)) + \rho_2(x_2, f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2,\ \rho_1 f(x_1) + \rho_2 f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2,\ f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2)), \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku koristili racionalnu homogenost funkcije f. Prema tome, skup $\hat{G} = \{(x, y) \mid x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, y = f(x), \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}\}$ je gust u $\mathbb{R}^2$. Kako je $\hat{G} \subset G$, graf G je također gust u $\mathbb{R}^2$. □

Da bismo konstruirali aditivnu funkciju koja nije neprekidna, bit će nam potreban pojam Hamelove baze. Neka je skup $S = \{s \in \mathbb{R} \mid s = u + v\sqrt{2} + w\sqrt{3}, u, v, w \in \mathbb{Q}\}$. Njegovi elementi su racionalne linearne kombinacije brojeva 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Ako element $s \in S$ ima dvije različite racionalne linearne kombinacije, primjerice

$$s = u + v\sqrt{2} + q\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{2} + w'\sqrt{3},$$

pri čemu su $u, v, w, u', v', w' \in \mathbb{Q}$, tada je

$$(u - u') + (v - v')\sqrt{2} + (w - w')\sqrt{3} = 0.$$

Ako supstituiramo $a = u - u' \in \mathbb{Q}$, $b = v - v' \in \mathbb{Q}$, $c = w - w' \in \mathbb{Q}$, gornja jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

odnosno

$$b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a.$$

Kvadriranjem obje strane dobivamo

$$2bc\sqrt{6} = a^2 - 2b^2 - 3c^2.$$

Iz ove jednakosti zaključujemo da je $b = 0$ ili $c = 0$ jer u suprotnom vrijedi da je

$$\sqrt{6} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je $\sqrt{6}$ iracionalan broj, a brojevi a, b, c racionalni. Ako je $b = 0$, tada je $a + c\sqrt{3} = 0$ iz čega slijedi da je i $c = 0$ jer bi u suprotnom vrijedilo da je $\sqrt{3} = -\frac{a}{c}$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj. Analogno, ako je $c = 0$, tada mora biti i $b = 0$. Iz toga zaključujemo da je $b = 0$ i $c = 0$ pa slijedi da je i $a = 0$. Prema tome, svaki element skupa S možemo zapisati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju elemenata skupa $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. Skup $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ nazivamo Hamelovom bazom skupa S. Općenito, skup B zovemo Hamelovom bazom skupa $\mathbb{R}$ ako svaki realan broj možemo zapisati kao jedinstvenu (konačnu) racionalnu linearnu kombinaciju elemenata skupa B.

Propozicija 1.2.2. *Neka je B Hamelova baza za skup $\mathbb{R}$. Ako dvije aditivne funkcije imaju istu vrijednost u svakom elementu baze B, onda su one jednake.*

Dokaz. Uzmimo da su f_1 i f_2 dvije aditivne funkcije koje imaju istu vrijednost u svakom elementu od B. Tada je funkcija $f = f_1 - f_2$ također aditivna. Neka je x bilo koji realan broj. Tada postoje brojevi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ iz B i racionalni brojevi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvi da je

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n.$$

Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
f_1(x) - f_2(x) &= f(x) \\
&= f(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n) \\
&= f(r_1 b_1) + f(r_2 b_2) + \cdots + f(r_n b_n) \\
&= r_1 f(b_1) + r_2 f(b_2) + \cdots + r_n f(b_n) \\
&= r_1[f_1(b_1) - f_2(b_1)] + r_2[f_1(b_2) - f_2(b_2)] + \cdots + r_n[f_1(b_n) - f_2(b_n)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je $f_1 = f_2$ što je i trebalo dokazati. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je B Hamelova baza za $\mathbb{R}$ i neka je $g\colon B \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija definirana na B. Tada postoji aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(b) = g(b)$ za svaki $b \in B$.*

Dokaz. Za svaki realan broj x postoje $b_1, b_2, \ldots, b_n$ iz B i racionalni brojevi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvi da je

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n.$$

Stavimo $f(x) = r_1 f(b_1) + r_2 f(b_2) + \cdots + r_n f(b_n)$, odnosno, ako iskoristimo činjenicu da je $f(b) = g(b)$ za svaki $b \in B$, vrijedi da je

$$f(x) = r_1 g(b_1) + r_2 g(b_2) + \cdots + r_n g(b_n).$$

Neka su x, y bilo koja dva realna broja. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} x &= r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n, \\ y &= s_1 b_1 + s_2 b_2 + \cdots + s_m b_m, \end{aligned}$$

pri čemu su $r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots, s_m$ racionalni brojevi, a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ elementi Hamelove baze. Skupovi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ mogu imati neke zajedničke elemente. Neka unija ova dva skupa bude skup $\{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$ pri čemu vrijedi da je $l \leq m + n$. Sada brojeve x i y možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} x &= u_1 c_1 + u_2 c_2 + \cdots + u_l c_l, \\ y &= v_1 c_1 + v_2 c_2 + \cdots + v_l c_l, \end{aligned}$$

pri čemu su $u_1, u_2, \ldots, u_l, v_1, v_2, \ldots, v_l$ racionalni brojevi, od kojih neki mogu biti 0. Vrijedi

$$x + y = (u_1 + v_1)c_1 + (u_2 + v_2)c_2 + \cdots + (u_l + v_l)c_l,$$

odnosno

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f((u_1 + v_1)c_1 + (u_2 + v_2)c_2 + \cdots + (u_l + v_l)c_l) \\ &= (u_1 + v_1)g(c_1) + (u_2 + v_2)g(c_2) + \cdots + (u_l + v_l)g(c_l) \\ &= [u_1 g(c_1) + u_2 g(c_2) + \cdots + u_l g(c_l)] + [v_1 g(c_1) + v_2 g(c_2) + \cdots + v_l g(c_l)] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Dakle, f je aditivna na skupu realnih brojeva što je i trebalo dokazati. □

Pomoću Hamelove baze možemo konstruirati aditivnu funkciju koja nije oblika $x \mapsto cx$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Neka je B Hamelova baza na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ i neka je $b \in B$ bilo koji element iz B. Definiramo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x \in B \setminus \{b\}, \\ 1 & \text{ako je } x = b. \end{cases}$$

Prema propoziciji 1.2.3 postoji aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in B$. Uočimo da f ne može biti oblika $x \mapsto cx$ jer za $x \in B \setminus \{b\}$ vrijedi da je

$$0 = \frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(b)}{b}.$$

Napomenimo da nije poznat niti jedan konkretan primjer Hamelove baze za skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, poznato je jedino da ona postoji.

Do sada smo dokazali da je aditivna funkcija $x \mapsto cx$, gdje je c proizvoljna realna konstanta, jedino rješenje Cauchyjeve funkcijske jednadžbe koje je neprekidno. Osim neprekidnosti, postoje još neki uvjeti da aditivna funkcija bude oblika $x \mapsto cx$.

Teorem 1.2.4. *Ako je aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s jedne strane ograničena, tada je ona oblika $x \mapsto cx$ za neku realnu konstantu c.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da f nije oblika $x \mapsto cx$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Tada iz leme 1.2.1 slijedi da je graf funkcije f gust u $\mathbb{R}^2$. Kako je f ograničena s jedne strane, recimo odozgo, zaključujemo da postoji realna konstanta M takva da vrijedi

$$f(x) \leq M, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je graf funkcije f disjunktan sa skupom $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) > M\}$. Prema tome, graf funkcije f nije gust u $\mathbb{R}^2$ što je kontradikcija. □

Napomenimo da aditivna ograničena funkcija mora biti nul-funkcija. U suprotnom možemo odrediti neki realan broj x_0 takav da je $f(x_0) \neq 0$. Matematičkom indukcijom se može dokazati da je $f(nx_0) = nf(x_0)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijednost $|nf(x_0)|$ može biti proizvoljno velika ovisno o broju n što je u kontradikciji s činjenicom da je f ograničena funkcija.

Teorem 1.2.5. *Ako je aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena na skupu $[a, b]$, tada postoji realna konstanta c takva da je $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Najprije dokažimo da je f ograničena i na intervalu $[0, b-a]$. Kako je f ograničena na intervalu $[a, b]$, postoji pozitivan realan broj M takav da je $|f(x)| < M$ za svaki $x \in [a, b]$. Ako je $x \in [0, b-a]$, tada je $x + a \in [a, b]$ i vrijedi $f(x) = f(x + a) - f(a)$ pa zaključujemo

$$|f(x)| < M + |f(a)|.$$

Neka je $c = b - a$ i neka je $d = \frac{f(c)}{c}$. Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) - dx$. Vrijedi $g(c) = f(c) - dc = 0$ i

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) - d(x + y) \\ &= f(x) + f(y) - dx - dy \\ &= f(x) - dx + f(y) - dy \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Kako je $g(c) = 0$, to je $g(x + c) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa zaključujemo da je g periodična funkcija s periodom c. Kako je g razlika funkcija koje su ograničene na intervalu $[0, c]$, ona je također ograničena na tom istom intervalu. Kako je g periodična s periodom c, to je ograničena na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Slijedi $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno $f(x) = dx$ za neku realnu konstantu d. □

Pretpostavku neprekidnosti možemo zamijeniti i pretpostavkom monotonosti, kao u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.2.6. *Pretpostavimo da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neka je bez smanjenja općenitosti funkcija f rastuća, odnosno neka vrijedi

$$f(x) \leq f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$. Tada je dana funkcija oblika $x \mapsto cx$, za neki $c \geq 0$.

Dokaz. Iz leme 1.1.3 znamo da je $f(q) = cq$ za svaki $q \in \mathbb{Q}$, gdje je c proizvoljna pozitivna realna konstanta. Za svaki realan broj x vrijedi

$$cq = f(q) \leq f(x) \leq f(r) = cr$$

za sve $q, r \in \mathbb{Q}$ takve da je $q < x < r$. Promatramo dva niza racionalnih brojeva

$$q_1 < q_2 < \cdots < x \quad \text{i} \quad r_1 > r_2 > \cdots > x$$

takvih da je

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Vrijedi

$$cx = \lim_{n\to\infty} cq_n = \lim_{n\to\infty} f(q_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} cr_n = cx.$$

Prema teoremu o sendviču, $f(x) = cx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Primjer 1.2.7. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku nejednadžbu*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanu funkcijsku nejednadžbu zovemo Cauchyjeva nejednadžba.

Kako bismo smanjili broj općih rješenja, pretpostavimo da vrijedi

$$f(x) \leq x \tag{1.9}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Uvedemo li supstituciju $x = y = 0$ u zadanu nejednadžbu, dobivamo

$$f(0) \leq 2f(0),$$

odnosno

$$0 \leq f(0).$$

Iz (1.9) slijedi

$$f(0) \leq 0$$

pa zaključujemo da mora vrijediti

$$f(0) = 0.$$

Uvrstimo li $y = -x$ u zadanu nejednadžbu, imamo

$$f(0) \leq f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(x) \geq -f(-x). \tag{1.10}$$

Iz (1.9), (1.10) i $f(0) = 0$ slijedi

$$f(x) \geq -f(-x) \geq -(-x) = x.$$

Kako istovremeno vrijedi (1.9), zaključujemo da je $f(x) = x$.

1.3 Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

Teorem 1.3.1. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \tag{1.11}$$

za sve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, dano je sa

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2),$$

gdje su $A_1, A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije.

Dokaz. Uvrstimo $x_2 = y_2 = 0$ u (1.11) i dobivamo

$$f(x_1 + y_1, 0) = f(x_1, 0) + f(y_1, 0).$$

Definiramo li funkciju $A_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $A_1(x) = f(x, 0)$, prethodna jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$A_1(x_1 + y_1) = A_1(x_1) + A_1(y_1).$$

Dakle, $A_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivna funkcija.

Analogno, uvrstimo li $x_1 = y_1 = 0$ u (1.11), dobivamo

$$f(0, x_2 + y_2) = f(0, x_2) + f(0, y_2).$$

Definiramo li funkciju $A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $A_2(x) = f(0, x)$, prethodna jednakost je ekvivalentna

$$A_2(x_2 + y_2) = A_2(x_2) + A_2(y_2).$$

Dakle, $A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je također aditivna funkcija.

Uvrstimo li $y_1 = x_2 = 0$ u (1.11), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 0) + f(0, y_2) \\ &= A_1(x_1) + A_2(y_2). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$f(x, y) = A_1(x) + A_2(y)$$

za svaki $x, y \in \mathbb{R}$, gdje su $A_1, A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije. □

Jednadžbu (1.11) zvat ćemo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli,* a svako njeno rješenje *aditivnom funkcijom dviju varijabli.*

Dokazat ćemo prethodni teorem na drugi način.

Dokaz. Neka je $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija i neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y) + 2f(a, a) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a + a, y + a + a) - 2f(a, a) \\ &= f((x + a) + a, a + (y + a)) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a, a) + f(a, y + a) - 2f(a, a) \\ &= f(x + a, a) - f(a, a) + f(a, y + a) - f(a, a) \\ &= A_1(x) + A_2(y), \end{aligned}$$

gdje su $A_1, A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je

$$A_1(x) = f(x + a, a) - f(a, a), \quad A_2(y) = f(a, y + a) - f(a, a).$$

Preostaje dokazati da su A_1 i A_2 aditivne funkcije.

$$\begin{aligned}
A_1(x+y) &= f(x+y+a,a) - f(a,a) \\
&= f(x+y+a,a) + f(a,a) - 2f(a,a) \\
&= f(x+y+a+a,a+a) - 2f(a,a) \\
&= f(x+a,a) + f(y+a,a) - 2f(a,a) \\
&= f(x+a,a) - f(a,a) + f(y+a,a) - f(a,a) \\
&= A_1(x) + A_1(y).
\end{aligned}$$

Dakle, A_1 je aditivna funkcija. Na analogan način dokažemo

$$A_2(x+y) = A_2(x) + A_2(y),$$

odnosno da je A_2 aditivna funkcija. □

Dakle, svaku aditivnu funkciju dviju varijabli možemo zapisati kao zbroj dviju aditivnih funkcija jedne varijable.

Korolar 1.3.2. *Ako je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aditivna u $\mathbb{R}^2$, tada postoje aditivne funkcije $A_1, A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je*

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Korolar 1.3.3. *Ako je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna aditivna funkcija u $\mathbb{R}^2$, onda postoje realne konstante c_1, c_2 takve da vrijedi*

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Ako je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aditivna u $\mathbb{R}^2$, iz korolara 1.3.2 slijedi

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2),$$

gdje su $A_1, A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije. Kako je f neprekidna, to su i A_1, A_2 neprekidne funkcije. Teorem 1.1.1 povlači $A_1(x) = c_1 x$ i $A_2(x) = c_2 x$, gdje su c_1, c_2 proizvoljne realne konstante. □

Lema 1.3.4. *Aditivna funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako je neprekidna u svakoj varijabli.*

Dokaz. Kako je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aditivna, po korolaru 1.3.2 vrijedi

$$f(x,y) = A_1(x) + A_2(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje su $A_1, A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije. Funkcija f je neprekidna u svakoj varijabli, pa su i funkcije A_1 i A_2 neprekidne. Dakle,

$$\lim_{x\to x_0} A_1(x) = A_1(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{y\to y_0} A_2(y) = A_2(y_0).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [A_1(x) + A_2(y)] \\ &= \lim_{x\to x_0} A_1(x) + \lim_{y\to y_0} A_2(y) \\ &= A_1(x_0) + A_2(y_0) \\ &= f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Dakle, f je neprekidna. □

Korolar 1.3.5. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{1.12}$$

za sve $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, dano je sa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, gdje su $A_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ aditivne funkcije.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi prema teoremu 1.3.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $A_1, A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, gdje su $A_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ aditivne funkcije.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n+1$. Neka je $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ i $A_{n+1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $A_{n+1}(x) = f(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x)$. Iz (1.12) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, 0) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, za neke aditivne funkcije $A_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Također,

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x + y) &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x + y) \\ &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x) + f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, y) \\ &= A_{n+1}(x) + A_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je A_{n+1} aditivna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0, 0 + x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) + f(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k) + A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} A_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$ čime je korolar dokazan. □

Jednadžbu (1.12) zvat ćemo *aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u n varijabli,* a svako njeno rješenje *aditivnom funkcijom n varijabli.*

1.4 Aditivne funkcije u kompleksnoj ravnini

Kompleksan broj z možemo poistovijetiti s uređenim parom (x, y) realnih brojeva. U zapisu kompleksnog broja $z = x + iy$, realan broj x zovemo realni dio i označavamo ga sa $Re\, z$, a realan broj y imaginarni dio broja z i označavamo ga sa $Im\, z$. Na skupu kompleksnih brojeva definirane su operacije zbrajanja i množenja na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v), \\ (x, y)(u, v) &= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

Proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ možemo zapisati u obliku

$$f(z) = f_1(z) + i\, f_2(z), \tag{1.13}$$

pri čemu su funkcije $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f_1(z) = Re\, f(z), \quad f_2(z) = Im\, f(z). \tag{1.14}$$

Ako je f aditivna funkcija, tada koristeći (1.13) i (1.14) dobivamo

$$\begin{aligned} f_1(z_1 + z_2) &= Re\, f(z_1 + z_2) \\ &= Re\, [f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Re\, f(z_1) + Re\, f(z_2) \\ &= f_1(z_1) + f_1(z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(z_1 + z_2) &= Im\, f(z_1 + z_2) \\ &= Im\, [f(z_1) + f(z_2)] \\ &= Im\, f(z_1) + Im\, f(z_2) \\ &= f_2(z_1) + f_2(z_2). \end{aligned}$$

Lema 1.4.1. *Ako je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, onda postoje aditivne funkcije $f_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(j, k = 1, 2)$ takve da je*

$$f(z) = f_{11}(Re\, z) + f_{12}(Im\, z) + if_{21}(Re\, z) + if_{22}(Im\, z).$$

Dokaz. Iz (1.13) slijedi

$$f(z) = f_1(z) + i\, f_2(z).$$

Kako je f aditivna funkcija, to su i $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije. Funkcije f_1 i f_2 možemo promatrati kao funkcije dviju varijabli pa prema korolaru 1.3.2 slijedi

$$f(z) = f_{11}(Re\, z) + f_{12}(Im\, z) + if_{21}(Re\, z) + if_{22}(Im\, z),$$

gdje su $f_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(j, k = 1, 2)$ aditivne funkcije. □

Teorem 1.4.2. *Ako je $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ neprekidna aditivna funkcija, tada postoje kompleksne konstante c_1 i c_2 takve da je*

$$f(z) = c_1\, z + c_2 \overline{z}$$

za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Kako je f aditivna funkcija, prema lemi 1.4.1 vrijedi

$$f(z) = f_{11}(Re\, z) + f_{12}(Im\, z) + i f_{21}(Re\, z) + i f_{22}(Im\, z),$$

pri čemu su $f_{jk}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, (j, k = 1, 2)$ aditivne funkcije na skupu realnih brojeva. Zbog neprekidnosti funkcije f, zaključujemo da su i funkcije f_{jk} neprekidne i da vrijedi $f_{jk}(x) = c_{jk}x$ za realne konstante c_{jk} $(j, k = 1, 2)$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{11} Re\, z + c_{12} Im\, z + i c_{21} Re\, z + i c_{22} Im\, z \\ &= (c_{11} + i c_{21}) Re\, z + (c_{12} + i c_{22}) Im\, z \\ &= a Re\, z + b Im\, z, \end{aligned}$$

gdje je $a = (c_{11} + i c_{21}),\ b = (c_{12} + i c_{22})$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= a Re\, z - i(bi) Im\, z \\ &= \frac{a+bi}{2} Re\, z + \frac{a-bi}{2} Re\, z - \frac{a+bi}{2} i Im\, z + \frac{a-bi}{2} i Im\, z \\ &= \frac{a-bi}{2} Re\, z + \frac{a-bi}{2} i Im\, z + \frac{a+bi}{2} Re\, z - \frac{a+bi}{2} i Im\, z \\ &= \frac{a-bi}{2} (Re\, z + i Im\, z) + \frac{a+bi}{2} (Re\, z - i Im\, z) \\ &= \frac{a-bi}{2} z + \frac{a+bi}{2} \overline{z} \\ &= c_1 z + c_2 \overline{z}, \end{aligned}$$

gdje su $c_1 = \frac{a-bi}{2}$ i $c_2 = \frac{a+bi}{2}$ kompleksne konstante. □

Za funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ćemo reći da je analitička funkcija ako je f derivabilna na $\mathbb{C}$.

Teorem 1.4.3. *Ako je $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička aditivna funkcija, tada postoji kompleksna konstanta c takva da je*

$$f(z) = c\, z$$

za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Kako je f analitička funkcija, ona je i derivabilna. Ako deriviramo izraz

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \tag{1.15}$$

po varijabli z_1, dobivamo

$$f'(z_1 + z_2) = f'(z_1)$$

za sve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Za $z_1 = 0$ i $z_2 = z$ vrijedi

$$f'(z) = c,$$

gdje je $c = f'(0)$ kompleksna konstanta. Iz toga slijedi da je

$$f(z) = cz + b,$$

pri čemu je b kompleksna konstanta. Vraćanjem ovog oblika u izraz (1.15) zaključujemo da je $b = 0$, što znači da je $f(z) = c\,z$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. □

1.5 Pexiderova funkcijska jednadžba

Pexiderova jednadžba je funkcijska jednadžba oblika

$$f(x + y) = g(x) + h(y), \tag{1.16}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje su $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije.

Uvrstimo li $y = 0$ u (1.16) i definiramo li $h(0) = b$, dobivamo

$$g(x) = f(x) - b.$$

Uvrstimo li $x = 0$ u (1.16) i definiramo li $g(0) = a$, dobivamo

$$h(y) = f(y) - a.$$

Vraćanjem u (1.16) imamo

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a - b.$$

Definiramo funkciju $f_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f_0(x) = f(x) - a - b$. Kako je f neprekidna, to je i f_0 neprekidna. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
f_0(x + y) &= f(x + y) - a - b \\
&= f(x) + f(y) - a - b - a - b \\
&= f(x) - a - b + f(y) - a - b \\
&= f_0(x) + f_0(y).
\end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čije je jedino neprekidno rješenje funkcija $f_0(x) = cx$, gdje je c proizvoljna realna konstanta. Dakle, rješenja Pexiderove funkcijske jednadžbe su

$$\begin{aligned} f(x) &= cx + a + b, \\ g(x) &= cx + a, \\ h(x) &= cx + b, \end{aligned}$$

gdje su a, b, c proizvoljne realne konstante.

Poglavlje 2

Eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

2.1 Rješenje eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava jednadžbu

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{2.1}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ovu jednadžbu nazivamo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom*, a svako njeno rješenje eksponencijalnom funkcijom. Jasno je da je funkcija $x \mapsto e^x$ rješenje te jednadžbe. Općenitije, ako je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija, tada je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = e^{A(x)}$ također rješenje eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe:

$$f(x+y) = e^{A(x+y)} = e^{A(x)+A(y)} = e^{A(x)} \cdot e^{A(y)} = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dokazat ćemo da su sva rješenja eksponencijalne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe ovog oblika.

Teorem 2.1.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nenul-funkcija koja zadovoljava eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je f funkcija oblika $x \mapsto e^{A(x)},$ gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija.*

Dokaz. Dokažimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji y_0 takav da je $f(y_0) = 0$. Tada vrijedi

$$f(y) = f((y-y_0)+y_0) = f(y-y_0)f(y_0) = 0$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. To je kontradikcija pa je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li supstituciju $x = y = \frac{t}{2}$ u (2.1) dobivamo

$$f(t) = \left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. Ovime smo dokazali da je vrijednost funkcije f za svaki realan broj pozitivna pa zbog toga jednadžbu (2.1) možemo logaritmirati prirodnim logaritmom. Dobivamo

$$\ln f(x + y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Definiramo funkciju $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $A(x) = \ln f(x)$ i imamo

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Dakle, funkcija oblika $f(x) = e^{A(x)}$ je rješenje jednadžbe (2.1). □

Korolar 2.1.2. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna nenul-funkcija koja zadovoljava eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu. Tada je f funkcija oblika $x \mapsto e^{cx} = a^x$, gdje su $a > 0$ i c proizvoljne realne konstante.*

Dokaz. Iz teorema 2.1.1 slijedi $f(x) = e^{A(x)}$, gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Kako je f neprekidna, to je i A neprekidna jer je $A(x) = \ln f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Teorem 1.1.1 povlači $A(x) = cx$, gdje je c proizvoljna realna konstanta. □

U sljedećim primjerima pokazat ćemo neke funkcijske jednadžbe koje se rješavaju svođenjem na eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu.

Primjer 2.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je*

$$f(x + y + nxy) = f(x)f(y) \tag{2.2}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $x > -\frac{1}{n}$ i $y > -\frac{1}{n}$. Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe (2.2).

Danu funkcijsku jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$f\left(\frac{(1 + nx)(1 + ny) - 1}{n}\right) = f(x)f(y).$$

Stavimo da je $1 + nx = e^u$ i $1 + ny = e^v$ iz čega slijedi da je $u = \ln(1 + nx)$ i $v = \ln(1 + ny)$. Gornju jednadžbu možemo zapisati kao

$$f\left(\frac{e^{u+v} - 1}{n}\right) = f\left(\frac{e^u - 1}{n}\right) f\left(\frac{e^v - 1}{n}\right)$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$. Stavimo li

$$\phi(u) = f\left(\frac{e^u - 1}{n}\right),$$

prethodna jednadžba prelazi u

$$\phi(u + v) = \phi(u)\phi(v)$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$. Kako je f nenul-funkcija, to je i ϕ nenul-funcija. Teorem 2.1.1 povlači $\phi(x) = e^{A(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija.
Slijedi da je $f(x) = e^{A(\ln(1+nx))}$ za svaki $x > -\frac{1}{n}$. Ako je f neprekidna, tada je A oblika $x \mapsto cx$, gdje je c proizvoljna konstanta, pa je $f(x) = (1 + nx)^c$.

Primjer 2.1.4. *Neka je α pozitivna realna konstanta. Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x + y) = \alpha^{xy} f(x) f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = \alpha^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$. Tada je

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \alpha^{-\frac{(x+y)^2}{2}} f(x + y) \\ &= \alpha^{-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}} \alpha^{xy} f(x) f(y) \\ &= \alpha^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\, \alpha^{-\frac{y^2}{2}} f(y) \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Ovime smo zadanu funkcijsku jednadžbu sveli na eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čija su neprekidna rješenja funkcije $g(x) = a^x$, gdje je a pozitivan realan broj. Slijedi $f(x) = \alpha^{\frac{x^2}{2}} a^x$, gdje je a pozitivan realan broj.

Primjer 2.1.5. *Odredimo sve neprekidne nenul-funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Neka je funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $g(x) = f(x) + 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y) + 1 \\ &= f(x) + f(y) + f(x) f(y) + 1 \\ &= (1 + f(x))(1 + f(y)) \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Neprekidna rješenja ove jednadžbe su oblika $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = a^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je a pozitivan realan broj. Iz toga slijedi $f(x) = -1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = a^x - 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je a pozitivan realan broj. Uočimo da je f nenul-funkcija ako je $a \neq 1$.

Primjer 2.1.6. *Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo prvo $y = 0$ u zadanu jednadžbu i dobivamo

$$\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = f(x)f(0).$$

Ako je $f(0) = 0$ slijedi da je $\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $f(0) \neq 0$. Zamijenimo x u prethodnoj jednakosti sa $x + y$ i dobivamo

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = f(x+y)f(0).$$

Uočimo da su lijeve strane dobivene jednakosti i zadane jednadžbe jednake pa vrijedi

$$f(x+y)f(0) = f(x)f(y).$$

Neka je $b = f(0)$. Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \frac{f(x+y)}{b} \\ &= \frac{f(x)f(y)}{b^2} \\ &= \frac{f(x)}{b} \cdot \frac{f(y)}{b} \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

Kako je f nenul-funkcija, to je i g nenul-funkcija, pa je $g(x) = a^x$, gdje je a pozitivan realan broj. Zaključujemo $f(x) = b\,a^x$, gdje su $a > 0$ i b proizvoljni realni brojevi.

Primjer 2.1.7. *Odredimo sva neprekidna nenul-rješenja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) \neq 0$. Vrijedi

$$f(x_0)f(-y) = f(\sqrt{x_0^2 + y^2}) = f(x_0)f(y).$$

Slijedi da je $f(y) = f(-y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je parna funkcija pa je dovoljno promatrati vrijednosti od f za $x \geq 0$. Definiramo funkciju $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(\sqrt{x})$. Uvedemo li supstituciju $u = x^2$ i $v = y^2$, dobivamo

$$g(u + v) = g(u)g(v)$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}_+$. Kako je f nenul-funkcija, to je i g nenul-funkcija, pa je $g(u) = a^u$, gdje je a pozitivan realan broj. Slijedi da je $f(x) = a^{x^2}$, gdje je a pozitivan realan broj.

2.2 Eksponencijalna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

Teorem 2.2.1. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2)f(y_1, y_2) \tag{2.3}$$

za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dano je sa

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1)E_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $E_1, E_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eksponencijalne funkcije.

Dokaz. Uvrstimo li $x_2 = y_2 = 0$ u (2.3), dobivamo

$$f(x_1 + y_1, 0) = f(x_1, 0)f(y_1, 0).$$

Definiramo funkciju $E_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $E_1(x) = f(x, 0)$. Prethodnu jednakost sada možemo zapisati kao

$$E_1(x_1 + y_1) = E_1(x_1)E_1(y_1).$$

Uočimo da E_1 zadovoljava Cauchyjevu eksponencijalnu funkcijsku jednadžbu pa se radi o eksponencijalnoj funkciji.

Uvrstimo li $x_1 = y_1 = 0$ u (2.3), dobivamo

$$f(0, x_2 + y_2) = f(0, x_2)f(0, y_2).$$

Definiramo funkciju $E_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $E_2(x) = f(0, x)$ pa prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$E_2(x_2 + y_2) = E_2(x_2)E_2(y_2).$$

Dakle, E_2 je također eksponencijalna funkcija.

Uvrstimo li $y_1 = x_2 = 0$ u (2.3), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 0) f(0, y_2) \\ &= E_1(x_1) E_2(y_2). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1) E_2(x_2)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje su E_1 i E_2 eksponencijalne funkcije. □

Jednadžbu (2.3) zvat ćemo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *eksponencijalnom funkcijom dviju varijabli*.

Korolar 2.2.2. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{2.4}$$

za sve $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dano je sa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} E_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdje su $E_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eksponencijalne funkcije.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi prema teoremu 2.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = E_1(x_1) E_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $E_1, E_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eksponencijalne funkcije.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} E_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdje su $E_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eksponencijalne funkcije.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n+1$. Neka je $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ i $E_{n+1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $E_{n+1}(x) = f(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x)$. Iz (2.4) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, 0) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) f(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) g(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} E_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, za neke eksponencijalne funkcije $E_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Također,

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x + y) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x + y) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x) f(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, y) \\ &= E_{n+1}(x) E_{n+1}(y), \end{aligned}$$

pa je E_{n+1} ekponencijalna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0, 0 + x_{n+1}) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) + (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \\ &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} A_k(x_k) A_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} A_k(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$ čime je korolar dokazan. □

Jednadžbu (2.4) zvat ćemo *eksponencijalnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u n varijabli*, a svako njeno rješenje *eksponencijalnom funkcijom n varijabli*.

2.3 Vinczeova funkcijska jednadžba

Vinczeova jednadžba je funkcijska jednadžba oblika

$$f(x + y) = g(x)k(y) + h(y), \tag{2.5}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje su $f, g, h, k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije.

Neka je $k(0) = a$ i $h(0) = b$. Ako je $a = 0$, tada je

$$f(x) = f(x + 0) = g(x)\, a + b = b.$$

Dakle, f je konstantna funkcija. Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Uvrstimo li $y = 0$ u (2.5), dobivamo

$$g(x) = \frac{f(x) - b}{a}.$$

Neka je $\phi(x) = \frac{k(x)}{a}$ i $\psi(x) = h(x) - b\,\phi(x)$. Jednadžbu (2.5) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{f(x) - b}{a} a\phi(y) + \psi(y) + b\phi(y) \\ &= f(x)\phi(y) - b\phi(y) + \psi(y) + b\phi(y) \\ &= f(x)\phi(y) + \psi(y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vrijedi da je $\phi(0) = \frac{k(0)}{a} = \frac{a}{a} = 1$ i $\psi(0) = h(0) - b\,\phi(0) = b - b = 0$.

Definiramo funkciju

$$\chi(x) = f(x) - f(0). \tag{2.7}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \chi(x+y) &= f(x+y) - f(0) \\ &= f(x)\phi(y) + \psi(y) - f(0) \\ &= (\chi(x) + f(0))\,\phi(y) + \psi(y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + (f(0)\phi(y) + \psi(y)) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + f(0+y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + f(y) - f(0) \\ &= \chi(x)\phi(y) + \chi(y), \end{aligned} \tag{2.8}$$

pri čemu smo dva puta primijenili (2.6). Slijedi

$$\chi(x)\phi(y) + \chi(y) = \chi(x+y) = \chi(y+x) = \chi(y)\phi(x) + \chi(x),$$

odnosno

$$[\phi(y) - 1]\chi(x) = [\phi(x) - 1]\chi(y). \tag{2.9}$$

Ako je $\phi(y) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tada vrijedi $\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dakle, χ zadovoljava aditivnu Cauchyjevu jednadžbu pa postoji $d \in \mathbb{R}$ takav da je $\chi(x) = dx$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$f(x) = dx + c, \tag{2.10}$$

gdje je $c = f(0)$. Iz (2.6) slijedi da je

$$\begin{aligned} \psi(y) &= f(x+y) - f(x)\phi(y) \\ &= (d(x+y) + c) - (dx + c) \cdot 1 \\ &= dy. \end{aligned}$$

Dakle, rješenja zadane funkcijske jednadžbe su

$$\begin{aligned} f(x) &= dx + c, \\ k(x) &= a, \\ g(x) &= \frac{dx + c - b}{a}, \\ h(x) &= dx + b. \end{aligned}$$

U drugom slučaju vrijedi $\phi(y_0) \neq 1$ za neki $y_0 \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $y = y_0$ u (2.9), dobivamo

$$\frac{\chi(x)}{\phi(x) - 1} = \frac{\chi(y_0)}{\phi(y_0) - 1} = s$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$\chi(x) = s[\phi(x) - 1]. \tag{2.11}$$

Uvrstimo li (2.11) u (2.8), dobivamo

$$s[\phi(x + y) - 1] = [\phi(x) - 1]s\phi(y) + s[\phi(y) - 1].$$

Ako je $s = 0$, tada je χ nul-funkcija, odakle slijedi da je f konstantna funkcija. Kako je $s \neq 0$, vrijedi da je

$$\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y).$$

Dakle, ϕ zadovoljava ekponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu pa je

$$\phi(x) = t^x,$$

gdje je t pozitivan realan broj. Iz (2.11) slijedi da je $\chi(x) = st^x - s$. Iz (2.7) slijedi da je $f(x) = st^x + c$, gdje je c realna konstanta. Iz (2.6) slijedi

$$\psi(y) = \left(st^{x+y} + c\right) - (st^x + c)\, t^y = c\,(1 - t^y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, rješenja početne funkcijske jednadžbe su

$$\begin{aligned} f(x) &= st^x + c, \\ k(x) &= at^x, \\ g(x) &= \frac{st^x + c - b}{a}, \\ h(x) &= c + (b - c)t^x. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

3.1 Rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom zovemo jednadžbu oblika

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{3.1}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$. Svako rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe nazivamo *logaritamskom funkcijom*. Funkcija $x \mapsto \ln x$ je rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe, a vrijedi i općenitije: funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = A(\ln x)$ je rješenje te jednadžbe za svaku aditivnu funkciju $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jer je

$$f(xy) = A(\ln xy) = A(\ln x + \ln y) = A(\ln x) + A(\ln y) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dokazat ćemo da su sva rješenja logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe ovog oblika.

Teorem 3.1.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava logaritamsku Cauchyjevu jednadžbu. Tada je f funkcija oblika*

$$f(x) = A(\ln x),$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Ako je f neprekidna, tada je $f(x) = c \ln x$, gdje je c proizvoljna realna konstanta.

Dokaz. Uvedimo supstituciju $x = e^s$ i $y = e^t$, gdje su $s, t \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je $s = \ln x$ i $t = \ln y$. Jednadžbu (3.1) sveli smo na

$$f(e^{s+t}) = f(e^s) + f(e^t).$$

Definiramo funkciju $A \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sa $A(s) = f(e^s)$ i imamo

$$A(s + t) = A(s) + A(t)$$

za sve $s, t \in \mathbb{R}_+$. Dakle, A je aditivna funkcija. Vrijedi da je $f(x) = A(\ln x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Ako je f neprekidna, tada je i A neprekidna, pa je $A(x) = cx$ za neku realnu konstantu c, odakle slijedi $f(x) = c \ln x$. □

Napomena 3.1.2. *Opće rješenje funkcijske jednadžbe $f(xy) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$ je nul-funkcija. Naime, uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo*

$$f(0) = f(x) + f(0),$$

odnosno

$$f(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena 3.1.3. *Opće rješenje funkcijske jednadžbe $f(xy) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je funkcija*

$$f(x) = A(\ln |x|),$$

gdje je $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Takve ćemo funkcije također zvati logaritamskim funkcijama. Naime, prema teoremu 3.1.1, restrikcija funkcije f na $x, y \in \mathbb{R}_+$ je oblika $x \mapsto A(\ln x)$, gdje je $A \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Ako je $x < 0$, tada je

$$2f(x) = f(x) + f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) + f(-x) = 2f(-x),$$

pa je $f(x) = A(\ln(-x))$. Dakle, $f(x) = A(\ln |x|)$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako je f neprekidna, tada je $f(x) = c \ln |x|$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdje je c proizvoljna realna konstanta.

3.2 Logaritamska Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

Teorem 3.2.1. *Opće rješenje $f \colon (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \tag{3.2}$$

za sve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *dano je sa*

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *gdje su* $L_1, L_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *logaritamske funkcije.*

Dokaz. Uvrstimo li $x_2 = y_2 = 1$ u (3.2), dobivamo

$$f(x_1 y_1, 1) = f(x_1, 1) + f(y_1, 1).$$

Definiramo funkciju $L_1 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sa $L_1(x) = f(x, 1)$. Vrijedi da je

$$L_1(x_1 y_1) = L_1(x_1) + L_1(y_1).$$

Zaključujemo da L_1 zadovoljava logaritamsku Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu pa se radi o logaritamskoj funkciji.

Analogno, uvrstimo li $x_1 = y_1 = 1$ u (3.2), dobivamo

$$f(1, x_2 y_2) = f(1, x_2) + f(1, y_2).$$

Definiramo funkciju $L_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sa $L_2(x) = f(1, x)$. Vrijedi da je

$$L_2(x_2 y_2) = L_2(x_2) + L_2(y_2).$$

Dakle, L_2 je također logaritamska funkcija.

Uvrstimo li $y_1 = x_2 = 1$ u (3.2), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 1) + f(1, y_2) \\ &= L_1(x_1) + L_2(y_2). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdje su $L_1, L_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ logaritamske funkcije. □

Jednadžbu (3.2) zvat ćemo *logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *logaritamskom funkcijom dviju varijabli*.

Korolar 3.2.2. *Opće rješenje* $f \colon (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{R}$ *funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{3.3}$$

za sve $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *dano je sa*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k),$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *gdje su* $L_k \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *logaritamske funkcije.*

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi prema teoremu 3.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = L_1(x_1) + L_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $L_1, L_2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ logaritamske funkcije.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k),$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdje su $L_k \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ logaritamske funkcije.

Dokažimo tvrdnju za $n + 1$. Neka je $g \colon (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$ i $L_{n+1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sa $L_{n+1}(x) = f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, x)$. Iz (3.3) slijedi

$$\begin{aligned}
g(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) &= f(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, 1)\\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n, 1)\\
&= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, za neke logaritamske funkcije $L_k \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Također,

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(xy) &= f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, xy)\\
&= f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, x) + f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, y)\\
&= L_{n+1}(x) + L_{n+1}(y),
\end{aligned}$$

pa je L_{n+1} logaritamska funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1, 1 \cdot x_{n+1})\\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) + f(1, 1, \ldots, 1, x_{n+1})\\
&= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + L_{n+1}(x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k) + L_{n+1}(x_{n+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} L_k(x_k).$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n+1$ čime je korolar dokazan. $\square$

Jednadžbu (3.3) zvat ćemo *logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u n varijabli*, a svako njeno rješenje *logaritamskom funkcijom n varijabli*.

Poglavlje 4

Multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

4.1 Rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba je jednadžba oblika

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{4.1}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Svako rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe zvat ćemo *multiplikativnom funkcijom.* Funkcija signum definirana sa

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \\ -1 & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

zadovoljava multiplikativnu funkcijsku jednadžbu.

Teorem 4.1.1. *Opća rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe su funkcije*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= 1 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \textit{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \textit{ako je } x = 0, \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \textit{ako je } x > 0, \\ 0 & \textit{ako je } x = 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \textit{ako je } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *aditivna funkcija.*

Dokaz. Uvrstimo li $x = y = 0$ u (4.1), dobivamo

$$f(0) = f(0)f(0),$$

odnosno

$$f(0)[1 - f(0)] = 0,$$

iz čega slijedi da je $f(0) = 0$ ili $f(0) = 1$. Analogno dobivamo, uvrstimo li $x = y = 1$ u (4.1),

$$f(1)[1 - f(1)] = 0,$$

iz čega slijedi $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq 0$, takav da je $f(x_0) = 0$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Vrijedi

$$f(x) = f\left(x_0 \cdot \frac{x}{x_0}\right) = f(x_0)f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time smo dobili prvo rješenje.

Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Postoje dvije mogućnosti: $f(0) = 0$ ili $f(0) = 1$. U slučaju da je $f(0) = 0$, tvrdimo da f ne poprima vrijednost 0 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $y_0 \in \mathbb{R}, y_0 \neq 0$, takav da je $f(y_0) = 0$. Uvrstimo li $y = y_0$ u (4.1), dobivamo

$$f(xy_0) = f(x)f(y_0) = 0$$

odnosno

$$f(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. To je kontradikcija. Dakle, $f(0) = 1$. Uvođenjem supstitucije $y = 0$ u (4.1) dobivamo

$$f(0) = f(x)f(0)$$

iz čega slijedi da je

$$f(x) = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time smo dobili drugo rješenje.

Neka je x pozitivan realan broj. Ima smisla promatrati $\sqrt{x}$ te vrijedi

$$f(x) = \left[f(\sqrt{x})\right]^2 \geq 0.$$

Iz ove nejednakosti i činjenice da f ne poprima vrijednost 0 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ imamo $f(x) > 0$ za svaki $x > 0$ realan broj. Uvedimo supstituciju $x = e^s$ i $y = e^t$, gdje su $s, t \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je $s = \ln x$ i $t = \ln y$. Uvrštavanjem u (4.1) dobivamo

$$f(e^{s+t}) = f(e^s)f(e^t).$$

Kako je $f(t) > 0$ za svaki $t > 0$, možemo logaritmirati posljednju jednakost prirodnim logaritmom. Dobivamo

$$A(s+t) = A(s) + A(t),$$

gdje je funkcija $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definirana sa $A(s) = \ln f(s)$ za svaki $s \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$f(x) = e^{A(\ln x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}_+$.

Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem u (4.1) dobivamo $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. To je kontradikcija s činjenicom da f ne poprima vrijednost 0 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, $f(1) = 1$. Uvrstimo li $x = y = -1$ u (4.1), dobivamo

$$f(1) = [f(-1)]^2$$

iz čega slijedi da je $f(-1) = -1$ ili $f(-1) = 1$.

Ako je $f(-1) = 1$, uvrštavanjem $y = -1$ u (4.1) dobivamo

$$f(-x) = f(x)f(-1) = f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, pa je f parna funkcija. Iz toga i iz činjenice da je $f(0) = 0$ zaključujemo

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Time smo dobili treće rješenje.

Ako je $f(-1) = -1$, uvrštavanjem $y = -1$ u (4.1) dobivamo

$$f(-x) = f(x)f(-1) = -f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pa je f neparna funkcija. Slijedi

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x > 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Zajedno s činjenicom da je $f(0) = 0$, vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x > 0, \\ 0 & \text{ako je } x = 0, \\ -e^{A(\ln|x|)} & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Time smo dobili četvrto rješenje. $\square$

Primijetimo da u slučaju kada je A nul-funkcija, za f dobivamo funkcije $x \mapsto |\mathrm{sgn}(x)|$ i $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$ koje nisu neprekidne. Neprekidna rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe opisana su u sljedećem korolaru.

Korolar 4.1.2. *Neprekidna rješenja multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe su*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= 1 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= |x|^{\alpha} \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= |x|^{\alpha}\mathrm{sgn}(x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdje je α pozitivna realna konstanta.

Dokaz. Kako je f neprekidna funkcija, to je i aditivna funkcija $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ iz teorema 4.1.1 također neprekidna. Dakle,

$$A(x) = \alpha x,$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada je

$$e^{A(\ln|x|)} = e^{\alpha \ln|x|} = \left(e^{\ln|x|}\right)^{\alpha} = |x|^{\alpha}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa tvrdnja slijedi iz teorema 4.1.1.

Dokažimo još da je $\alpha > 0$. Ako je $\alpha = 0$, a f nije oblika $x \mapsto 0$ niti $x \mapsto 1$, tada je $f(x) = |sgn(x)| = 1$ za svaki $x \neq 0$ ili $f(x) = sgn(x)$ za svaki $x \neq 0$. U prvom slučaju neprekidnost funkcije f povlači $f(0) = 1$, pa je $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, suprotno pretpostavci. U drugom slučaju je $f(x) = 1$ za $x > 0$ i $f(x) = -1$ za $x < 0$, pa f ne može biti neprekidna funkcija. Ako je $\alpha < 0$, tada je

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty,$$

pa f ne može biti neprekidna u 0. Dakle, $\alpha > 0$. □

Propozicija 4.1.3. *Neka funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava aditivnu i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uočimo da za svaki realan broj $z \geq 0$ postoji realan broj w takav da je $z = w^2$. Uvrstimo li $x = w$ i $y = w$ u multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, dobivamo $f(z) = [f(w)]^2$ iz čega možemo zaključiti da je

$$f(z) \geq 0 \tag{4.2}$$

za svaki $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$.

Pretpostavimo da je $x \leq y, x, y \in \mathbb{R}$ pa y zamijenimo sa $y - x$ u aditivnoj Cauchyjevoj funkcijskoj jednadžbi. Dobivamo:

$$f(y) = f(x) + f(y - x).$$

Iz (4.2) slijedi da je $f(y-x) \geq 0$ pa je $f(y) \geq f(x)$. Zaključujemo da je f padajuća funkcija pa iz propozicije 1.2.6 slijedi da je $f(x) = cx$ za neku realnu konstantu c.

Uvrstimo li dobiveno rješenje i $x = y = 1$ u multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, dobivamo $c = c^2$ iz čega slijedi da je $c = 0$ ili $c = 1$. Uvrstimo li $f(x) = 0$ u aditivnu i multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu, vidimo da jednakosti vrijede pa je to jedno rješenje. Analogno provjerimo uvrštavanjem $f(x) = x$ pa zaključujemo da je i to rješenje. □

4.2 Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba u više varijabli

Teorem 4.2.1. *Opće rješenje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1y_1, x_2y_2) = f(x_1, x_2)f(y_1y_2) \tag{4.3}$$

za sve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, dano je sa

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2),$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $M_1, M_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativne funkcije.

Dokaz. Uvrstimo li $x_2 = y_2 = 1$ u (4.3), dobivamo

$$f(x_1y_1, 1) = f(x_1, 1)f(y_1, 1).$$

Definiramo funkciju $M_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $M_1(x) = f(x, 1)$. Vrijedi

$$M_1(x_1y_1) = M(x_1)M(y_1).$$

Zaključujemo da je M_1 multiplikativna funkcija.

Uvrstimo li $x_1 = y_1 = 1$ u (4.3), dobivamo

$$f(1, x_2y_2) = f(1, x_2)f(1, y_2).$$

Definiramo funkciju $M_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $M_2(x) = f(1, x)$. Vrijedi

$$M_2(x_2y_2) = M_2(x_2)M_2(y_2).$$

Zaključujemo da je M_2 također multiplikativna funkcija.

Uvrstimo li $y_1 = x_2 = 1$ u (4.3), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1, y_2) &= f(x_1, 1)f(1, y_2) \\ &= M_1(x_1)M_2(y_2). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2),$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $M_1, M_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativne funkcije. □

Jednadžbu (4.3) zvat ćemo *multiplikativnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom dviju varijabli*, a svako njeno rješenje *multiplikativnom funkcijom dviju varijabli.*

Korolar 4.2.2. *Opće rješenje $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{4.4}$$

za sve $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dano je sa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} M_k(x_k),$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdje su $M_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ multiplikativne funkcije.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi prema teoremu 4.2.1, odnosno

$$f(x_1, x_2) = M_1(x_1)M_2(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdje su $M_1, M_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativne funkcije.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} M_k(x_k),$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdje su $M_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ multiplikativne funkcije.

Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n+1$. Neka je $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$ i $M_{n+1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $M_{n+1}(x) = f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, x)$. Iz (4.4) slijedi

$$\begin{aligned} g(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) &= f(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, 1) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)f(y_1, y_2, \ldots, y_n, 1) \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} M_k(x_k)$$

za sve $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, za neke multiplikativne funkcije $M_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Također,

$$\begin{aligned}
M_{n+1}(xy) &= f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, xy) \\
&= f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, x) f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, y) \\
&= M_{n+1}(x) M_{n+1}(y),
\end{aligned}$$

pa je M_{n+1} multiplikativna funkcija. Konačno,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &= f(x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1, 1 \cdot x_{n+1}) \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)(1, 1, \ldots, 1, x_{n+1}) \\
&= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) M_{n+1}(x_{n+1}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} M_k(x_k) M_{n+1}(x_{n+1}) \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} M_k(x_k).
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$ čime je korolar dokazan. □

Jednadžbu (4.4) zvat ćemo *multiplikativnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom u n varijabli*, a svako njeno rješenje *multiplikativnom funkcijom n varijabli.*

Poglavlje 5

Cauchyjeva $\mathbb{NQR}$ metoda

5.1 Opis Cauchyjeve $\mathbb{NQR}$ metode

U ovom poglavlju promatrat ćemo funkcijske jednadžbe općeg oblika

$$f(x+y) = F(f(x), f(y)).$$

Navest ćemo korake u pronalaženju neprekidnih rješenja funkcijske jednadžbe

$$f(x+y) = F(f(x), f(y), f(x-y); x, y). \tag{5.1}$$

Prvo uvodimo supstituciju $x = y = 0$ u (5.1) te dobivamo:

$$f(0) = F(f(0), f(0), f(0); 0, 0).$$

Rješavajući ovu jednadžbu dobivamo vrijednost funkcije f za $x = 0$. Zatim umjesto x uvrštavamo redom $2x, 3x, \ldots, (n-1)x$, a umjesto y uvrštavamo x i dobivamo:

$$\begin{aligned} f(2x) &= F(f(x), f(x), f(0); x, x) = F_2(f(x), x), \\ f(3x) &= F(f(2x), f(x), f(x); 2x, x) = F_3(f(x), x), \\ f(4x) &= F(f(3x), f(x), f(2x); 3x, x) = F_4(f(x), x), \\ &\vdots \\ f(nx) &= F(f((n-1)x), f(x), f((n-2)x); (n-1)x, x) = F_n(f(x), x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ako u posljednjoj jednakosti uvedemo supstituciju $x = \frac{m}{n}y$, dobivamo:

$$f(my) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}y\right), \frac{m}{n}y\right).$$

Zbog jednakosti (5.2), lijevu stranu možemo zapisati kao $F_m(f(y), y)$, pa imamo

$$F_m(f(y), y) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}y\right), \frac{m}{n}y\right).$$

Pretpostavimo da se ova funkcijska jednadžba može riješiti po $f\left(\frac{m}{n}y\right)$, odakle je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = \mathcal{F}\left(f(y), y; \frac{m}{n}\right)$$

za neku funkciju $\mathcal{F}(a, y; x)$. Uvedemo li supstituciju $y = 1$, dobivamo

$$f(q) = \mathcal{F}(f(1), 1; q),$$

za svaki $q \in \mathbb{Q}_+$. Neka je x proizvoljan nenegativan realan broj. Tada postoji niz nenegativnih racionalnih brojeva $\{q_n\}$ koji konvergiraju u x. Pretpostavimo li da su f i $\mathcal{F}$ neprekidne funkcije, iz posljednje jednakosti slijedi

$$f(x) = \mathcal{F}(f(1), 1; x),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Da bismo pronašli funkciju f za $x < 0$, uvodimo supstituciju $y = -x$ pa uvrštavanjem u (5.1) imamo:

$$\begin{aligned} f(0) &= F(f(x), f(-x), f(2x); x - x) \\ &= F(f(x), \mathcal{F}(f(1), 1; -x), F_2(f(x), x); x, -x). \end{aligned}$$

Posljednju jednadžbu riješimo po $f(x)$ te dobivamo konačno rješenje

$$f(x) = \mathcal{G}(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}, x < 0$.

5.2 Primjena Cauchyjeve $\mathbb{NQR}$ metode na određivanje neprekidnih rješenja Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi

Aditivna Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Cauchyjevom $\mathbb{NQR}$ metodom odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju aditivnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li $x = y = 0$ u zadanu jednadžbu dobivamo $f(0) = 2f(0)$ iz čega slijedi da je

$$f(0) = 0.$$

Uvrstimo li $x = -y$ u zadanu jednadžbu imamo $f(0) = f(x) + f(-x)$ iz čega slijedi da je

$$f(-x) = -f(x). \tag{5.3}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n). \tag{5.4}$$

Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.4). Uvrstimo li $x_i = x$ za svaki i u (5.4), dobivamo

$$f(nx) = nf(x).$$

Za $x = \frac{m}{n}y$, gdje su $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$, imamo

$$f(my) = nf\left(\frac{m}{n}y\right),$$

odnosno

$$\frac{m}{n}f(y) = f\left(\frac{m}{n}y\right).$$

Iz posljednje jednakosti i (5.3) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(-\frac{m}{n}y\right) = -\frac{m}{n}f(y).$$

Konačno,

$$f(qy) = qf(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$ i za svaki $q \in \mathbb{Q}$. Definiramo li $c = f(1)$, imamo da je

$$f(q) = cq$$

za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Postoji niz racionalnih brojeva $\{q_n\}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r.$$

Kako je f neprekidna funkcija, vrijedi

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} cq_n = cr.$$

Dakle, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je $f(x) = cx$, pri čemu je $c \in \mathbb{R}$.

Eksponencijalna Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Cauchyjevom $\mathbb{NQR}$ metodom odredimo sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju eksponencijalnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li $x = y = 0$ u zadanu jednadžbu, dobivamo $f(0) = f(0)^2$ iz čega slijedi da je $f(0) = 0$ ili $f(0) = 1$. Ako pretpostavimo da f nije nul-funkcija, onda je $f(0) = 1$.

Uvrstimo li $x = -y$ u zadanu jednadžbu, dobivamo $f(0) = f(x)f(-x)$ iz čega slijedi

$$f(-x) = f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}. \tag{5.5}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n). \tag{5.6}$$

Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.6). Uvrstimo li $x_i = x$ za svaki i u (5.6), dobivamo

$$f(nx) = f(x)^n.$$

Ako je $x = \frac{m}{n}y$, gdje su $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$, slijedi redom

$$\begin{aligned} f(my) &= f\left(\frac{m}{n}y\right)^n, \\ f(y)^m &= f\left(\frac{m}{n}y\right)^n, \\ f\left(\frac{m}{n}y\right) &= f(y)^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.5) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(-\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}.$$

Konačno, $f(qy) = f(y)^q$ za svaki $y \in \mathbb{R}$ i za svaki $q \in \mathbb{Q}$. Definiramo li $a = f(1)$, imamo da je

$$f(q) = a^q$$

za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Postoji niz racionalnih brojeva $\{q_n\}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r.$$

Kako je f neprekidna funkcija, vrijedi

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = a^{\lim_{n\to\infty} q_n} = a^r.$$

Dakle, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je $f(x) = a^x$.

Logaritamska Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju logaritamsku Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Uvrstimo li $x = y = 1$ u zadanu jednadžbu, dobivamo $f(1) = 2f(1)$ iz čega slijedi da je

$$f(1) = 0.$$

Uvrstimo li $y = \frac{1}{x}$ u zadanu jednadžbu, dobivamo $f(1) = f(x) + f(x^{-1})$ iz čega slijedi da je

$$f(x^{-1}) = -f(x). \tag{5.7}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n). \tag{5.8}$$

Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Imamo:

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}) &= f((x_1 x_2 \cdots x_n) x_{n+1}) \\ &= f(x_1 x_2 \cdots x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.8). Stavimo li $x_i = x$ za svaki i, dobivamo

$$f(x^n) = nf(x).$$

Ako je $x = y^{\frac{m}{n}}$, gdje su $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$, slijedi redom

$$\begin{aligned} f(y^m) &= nf\left(y^{\frac{m}{n}}\right), \\ mf(y) &= nf\left(y^{\frac{m}{n}}\right), \\ f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) &= \frac{m}{n} f(y). \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.7) zaključujemo da je

$$f\left(y^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n} f(y).$$

Konačno,

$$f(y^q) = qf(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$ i za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz racionalnih brojeva $\{q_n\}$ takav da je

$$\lim_{n \to \infty} q_n = r.$$

Prema dokazanom vrijedi

$$f(y^{q_n}) = q_n f(y).$$

Zbog neprekidnosti funkcije f imamo

$$f(y^r) = \lim_{n \to \infty} f(y)^{q_n} = \lim_{n \to \infty} q_n f(y) = rf(y).$$

Stavimo li $y = a$, gdje je a proizvoljna realna konstanta i $x = a^r$, vrijedi

$$f(x) = f(a) \log_a x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x = \log_b x,$$

gdje je b pozitivna realna konstanta takva da je $f(a) = \frac{1}{\log_a b}$.

Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju multiplikativnu Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li najprije $x = y = 0$ u zadanu jednadžbu, imamo

$$f(0)[f(0) - 1] = 0,$$

pa je $f(0) = 0$ ili $f(0) = 1$. Uvrstimo li $x = y = 1$ u zadanu jednadžbu, imamo

$$f(1)[f(1) - 1] = 0,$$

iz čega slijedi da je $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$. Neka je $f(1) = 0$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$, pa je f nul-funkcija.

Neka je $f(1) = 1$. Ako je $y = \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$, imamo

$$f(1) = f(x)f(x^{-1}),$$

odnosno

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}. \tag{5.9}$$

Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n), \tag{5.10}$$

što se lako dokaže matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ tvrdnja slijedi iz same definicije multiplikativne Cauchyjeve funkcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Imamo

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 \cdots x_n x_{x+1}) &= f((x_1 x_2 \cdots x_n) x_{n+1}) \\ &= f(x_1 x_2 \cdots x_n) f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednakost (5.10). Uvrstimo li $x_i = x$ za svaki i u (5.10), dobivamo

$$f(x^n) = f(x)^n.$$

Ako je $x = y^{\frac{m}{n}}$, za $y \in \mathbb{R}_+, m, n \in \mathbb{N}$, slijedi redom

$$\begin{aligned} f(y^m) &= f\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^n, \\ f(y)^m &= f\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^n, \\ f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) &= f(y)^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti i (5.9) zaključujemo da vrijedi i

$$f\left(y^{-\frac{m}{n}}\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}.$$

Konačno,

$$f(y^q) = f(y)^q$$

za svaki $y \in \mathbb{R}_+$ i za $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Tada postoji niz racionalnih brojeva $\{q_n\}$ takav da

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r.$$

Prema dokazanom imamo

$$f(y^{q_n}) = f(y)^{q_n}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije f vrijedi

$$f(y^r) = \lim_{n\to\infty} f(y^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} f(y)^{q_n} = f(y)^r.$$

Stavimo li $y = a$, gdje je a proizvoljna realna konstanta i $x = a^r$, vrijedi

$$f(x) = f(a^r) = f(a)^r = f(a)^{\log_a x}.$$

Ako je $f(a) = 1$, tada je $f(x) = 1$ za svaki $x > 0$. Ako je $x < 0$, tada je $f(x)^2 = f(x^2) = 1$, pa je $f(x) = 1$ ili $f(x) = -1$. Zbog neprekidnosti funkcije f zaključujemo $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f(a) \neq 1$, onda je $f(a) = a^\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Slijedi da je, za svaki $x > 0$,

$$f(x) = x^\alpha,$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.3 Još neki primjeri

Primjer 5.3.1. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = a^{xy} f(x) f(y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pri čemu je a pozitivna realna konstanta.

Funkcija $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ je očito rješenje zadane jednadžbe. Da bismo dobili preostala rješenja, uvrstimo $x = y = 0$ te dobivamo

$$f(0) = f(0)f(0),$$

odnosno

$$f(0)[1 - f(0)] = 0.$$

Kako promatramo netrivijalna rješenja, promatramo slučaj kada je $f(0) = 1$, inače je

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.
Uvrstimo li redom $y = x, 2x, \ldots, (n-1)x$ u zadanu jednadžbu, imamo

$$\begin{aligned}
f(2x) &= f(x + x) = a^{x^2} f(x)^2, \\
f(3x) &= f(2x + x) = a^{(1+2)x^2} f(x)^3, \\
f(4x) &= f(3x + x) = a^{(1+2+3)x^2} f(x)^4, \\
&\vdots \\
f(nx) &= f((n-1)x + x) = a^{(1+2+3+\cdots+(n-1))x^2} f(x)^n.
\end{aligned}$$

Posljednju jednakost možemo zapisati kao

$$f(nx) = a^{\frac{n(n-1)}{2}x^2} f(x)^n. \tag{5.11}$$

U (5.11) uvedimo supstituciju $x = \frac{m}{n}y$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$, pa imamo

$$f(my) = a^{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{m}{n}y\right)^2} f\left(\frac{m}{n}y\right)^n.$$

Ako u (5.11) uvrstimo (m, y) umjesto (n, x), dobivamo

$$f(my) = a^{\frac{m(m-1)}{2}y^2} f(y)^m.$$

Izjednačavanjem desnih strana dobivenih jednakosti dobivamo

$$a^{\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{m}{n}y\right)^2} f\left(\frac{m}{n}y\right)^n = a^{\frac{m(m-1)}{2}y^2} f(y)^m.$$

Slijedi da je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = a^{\frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)y^2} f(y)^{\frac{m}{n}}.$$

Neka je $y = 1$ i neka je $c = f(1)$. Primijetimo da je

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{4}} f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ako je $f(1) = 0$, tada je

$$f(x) = f((x-1)+1) = a^{x-1} f(x-1) f(1) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $c > 0$. Vrijedi

$$f(x) = a^{\frac{x(x-1)}{2}} c^x, \tag{5.12}$$

za svaki $x \in \mathbb{Q}_+$.

Neka je $r \in \mathbb{R}_+$ i neka niz racionalnih brojeva $\{q_n\}$ konvergira u r. Kako je f neprekidna, vrijedi:

$$f(r) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{q_n(q_n-1)}{2}} c^{q_n} = a^{\frac{r(r-1)}{2}} c^r.$$

Da bismo odredili f za $x < 0$, koristimo činjenicu da je $f(0) = 1$ i supstituiramo $y = -x$, pri čemu je $x > 0$. Dobivamo

$$1 = a^{-x^2} f(x) f(-x),$$

odnosno

$$f(-x) = a^{x^2} f(x)^{-1} = a^{\frac{-x(-x-1)}{2}} c^{-x}.$$

Dakle, uz trivijalno rješenje, rješenje zadane funkcijske jednadžbe je

$$f(x) = a^{\frac{x(x-1)}{2}} c^x,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je c pozitivna realna konstanta.

Primjer 5.3.2. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li $x = y = 0$ u zadanu jednadžbu, dobivamo

$$f(0)^4 = f(0)^2$$

iz čega slijedi da je $f(0) = 0$ i $f(0) = \pm 1$.

Ako je $f(0) = 0$, uvrštavajući $y = x$ u zadanu jednadžbu dobivamo $f(2x)f(0) = f(x)^4$ iz čega slijedi da je

$$f(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ jedno rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

Primijetimo da f nema nultočaka ako nije nul-funkcija. Naime, ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = 0$, tada je $f(x + x_0)f(x - x_0) = 0$ pa za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x + x_0) = 0$ ili $f(x - x_0) = 0$, odakle je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Ako je $f(0) = 1$, zamijenimo redom x i y sa $x, 2x, 2^2x, \ldots$ te imamo

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x)^4 = f(x)^{2^2}, \\ f(4x) &= f(2x)^4 = f(x)^{4^2}, \\ f(8x) &= f(4x)^4 = f(x)^{8^2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Možemo naslutiti da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(nx) = f(x)^{n^2}. \tag{5.13}$$

Dokažimo tu slutnju matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $1, 2, \ldots, n$ i dokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Uvrstimo $x = ny$ u zadanu jednadžbu te dobivamo

$$f((n+1)y)f((n-1)y) = f(ny)^2 f(y)^2.$$

Prema pretpostavci indukcije je $f((n-1)y) = f(y)^{(n-1)^2}$ i $f(ny) = f(y)^{n^2}$, pa imamo

$$f((n+1)y) = f(y)^{-(n-1)^2} f(y)^{2n^2} f(y)^2 = f(y)^{(n+1)^2},$$

iz čega zaključujemo da (5.13) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $x = \frac{m}{n}y$, gdje su $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$. Kako je

$$f(nx) = f(x)^{n^2} = f\left(\frac{m}{n}y\right)^{n^2} \quad \text{i} \quad f(my) = f(y)^{m^2},$$

to je

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{\frac{m^2}{n^2}}.$$

Stavimo li $y = 1$ i definiramo li $c = f(1) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^4 > 0$, dobivamo

$$f(x) = c^{x^2}$$

za svaki $x \in \mathbb{Q}_+$. Zbog neprekidnosti funkcije f, vrijedi da je $f(x) = c^{x^2}$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Da bismo odredili f za $x < 0$, uvrstimo $x = 0$ u zadanu jednadžbu. Vrijedi

$$f(y)f(-y) = f(y)^2,$$

odnosno

$$f(-y) = f(y)$$

iz čega slijedi da je

$$f(x) = c^{x^2}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Preostaje slučaj kada je $f(0) = -1$. Uočimo da funkcija $-f$ takoder zadovoljava zadanu funkcijsku jednadžbu. Iz prethodnog slučaja možemo zaključiti da je

$$-f(x) = c^{x^2},$$

odnosno

$$f(x) = -c^{x^2},$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je c pozitivna realna konstanta.

Primjer 5.3.3. *Odredimo sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Uvedimo supstituciju $x = y = \frac{z}{2}$ pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu imamo

$$f(z) = 2f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right)^2 = \left(1 + f\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 - 1.$$

Zaključujemo da je $f(x) \geq -1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f(1) = -1$, slijedi

$$f(x) = f(x - 1 + 1) = f(x - 1) + f(1) + f(x - 1)f(1) = -1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Promatramo slučaj kada je $f(1) > -1$. Uvrstimo li u zadanu jednadžbu redom $y = x, 2x, \ldots$ dobivamo

$$\begin{aligned}
f(2x) &= 2f(x) + f(x)^2 = (f(x) + 1)^2 - 1, \\
f(3x) &= f(2x) + f(x) + f(2x)f(x) = f(x)^3 + 3f(x)^3 + 3f(x) = (f(x) + 1)^3 - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Možemo naslutiti da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(nx) = (f(x) + 1)^n - 1. \tag{5.14}$$

Dokažimo tu slutnju matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ te dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(x) + f(nx) + f(x)f(nx) \\ &= f(x) + (f(x)+1)^n - 1 + f(x)(f(x)+1)^n - f(x) \\ &= (f(x)+1)^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Zaključujemo da (5.14) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Uvedemo supstituciju $x = \frac{m}{n}y$, gdje su $y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ i uvrstimo u (5.14) te dobivamo

$$f(my) = \left(f\left(\frac{m}{n}y\right) + 1\right)^n - 1.$$

Iz (5.14) slijedi i

$$f(my) = (f(y) + 1)^m - 1.$$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih jednakosti dobivamo

$$f\left(\frac{m}{n}y\right) = (f(y) + 1)^{\frac{m}{n}} - 1.$$

Uvrstimo li $y = 1$ i definiramo li $c = 1 + f(1) > 0$, slijedi da je

$$f(x) = c^x - 1$$

za svaki $x \in \mathbb{Q}_+$. Zbog neprekidnosti funkcije f vrijedi da je $f(x) = c^x - 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Da bismo odredili f za $x < 0$, uvrstimo $y = -x, x > 0$, u zadanu jednadžbu te imamo

$$0 = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x).$$

Ako postoji x takav da je $f(x) = -1$, tada iz gornje jednakosti dobivamo $0 = -1$, što je kontradikcija. Dakle, $f(x) \neq -1$ za svaki x, pa imamo

$$f(-x) = \frac{-f(x)}{1 + f(x)} = \frac{-c^x + 1}{c^x} = -1 + \frac{1}{c^x} = c^{-x} - 1.$$

Dakle,

$$f(x) = c^x - 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je c pozitivna realna konstanta.

Bibliografija

[1] C. Efthimiou, *Introduction to functional equations,* MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[2] P. Kannappan, *Functional equations and inequalities with applications,* Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[3] P.K. Sahoo, P. Kannappan, *Introduction to functional equations,* CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[4] C.G. Small, *Functional equations and how to solve them,* Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.

Sažetak

Cauchyjeve funkcijske jednadžbe se smatraju najvažnijim funkcijskim jednadžbama (to su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije, ovdje prvenstveno realne funkcije realne varijable). U ovom radu dana su rješenja za četiri tipa Cauchyjevih funkcijskih jednadžbi:
1. aditivnu $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. eksponencijalnu $f(x + y) = f(x)f(y)$,
3. logaritamsku $f(xy) = f(x) + f(y)$,
4. multiplikativnu $f(xy) = f(x)f(y)$.
Opisana je i takozvana Cauchyjeva $\mathbb{NQR}$ metoda za rješavanje funkcijskih jednadžbi općeg oblika $f(x + y) = F(f(x), f(y))$. Dobiveni rezultati i korištena metodologija se često primjenjuju u rješavanju nekih drugih funkcijskih jednadžbi.

Summary

The Cauchy functional equations are considered the most important functional equations. Functional equations are equations in which the unknowns are functions, here mostly real functions of a real variable. In this thesis we give solutions for four types of the Cauchy functional equations:
1. additive $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. exponential $f(x + y) = f(x)f(y)$,
3. logarithmic $f(xy) = f(x) + f(y)$,
4. multiplicative $f(xy) = f(x)f(y)$.
We also describe Cauchy's $\mathbb{NQR}$ method for solving the functional equations of the form $f(x + y) = F(f(x), f(y))$. The results obtained and the methodology used are often applied when solving some other functional equations.

Životopis

Rođena sam 27. prosinca 1992. godine u Karlovcu. Odrasla sam i živim s roditeljima i dvije mlađe sestre u Jarčem Polju, malom mjestu pored Karlovca. Školovanje sam započela 1999. godine u Područnoj školi Jarče Polje, Osnovna škola Netretić. Od 2007. godine pohađala sam Gimnaziju Karlovac, opći smjer te svaki razred završila s odličnim uspjehom. Prirodoslovno matematički fakultet, Matematički odsjek upisala sam 2011. godine na kojem sam 2015. godine završila sveučilišni preddiplomski studij Matematika; smjer nastavnički. Godinu dana držala sam demonstrature iz kolegija Elementarna geometrija. Poznajem engleski jezik izvrsno u govoru i pismu. Otvorena sam i komunikativna osoba, volim nova iskustva i rad s ljudima.