# Termodinamika i simetrije u okolini horizonata crnih rupa

Šoda, Barbara

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:591809

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-01**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

FIZIČKI ODSJEK

Barbara Šoda

# TERMODINAMIKA I SIMETRIJE U BLIZINI HORIZONATA CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

**Barbara Šoda**

Diplomski rad

# Termodinamika i simetrije u blizini horizonata crnih rupa

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2016.

Iskreno se zahvaljujem mentoru, doc. dr. sc. Ivici Smoliću, na pomoći prilikom izrade ovog rada i na slobodi koju mi je dao za istraživanje tijekom protekle akademske godine.

Zahvaljujem se i svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci.

# Sažetak

U ovom radu pokazali smo dva načina za računanje entropije crnih rupa koristeći tehnike konformalne teorije polja. U prvom je izračunata entropija (2+1)-dimenzionalne crne rupe čije asimptotske simetrije u beskonačnosti zadovoljavaju Virasoro algebru. Zaključili smo da je efektivna kvantna teorija polja za gravitaciju, ako postoji, konformalna. Stoga smo za brojanje stanja za poluklasičnu crnu rupu iskoristili Cardyjevu formulu za entropiju.
U drugom računu izračunata je entropija N-dimenzionalne crne rupe s aksijalnom simetrijom. U tom slučaju pronađena je Virasoro algebra u približnim simetrijama u blizini horizonta. Jednakom logikom kao i za (2+1)-dimenzionalni slučaj, upotrijebili smo Cardyjevu formulu.
Rezultat dobiven za oba slučaja slaže se sa Bekenstein-Hawkingovom entropijom.

# Thermodynamics and Symmetries in the Near-Horizon Region of Black Holes


## Abstract

We demonstrate two ways of calculating the black hole entropy by using conformal field theory techniques. First we calculate the entropy of a (2+1)-dimensional black hole whose asymptotic symmetries at infinity satisfy the Virasoro algebra. We conclude that, if there is such a theory as an effective quantum field theory for gravity, it should be a conformal one. To count the microstates of the semiclassical black hole we used Cardy's formula for entropy in conformal field theory at high temperatures. In the second part we calculated the entropy of an N-dimensional axially symmetric black hole. In this case the Virasoro algebra is found for the near-horizon asymptotic symmetries. Following the same line of thought, again we used the Cardy formula to obtain the entropy. In both cases the results are consistent with the Bekenstein-Hawking formula for entropy.

# Sadržaj

# 1 Uvod

## *1.1 O crnim rupama*

Crne rupe su dijelovi prostor-vremena iz kojih ne mogu izaći čak ni objekti koji se gibaju brzinom svjetlosti. Ideja o crnim rupama dolazi još iz vremena prije otkrića opće teorije relativnosti [1], kad je u sklopu Newtonove teorije izračunato koliki bi trebao biti polumjer $R$ sferno simetričnog tijela mase $M$ da bi se neko drugo tijelo moglo odvojiti od njegovog gravitacijskog utjecaja (makar na beskonačnoj udaljenosti), ako se kreće brzinom svjetlosti, $c$ (tj. koji je polumjer sferičnog tijela mase $M$ ako je njegova druga kozmička brzina jednaka $c$). Zanimljivo, rezultat koji se dobije:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \tag{1.1}$$

jednak je polumjeru crne rupe najpoznatijeg rješenja Einsteinovih jednadžbi, Schwarzschildovog prostor-vremena [2].

Teorija koja se u klasičnom režimu danas smatra ispravnom je opća teorija relativnosti (skraćeno: OTR). Poznat je niz rješenja Einsteinovih jednadžbi, koje su centralni matematički rezultat OTR-a, koja sadrže crne rupe. Osim Schwarzschildovog, koje opisuje sferno simetričnu, vremenski invarijantnu crnu rupu, najvažnije je Reissner-Nordströmovo, koje opisuje nabijenu, nerotirajuću, te Kerrovo prostor-vrijeme, koje sadrži nenabijenu, ali rotirajuću crnu rupu.

Crne rupe mogu nastati kad se uslijed gravitacijskog kolapsa dovoljno masivno tijelo uruši tako da mu je sva masa otprilike unutar Schwarzschildovog radijusa. Smatra se da je tijelo dovoljno masivno ako mu je masa $M$ veća od $2-3$ mase sunca, tj. $M > 2,\ 3M_\odot$ [4]. Već za urušenu zvijezdu mase $M > 1.4M_\odot$ (tzv. Chandrasekharova granica [3]) plin degeneriranih elektrona ne može spriječiti urušavanje takozvanog bijelog patuljka, dok za zvijezde mase $M > 3M_\odot$ to ne može učiniti ni plin degeneriranih neutrona. Vrlo je vjerojatno, po trenutnim saznanjima o nuklearnoj materiji, da se tad događa urušavanje materije u crnu rupu.

Stacionarne crne rupe mogu se opisati pomoću samo tri veličine: mase $M$, naboja $Q$ i angularnog momenta $J$. To je posljedica poznatog teorema o kosi crnih rupa [5]. To znači da bez obzira na to od kakve je materije nastala i kako je tekao proces stvaranja crne rupe, nakon što se postigne stacionarno stanje, ona se uvijek može opisati samo s te tri veličine. Ovaj teorem je doveo do značajnog otkrića o termodinamičkim svojstvima crnih rupa.

Možemo zamisliti da neka količina uobičajene materije upadne u već nastalu crnu rupu. Prije nego što prijeđe horizont, imala je neku količinu entropije $S$. Nakon što prijeđe horizont, nemamo načina da kao promatrači izvana izmjerimo što se dogodilo s tom entropijom. Ono što znamo jest da je prije ukupna entropija bila $S$, a nakon upada materije u crnu rupu, i nakon dovoljno dugo vremena, vidimo samo stacionarno stanje crne rupe, točno opisano s tri parametra. Kad bi postojalo samo jedno stanje crne rupe opisane s te tri veličine, entropija svake takve crne rupe bila bi jednaka 0. To bi značilo da se u procesu upadanja uobičajene materije u crnu rupu ukupna entropija smanjila te da je drugi zakon termodinamike narušen. Bekenstein je ovaj problem riješio tako da je pretpostavio da i crne rupe imaju entropiju [6].

## 1.2 O termodinamici crnih rupa

U općoj teoriji relativnosti, koja je klasična teorija, crne rupe zadovoljavaju zakone analogne termodinamičkim [7].

- **0. zakon** Površinska gravitacija $\kappa$ je konstantna na horizontu događaja crne rupe, uz uvjet da tenzor energije impulsa zadovoljava dominantni uvjet na energiju[1].

  Površinska gravitacija $\kappa$ je analogna temperaturi $T$ u termodinamici, a ovaj zakon odgovara nultom zakonu termodinamike koji kaže da je temperatura konstantna u cijelom sustavu koji je u termodinamičkoj ravnoteži.

- **1. zakon** Ako stacionarnu crnu rupu mase $M$ i angularnog momenta $J$, s površinskom gravitacijom $\kappa$ i angularnom brzinom $\Omega$, perturbiramo tako da, nakon postizanja novog stacionarnog stanja, ima masu $M + \delta M$ i angularni moment $J + \delta J$, vrijedit će da se ukupna masa promijenila za:

  $$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ \tag{1.2}$$

  Ovaj zakon analogan je prvom zakonu termodinamike koji opisuje kako se mijenja unutarnja energija $U$ nekog sustava: $dU = TdS - pdV$.

- **2. zakon** Ukupna površina horizonta u asimptotski ravnom prostor-vremenu se ne smanjuje u vremenu, tj. $dA \geq 0$. Ovaj zakon vrijedi uz pretpostavku da tenzor energije-impulsa zadovoljava slabi uvjet na energiju[2] i da vrijedi hipoteza kozmičke cenzure[3].

  Ovaj zakon odgovara drugom zakonu termodinamike čija je tvrdnja da se ukupna entropija ne može smanjiti.

Vidimo da se površinska gravitacija $\kappa$ i površina horizonta $A$ crne rupe u općoj teoriji relativnosti ponašaju redom kao temperatura i entropija u termodinamici. Bekenstein

[1] Ako je $T^{\mu\nu}$ tenzor energije impulsa, a $V^a$ i $W^a$ bilo koja dva kauzalna vektorska polja, dominantni uvjet za energiju kaže da je $V^a W^a T_{ab} \geq 0$, tj. energija ne može putovati brže od svjetlosti. [5]

[2] Slabi uvjet na energiju za tenzor energije-impulsa $T^{ab}$ kaže da svako vektorsko polje vremenskog tipa $W^a$ vrijedi $T_{ab} W^a W^b \geq 0$

[3] Hipoteza kozmičke cenzure kaže da goli singulariteti (tj. singulariteti koji nisu sakriveni horizontom) ne mogu nastati kao rezultat gravitacijskog urušavanja (kolapsa) u asimptotski ravnom prostor-vremenu.

je slijedeći ove usporedbe pretpostavio da je entropija crne rupe proporcionalna njenoj površini, ali nije znao koji je točan faktor proporcionalnosti. Hawking je u svom slavnom poluklasičnom računu [9] dobio temperaturu crne rupe, koja zrači kao crno tijelo, a temperatura je u prirodnom sustavu jedinica jednaka:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \tag{1.3}$$

Kao posljedicu tog računa, dobili smo i koeficijent proporcionalnosti između entropije i površine u Bekensteinovoj pretpostavci. Ovu vezu između površine i entropije nazivamo *Bekenstein-Hawkingovom formulom za entropiju crne rupe*:

$$S = \frac{A}{4}. \tag{1.4}$$

## *1.3 O podrijetlu entropije crnih rupa*

Entropija mjeri broj mikroskopskih stanja koja zadovoljavaju makroskopsko stanje nekog sustava. Kako bismo zbilja pokazali da opravdano tu veličinu nazivamo entropijom, trebali bismo u nekoj teoriji kvantne gravitacije prebrojati sva mikroskopska stanja i pokazati da logaritam njihovog broja odgovara entropiji.

Danas postoji niz računa koji koriste tehnike novih teorija i čiji se izračuni slažu s Bekenstein-Hawkingovom formulom u raznim posebnim slučajevima. Oni su konceptualno različiti, od onih u teoriji struna [10, 11], do kvantne gravitacije s petljama (eng. loop quantum gravity) [12, 13], preko entropije zapleta (eng. entanglement entropy) [14] i brojanja stanja preko dualne konformalne teorije polja [15, 16]. Zbog toga što su svi ti pristupi toliko raznoliki prirodno se nameće pitanje što im je zajedničko i zašto uspijevamo dobiti jednaki odgovor na pitanje kolika je entropija crne rupe bez obzira na detalje kvantne teorije gravitacije. Jedan argument zašto bi takav mehanizam trebao postojati je i činjenica da je Hawkingova temperatura, a time i entropija crne rupe, dobivena poluklasičnim računom u formalizmu kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu. Nije jasno kako bi taj račun mogao prepoznati postojanje mikroskopskih stanja u kvantnoj gravitaciji jer prostor-vrijeme tretira potpuno klasično.

U ovom radu opisat ćemo jedan takav mehanizam. Započet ćemo s radom Stromingera [17], koji započinje s računom entropije (2+1)-dimenzionalne BTZ crne rupe kao uvodom u centralni rad Carlipa [18] koji je prvi izračunao entropiju aksijalno simetrične crne rupe koristeći tehnike iz konformalne teorije polja, za bilo koji broj dimenzija prostor-vremena. Prije toga, u sljedećem poglavlju, predstavit ćemo matematičke alate kojima smo se koristili u računima.

# 2 Približne simetrije

## 2.1 Izometrije

Izometrije metrike su koordinatne transformacije koje čuvaju metriku. Kažemo da je vektorsko polje $\xi^a$ infinitezimalni generator izometrije metrike $g_{ab}$ ako je Liejeva derivacija metrike u smjeru polja jednaka nuli:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0. \tag{2.1}$$

Polje $\xi^a$ nazivamo još i Killingovim vektorskim poljem. Ako raspišemo ovu jednadžbu preko kovarijantnih derivacija:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{ab} &= \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{ac}\nabla_b \xi^c + g_{cb}\nabla_a \xi^c = \\ &= \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a,\end{aligned} \tag{2.2}$$

možemo doći do Killingove jednadžbe:

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \tag{2.3}$$

Neka je $y^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$ koordinatna transformacija koju generira vektorsko polje $\xi^\mu$, a $\epsilon$ je infinitezimalni parametar. Kako bi ova transformacija bila izometrija, mora biti zadovoljena sljedeća jednadžba:

$$\frac{\partial(x^\alpha + \epsilon\xi^\alpha)}{\partial x^\mu}\frac{\partial(x^\beta + \epsilon\xi^\beta)}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x+\epsilon\xi) = g_{\mu\nu}(x), \tag{2.4}$$

a ona je ekvivalentna Killingovoj jednadžbi (2.3).

Kao primjer, navest ćemo izometrije $\text{AdS}_3$ prostor-vremena [21]. Metrika na $\text{AdS}_3$ jest:

$$ds^2 = l^2(-\cosh^2\rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\phi^2). \tag{2.5}$$

Killingove vektore možemo pronaći rješavajući Killingovu jednadžbu. Rješenja su sljedeći vektori:

$$
\begin{aligned}
\xi_{-1} &= \frac{1}{2}\left(\tanh(\rho)e^{-i(t+\phi)}\partial_t + \coth(\rho)e^{-i(t+\phi)}\partial_\phi + ie^{-i(t+\phi)}\partial_\rho\right)\\
\xi_0 &= \frac{1}{2}\left(\partial_t + \partial_\phi\right)\\
\xi_{+1} &= \frac{1}{2}\left(\tanh(\rho)e^{i(t+\phi)}\partial_t + \coth(\rho)e^{i(t+\phi)}\partial_\phi - ie^{i(t+\phi)}\partial_\rho\right)\\
\bar{\xi}_{-1} &= \frac{1}{2}\left(\tanh(\rho)e^{-i(t-\phi)}\partial_t - \coth(\rho)e^{-i(t-\phi)}\partial_\phi + ie^{-i(t+\phi)}\partial_\rho\right)\\
\bar{\xi}_0 &= \frac{1}{2}\left(\partial_t - \partial_\phi\right)\\
\bar{\xi}_{+1} &= \frac{1}{2}\left(\tanh(\rho)e^{i(t-\phi)}\partial_t - \coth(\rho)e^{i(t+\phi)}\partial_\phi - ie^{i(t+\phi)}\partial_\rho\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Možemo provjeriti algebru ovih vektora. Komutator vektora je općenito za vektore $V^a$ i $W^a$ dan izrazom:

$$[V, W]^a = V^b\partial_b W^a - W^b\partial_b V^a. \qquad (2.7)$$

Vrijede sljedeće relacije:

$$
\begin{aligned}
i[\xi_1, \xi_{-1}] &= 2\xi_0\\
i[\xi_1, \xi_0] &= \xi_1\\
i[\xi_{-1}, \xi_0] &= -\xi_{-1} \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

i analogne relacije za $\bar{\xi}_n$. Također, $\xi_m$ i $\bar{\xi}_n$ komutiraju za bilo koji izbor $m, n$:

$$[\xi_m, \bar{\xi}_n] = 0. \qquad (2.9)$$

Znači da je grupa izometrija od AdS$_3$:

$$SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}). \qquad (2.10)$$

Ona je izomorfna $SO(2, 2)$ grupi.

## 2.2 *Približne simetrije*

Kažemo da neki sustav ima približnu simetriju kad postoji malo odstupanje nekog parametra od vrijednosti za koje bi simetrija bilo potpuna. Među poznatijim primjerima je približna izospinska simetrija protona i neutrona, gdje je masa protona za $0.1\%$ manja od mase neutrona. Masa je u ovom primjeru parametar koji neznatno narušava simetriju između tih dviju čestica u nuklearnim interakcijama. U ovom radu zanimat će nas približne simetrije metrike.

Približnu izometriju metrike može se definirati tako da se umjesto nule na desnoj strani Killingove jednadžbe (2.3) nalazi nešto različito od nule. To nije nužno jedini način, ali nas drugi pristupi neće zanimati. Ovakve približne simetrije koristimo kad želimo naći koordinatne transformacije koje čuvaju metriku samo u jednom području, a ne u cijelom prostor-vremenu. Najjednostavniji primjer i jednostavan model za BMS simetriju[4] [19] je asimptotska simetrija 2-dimenzionalne euklidske ravnine [20].

Ako na ravnini definiramo standardne polarne koordinate $r$ i $\theta$, egzaktne simetrije pronašli bismo rješavajući jednadžbe:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{L}_\xi g^{ab} = 0, \;\; a, b \in \{r, \theta\}. \tag{2.11}$$

Rješenja s parametrima $a$,$b$ i $c$ koji su proizvoljne konstante opisuju redom translacije i rotacije.

$$\begin{aligned} \xi_r &= f(\theta) =: a\cos\theta + b\sin\theta \\ \xi_\theta &= c + \frac{1}{r}\partial_\theta f(\theta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Međutim, možemo se zapitati i kakve koordinatne transformacije čuvaju samo asimptotsku strukturu euklidske ravnine. Metrika i inverzna metrika su redom

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \qquad \text{i} \qquad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}. \tag{2.13}$$

Zahtijevat ćemo da približna izometrija mijenja samo $g_{\theta\theta}$ član metrike, i to do na red $r^{-\lambda}$. Kako na ovaj način želimo dopustiti veći broj koordinatnih transformacije nego kod egzaktnih simetrija, tj. želimo da je prostor rješenja za približne bogatiji nego za egzaktne simetrije, očekujemo da ćemo to dobiti kad stavimo da je $\lambda > 2$. Za $\lambda < 2$ očito bismo narušili asimptotsku strukturu metrike jer bi to postao dominantni doprinos za $r \to \infty$.

$$\mathcal{L}_\xi g^{rr} = \mathcal{L}_\xi g^{r\theta} = 0 \tag{2.14}$$

$$\mathcal{L}_\xi g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^\lambda}. \tag{2.15}$$

[4]BMS (Bondi-Metzner-Sachs) su koordinatne transformacije koje čuvaju svojstvo asimptotske ravnoće (eng. *aysmptotic flatness*.)

Rješavanjem ovih jednadžbi dobivamo da su za $2 < \lambda \leq 3$ Killingovi vektori:

$$\begin{aligned}\xi_r &= f(\theta)\\ \xi_\theta &= g(\theta) + \frac{1}{r} f(\theta).\end{aligned}$$

U ovom slučaju su, za razliku od egzaktne simetrije, $f$ i $g$ proizvoljne funkcije. To znači da se prostor rješenja znatno povećao, jer se od 2-parametarske funkcije $f$ i konstante $c$ proširio na proizvoljne funkcije $f$ i $g$, tj. beskonačno parametarske funkcije.

Za slučaj $\lambda > 3$, dobivamo isti prostor rješenja kao za egzaktnu simetriju, jer smo na taj način dali prejaku restrikciju na promjene metrike generirane takvim transformacijama.

Primijetimo još jednu ranije spomenutu karakteristiku ovih simetrija, a to je da su one približne simetrije, ali samo u jednom dijelu prostora, primjerice u blizini horizonta ili na rubovima prostor-vremena. Tako, u ovom slučaju, blizu ishodišta znatno mijenjamo metriku ako dodajemo neke članove reda veličine $r^{2+\epsilon}$, gdje je $\epsilon$ po volji veći od 0.

## *2.3 Približne simetrije u hamiltonijanskoj formulaciji i površinski naboji*

U hamiltonijanskoj formulaciji OTR-a, formuliranoj u dodatku A, jasno su povezani generatori simetrija i odgovarajući očuvani naboji. Također, jednostavno je proširenje na asimptotske (približne) simetrije i njima pridružene naboje [8].

U dodatku smo površinski doprinos hamiltonijanu zanemarili. Međutim, ovdje ćemo ga zadržati i pisati:

$$H = \int_\Sigma d^{n-1}x\sqrt{h}\left(N\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a\right) + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}\left(N\mathcal{H}^{pov.} + N^a\mathcal{H}_a^{pov.}\right), \qquad (2.16)$$

gdje smo s $pov.$ označili veličine analogne hamiltonijanskim i impulsnim ograničenjima, ali na rubu (ili površini). $h'_{ab}$ je metrika na rubu, a $h'$ njena determinanta. Važno je napomenuti da, za razliku od hamiltonijanskih i impulsnih ograničenja koja iščezavaju (kao u dodatku A), površinske veličine neće nužno biti jednake nuli.

Kako su $N$ i $N^a$ povezani s vremenskim vektorskim poljem $t^\mu$, normalom $n^\mu$ na $\Sigma$ i vektorima baze $v_a^\mu$ tangencijalnim na $\Sigma$:

$$t^\mu = Nn^\mu + N^b v_b^\mu, \qquad (2.17)$$

vidimo da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
N\mathcal{H} + N^a\mathcal{H}_a &= t^\mu \mathcal{H}_\mu \\
N\mathcal{H}^{pov.} + N^a\mathcal{H}_a^{pov.} &= t^\mu \mathcal{H}_\mu^{pov.} =: t^\mu Q_\mu .
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Definirali smo površinska ograničenja slovom $Q$ anticipirajući njihovo značenje u smislu površinskog naboja.

Jednako kao što smo mogli napisati uz pomoć (2.18) hamiltonijan kao generator promjena duž vektora $t^\mu$, tako možemo napisati i za bilo koji drugi vektor $\xi$ generator duž tog vektorskog polja. Zvat ćemo ga generatorom $L_\xi$,

$$
L_\xi = \int_\Sigma d^{n-1}x\sqrt{h}\left(\mathcal{H}_\mu \xi^\mu\right) + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}\left(Q_\mu \xi^\mu\right). \tag{2.19}
$$

Za egzaktne simetrije imamo uvjet da je na rubu $\partial\Sigma$ varijacija $\delta h_{ab} = 0$. Kad vrijedi takav uvjet, površinski doprinos generatoru poništi doprinose varijacije volumnog dijela koji nisu kanonskog oblika, tj. one koje se ne mogu napisati kao

$$
\int_\Sigma d^{n-1}x\sqrt{h}\left((...)^{ab}\delta h_{ab} + (...)^{ab}\delta p_{ab}\right) \tag{2.20}
$$

Na taj način imamo dobro definirane jednadžbe gibanja

$$
\dot{q}_i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} \tag{2.21}
$$

$$
\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i}. \tag{2.22}
$$

U približnim simetrijama možemo dopustiti da se na rubu generira neka promjena $\delta h_{ab} \neq 0$, kao u primjeru u potpoglavlju Približne simetrije. Stoga u varijaciji volumnog dijela moramo zadržati sve površinske doprinose, kako bi odredili varijaciju dodanog površinskog dijela.

$$
\delta \int_\Sigma d^{n-1}x\sqrt{h}\left(\mathcal{H}_\mu \xi^\mu\right) = \int_\Sigma d^{n-1}x\sqrt{h}\left((...)^{ab}\delta h_{ab} + (...)^{ab}\delta p_{ab}\right) + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}(...) \tag{2.23}
$$

$\delta\mathscr{Q}$ dodajemo kako bismo imali kanonske varijacije kao i u slučaju egzaktnih simetrija.

$$
\delta\mathscr{Q} = \delta \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}\left(Q_\mu \xi^\mu\right) = -\oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}(...) \tag{2.24}
$$

Kako bismo pronašli površinski dio, moramo jednadžbu (2.24) funkcionalno integrirati. U funkcionalnoj integraciji veličine $\delta\mathscr{Q}$ pojavit će se konstanta integracije.

Obično se uzme da je ona jednaka nuli za neku "prirodnu" pozadinu, primjerice slučaj kad nametnemo takve rubne uvjete na asimptotsku simetriju da je ona jednaka egzaktnoj.

Asimpotske simetrije su po definiciji deformacije $\xi^a$ plohe $\Sigma_t$ koje čuvaju neke rubne uvjete. Ti rubni uvjeti su oblika danog u prethodnom potpoglavlju. Iz asimptotskih simetrija izbacujemo one koje su dio skupa egzaktnih simetrija, tj. one $\xi^a$ kojima površinski naboj $\mathscr{Q}$ iščezava. Asimptotska simetrija mora čuvati zadane rubne uvjete i u isto vrijeme rezultirati nabojem $\mathscr{Q} \neq 0$. Također, mora sadržavati izometrije ukupnog prostor-vremena.

# 3 Račun entropije crne rupe uz pomoć približnih simetrija

Ovo poglavlje je razdvojeno na dva dijela. U prvom ćemo u 3-dimenzionalnom AdS prostor-vremenu izračunati entropiju crne rupe koja se slaže sa Bekenstein-Hawkingovom formulom. Zatim ćemo generalizirati taj pristup na N dimenzija, pri čemu je N po volji odabran broj. Računi se temelje na radovima Stromingera (1998.) i Carlipa (1998.).

## *3.1 Entropija BTZ crne rupe pomoću konformalne teorije polja*

Metrika $AdS_3$ je vakuumsko rješenje trodimenzionalne gravitacije s negativnom kozmološkom konstantom $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ oblika

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{3.1}$$

U prethodnom poglavlju o približnim simetrijama najavili smo kako će nas zanimati koordinatne transformacije koje čuvaju samo asimptotski oblik metrika. U ovom slučaju dopustit ćemo da se transformacijom u metrici generiraju promjene oblika [22]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{tt} &= O(1) \\
\mathcal{L}_\xi g_{tr} &= O(1/r^3) \\
\mathcal{L}_\xi g_{t\phi} &= O(1) \\
\mathcal{L}_\xi g_{rr} &= O(1/r^4) \\
\mathcal{L}_\xi g_{r\phi} &= O(1/r^3) \\
\mathcal{L}_\xi g_{\phi\phi} &= O(1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Određivanje ovih uvjeta inspirirano je člankom [23]. Oni bi trebali zadovoljavati sljedeća tri uvjeta:

- daju fizikalno relevantna rješenja
- da su površinski integrali (u smislu definiranom u poglavlju 2.3) konačni i integrabilni
- da skup približnih simetrija koje dobijemo rješavanjem jednadžbi sadrže u sebi egzaktne simetrije od $AdS_3$.

Grupa simetrija $AdS_3$ je SL(2,$\mathbb{R}$)$\times$SL(2,$\mathbb{R}$). Grupa asimptotskih simetrija trebala bi sadržavati tu grupu. Možemo provjeriti kakvu metriku u beskonačnosti ima $AdS_3$:

$$ds^2 = r^2/l^2(-dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{r^2} + l^2 d\phi^2). \tag{3.3}$$

Ako promijenimo koordinate

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{1-\rho} \tag{3.4}$$

i pogledamo kakva je metrika u beskonačnosti do na konformalni predfaktor, tj. za $\rho = 1$:

$$ds^2 = -dt^2 + l^2 d\phi^2, \tag{3.5}$$

nalazimo da opisuje topologiju $\mathbb{R} \times S^1$, tj. cilindar. Svojstva 2-dimenzionalne konformalne teorije polja na cilindru su nam poznata i znamo da konformalna grupa sadrži upravo SL(2,$\mathbb{R}$)$\times$SL(2,$\mathbb{R}$). To nam sugerira da je vjerojatno to asimptotska grupa simetrije, što ćemo i pokazati.

Kako bismo našli vektorska polja $\xi^a$ koja zadovoljavaju uvjete (3.2), moramo riješiti 6 vezanih diferencijalnih jednadžbi pogađanjem. U ovom slučaju vektorsko polje koje zadovoljava te jednadžbe je:

$$\begin{aligned}
\xi^t &= l(T^+ + T^-) + \frac{l^3}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ + \partial_-^2 T^-) + O(1/r^4) \\
\xi^r &= T^+ + T^- - \frac{l^2}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ - \partial_-^2 T^-) + O(1/r^4) \\
\xi^\phi &= -r(\partial_+ T^+ + \partial_- T^-) + O(1/r),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

gdje smo uveli pokratu $\partial_\pm = \frac{1}{2}(l\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial \phi})$, a $T^\pm$ su proizvoljne funkcije od $r$, $t$ i $\phi$ takve da je $\partial_\pm T^\mp = 0$.

Za funkcije $T^\pm$ napravit ćemo eksplicitni odabir koji zadovoljava gore navedeni uvjet:

$$\begin{aligned}
T_n^+ &= \frac{i}{2} e^{in(t/l+\phi)} \\
T_n^- &= 0 \\
\bar{T}_n^+ &= \frac{i}{2} e^{in(t/l-\phi)} \\
\bar{T}_n^- &= 0.
\end{aligned}$$

Komutatori odgovarajućih vektorskih polja su:

$$
\begin{aligned}
[\xi_n, \xi_m] &= (n-m)\xi_{n+m} \\
\left[\bar{\xi}_n, \bar{\xi}_m\right] &= (n-m)\bar{\xi}_{n+m} \\
\left[\xi_n, \bar{\xi}_m\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

Sad znamo da je grupa asimptotske simetrije za $\mathrm{AdS}_3$ generirana dvjema kopijama Virasoro algebre bez centralnog naboja (opisane u dodatku B), jedna za vektorsko polje $\xi$ i jedna za vektorsko polje $\bar{\xi}$. To je grupa simetrije za konformalne transformacije i sadrži SL(2,$\mathbb{R}$)$\times$SL(2,$\mathbb{R}$).

Brown i Henneaux [22] izračunali su Poissonove zagrade generatora $L_n = H[\xi_n]$ i $\bar{L}_n = H[\bar{\xi}_n]$ povezanih sa vektorskim poljima (3.6) i dobili:

$$
\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m+n,0} \\
\left[\bar{L}_n, \bar{L}_m\right] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m+n,0} \\
\left[L_n, \bar{L}_m\right] &= 0,
\end{aligned}
$$

što je Virasoro algebra s centralnim dodatkom. Izračunato je i da je centralni naboj $c$ jednak:

$$
c = \frac{3l}{2G}. \tag{3.7}
$$

Taj rezultat možemo reproducirati pozivajući se na rezultate iz potpoglavlja 2.3. Koristimo izraze iz dodatka A za hamiltonijanska i impulsna ograničenja (s proširenjem kozmološkom konstantom $\Lambda$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\mu \xi^\mu &= \mathcal{H}\xi + \mathcal{H}^a \xi_a \\
\mathcal{H} &= -\frac{R-2\Lambda}{2\kappa} + 2\kappa(p_{ab}p^{ab} - \frac{1}{d-2}p^2) \\
\mathcal{H}_a &= -2\nabla_a p^{ab}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

gdje je $R$ Riccijev skalar, a $d$ broj dimenzija prostor-vremena.

Henneaux i Teitelboim [23] integrirali su jednadžbu (2.24) u 3-dimenzionalnoj gravitaciji:

$$
\mathcal{Q}_\xi = \oint_{\partial\Sigma(\infty)} dx\sqrt{h'}\left(\frac{1}{2\kappa}(\bar{G}^{abcd}\left(\bar{\nabla}_b d_{cd} - d_{cd}\bar{\nabla}_b\right)\xi + 2p^{ab}\xi_b\right) + O(d^2), \tag{3.9}
$$

gdje je $d_{ab} = \mathcal{L}_\xi g_{ab}$, a potez na veličinama označava da su izračunate uz pomoć metrike $\bar{g}_{ab} = g_{ab} - d_{ab}$. $G_{abcd}$ je definirana s $G_{abcd} = h_{c(a}h_{b)d} - h_{ab}h_{cd}$.

Ako uvrstimo u gornju jednadžbu ranije zadane asimptotske uvjete (3.2) za $d_{ab}$ te umjesto $\xi^a$ stavimo vektore koji generiraju odgovarajuće približne simetrije, možemo izračunati $\mathcal{Q}_{\xi_n}$.

Kako bismo dobili centralni naboj $C_{\xi_n,\xi_m}$, moramo izračunati Poissonovu zagradu:

$$\{\mathcal{Q}_{\xi_n}, \mathcal{Q}_{\xi_m}\} = \mathcal{Q}_{[\xi_n,\xi_m]} + C_{\xi_n,\xi_m} \tag{3.10}$$

definiranu na standardni način:

$$\{\mathcal{Q}_{\xi_n}, \mathcal{Q}_{\xi_m}\} = \int_\Sigma d^{n-1}x \left( \frac{\delta \mathcal{Q}_{\xi_n}}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathcal{Q}_{\xi_n}}{\delta p^{ab}} - \frac{\delta \mathcal{Q}_{\xi_m}}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathcal{Q}_{\xi_m}}{\delta p^{ab}} \right), \tag{3.11}$$

pazeći pritom da se izračuna u prirodnoj pozadini, kako bi nevažna konstanta integracije bila jednaka nuli. Pozadina je u ovom slučaju metrika bez generiranih promjena $d_{ab}$.

Aditivne konstante za nul-generatore $L_0$ i $\bar{L}_0$ biramo tako da generatori iščezavaju za crne rupe s $M = J = 0$:

$$M = \frac{1}{l}(L_0 + \bar{L}_0), \tag{3.12}$$

$$J = L_0 - \bar{L}_0. \tag{3.13}$$

Glavna pretpostavka koju ćemo nadalje koristiti, a koju smo ranije spomenuli, jest postojanje kvantne gravitacije na prostor-vremenu koje ima asimptotsku simetriju kao $\text{AdS}_3$. Tada promoviramo $L_n$ i $\bar{L}_n$ u operatore i pretpostavljamo da možemo koristiti klasične rezultate (3.12) i (3.13). Kako smo pronašli da je asimptotska simetrija konformalna, pretpostavit ćemo da je teorija polja koja služi za efektivni opis kvantne gravitacije na energijama ispod Planckove, konformalna teorija polja. Ovu pretpostavku ćemo provjeriti na primjeru BTZ crne rupe.

BTZ crna rupa [31] je rješenje u (2+1)-dimenzionalnoj gravitaciji s negativnom kozmološkom konstantom $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$. U nerotirajućem slučaju, njena metrika je oblika:

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{l^2} dt^2 + \left( \frac{r^2 - r_+^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \tag{3.14}$$

gdje je konstanta $r_+^2 = 8GMl^2$. Ova metrika zadovoljava uvjete da asimptotski i u blizini horizonta izgleda jednako kao $\text{AdS}_3$. Njena Bekenstein-Hawking entropija može se jednostavno izračunati ako primjetimo da je na horizontu metrika oblika $r_+^2 d\phi^2$. To znači da joj je površina jednaka $A = 2\pi r_+$, tj.

$$S = \frac{A}{4G} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 M}{2G}}. \tag{3.15}$$

Želimo vidjeti možemo li reproducirati ovaj rezultat tako da koristimo ranije izvedeni formalizam, tj. pretpostavljajući da postoji efektivna kvantna teorija gravitacije koja je konformalna, s izračunatim centralnim nabojem. Koristit ćemo Cardyjevu formulu koju smo izveli u dodatku B.

U poluklasičnom režimu možemo pretpostaviti da je spektar crne rupe gotovo kontinuiran. Klasična crna rupa je znatno degenerirano stanje. Ako je masa dovoljno velika (a pretpostavili smo da je kozmološka konstanta puno manja od Planckove skale), vrijedi da je svojstvena vrijednost operatora $L_0 \gg l$, što znači da je i $L_0 \gg c$. U izvodu Cardyjeve formule vidimo da kad je $E \gg c$ vrijedi da je inverzna temperatura $\beta \ll 1$. To znači da možemo iskoristiti Cardyjevu formulu za asimptotsko ponašanje broja stanja u konformalnoj teoriji polja na visokim temperaturama.

$$S = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{cL_0}{6}} = 4\pi\sqrt{\frac{l^2 M}{2G}}, \tag{3.16}$$

gdje je u prvoj jednakosti faktor 2 došao od činjenice da imamo jednake doprinose od $L_0$ i $\bar{L}_0$.

Vidimo da je rezultat dobiven na ovaj način točno jednak Bekenstein-Hawkingovoj entropiji.

## 3.2 *Entropija n-dimenzionalne crne rupe pomoću konformalne teorije polja*

Metrika u n-dimenzionalnom prostor-vremenu s crnom rupom može se općenito zapisati kao:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + f^2(dr + N^r dt)^2 + \sigma_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dt)(dx^\beta + N^\beta dt) \tag{3.17}$$

gdje su koordinate na horizontu označene grčkim slovima $\alpha$ i $\beta$, $f$ je neka funkcija koordinata, a $N$ je funkcija protoka vremena (eng. *lapse function*) za koju blizu horizonta određenog s $r = r_+$ tražimo da teži u nulu kao

$$N^2 = h(x^\alpha)(r - r_+) + O((r - r_+)^2), \tag{3.18}$$

gdje je $h(x^\alpha)$ neka funkcija koja opisuje oblik horizonta i ovisi o dvjema koordinatama na horizontu.

Jednako kao i u prošlom potpoglavlju, radit ćemo u hamiltonijanskom formalizmu opisanom u dodatku A i potpoglavlju o približnim simetrijama. Hamiltonijan ima dva doprinosa, volumni i površinski. Površinski dio dolazi od činjenice da tretiramo jedan dio prostor-vremena (u ovom slučaju horizont) kao rub. Ranije smo (u 2.3) izračunali varijaciju volumnog doprinosa.

$$
\begin{aligned}
&\delta H_0 = \delta \int_\Sigma d^{n-1}x \hat{\xi}^\mu \mathcal{H}_\mu = \\
&= \int_\Sigma d^{n-1}x \left( \frac{\delta H}{\delta h_{ab}} \delta h_{ab} + \frac{\delta H}{\delta p_{ab}} \delta p_{ab} \right) - \\
&- \frac{1}{16\pi G} \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x \{ \sqrt{h'} (h'^{ac} n^b - h'^{ab} n^c)(\hat{\xi}^t \nabla_c \delta h_{ab} - \nabla_c \hat{\xi}^t \delta h_{ab}) + 2\hat{\xi}^a \delta p_a{}^r - \hat{\xi}^r p^{ab} \delta h_{ab} \}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Površinski dio integrira se preko cijelog ruba od $\Sigma$, što uključuje i prostornu beskonačnost i horizonte crnih rupa. Zasad nismo nametnuli nikakve rubne uvjete.

Rubne uvjete ćemo nametnuti na horizontu u duhu približnih simetrija. Oni moraju biti takvi da rješenja (3.17) budu rješenja za crne rupe, a parametri deformacije (ili generatori infintezimalnih difeomorfizama) moraju imati konzistentno ponašanje u blizini horizonta kako bi očuvali uvjete dane na metriku.

U prošlom potpoglavlju imali smo analizu Browna i Henneauxa koja je opravdala nametnute rubne uvjete. Ovdje dajemo uvjete do kojih se dolazi heuristički.

Ako nametnemo rubne uvjete na horizontu:

$$
\begin{aligned}
&f = \frac{\beta h}{4\pi} \frac{1}{N} + O(1) \\
&N^r = O(N^2) \\
&\sigma_{\alpha\beta} = O(1) \\
&N^\alpha = O(1)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

te

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t - N^r \partial_r) g_{ab} = O(N) g_{ab} \\
&\nabla_\alpha N_\beta + \nabla_\beta N_\alpha = O(N)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

slijedi za ekstrinzičnu zakrivljenost $K_{ab} = \nabla_a n_b$ za plohu konstantnog vremena u blizini horizonta:

$$\begin{aligned} K_{rr} &= O(1/N^3) \\ K_{\alpha r} &= O(1/N) \\ K_{\alpha\beta} &= O(1) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Može se pokazati da su ti rubni uvjeti (3.20), (3.21) i (3.24) očuvani za sljedeće rubne uvjete parametara deformacije:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^r &= O(N^2) \\ \hat{\xi}^t &= O(N) \\ \hat{\xi}^\alpha &= O(1), \end{aligned} \tag{3.23}$$

gdje su parametri površinskih deformacija $\hat{\xi}$ povezani s generatorima difeomorfizama s:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^t &= N\xi^t \\ \hat{\xi}^a &= \xi^a + N^a\xi^t. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Kako bismo očuvali strukturu u beskonačnosti (do sada smo govorili o horizontu) okvirno zahtijevamo da parametri deformacije dovoljno brzo trnu u beskonačnosti. Kako bismo se riješili površinskog doprinosa u (3.19) moramo hamiltonijanu dodati još jedan površinski doprinos:

$$J[\hat{\xi}] = \frac{1}{8\pi G}\oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\{n^a\nabla_a\hat{\xi}^t\sqrt{h'} + \hat{\xi}^a p_a^{\ r} + [n_a\hat{\xi}^a K\sqrt{h'}]\}. \tag{3.25}$$

Nametnut ćemo daljnje (heuristički dobivene) uvjete na metriku blizu horizonta:

$$\begin{aligned} \delta f/f &= O(N) \\ \delta K_{rr}/K_{rr} &= O(N). \end{aligned}$$

Sad imamo da površinski dio u sljedećoj jednadžbi iščezava:

$$\delta(H[\hat{\xi}]+J[\hat{\xi}]) = v.\,d. + \frac{1}{8\pi G}\oint_{r=r_+} d^{n-2}x\sqrt{h'}\left(\delta n^r\partial_r\hat{\xi}^t + \frac{1}{f}\hat{\xi}^r\delta K_{rr} + \delta n_r\hat{\xi}^r K\right), \tag{3.26}$$

gdje smo s $v.\ d.$ označili volumne doprinose.

Ako s $L[\hat{\xi}]$ označimo ukupni generator površinskih deformacija $L[\hat{\xi}] = H[\hat{\xi}] + J[\hat{\xi}]$, znamo da će se računanjem Poissonove zgrade pojaviti centralni član [22]:

$$\{L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1]\} = L\left[\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}_{SD}\right] + K[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] \tag{3.27}$$

gdje je $K[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]$ mogući centralni član algebre.

$\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}_{SD}$ je Liejeva zagrada za algebru površinskih deformacija [24]:

$$\begin{aligned}
\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}^t_{SD} &= \hat{\xi}^a_1 \partial_a \hat{\xi}^t_2 - \hat{\xi}^a_2 \partial_a \hat{\xi}^t_1 \\
\{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}^a_{SD} &= \hat{\xi}^b_1 \partial_b \hat{\xi}^a_2 - \hat{\xi}^b_2 \partial_b \hat{\xi}^a_1 + g^{ab}\left(\hat{\xi}^t_1 \partial_b \hat{\xi}^t_2 - \hat{\xi}^t_2 \partial_b \hat{\xi}^t_1\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Za stacionarnu crnu rupu u koordinatama $K_{rr} = K_{\alpha\beta} = 0$ površinski doprinos u Poissonovoj zagradi jednak je

$$\begin{aligned}
&\{L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1]\} - v.d. = \\
&- \frac{1}{8\pi G}\oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\sqrt{h'}\{\frac{1}{f^2}\left[\partial_r(f\hat{\xi}^r_2)\partial_r\hat{\xi}^t_1 - \partial_r(f\hat{\xi}^r_1)\partial_r\hat{\xi}^t_2\right] + \frac{1}{f}\partial_r\left[\hat{\xi}^r_1\partial_r\hat{\xi}^t_1 - \delta_{\hat{\xi}_2}\hat{\xi}^t_1\right]\}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

gdje je

$$(\delta_{\hat{\xi}_2}\hat{\xi}_1)^t = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}^t_{SD} = \hat{\xi}^a_1 \partial_a \hat{\xi}^t_2 - \hat{\xi}^a_2 \partial_a \hat{\xi}^t_1 \tag{3.30}$$

kao u (3.28). Taj je izraz antisimetričan na zamjenu $1 \leftrightarrow 2$ i rubni članovi su konzistentni s pretpostavkom da je $L[\hat{\xi}]$ generator površinskih deformacija u prostor-vremenu s horizontom.

Od sad ćemo promatrati samo aksijalno simetrične crne rupe s odabranim koordinatama za koje vrijedi:

$$\partial_\phi g_{ab} = 0. \tag{3.31}$$

Nadalje, proučit ćemo svojstva samo dijela površinskih deformacija koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- Ograničit ćemo se na površinske deformacije koje generiraju promjene samo u $r - t$ ravnini.

- Za $r_*$ definirano tako da vrijedi $fdr = Ndr_*$, zahtijevamo da $\xi^t$ ovisi o $r$ i $t$ u blizini horizonta kao $t - r_*$, za raslojavanje u vremenu za koje vrijedi $N_r = 0$.
- Na horizontu vrijedi da je $N^2 = 0$. Time rub za koji smo definirali rubne uvjete ostaje fiksiran na horizontu.

Prvo svojstvo daje oblik $\xi^\phi$:

$$\xi^\phi = -N^\phi \xi^t = -\frac{-N^\phi \hat{\xi}^t}{N}. \tag{3.32}$$

Drugo svojstvo daje

$$\partial_r \xi^t = -\frac{f}{N} \partial_t \xi^t \tag{3.33}$$

za $r = r_+$. Da bismo vidjeli koje deformacije zadovoljavaju treće svojstvo, gledamo difeomorfizme od $g^{tt} = -\frac{1}{N^2}$. Treći uvjet znači da difeomorfizmi ne smiju mijenjati $N^2$:

$$0 = \mathcal{L}_\xi g^{tt} = \frac{2}{N^2} \left(\partial_t - N^\phi \partial_\phi\right) \xi^t + \frac{h}{N^4} \xi^r. \tag{3.34}$$

Ova jednadžba nam sugerira da za angularnu brzinu na horizontu

$$\Omega = -N^\phi(r_+) \tag{3.35}$$

$\xi^t$ razdvojimo na lijeve i desne modove:

$$\begin{aligned} \partial_t \xi^t_L &= \Omega \partial_\phi \xi^t_L \\ \partial_t \xi^t_R &= -\Omega \partial_\phi \xi^t_R. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Sad imamo iz (3.35) i (3.36):

$$\begin{aligned} \xi^r_L &= -\frac{4N^2}{h} \partial_t \xi^t_L \\ \xi^r_R &= 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Rješenje (3.36) za lijeve modove na horizontu je:

$$\xi^t_{L,n} = -\frac{T}{\pi} \exp\left(\frac{2\pi n i}{T}(t - r_* + \Omega^{-1}\phi)\right) \tag{3.38}$$

gdje smo odabrali $T$ kao proizvoljni period i oznakom $n$ cijelog broja naglasili da se radi o modovima Fourierovog razvoja. Ako želimo općenito riješiti jednadžbu (3.36) znamo da je prostor rješenja sigurno veći, tj. $n$ ne mora biti cijeli broj. Ovo je još jedan od heurističkih izbora kako bi se lakše sveo izvod na onaj u prethodnom potpoglavlju. Predfaktor je određen zahtjevom da površinske deformacije zadovoljavaju Wittovu algebru (opisanu u dodatku B):

$$\{\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n\}^t_{SD} = i(n-m)\hat{\xi}^t_{m+n}. \tag{3.39}$$

Ako uvrstimo (3.38) u površinski član (3.29) možemo dobiti:

$$\{L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1]\} = v.\, d. + \frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} in^3 \delta_{m+n}, \tag{3.40}$$

gdje je $A$ površina ruba $r = r_+$.

Preostaje nam razlučiti centralni član od ovog rezultata, kao u jednadžbi (3.27). Po uzoru na Brown-Henneaux članak [22] izračunat ćemo centralni član $K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n]$. Kao i u prethodnom pretpoglavlju, znamo da kad su zadovoljene jednadžbe ograničenja $H[\hat{\xi}]$ iščezava. Tad se jednadžba (3.40) svodi na površinske članove:

$$\frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} in^3 \delta_{m+n} = J[\{\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n\}_{SD}] + K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n] \tag{3.41}$$

što je jednako

$$\frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} in^3 \delta_{m+n} = i(n-m)J[\hat{\xi}_{m+n}] + K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n]. \tag{3.42}$$

Sad možemo uvrstiti $\hat{\xi}_n$u (3.25) i dobiti za zadovoljene jednadžbe ograničenja:

$$J[\hat{\xi}_a] = \frac{A}{16\pi G}\frac{T}{\beta}\delta_{a,0} \tag{3.43}$$

$$K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n] = \frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} in(n^2 - \frac{T^2}{\beta^2})\delta_{m+n}. \tag{3.44}$$

Centralni naboj Virasoro algebre tad je dan s:

$$c = \frac{3A}{2\pi G}\frac{\beta}{T} \tag{3.45}$$

te istom logikom kao u Strumingerovom izvodu, imamo entropiju:

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{cL_0}{6}} = \frac{A}{4G}. \tag{3.46}$$

Ona se slaže s općim izrazom za Bekenstein-Hawking entropiju.

# 4 Zaključak

U prvom dijelu ovog radu izračunali smo entropiju (2+1)-dimenzionalne BTZ crne rupe. Račun se temeljio na pronalaženju netrivijalnih (u smislu da odgovarajući površinski naboj nije jednak nuli) asimptotskih simetrija $\mathrm{AdS}_3$ prostor-vremena u beskonačnosti. Pokazano je da je algebra tih simetrija Virasoro algebra te je na temelju toga uzeto da je, ako takva teorija postoji, efektivna teorija kvantne gravitacije na energijama dovoljno ispod Planckove konformalna te da možemo koristiti tehnike iz konformalne teorije polja. Izveli smo Cardyjevu formulu za entropiju 2-dimenzionalne konformalne teorije polja te je upotrijebili za računanje entropije BTZ crne rupe čija je kozmološka konstanta dovoljno ispod Planckove skale, a masa puno veća od same kozmološke konstante (u prikladnim prirodnim jedinicama). BTZ crnu rupu mogli smo koristiti jer lokalno asimptotski izgleda kao $\mathrm{AdS}_3$.

U drugom dijelu uzeli smo općenitu N-dimenzionalnu metriku i na komponente metrike nametnuli uvjete kako bi u tako opisanom prostor-vremenu mogao postojati horizont. Uvjeti su raznoliki i dobiveni heuristički. Pokazano je da je algebra približnih simetrija u blizini horizonta koji čuvaju dane uvjete jednaka Virasoro algebri te je istom logikom korištena Cardyjeva formula za dobivanje entropije. Važno je napomenuti da ovaj račun vrijedi samo za aksijalno simetrične crne rupe te se ne može poopćiti na sferno simetrične [18].

Oba računa pokazala su slaganje s Bekenstein-Hawkingovom formulom, tj.

$$S = \frac{A}{4G} \tag{4.1}$$

Osvrnimo se na važnost ovih rezultata. Bekenstein-Hawkingova formula dobivena je poluklasičnim računom. Moguće je da je takva formula tek aproksimacija punog izraza za ovisnost entropije o površini (i možda drugim svojstvima) crne rupe. S druge strane ovdje smo tu istu formulu dobili pretpostavkom da smo uspjeli prepoznati efektivnu teoriju gravitacije na energijama koje su ispod Planckove, a iznad klasične teorije, a to je u ovim izvodima neka konformalna teorija. To je najbolje što možemo ovakvim pristupom. Nismo uspjeli identificirati mikrostanja koja pridonose entropiji, ali smo ih uspjeli prebrojati do energije (ili preciznosti) na kojoj bi vrijedila pretpostavljena efektivna teorija.

# Dodaci

## Dodatak A Hamiltonijanska formulacija opće teorije relativnosti

U klasičnoj mehanici do hamiltonijanske formulacije teorije dolazimo na sljedeći način [25, 26]:

- Nađemo gustoću lagranžijana $\mathscr{L}$ kao funkciju generaliziranih koordinata $q_i$ i $\dot{q}_i$
- Definiramo kanonski impuls:

$$p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{A.1}$$

- Gustoća hamiltonijana $\mathscr{H}$ definirana je s:

$$\mathscr{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathscr{L}(q_i, \dot{q}_i). \tag{A.2}$$

- Nađemo jednadžbe gibanja:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} \tag{A.3}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i}. \tag{A.4}$$

Kako bismo hamiltonijanski formulirali OTR trebamo definirati što će odgovarati generaliziranim koordinatama i kanonskim impulsima te kako odrediti vremenski parametar kojim ćemo evoluirati te veličine.

Raslojit ćemo prostor-vrijeme u 3-dimenzionalne hiperplohe prostornog tipa parametrizirane vremenskom funkcijom $t$ na prostor-vremenu. Svaka hiperploha $\Sigma$ ima vremenski vektor normale $n^a$ i prostorne tangencijalne vektore. Vektorsko polje $t^a$ definirano je vremenskom funkcijom $t$:

$$t^a \nabla_a t = 1. \tag{A.5}$$

Na $\Sigma_t$ inducirana metrika $h_{ab}$ povezana je s metrikom prostor-vremena $g_{ab}$:

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{A.6}$$

Vektorsko polje razdvojit ćemo na dijelove koji su okomiti i paralelni $\Sigma_t$. Funkcija protoka vremena (eng. *lapse function*) $N$ i vektor pomaka (eng. *shift vector*) $N^a$ su redom te projekcije:

$$\begin{aligned} N &= -g_{ab} t^a n^b \\ N^a &= h^a_b t^b. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Sad možemo izraziti $g_{ab}$:

$$g_{ab} = h_{ab} - n_a n_b = h_{ab} - \frac{1}{N^2}(t_a - N_a)(t_b - N_b), \tag{A.8}$$

što pokazuje da je korištenje novih varijabli ekvivalentno korištenju $g_{ab}$.

*Domena ovisnosti* $D(S)$ nekog skupa $S$ je skup svih događaja kauzalno povezanih s $S$.

*Cauchyjeva ploha* mnogostrukosti $M$ je skup $\Sigma$ za koji vrijedi da je $D(\Sigma) = M$. Intuitivno možemo razmišljati o plohi $\Sigma$ kao čitavom prostor-vremenu u ”jednom vremenskom trenutku” $t$. Ako prostor-vrijeme sadrži Cauchyjevu plohu kažemo da je *globalno hiperboličko*. Postojanje Cauchyjevih ploha omogućava formulaciju početnih vrijednosti i razvoja $h_{ab}$ u vremenu.

Kao u klasičnoj mehanici, hamiltonijansku gustoću $\mathscr{H}$ dobit ćemo pomoću gustoće lagranžijana $\mathscr{L}$. Ona je jednaka:

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g} R. \tag{A.9}$$

Izrazit ćemo je pomoću novih varijabli. Može se pokazati da je tada $\mathscr{L}$ jednaka:

$$\mathscr{L} = N\sqrt{h} R. \tag{A.10}$$

Nadalje, ako Einsteinovu jednadžbu

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = G_{ab} \tag{A.11}$$

kontrahiramo s vektorima $n^a$ i $n^b$, možemo izraziti zakrivljenost $R$ kao:

$$R = 2(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b). \tag{A.12}$$

Iz Gauss-Codazzijeve jednadžbe [27] koja daje vezu prostorne zakrivljenosti ${}^{(3)}R$ i $R$ imamo sljedeći izraz:

$$G_{ab}n^a n^b = \frac{1}{2}({}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2), \tag{A.13}$$

gdje je $K_{ab}$ ekstrinzična zakrivljenost hiperplohe $\Sigma_t$ definirana s

$$K_{ab} = \nabla_a n_b, \tag{A.14}$$

a $K$ je njen trag jednak

$$K = K^a_{\ a}. \tag{A.15}$$

Nadalje možemo i drugi član u (A.12) izraziti pomoću novih varijabli, koristeći vezu između Riccijevog tenzora $R_{ab}$ i Riemannovog tenzora $R_{abcd}$:

$$\begin{aligned} R_{ab}n^a n^b &= R^c_{\ acb}n^b n^a = \\ &= -(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^c n^a = \\ &= -n^a(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^c = \\ &= (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) - \nabla_a(n^a\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) = \\ &= K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a(n^a\nabla_c n^c) + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) \end{aligned} \tag{A.16}$$

U lagranžijanskoj formulaciji dijelovi lagranžijana koji se mogu napisati kao divergencije ne mijenjaju jednadžbe gibanja (ako nema nestandardnih površinskih doprinosa akciji) te se mogu zanemariti. Stoga je krajnji rezultat:

$$R_{ab}n^a n^b = K^2 - K_{ac}K^{ac} \tag{A.17}$$

Sad možemo napisati cijeli lagranžijan u novim varijablama:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \sqrt{-g}R = \\ &= N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2) \end{aligned} \tag{A.18}$$

Kako bismo našli kanonski moment

$$p_{ab} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ab}}, \tag{A.19}$$

moramo izraziti $K_{ab}$ na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
K_{ab} &= \nabla_a n_b = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n g_{ab} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}_n (h_{ab} - n_a n_b) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} \\
&= \frac{1}{2}\left(n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb}\nabla_a n^c + h_{ac}\nabla_b n^c\right) \\
&= \frac{1}{2N}\left(N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb}\nabla_a N n^c + h_{ac}\nabla_b N n^c\right) \\
&= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d \left(\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_{N^a} h_{cd}\right) \\
&= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d \left(\dot{h}_{cd} - D_c\beta_d - D_d\beta_c\right),
\end{aligned} \tag{A.20}
$$

gdje je $D_a$ kovarijantna derivacija definirana metrikom $h_{ab}$. Sad znamo da je

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \frac{1}{2N} \\
\frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \frac{h^{ab} K}{N}.
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

Također, vrijedi i [27] sljedeća jednakost:

$$
\frac{\partial\, {}^{(3)}R}{\partial \dot{h}_{ab}} = 0 \tag{A.22}
$$

Sad možemo naći kanonski impuls $p^{ab}$:

$$
\begin{aligned}
p^{ab} &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \\
&= \sqrt{h}(K^{ab} - h^{ab}K).
\end{aligned}
$$

Konačno, hamiltonijanska gustoća jednaka je:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} &= p^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathscr{L} = \\
&= -\sqrt{h} N {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{h}}\left(p^{ab}p_{ab} - p^2/2\right) + 2p^{ab} D_a \beta_b = \\
&= \sqrt{h}\left(N\left(-{}^{(3)}R + \frac{1}{h}p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}\frac{1}{h}p^2\right) - 2N_b (D_a(\frac{1}{\sqrt{h}}p^{ab}) + 2D_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\beta_b p^{ab})\right) \\
&= \sqrt{h}\left(N\left(-{}^{(3)}R + \frac{1}{h}p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}\frac{1}{h}p^2\right) - 2N_b (D_a(\frac{1}{\sqrt{h}}p^{ab})\right),
\end{aligned} \tag{A.23}
$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti zanemarili površinski doprinos.

Za kraj, doći ćemo do jednadžbi ograničenja. Hamiltonijan možemo napisati kao volumni integral gustoće preko neke hiperplohe $\Sigma$ prostornog tipa:

$$H = \int_{\Sigma} \mathscr{H} d^3x \tag{A.24}$$

Jednadžbe ograničenja dobivamo variranjem $H$ po $N$ i $N^a$. Varijacija po $N$ daje nam da je prvi član u (A.23) jednak nuli:

$$-{}^{(3)}R + \frac{1}{h}p^{ab}p_{ab} - \frac{1}{2}\frac{1}{h}p^2 = 0 \tag{A.25}$$

Varijacija po $N^a$ daje ograničenje na impuls:

$$D_a\left(\frac{p^{ab}}{\sqrt{h}}\right) = 0. \tag{A.26}$$

# Dodatak B Wittova i Virasoro algebra

Wittova algebra [28] definirana je relacijama

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= (m-n)l_{m+n} \\ [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m-n)\bar{l}_{m+n} \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

To je ujedno i algebra generatora lokalnih konformalnih transformacija u 2-dimenzionalnoj konformalnoj teoriji. Virasoro algebra je centralna ekstenzija Wittove algebre:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c_{m,n}. \tag{B.2}$$

Iz zahtjeva da je i u Virasoro algebri zadovoljen Jacobijev identitet

$$[[L_a, L_b], L_c] + [[L_c, L_a], L_b] + [[L_b, L_c], L_a] = 0 \tag{B.3}$$

može se pokazati da centralna ekstenzija $c_{m,n}$ mora biti oblika

$$c_{m,n} = \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \tag{B.4}$$

gdje je $c$ proizvoljna konstanta. Konačno, Virasoro algebra je oblika

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\
&[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\
&[L_m, \bar{L}_n] = 0,
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

do na konstantu $c$ koju zovemo centralni naboj i koja ovisi o detaljima interakcije u konformalnoj teoriji.

# Dodatak C  Cardyjeva formula

U ovom dodatku izvest ćemo Cardyjevu formulu [29]. Ona daje entropiju na visokoj temperaturi u 2-dimenzionalnoj konformalnoj teoriji polja.

Za neku kvantnu teoriju polja možemo napisati particijsku funkciju:

$$
Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\text{stanja}} e^{-\beta E}. \tag{C.1}
$$

Iskoristit ćemo to što znamo [32] za

$$
H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \tag{C.2}
$$

u pristupu integrala po putevima napisati amplitudu

$$
\langle F | e^{-iHT} | I \rangle = \int Dq e^{i \int_0^T d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right)}. \tag{C.3}
$$

Ako želimo izračunati (C.1) možemo u (C.3) napraviti zamjene $T \to -i\beta$ i $|I\rangle = |F\rangle = |n\rangle$ i tako dobiti:

$$
Z = \int_{\text{p.r.u.}} Dq e^{-\int_0^\beta d\tau L(q)} = \int_{\text{p.r.u.}} Dq e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^D x \mathscr{L}(q)}, \tag{C.4}
$$

gdje je sada

$$
L(q) = \frac{1}{2} \frac{dq}{d\tau}^2 + V(\hat{q}), \tag{C.5}
$$

tj. lagranžijan koji odgovara hamiltonijanu $H$ u euklidskom prostoru. Pokrata "p.r.u." označava "periodički rubni uvjeti" i naglašava da su početno i završno stanje jednaki.

Naglasili smo da integral po putevima ima periodičke rubne uvjete u "vremenskoj" koordinati, jer za računanje particijske funkcije umjesto amplitude između dva različita stanja $|I\rangle$ i $|F\rangle$, računamo trag i vrijedi, u izrazu preko lagranžijanske gustoće u (C.4):

$$\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta). \tag{C.6}$$

Sad vidimo da je kvantna teorija polja u euklidskom prostoru u D+1 dimenzija, čija je vremenska koordinata ide od $0$ do $\beta$, istog oblika kao kvantna statistička mehanika u D dimenzija. To znači da ako želimo proučiti neku teoriju polja na konačnoj temperaturi, samo trebamo napraviti Wickovu rotaciju u euklidski prostor i nametnuti periodički uvjet (C.6). Tu ćemo činjenicu koristiti u daljnjem računu.

Ako želimo izračunati termodinamičke veličine u 2-dimenzionalnom CFT-u, možemo upotrijebiti gore navedeni formalizam. Želimo li izračunati particijsku funkciju za takvu teoriju na konačnoj temperaturi $\beta$ kao u (C.1), primijetit ćemo da je ona ekvivalentna nekom integralu po putovima s vremenskom koordinatom koja je periodična s periodom $\beta$, a potpis je euklidski. Kako je i prostorna koordinata periodična, radi se o integralu po putevima po torusu.

Zato što su obje koordinate periodične, a zarotirali smo teoriju u euklidski potpis, vremenska koordinata $t$ i prostorna $\phi$ su na neki način ravnopravne. To znači da particijsku funkciju možemo računati kao trag po Hilbertovom prostoru stanja za konstantni $t$ gdje vrijedi periodični uvjet na koordinatu $\phi$, tj. $\phi \sim \phi + 2\pi$, a generator evolucije u vremenu je Hamiltonijan:

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(0,2\pi)} e^{-\beta H}, \tag{C.7}$$

gdje smo naglasili po kojem Hilbertovom prostoru računamo trag. Sad je $\beta$ vremenski parametar. Također, particijsku funkciju možemo računati tako da uzmemo trag po Hilbertovom prostoru konstantog $\phi$ gdje su stanja periodična u vremenskoj koordinati: $t \sim t + \beta$, a generator evolucije u $\phi$ je angularni moment $J$:

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(\beta,0)} e^{-2\pi J}, \tag{C.8}$$

gdje je $2\pi$ kutni parametar analogan $\beta$ u (C.7).

Mogli smo izračunati particijsku funkciju na ova dva načina jer je prostor euklidski, i to bismo mogli napraviti za bilo koju kvantnu teoriju polja. Međutim, u konformalnoj teoriji, zato što je ona invarijantna na skalu, vremenska Hilbertova stanja možemo zarotirati za $90^\circ$ i reskalirati faktorom $\frac{2\pi}{\beta}$ da bismo dobili prostorna. Dakle, u CFT vrijedi:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(\beta,0)}e^{-2\pi J} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(0,2\pi)}e^{-\frac{4\pi^2}{\beta}H}. \tag{C.9}$$

Sad iz jednakosti particijskih funkcija (C.7) i (C.8) te jednakosti (C.9) imamo svojstvo particijske funkcije:

$$Z(\beta) = Z(\frac{4\pi^2}{\beta}). \tag{C.10}$$

Ako želimo izračunati particijsku funkciju za niske temperature $\beta \to \infty$, možemo napraviti aproksimaciju:

$$Z(\beta) = \sum_{\text{stanja}} e^{-\beta E} \approx \exp{(-\beta E_{\text{vakuum}})}. \tag{C.11}$$

Za visoke temperature iskoristimo ranije pokazano svojstvo (C.10). Sad možemo napisati za visoke temperature, tj. $\beta \to 0$:

$$Z(\beta) \approx \exp\left(-\frac{4\pi^2}{\beta}E_{\text{vakuum}}\right) \tag{C.12}$$

Energiju vakuuma (ili *Casimirovu energiju*) možemo izraziti [30] pomoću centralnog naboja teorije:

$$E_{\text{vakuum}} = -\frac{c}{12}. \tag{C.13}$$

Sad imamo sljedeći izraz za particijsku funkciju na visokim temperaturama:

$$Z(\beta) = \exp\left(\frac{c\pi^2}{3\beta}\right). \tag{C.14}$$

Iz dobro poznatih formula za veze između termodinamičkih veličina, možemo naći entropiju i energiju:

$$S = (1-\beta\partial_\beta)\mathrm{ln}Z = \frac{2\pi^2 c}{3\beta} \tag{C.15}$$

$$E = -\partial_\beta \mathrm{ln}Z = \frac{\pi^2 c}{3\beta^2}. \tag{C.16}$$

Ako izrazimo temepraturu pomoću energije $E$, imamo konačan izraz za entropiju koji ne ovisi o temperaturi, a vrijedi asimptotski, za visoke temperature, u smislu da vrijedi aproksimacija (C.12):

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{cE}{3}}. \tag{C.17}$$

# Literatura


[1] S. Schaffer, John Michell and black holes, Journal for the History of Astronomy 10: 42–43 (1979)

[2] K. Schwarzschild, On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.) 1916 (1916) 189-196, arXiv:physics/9905030..

[3] S. Chandrasekhar, The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs, Astrophysical Journal 74 (1931), pp. 81–82.

[4] N. Chamel, P. Haensel, J.L. Zdunik, A.F. Fantina, On the Maximum Mass of Neutron Stars, Int. J. Mod. Phys. E22 (2013) 1330018, arXiv:1307.3995.

[5] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, The Large scale structure of spacetime, (1973).

[6] J.D. Bekenstein, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics, Phys. Rev. D, 9 (1974)12.

[7] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, Communications in Mathematical Physics 31 (2): 161–170 (1973).

[8] E. Poisson . A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black Hole Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[9] S. W. Hawking, Black hole explosions?, Nature 248, 30 - 31 (1974).

[10] A. Strominger, C. Vafa, Phys. Lett. B 379 (1996) 99, arXiv:hep-th/9601029.

[11] A.W.Peet, Class.Quant.Grav.15 (1998) 3291, hep-th/9712253.

[12] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 904, arXiv:gr-qc/9710007.

[13] E.R.Livine, D.R.Terno, Nucl. Phys. B 741 (2006) 131, gr-qc/0508085.

[14] L.Bombelli, R.K.Koul, J.Lee, R.Sorkin, Phys. Rev. D 34 (1986) 373.

[15] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, Phys. Rept. 323 (2000). 183, hep-th/9905111.

[16] K. Skenderis, Lect. Notes Phys. 541 (2000) 325, hep-th/9901050.

[17] A. Strominger, J. High Energy Phys. 2, 009 (1998).

[18] S. Carlip, Phys. Rev. Lett. 82, 2828 (1999).

[19] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A. W. K. Metzner, Proc. R. Soc. Lond. A (1962) 269.

[20] Patrick J. McCarthy, J. Math. Phys. 13, 1837 (1972).

[21] Thomas Hartman, Lectures on Quantum Gravity and Black Holes, (2015.) http://www.hartmanhep.net/topics2015/gravity-lectures.pdf, 1.7.2016.

[22] J. D. Brown, Marc Henneaux, Commun. Math. Phys. 104, 207-226 (1986).

[23] M. Henneaux, C. Teitelboim, Commun. Math. Phys. 98, 391-424 (1985).

[24] J.D. Brown, Lower Dimensional Gravity, World Scientific, Singapore (1988).

[25] Francis Tong, A Hamiltonian Formulation of General Relativity, (30.3.2006.). http://www.math.toronto.edu/mccann/assignments/426/Tong.pdf, 1.7.2016.

[26] R.M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago (1984).

[27] M. Blau, Lecture Notes on General Relativity, (15.12.2015.) http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html, 1.7.2016.

[28] P. di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, Conformal Field Theory, Springer (1997).

[29] John L. Cardy, Nuc. Phys. B 270 (1986) 186-204

[30] Belavin, Polyakov, Zamalodchikov, Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory, Nucl. Phys. B241 (1984).

[31] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1849-1851, arXiv:hep-th/9204099.

[32] A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, 2nd ed. Princeton University Press, 2010.