SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Nikola Tomašević

PODUDARANJE GRAVITACIJSKE FIZIKE I FIZIKE FLUIDA

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Nikola Tomašević

Diplomski rad

Podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

4. ______________________

Datum polaganja: ______________________

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Mari Cvitanu za svu pomoć pruženu pri izradi ovoga rada.

Sažetak

U određenom dugovalnom limesu (d + 1)-dimenzionalne Einsteinove jednadžbe sa negativnom kozmološkom konstantom se reduciraju na d-dimenzionalne relativističke Navier-Stokesove jednadžbe. Ovaj fenomen naziva se podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida. Iako je ovaj fenomen izvorno otkriven u okviru AdS/CFT korespodencije, on se može promatrati sam za sebe, te omogućuje donošenje zaključaka kako iz gravitacijske, tako i iz fizike fluida. Prvo ćemo iznijeti i opisati osnovne hidrodinamičke koncepte i jednadžbe. Zatim ćemo iznijeti i opisati rješenja Einsteinove jednadžbe važna za daljnja razmatranja. Naposljetku ćemo pristupiti opisu samog podudaranja gravitacijske fizike i fizike fluida.

Abstract

In a certain long-wavelength limit (d+1)-dimensional Einstein's equations with a negative cosmological constant reduce to the d-dimensional relativistic Navier-Stokes equations. This phenomenon is called the fluid/gravity correspondence. Although this phenomenon was originally discovered within the framework of the AdS/CFT correspondence, it can be observed on its own, and allows drawing conclusions from both gravity and fluid physics. First, we will present and describe the basic hydrodynamic concepts and equations. Then we will present and describe the solutions of Einstein's equations important for further considerations. Finally, we will approach the description of the fluid/gravity correspondence itself.

Notacija

- u poglavlju 2, latinski indeksi $i,k....$ predstavljaju 3 prostorne koordinate
- u potpoglavlju 3.1 i 3.2, indeksi $i,k...a,b...$ predstavljaju 1 vremensku i 3 prostorne koordinate, 0 predstavlja vremensku koordinatu, dok grčki indeksi α,β predstavljaju 3 prostorne koordinate
- u potpoglavlju 3.3 i 3.4, indeksi predstavljaju $\mu,\nu...$ jednu vremensku i $d-1$ prostornih koordinata
- u ostalim poglavljima, odnosno potpoglavljima, osim ako izričito nije navedeno drugačije, indeksi $\mu,\nu...$ predstavljaju 1 vremensku i 3 prostorne koordinate
- ∂_μ predstavlja parcijalnu derivaciju po koordinati x_μ
- ∇_μ predstavlja kovarijantnu derivaciju na pozadini s metrikom $g_{\mu\nu}$

Sadržaj

1 Uvod

Baždarno-gravitacijska (B-G) dualnost [1-3] predstavlja jednakost između dvaju naizgled različitih teorija. S jedne strane ove dualnosti nalazi se d-dimenzionalna kvantna teorija polja, dok se s druge strane nalazi ($d+1$)-dimenzionalno prostor-vrijeme s d-dimenzionalnim asimptotskim rubom. Ova dualnost poznatija je pod nazivom AdS/CFT korespodencija, zato što najjednostavniji primjer ove dualnosti uključuje anti-de Sitter (AdS) prostor-vremena i konformne teorije polja (CFT). Također se još koristi i naziv baždarno-strunska (B-S) dualnost, budući da gravitacijske teorije spadaju u teorije struna, a kvantne teorije polja spadaju u baždarne teorije. Osim ovih naziva, još se koristi i naziv "holografski princip", zato što se ($d+1$)-dimenzionalna gravitacijska teorija opisuje pomoću d-dimenzionalne kvantne teorija polja, što podsjeća na hologram kod kojega se trodimenzionalna informacija o nekom objektu pohranjuje na dvodimenzionalni objekt. U skladu s holografskim principom, ponekad se kaže da CFT "živi" na rubu AdS-a. Ovdje se AdS tretira kao "volumna", a CFT kao "rubna" teorija. Do dan danas B-G dualnost nije strogo dokazana u općenitom slučaju, pa je stoga riječ o konjekturi. Međutim, postoji mnogo slučajeva za koje je dokazana njena valjanost. U ove dokaze nećemo ulaziti.

Važna posljedica AdS/CFT korespodencije jest činjenica da je dinamika tenzora energije i impulsa (E-I tenzora) za veliku klasu d-dimenzionalnih jako vezanih kvantnih teorija polja određena dinamikom $(d+1)$-dimenzionalnih Einsteinovih jednadžbi s negativnom kozmološkom konstantom. Najpoznatiji primjer AdS/CFT korespodencije jest dualnost $N=4$ super Yang-Mills (SYM) teorije i teorije struna tipa IIB, na $AdS_5 \times S^5$.

S jedne strane, u režimu jakog baždarnog vezanja ($\lambda \to \infty$), teorija struna se svodi na dinamiku supergravitacije tipa IIB. Najjednostavnija redukcija supergravitacije tipa IIB na $AdS_5 \times S^5$ jest redukcija na Einsteinove jednadžbe s negativnom kozmološkom konstantom. Pokazuje se da postoji beskonačno mnogo konformnih baždarnih teorija čiji se gravitacijski dual reducira na Einsteinove jednadžbe s negativnom kozmološkom konstantom. Prema tome, Einsteinove jednadžbe s negativnom kozmološkom konstantom opisuju univerzalnu dinamiku E-I tenzora za beskonačan broj različitih baždarnih teorija.

S druge strane, poznata je činjenica da se dinamika sustava koji su gotovo u ravnoteži, na dovoljno visokim temperaturama, može opisivati hidrodinamikom. Ključna hidrodinamička jednadžba koja se ovdje pojavljuje jest jednadžba sačuvanja E-I tenzora. Kako ova jednadžba predstavlja autonomni dinamički sustav koji uključuje samo E-I tenzor, dinamika ovog sustava spada u klasu gore spomenutih univerzalnih dinamika E-I tenzora.

Iz svega navedenog izvlači se zaključak da bi se Einsteinove jednadžbe u odgovarajućem limesu visokih temperatura i velikih udaljenosti, koji se obično naziva *dugovalni režim*, trebale svesti na d-dimenzionalne hidrodinamičke jednadžbe. U [4] je ovo intuitivno očekivano ponašanje i dokazano. Odgovarajuće preslikavanje između ova dva sustava naziva se *podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida*. Ovo podudaranje je iskorištena u [4] kako bi se hidrodinamičke jednadžbe dualne gravitacijskog teoriji odredile do drugog reda u gradijentnom razvoju. Gravitacijska rješenja predstavljaju nehomogene, vremenski ovisne crne rupe sa sporo-mijenjajućim horizontom.

Veza između gravitacijskih i hidrodinamičkih sustava na linearnom nivou uspostavljena je još ranije, u [5], gdje su autori odredili viskozni koeficijent η $N=4$ SYM plazme, korištenjem AdS/CFT korespodencije.

2 Nerelativistička hidrodinamika

U ovom poglavlju ćemo proći kroz osnovne hidrodinamičke koncepte i jednadžbe nerelativističkog fluida. U potpoglavlju 2.1 iznosimo osnovne koncepte i jednadžbe idealnog fluida. U potpoglavlju 2.2 poopćavamo teoriju iz poglavlja 2.1 na viskozne fluide. U potpoglavlju 2.3 konačno još uzimamo u obzir i mogućnost termalne kondukcije u fluidima. Izlaganje u ovom poglavlju prati [6].

2.1 Idealni fluidi

Hidrodinamika je područje fizike koje opisuje gibanje tekućina i plinova, koji se zajednički nazivaju fluidima. U hidrodinamici se fluidi promatraju kao makroskopski objekti; u skladu s time, fluidi se tretiraju kao kontinuirani (neprekidni) objekti, iako oni u stvarnosti to naravno nisu. Pod pojmom „čestica fluida“ se u skladu sa ovim promatranjem misli na objekt koji, iako je puno manji od cijeloga fluida, sam sadrži veoma velik broj stvarnih molekula fluida ($\sim N_A$). U tom pogledu je i sama čestica fluida općenito govoreći makroskopski objekt.

Stanje fluida potpuno je određeno sa pet varijabli, to su: tri komponente brzine $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, tlak $p(x, y, z, t)$ i gustoća $\rho(x, y, z, t)$. Važno je napomenuti da se sve promatrane funkcije varijabli fluida odnose na fiksne točke u prostoru, u kojima se općenito u različitim vremenskim trenucima nalaze različite čestice fluida.

Temeljna hidrodinamička jednadžba jest *jednadžba kontinuiteta*. Fizikalno govoreći, ona izražava intuitivno jasnu činjenicu da utok odnosno istok fluida kroz površinu koja omeđuje neki promatrani volumni element kao posljedicu ima povećanje odnosno smanjenje količine fluida unutar tog volumena. Ona ima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{v}\right) = 0 \qquad (1)$$

Vektor $\rho \vec{v}$ se naziva *vektor gustoće toka mase*, te se označava sa $\vec{j}$. Relacija

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \qquad (2)$$

ujedno služi i kao definicija brzine.

Ukupna sila na neki promatrani volumen fluida jest

$$-\oint p d\vec{f},$$

gdje je $d\vec{f}$ element površine koja omeđuje volumen, duž koje se vrši integracija. Ovaj izraz možemo transformirati u integral po volumenu elementa, te ga zatim uvrstiti u Newtonovu jednadžbu gibanja za promatrani element. Naposljetku dolazimo do jednadžbe:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{3}$$

Jednadžba (3) se naziva *Eulerova jednadžba*. Jednadžba (3) dobivena je uz zanemarivanje unutrašnjeg trenja (viskoznosti) fluida i zanemarivanje razmjene topline između dijelova fluida, koji su oboje prisutni u svakom realnom fluidu. Fluid kod kojega se zanemaruje viskoznost i razmjena topline naziva se idealni fluid.

Gibanje idealnog fluida je uvijek nužno adijabatsko gibanje. Prema tome, označivši sa s entropiju po jedinici mase, uvijek vrijedi:

$$\frac{ds}{dt}=0, \tag{4}$$

odnosno

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla s=0. \tag{5}$$

Jednadžba (5) se može kombinirati sa jednadžbom kontinuiteta (1), te vodi na jednadžbu sačuvanja entropije:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho s \vec{v}\right) = 0 . \tag{6}$$

Vektor $\rho s \vec{v}$ se naziva *vektor gustoće toka entropije*.

Promotrimo rubne uvjete koji moraju biti zadovoljeni na površinama koje omeđuju fluid. Ako se površina giba, tada normalna komponenta brzine fluida uz samu površinu mora biti jednaka odgovarajućoj komponenti brzine površine. U slučaju kada površina miruje normalna komponenta brzine fluida mora naprosto iščezavati, odnosno mora vrijediti $v_n = 0$. Na površini između dvaju fluida koji se međusobno ne miješaju, tlak unutar svakog fluida mora biti jednak, kao što moraju biti jednake i normalne komponente brzine fluida, koje u općenitom slučaju moraju biti jednake odgovarajućoj komponenti brzine površine.

Pet nepoznatih veličina – tri komponente brzine fluida, tlak i gustoća fluida, određene su sa pet hidrodinamičkih jednadžbi idealnog fluida. To su jednadžba kontinuiteta (1), tri komponente Eulerove jednadžbe (3) te jednadžba sačuvanja entropije (6).

Promotrimo sada energiju jediničnog volumena fluida. Ona je jednaka:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon , \tag{7}$$

gdje prvi član predstavlja kinetičku, a drugi član unutrašnju energiju, ε je unutrašnja energija po jedinici mase. Zanima nas kako se ova energija mijenja u vremenu, odnosno vrijednost izraza $\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \right)$. Kombiniranjem jednadžbe kontinuiteta (1), Eulerove jednadžbe (3), i jednadžbe sačuvanja entropije (6), zajedno sa termodinamičkim relacijama $dw = Tds + (1/\rho)dp$ i $d\varepsilon = Tds - pdV$, gdje je w entalpija po jedinici mase, $V = \frac{1}{\rho}$ specifični volumen, a T temperatura, može se pokazati da je zadovoljena sljedeća relacija:

$$\partial_t \int \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \right) dV = -\oint \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w \right) \cdot d\vec{f} \,, \tag{8}$$

gdje se integrali vrše duž pripadnog volumena promatranog elementa fluida, odnosno duž pripadnog oplošja. Lijeva strana gornje jednadžbe predstavlja brzinu promjene energije fluida unutar nekog promatranog volumena. Desna strana te iste jednadžbe stoga predstavlja količinu energije koja isteče iz tog volumena u jedinici vremena. U skladu s tim, vektor

$$\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w \right) \tag{9}$$

se naziva *vektor gustoće toka energije*.

Kombinacijom jednadžbi (1) i (3), u tenzorskoj notaciji, može se pokazati da je zadovoljena relacija

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{10}$$

gdje se tenzor Π_{ik} naziva tenzor gustoće toka impulsa, te je jednak

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \,. \tag{11}$$

Lijeva strana jednadžbe (10) predstavlja brzinu promjene i-te komponente impulsa sadržanog u promatranom volumenu. Desna strane jednadžbe (10) prema tome predstavlja količinu impulsa koji isteče kroz omeđujuću površinu u jediničnom vremenu. Izraz $\Pi_{ik} df_k$ je prema tome i-ta komponenta impulsa koji proteče kroz površinski element df .

2.2 Viskozni fluidi

Kao što smo već spomenuli, svaki realni fluid ima viskoznost, koju je na neki način potrebno uključiti u jednadžbe koje opisuju fluid. Jednadžba kontinuiteta (1) u skladu sa svojim značenjem ostaje nepromijenjena i u slučaju viskoznih fluida. Eulerova jednadžba (3) u slučaju viskoznih fluida očigledno više ne vrijedi. Prethodno dobiveni izraz za tenzor gustoće toka impulsa (11) predstavlja potpuno reverzibilni prijenos impulsa uzrokovan mehaničkim prijenosom čestica fluida iz jednog područja u drugo, i pritisnim silama koje djeluju unutar fluida.

Viskoznost općenito dovodi do dodatnog, ireverzibilnog prijenosa impulsa fluida iz područja gdje je on veći u područje gdje je on manji. Možemo pretpostaviti da tenzor impulsa u općenitom slučaju ima oblik

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \,, \tag{12}$$

gdje se tenzor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{13}$$

naziva tenzor naprezanja, a σ'_{ik} viskozni tenzor naprezanja. σ'_{ik} je novi, dodatni član, koji predstavlja promjenu uzrokovanu viskoznošću. Kako je viskoznost općenito uzrokovana nejednolikom raspodjelom brzine unutar samoga fluida, σ'_{ik} očigledno mora ovisiti o određenoj kombinaciji gradijenata brzine. Iz istih razloga, ovaj član ne smije sadržavati članove proporcionalne samoj brzini. Uz pretpostavku da su gradijenti mali (odnosno, da je smisleno promatrati jednadžbe linearne u gradijentima), možemo pretpostaviti da je ovaj član linearno proporcionalan gradijentima. Fluid za koji je ova pretpostavka razumna naziva se newtonovski fluid. Hidrodinamička teorija koja opisuje ovakav fluid naziva se još hidrodinamika 1. reda. U ovom radu promatrat će se isključivo newtonovski fluidi. Sada još moramo uzeti obzir i činjenicu da prilikom uniformne rigidne rotacije fluida kao cjeline viskoznost ne smije doći do izražaja, budući da je ona općenito uzrokovana prijelazom čestica fluida iz jednog sloja u drugi, što u ovom slučaju nije moguće budući da je svaki sloj fluida prisiljen gibati se po kružnici. Uzevši u obzir sve rečeno dolazimo do općenitog oblika tenzora viskoznosti

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{14}$$

Ovdje smo još uzeli u obzir pretpostavku da je fluid izotropan, iz koje slijedi da njegova svojstva moraju biti opisana skalarnim veličinama neovisnima o brzini (η i ζ). Koeficijenti η i ζ se nazivaju prva i druga viskoznost, respektivno[1]. Može se pokazati, korištenjem činjenice da za viskozni fluid uvijek mora vrijediti $\dot{E}_{kin} < 0$ (jer se kinetička energija fluida E_{kin} disipira u njegovu toplinsku energiju), da uvijek vrijedi $\eta > 0$.

Pri kontrakciji s $i = k$ izraz u zagradama u formuli (14) iščezava. Prema tome, tenzor (14) se sastoji od jednog člana s iščezavajućim i jednog člana s neiščezavajućim tragom. Iako su viskozni koeficijenti općenito funkcije temperature i tlaka, uz pretpostavku da gradijenti spomenutih veličina nisu preveliki, možemo pretpostaviti da su ovi koeficijenti konstantni unutar fluida. Naposljetku dolazimo do jednadžbe

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}). \tag{15}$$

Jednadžba (15) se naziva *Navier-Stokesova jednadžba*.

Može se pokazati da manipulacijama sličnim korištenima u potpoglavlju 2.1 vektor gustoće toka energije za viskozni fluid ima oblik

$$\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) - \vec{v}\cdot\overrightarrow{\sigma'}, \tag{16}$$

koji se od oblika za idealni fluid (9) razlikuje u dodatnom članu $-\vec{v}\cdot\overrightarrow{\sigma'}$. Ovdje $-\vec{v}\cdot\overrightarrow{\sigma'}$ shvaćamo kao vektor čije su komponente $v_i\sigma'_{ik}$.

Za razliku od idealnog fluida, kod viskoznog fluida ukupna brzina fluida uz mirujuću površinu mora iščezavati, a ne samo njena normalna komponenta. Prema tome

[1] U engleskoj literaturi koeficijenti η i ζ se još nazivaju *shear viscosity* i *bulk viscosity*, respektivno.

mora vrijediti $\vec{v} = 0$. Razlog tome je postojanje privlačnih međumolekularnih sila između viskoznog fluida i površine krutog tijela, koje sloj fluida uz samu površinu dovode u stanje mirovanja. U općenitom slučaju kada se površina giba brzina fluida mora odgovarati brzini površine.

Na površini separacije između dvaju fluida koji se međusobno ne miješaju brzine fluida moraju biti jednake, a sile kojima fluidi djeluju jedan na drugoga moraju biti međusobno jednakog iznosa i suprotnog smjera.

2.3 Termalna kondukcija u fluidima

U prethodnim poglavljima smo prepostavljali da je temperatura fluida konstantna svugdje unutar njega. Ako postoji nejednolika raspodjela temperature unutar fluida, tada osim do sada razmatranih prijenosa energije postoji i dodatni prijenos energije – prijenos topline, koji se odvija pomoću termalne kondukcije. Riječ je o molekularnom prijenosu energije iz područja gdje je temperatura viša u područja gdje je niža. Za razliku od prethodno opisane dvije vrste prijenosa energije, ovaj prijenos energije ne zahtijeva makroskopsko gibanje fluida, te se stoga odvija i unutar fluida koji miruje.

Tok topline pomoću termalne kondukcije možemo označiti sa $\vec{q}$. $\vec{q}$ možemo razviti u red po potencijama temperaturnog gradijenta. Uz pretpostavku malih temperaturnih gradijenata možemo sa zadržati samo na najnižem, linearnom članu u temperaturnom gradijentu. Konstantni član u razvoju mora biti jednak nuli, budući da $\vec{q}$ mora iščezavati u slučaju kada je temperatura unutar cijeloga fluida konstantna. Stoga možemo pisati

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \,, \tag{17}$$

gdje je κ termalna vodljivost (odnosno, keoficijent termalne vodljivosti).

Kako je tok topline uvijek usmjeren iz područja više temperature prema području niže temperature, tok $\vec{q}$ i temperaturni gradijent ∇T moraju biti u međusobno suprotnim smjerovima, što vodi na rezultat da je $\kappa > 0$.

Prethodni izraz za ukupni tok energije u fluidu (16) se sada može poopćiti u

$$\rho \vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}' - \kappa \nabla T \,. \tag{18}$$

Pomoću sličnih manipulacija kao i u potpoglavlju 2.2 može se pokazati da vrijedi jednadžba

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \tag{19}$$

koja se naziva *općenita jednadžba prijenosa topline*. U slučaju kada nema viskoznosti i termalne kondukcije, njena desna strana iščezava, te ona postaje jednadžba sačuvanja entropije za idealni fluid (6).

Kombinacijom relacije (14) i jednadžbe (19) i uz prikladne manipulacije, može se pokazati da, kako bi vrijedio zakon porasta entropije, koeficijent ζ mora biti pozitivan. Prema tome, koeficijenti η, ζ i κ su svi pozitivni.

3 Relativistička hidrodinamika

U ovom poglavlju ćemo generalizirati teoriju iz prethodnog poglavlja na slučaj relativističkih fluida. U potpoglavlju 3.1 iznosimo osnovne koncepte i jednadžbe 4-dimenzionalnog idealnog fluida. U potpoglavlju 3.2 uzimamo u obzir disipativne efekte prisutne 4-dimenzionalnog fluida. U potpoglavlju 3.3 razmatramo d-dimenzionalni disipativni fluid. Konačno, u potpoglavlju 3.4, u vidu kasnijih primjena, razmatramo konformnu hidrodinamičku teoriju. Izlaganja u potpoglavljima 3.1 i 3.2 prate [6]. Izlaganja u potpoglavljima 3.3 i 3.4 prate [7].

3.1 4-dimenzionalni idealni fluidi

Kako bismo izveli jednadžbe gibanja idealnog relativističkog fluida prvo moramo odrediti oblik tenzora E-I tenzora idealnog relativističkog fluida.

Relativistički E-I tenzor ima sljedeća svojstva [8]: $T^{00} = T_{00}$ je gustoća energije, $\dfrac{T^{0\alpha}}{c} = -\dfrac{T_{0\alpha}}{c}$ je gustoća komponenata impulsa; $T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ čine tenzor gustoće toka impulsa.

U skladu sa svojom definicijom, tok impulsa kroz element $d\vec{f}$ površine tijela predstavlja silu koja djeluje na taj element. Prema tome je, kao i u slučaju nerelativističkih fluida, $T^{\alpha\beta} df_\beta$ α-komponenta sile koje djeluje na površinski element. Sada je pogodno uvesti tzv. *lokalni vlastiti ili lokalni sustav mirovanja*, referentni sustav u kojemu određeni volumni element fluida miruje. U ovom se sustavu pripadne fizikalne veličine nazivaju *vlastitim veličinama*. U ovom sustavu vrijedi Pascalov zakon, odnosno, tlak koji stvara površina fluida jednak je u svim smjerovima te je u svakoj točki okomit na površinu na koju djeluje. U skladu s tim, možemo pisati $T^{\alpha\beta} df_\beta = p df_\alpha$. Odavde slijedi $T_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$.

U sustavu mirovanja komponente $T^{0\alpha}$ koje daju gustoću impulsa jednake su nuli, dok je komponenta T^{00} jednaka vlastitoj gustoći unutarnje energije fluida, koju ćemo odsada pa nadalje označavati sa e. U tom sustavu E-I tenzor prema tome ima oblik

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Sada je potrebno odrediti formulu za T^{ik} koja vrijedi u bilo kojem referentnom sustavu. Možemo uvesti 4-brzinu fluida u^i. U sustavu mirovanja vrijedi $u^0 = 1, u^\alpha = 0$. Vidimo da je prema tome općenita formula za T^{ik}

$$T_{ik} = w u_i u_k + p g_{ik}, \tag{21}$$

gdje je $w = e + p$ entalpija fluida. U formuli (21) nismo uključili disipativne efekte (viskoznost i termalna kondukcija), pa prema tome ona odgovara idealnom relativističkom fluidu.

Trodimenzionalne komponente T_{ik} imaju oblik

$$T_{\alpha\beta} = \frac{w v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha 0} = -\frac{w v_\alpha}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, T_{00} = \frac{e + p\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{22}$$

Kako bismo došli do traženih jednadžbi gibanja, potrebno je krenuti od jednadžbe sačuvanja E-I tenzora:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{23}$$

Osim gornje jednadžbe potrebno je još uzeti u obzir i jednadžbu koja iskazuje sačuvanje broja čestica u fluidu, odnosno jednadžbu kontinuiteta. U tu svrhu možemo uvesti 4-vektor "struje čestica" – n^i. Njegova vremenska komponenta je gustoća broja čestica, a tri prostorne komponente čine trodimenzionalni vektor struje čestica. U skladu s tim, vidimo da n^i mora imati oblik

$$n^i = nu^i , \tag{24}$$

gdje je n skalar koji predstavlja gustoću broja čestica u onom referentnom sustavu u kojemu dani element fluida miruje. Odgovarajuća jednadžba kontinuiteta za n^i jest

$$\frac{\partial\left(nu^i\right)}{\partial x^i} = 0 . \tag{25}$$

Diferenciranjem (21) i kombiniranjem sa (23) imamo

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial\left(wu^k\right)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0 . \tag{26}$$

Sada možemo projicirati ovu jednadžbu na smjer 4-brzine. Uzevši u obzir da je $u_i u^i = -1$ (normiranost 4-brzine) i $u_i \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = 0$ (međusobna okomitost 4-brzine i 4-akceleracije), dobivamo:

$$-\frac{\partial\left(wu^k\right)}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0 .$$

Ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n} nu^k\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k} nu^k = 0 ,$$

što zajedno sa jednadžbom sačuvanja (23) daje:

$$nu^k \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} \right) - \frac{2}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right] = 0 .$$

$1/n$ predstavlja molekularni volumen tvari, a w/n je njena totalna funkcija koja se odnosi na jednu česticu. Sada možemo iskoristiti termodinamičku relaciju $d\left(\frac{w}{n}\right) - \frac{1}{n} dp = Td\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ [9], gdje je T temperatura, a σ entropija jediničnog volumena fluida). Proizlazi

$$nTu^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\sigma}{n} \right) = 0 ,$$

odnosno

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\sigma}{n} \right), \tag{27}$$

gdje se derivacija vrši duž svjetske linije kretanja danog elementa fluida. Jednadžbu (27) možemo također napisati u obliku jednadžbe kontinuiteta za 4-vektor gustoće toka entropije σu^i**:**

$$\frac{\partial \left(\sigma u^i \right)}{\partial x^i} = 0 . \tag{28}$$

U skladu sa onim što je prije rečeno, jednadžba (28) ne uzima u obzir disipativne efekte, pa prema tome ona vrijedi samo za idealni relativistički fluid. Relativističke Eulerove jednadžbe možemo dobiti projiciranjem jednadžbe (23) na smjer koji je okomit na u^i . Dobiva se

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + u_i u^k \frac{\partial T_k^k}{\partial x^l}.$$

Lako vidimo da gornji izraz iščezava pri skalarnom množenju sa u^i. Jednostavan račun daje

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \tag{29}$$

Tri prostorne komponente ove jednadžbe predstavljaju tri komponente relativističke Eulerove jednadžbe, dok je vremenska komponenta, pak, posljedica prve tri komponente.

3.2 4-dimenzionalni disipativni fluidi

Odredimo sada jednadžbe gibanja disipativnog relativističkog fluida, odnosno, fluida u kojemu je prisutna viskoznost i termalna kondukcija. Po analogiji sa nerelativističkom hidrodinamikom, možemo pretpostaviti da E-I tenzor i vektor gustoće toka čestica za disipativni relativistički fluid imaju oblik:

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_i u_k + \tau_{ik}, \tag{30}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i, \tag{31}$$

gdje su τ_{ik} i ν_i disipativne korekcije na E-I tenzor i vektor gustoće toka čestica, respektivno. Jednadžbe sačuvanja, $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0$, uvedene za idealne relativističke fluide, po analogiji sa nerelativističkom hidrodinamikom i dalje vrijede.

Prije nego što prijeđemo na određivanje disipativnih korekcija τ_{ik} i ν_i, potrebno je pobliže razmotriti koncept brzine u relativističkoj hidrodinamici. Relacija (4) u nerelativističkoj hidrodinamici služi kao definicija brzine. Bitna karakteristika nerelativističke hidrodinamike jest mogućnost postojanja toka energije koji ne uključuje tok mase, kao što je npr. tok topline. U relativističkoj hidrodinamici situacija je bitno drugačija, budući da svaki tok energije nužno uključuje i tok mase ($E = mc^2$). Prema tome, vidimo da u relativističkoj hidrodinamici relacija (4) kao definicija brzine gubi svoje značenje.

Postoji određena sloboda pri odabiru definicije brzine. U literaturi se najčešće koriste dva sustava koja služe određivanju definicije brzine – Eckartov sustav, uveden u [10] i Landauov sustav, uveden u [6]. U ovom radu koristit ćemo isključivo Landauov sustav. U Landauovom sustavu brzina se definira uvjetom da je, u vlastitom sustavu svakog danog elementa fluida, impuls elementa jednak nuli, te da se njegova energija može izraziti pomoću ostalih termodinamičkih veličina istim formulama kao i u slučaju kada su disipativni procesi odsutni. Sa fizikalnog stanovišta, ovakva definicija djeluje sasvim prirodno i intuitivno. Ovo znači da su, u vlastitom sustavu, komponente τ_{00} i $\tau_{0\alpha}$ tenzora τ_{ik} jednake nuli (ovo slijedi iz formule (30) i činjenice da je $T^{00} = T_{00}$ gustoća energije a

$\frac{T^{0\alpha}}{c} = -\frac{T_{0\alpha}}{c}$ gustoća komponenata impulsa fluida). Kako u vlastitom sustavu vrijedi $u^{\alpha} = 0$, u njemu imamo (pa prema tome i u bilo kojem sustavu) tenzorsku relaciju (ako je neka tenzorska relacija zadovoljena u jednom sustavu onda je ona zadovoljena i u bilo kojem drugom sustavu)

$$\tau_{ik} u^{k} = 0. \tag{32}$$

Doista, budući da je indeks k ponovljeni indeks, relaciju (32) možemo napisati u obliku

$$\tau_{i0} u^{0} + \tau_{i\alpha} u^{\alpha} = 0.$$

$\tau_{i0} = 0$ zbog gornje definicije brzine i činjenice da promatramo vlastiti sustav, a $u^{\alpha} = 0$ zbog definicije vlastitog sustava. Prema tome relacija (32) zbilja vrijedi.
Isto tako imamo i

$$\nu_{i} u^{i} = 0. \tag{33}$$

Doista, budući da je indeks i ponovljeni indeks relaciju (33) možemo napisati u obliku

$$\nu_{0} u^{0} + \nu_{\alpha} u^{\alpha} = 0.$$

$\nu_{0} = 0$ iz zahtjeva da komponenta n^{0} 4-vektora toka čestica n^{i} u vlastitom sustavu bude jednaka gustoći broja čestica n. Iz formule (31) slijedi da je $n^{i} = nu^{i} + \nu^{i}$ i prema tome $n^{0} = nu^{0} + \nu^{0}$, a kako je u vlastitom sustavu $u^{0} = 1$, $n^{0} = n + \nu^{0}$, te kako mora vrijediti $n^{0} = n$, slijedi da je $\nu^{0} = 0$, pa je prema tome i $\nu_{0} = 0$. Ponovno je $u^{\alpha} = 0$. Prema tome relacija (33) zbilja vrijedi.

Traženi oblik tenzora τ_{ik} i vektora ν_{i} možemo dobiti iz zahtjeva zakona porasta entropije. Ovaj zakon mora biti sadržan u jednadžbama gibanja (na isti način kao što je i uvjet konstantne entropije sadržan u jednadžbama gibanja idealnog fluida. Jednostavnim transformacijama, zajedno sa jednadžbama kontinuiteta, lako se može izvesti sljedeća jednadžba

$$u^i \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = -T \frac{\partial (\sigma u^i)}{\partial x^i} - \mu \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k},$$

gdje je $\mu = \dfrac{w - T\sigma}{n}$ relativistički kemijski potencijal fluida [9]. Pomoću relacije (32) ovu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right) - \frac{\tau_i^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \tag{34}$$

Izraz na lijevoj strani jednadžbe (34) predstavlja 4-divergenciju toka entropije, a izraz na njenoj desnoj strani porast entropije zahvaljujući disipativnim procesima. U skladu s tim, vidimo da 4-vektor gustoće toka entropije za disipativni relativistički fluid ima oblik

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i. \tag{35}$$

Vidimo da se ovaj izraz razlikuje od izraza za 4-vektor gustoće toka entropije idealnog fluida za dodatni disipativni član $-\dfrac{\mu}{T}\nu^i$, koji uključuje viskoznost i termalnu kondukciju. Iz jednadžbe (34) vidimo da, kako bi uvijek nužno vrijedilo $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \dfrac{\mu}{T}\nu^i\right) \geq 0$, što izražava zakon porasta entropije, τ_{ik} i ν_i moraju biti linearne funkcije gradijenata brzine i termodinamičkih veličina, odnosno funkcije veličina $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^k}$ i $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\mu}{T}\right)$, respektivno, kako bi desna strana jednadžbe (34) uvijek bila nužno pozitivna. Uzevši u obzir predznake ispred članova na desnoj strani jednadžbe (34), vidimo da mora vrijediti

$\tau_{ik} \propto C_1 \frac{\partial u_i}{\partial x^k}, \nu_i \propto C_2 \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right), C_1 < 0, C_2 < 0$. Još treba uzeti u obzir da moraju biti zadovoljene i jednadžbe (32) i (33). Svi navedeni uvjeti jednoznačno određuju oblik simetričnog 4-tenzora τ_{ik} i 4-vektora ν_i:

$$\tau_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} + u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u_l}{\partial x^l}\left(g_{ik} + u_i u_k\right), \quad (36)$$

$$\nu_i = -\frac{\kappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \quad (37)$$

U nerelativističkom limesu, $g_{\alpha\beta} \to \delta_{\alpha\beta}, u_\alpha u^\alpha \approx 0$, te se $\tau_{\alpha\beta}$ reduciraju na komponente trodimenzionalnog viskoznog tenzora naprezanja $\sigma'_{\alpha\beta}$ (14). Ovdje je još pogodno uvesti projektor $P^{ik} = g^{ik} + u^i u^k$, koji nam omogućuje da relacije (36) i (37) zapišemo u kompaktnijem obliku [11]

$$\tau^{ik} = -\eta P^{ia} P^{kb}\left(\partial_a u_b + \partial_b u_a\right) - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) P^{ik} \partial u, \quad (38)$$

$$\nu^i = -\sigma T P^{ik} \partial_k\left(\frac{\mu}{T}\right), \quad (39)$$

gdje je σ konduktivnost.

3.3 d-dimenzionalni disipativni fluidi

Prethodno smo promatrali 4-dimenzionalni fluid. Sada možemo promatrati općeniti slučaj d-dimenzionalnog fluida. Kako bismo došli do jednadžbi disipativnog fluida 1. reda, prethodno korištenu proceduru možemo poopćiti korištenjem metode iz kvantne teorije polja. U kvantnoj teoriji polja se pri svakom redu uzimaju u obzir članovi koji se mogu pojaviti u efektivnom Lagrangianu, ali tako da je ukupna simetrija teorije i dalje sačuvana. Kako se svaka netrivijalna kvantna teorija polja u dugovalnom i visokotemperaturnom limesu može opisivati hidrodinamikom, isti princip možemo primijeniti i na naš d-dimenzionalni fluid. Članovi koji se mogu pojaviti u E-I tenzoru fluida su derivacije brzine i termodinamičkih varijabli. Time smo u mogućnosti izraziti E-I tenzor pomoću gradijentnog razvoja.

Gradijent brzine $\nabla^\nu u^\mu$ možemo rastaviti na dva dijela. Prvi dio je u smjeru brzine – *akceleracija* a^μ, dok je drugi dio okomit na brzinu. Potonji se pak može rastaviti na trag, odnosno *divergenciju* θ, te na preostali dio s iščezavajućim tragom, kojemu su simetrične i antistimetrične komponente respektivno dane sa *shear* $\sigma^{\mu\nu}$ i *vrtložnošću* $\omega^{\mu\nu}$. Konačan rastav $\nabla^\nu u^\mu$ možemo dakle napisati u obliku

$$\nabla^\nu u^\mu = -a^\mu u^\nu + \sigma^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{d-1}\theta P^{\mu\nu}, \tag{40}$$

gdje je

$$\begin{gathered}
\theta = \nabla_\mu u^\mu = P^{\mu\nu}\nabla_\mu u_\nu, \\
a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu \equiv D u^\mu, \\
\sigma^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu} u^{\nu)} + u^{(\mu} a^{\nu)} - \frac{1}{d-1}\theta P^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\nabla_{(\alpha} u_{\beta)} - \frac{1}{d-1}\theta P^{\mu\nu}, \\
\omega^{\nu\mu} = P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\nabla_{[\alpha} u_{\beta]}.
\end{gathered} \tag{41}$$

Ovdje koristimo standardne oznake za simetrizaciju, odnosno asimetrizaciju – $A_{(ab)} = \frac{A_{ab} + A_{ba}}{2}$, $A_{[ab]} = \frac{A_{ab} - A_{ba}}{2}$. Sa $D \equiv u^{\mu}\nabla_{\mu}$ smo definirali kovarijantnu derivaciju projiciranu na brzinu. Promotrivši izraze (41), te uzevši u obzir samo one članove koji imaju traženu simetriju, te su 1. reda u gradijentima, vidimo da disipativna korekcija 1. reda idealnog E-I tenzora ima oblik

$$\tau^{\mu\nu}_{(1)} = -2\eta\sigma^{\mu\nu} - \zeta\theta P^{\mu\nu}. \tag{42}$$

Uzevši u obzir da vrijedi $u_{\mu}P^{\mu\nu} = u_{\mu}\omega^{\mu\nu} = 0$, vidimo da je zadovoljeno Landauovo baždarenje $u_{\mu}\tau^{\mu\nu}_{(1)} = 0$.

3.4 Konformni fluidi

Transformacija metrike

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\widetilde{g}_{\mu\nu},$$
$$g^{\mu\nu} = e^{-2\phi}\widetilde{g}^{\mu\nu}, \tag{43}$$

naziva se *Weylova transformacija metrike*. Iz uvjeta $u_\mu u^\mu = -1$ vidimo da se brzina u^μ pri Weylovoj transformaciji transformira na način

$$u^\mu = e^{-\phi}\widetilde{u}^\mu. \tag{44}$$

Sada možemo nametnuti dva uvjeta na dosad razmatrani E-I tenzor disipativnog relativističkog fluida: njegovu konformnu invarijantnost, te konformnu invarijantnost dinamičkih jednadžbi koje taj tenzor zadovoljava. Za proizvoljni tenzor A sa komponentama $A^{\nu_1 \ldots \nu_m}_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ kažemo da je konformno invarijantan ako se transformira homogeno pri Weylovoj transformaciji metrike, odnosno, ako se transformira kao $A = e^{-\omega\phi}\widetilde{A}$ pri transformaciji (43). Realni broj ω se naziva konformna tenzorska težina. U općenitom slučaju ovaj broj ovisi o položajima tenzorskih indeksa.

Prva važna posljedica konformne invarijantnosti hidrodinamičkog tenzora jest iščezavanje njegovog traga – $T^\mu_\mu = 0$ [12]. Uzevši u obzir formulu za E-I tenzor idealnog fluida, vidimo da je ovim uvjetom određena jednadžba stanja fluida, koja glasi

$$p = \frac{1}{d-1}e. \tag{45}$$

Druga važna posljedica konformne invarijantnosti hidrodinamičkog tenzora jest da se pri Weylovoj transformaciji metrike on transformira homogeno sa težinom $d+2$

$$T^{\mu\nu} = e^{-(d+2)\phi}\widetilde{T}^{\mu\nu}. \tag{46}$$

Temperatura se konformno transformira se težinom 1, a iz Gibbs-Duhemove relacije (Landau, SP1) proizlazi da kemijski potencijal μ također imaju težinu 1. Iz (41) i (45) sada proizlazi da se e transformira kao

$$e \propto T^d . \tag{47}$$

Svi ovi rezultati sakupljeni zajedno određuju oblik E-I tenzora idealnog konformnog fluida

$$T^{\mu\nu} = \alpha T^d \left(g^{\mu\nu} + d u^\mu u^\nu \right), \tag{48}$$

gdje je α bezdimenzionalna normalizacijska konstanta.

Sada nam je cilj konstruirati konformno invarijantan disipativni E-I tenzor 1. reda. Pri Weylovim transformacijama, Christoffelovi simboli se transformiraju na način [12]

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \widetilde{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} + \delta^\nu_\lambda \partial_\mu \phi + \delta^\nu_\mu \partial_\lambda \phi - \widetilde{g}_{\lambda\mu} \widetilde{g}^{\nu\sigma} \partial_\sigma \phi . \tag{49}$$

U skladu s (49), kovarijantna derivacija u^μ se transformira na način

$$\nabla_\mu u^\nu = \partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} u^\lambda = e^{-\phi} \left[\widetilde{\nabla}_\mu \widetilde{u}^\nu + \delta^\nu_\lambda \widetilde{u}^\sigma \partial_\sigma \phi - \widetilde{g}_{\mu\lambda} \widetilde{u}^\lambda \widetilde{g}^{\nu\sigma} \partial_\sigma \phi \right]. \tag{50}$$

Relaciju (50) možemo primijeniti kako bismo odredili način transformiranja izraza (41). Dobivamo

$$\begin{gathered} \theta = \nabla_\mu u^\mu = e^{-\phi} \left(\widetilde{\nabla}_\mu u^\mu + (d-1) \widetilde{u}^\sigma \partial_\sigma \phi \right) = e^{-\phi} \left(\widetilde{\theta} + (d-1) \widetilde{D} \phi \right), \\ a^\nu = D u^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\nu = e^{-2\phi} \left(\overline{a^\nu} + \overline{P^{\nu\sigma}} \partial_\sigma \phi \right), \\ \sigma^{\mu\nu} = P^\lambda \left({}^\mu \nabla_\lambda u^\nu \right) - \frac{1}{d-1} P^{\mu\nu} \nabla_\lambda u^\lambda = e^{-3\phi} \overline{\sigma^{\mu\nu}} . \end{gathered} \tag{51}$$

Sada možemo doći do važnog rezultata za disipativni konformni fluid 1. reda. Iz (51) vidimo da se θ transformira nehomogeno pri Weylovim transformacijama, iz čega zaključujemo da je za konformni fluid viskozni koeficijent $\zeta = 0$. E-I tenzor disipativnog konformnog fluida 1. reda prema tome ima oblik

$$T^{\mu\nu} = \alpha T^d \left(g^{\mu\nu} + du^\mu u^\nu\right) - 2\eta\sigma^{\mu\nu} . \qquad (52)$$

4 Posebna rješenja Einsteinove jednadžbe

U ovom poglavlju ćemo navesti i opisati rješenja Einsteinove jednadžbe koja ćemo koristiti kasnije. U potpoglavlju 4.1 je opisano Schwarzschildovo rješenje, dok je u potpoglavlju 4.2 opisano AdS rješenje.

4.1 Schwarzschildovo rješenje

Rješenje Einsteinove jednadžbe koje opisuje geometriju izvan statične sferne zvijezde mase M , uz $G = c = 1$ jest

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{53}$$

gdje je $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Ovo rješenje se naziva *Schwarzschildovo rješenje*. Vidimo da metrika (53) divergira za $r = 2M$. Riječ je o koordinatnom singularitetu, budući da kvadrat Riemannovog tenzora, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ za metriku (53) ima vrijednost proporcionalnu M^2 / r^6. Prema tome, radi se o odabiru loših koordinata. Kako bismo riješili problem koordinatnog singulariteta potrebno je uvesti nove koordinate. U tu svrhu možemo promotriti gibanje upadnih fotona koji se gibaju radijalno. U ovom slučaju iz metrike (53) slijedi da jednadžba koja opisuje njihovo gibanje ima oblik

$$v_0 - t = \int \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr = r + 2M \ln(r - 2M) \equiv r_* . \tag{54}$$

Ovdje je v_0 konstanta koja označava različite upadne fotone. Uz zamjenu $v = t + r_*$, te tretiranjem koordinate v kao nove vremenske koordinate, metrika (53) postaje

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 . \tag{55}$$

Vidimo da metrika (55) nema singularitet u $r = 2M$. Iz (54) vidimo da $t \to \infty$ za $r = 2M$, što objašnjava postojanje koordinatnog singulariteta u metrici (53).
Po konstrukciji, upadne svjetlosne zrake prate krivulje konstantne brzine v. Izlazne svjetlosne zrake zadovoljavaju

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{56}$$

Za $r > 2M$ desna strana jednadžbe (56) je pozitivna, pa se prema tome izlazne svjetlosne zrake gibaju prema većim vrijednostima od r, što je i očekivano. Za $r = 2M$ desna strana jednadžbe (56) iščezava, pa se stoga tu radi o izlaznim svjetlosnim zrakama. Za $r < 2M$ desna strana jednadžbe (56) je negativna, pa su prema tome i izlazne svjetlosne zrake privučene na manji polumjer. Ovo znači da bilo koji promatrač koji slijedi timelike svjetsku liniju mora eventualno doći do singulariteta. Površina $r = 2M$ se naziva *horizont događaja*, a cjelokupno područje $r \leq 2M$ se naziva *crna rupa*.

4.2 anti-de Sitterovo (AdS) rješenje

U odsustvu materije, Einsteinova jednadžba sa negativnom kozmološkom konstantom Λ ima oblik

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{57}$$

Ako je $\Lambda < 0$, maksimalno simetrično rješenje jednadžbe (…) je anti-de Sitterovo (AdS) prostor vrijeme. Ovo rješenje možemo dobiti krenuvši od 5D ravnog prostora sa signaturom $(2,3)$, za koje je

$$ds^2 = -dT_1^2 - dT_2^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2, \tag{58}$$

te razmatranjem metrike inducirane na površini

$$-T_1^2 - T_2^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -L^2. \tag{59}$$

Stavljanjem $r^2 = X_i X^i$, te uzevši da je $\frac{\tau}{L}$ rotacijski kut u (T_1, T_2)-ravnini, metrika postaje

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right) d\tau^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{60}$$

Ova metrika je rješenje Einsteinove jednadžbe sa $\Lambda = -\frac{3}{L^2}$. Veličina L se još označava L_{AdS} i naziva *AdS polumjer*. U metrici, τ je periodička varijabla, no uobičajeno je razmotati ju i pustiti da $-\infty < \tau < \infty$, tako da nema zatvorenih timelike krivulja. Ove koordinate prekrivaju cijelo prostor-vrijeme, pa je prema tome AdS prostor-vrijeme globalno statično i sferno simetrično. Također, njegova simetrijska grupa je $SO(2,3)$.

Još jedan prikladan koordinatni sustav za AdS prostor-vrijeme se dobiva stavljanjem $\rho = T_1 - X_1, t = T_2 L / \rho$ i $x_i = X_i L / \rho$ za $i = 2,3$. Tada metrika poprima oblik

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{L^2}\left(-dt^2 + dx_i dx^i\right) d\tau^2 + \frac{L^2}{\rho^2} d\rho^2. \tag{61}$$

Koordinate ρ, t i x_i su također poznate kao Poincaréove koordinate. One su korisne, budući da su površine konstantnog ρ ravne, ali one ne pokrivaju cijeli horizonst. Površina $\rho = 0$ se naziva Poincaréov horizont.

Neutralna, nerotirajuća crna rupa u AdS prostor-vremenu je dana metrikom

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{62}$$

Za bilo koji $M > 0$, postoji samo jedna vrijednost od r gdje je $g_{tt} = 0$. To je horizont događaja, $r = r_+$. Ovaj horizont događaja je sfernog oblika.

AdS prostor-vrijeme također dopušta crne rupe sa planarnim horizontom:

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{L^2}\left[-\left(1-\frac{\rho_+^3}{\rho^3}\right)dt^2 + dx_i dx^i\right] + \frac{L^2}{\rho^2}\left(1-\frac{\rho_+^3}{\rho^3}\right)^{-1} d\rho^2. \qquad (63)$$

gdje je $\rho = \rho_+$ horizont događaja.

5 Podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida

U skladu s B-G "rječnikom", različite AdS volumne geometrije preslikavaju se u različita stanja u rubnoj baždarnoj teoriji. Npr., čista AdS geometrija, odnosno, maksimalno simetrično negativno zakrivljeno prostor-vrijeme, odgovara vakuumskom stanju u baždarnoj teoriji. Velike[2] Schwarzschild-AdS crne rupe odgovaraju matrici termalne gustoće u baždarnoj teoriji. Ovo se može predočiti zamišljanjem konfiguracije u koju određeno početno stanje eventualno evoluira: u volumenu, efekt gravitacije i negativne zakrivljenosti proizvoljnu konfiguraciju nastoji svesti na oblik Schwarzschild-AdS crne rupe. Paralelno tome se na rubu, u baždarnoj teoriji, proizvoljno pobuđenje eventualno termalizira.

U svrhu opisivanja gravitacijskih duala hidrodinamičkim rješenjima, možemo promotriti preslikavanje između dinamike volumena i ruba u globalnoj termalnoj ravnoteži. U teoriji polja, termalna ravnoteža je opisana statičkim sustavom i temperaturnim poljem. Gravitacijski duali su ovdje prostor-vremena crnih rupa. Temperaturu fluida određuje Hawkingova temperatura crne rupe, dok je brzina fluida pak brzina horizonta crne rupe. Za planarne Schwarzschild-AdS crne rupe temperature raste linearno s veličinom horizonta; AdS asimptota stoga osigurava termodinamičku stabilnost te također daje prirodni dugovalni režim.

Sada nas zanima što će se dogoditi ako se pomaknemo iz ravnotežne konfiguracije. Krenuvši sa stacionarnom Schwarzschild-AdS crnom rupom, pomoću nje želimo doći do rješenja kod kojih su temperatura i brzina fluida sporo-mijenjajuće funkcije rubnih smjerova. Radi se o spajanju dijelova crnih rupa sa blago različitim temperaturama i potiscima na način da se dobije regularno rješenje Einsteinovih jednadžbi sa negativnom kozmološkom konstantom. Kako bi se došlo do točnog rješenja Einsteinovih jednadžbi, spajanje ne smije biti proizvoljno; polja brzine i temperature do na vodeći red moraju zadovoljavati hidrodinamičke jednadžbe. Nadalje, samo rješenje je popravljeno red po red u derivativnom razvoju, proces koji pak popravlja hidrodinamičke jednadžbe. Konačan rezultat je preslikavanje između rješenja gravitacije sa negativnom kozmološkom konstantom i hidrodinamičkih jednadžbi u jednoj dimenziji niže.

---

[2] Pod pojmom "velika Schwarzschild-AdS crna rupa" mislimo na crnu rupu čiji je polumjer $r > L_{AdS}$. U daljnjem ćemo se fokusirati na limes velike crne rupe $r_+ >> L_{AdS}$, što znači da ćemo razmatrati *planarne* Schwarzschild-AdS crne rupe.

Interesantan aspekt ovog preslikavanja jest činjenica da Einsteinove jednadžbe postaju rješive, budući da smo u dugovalnom režimu. S druge strane, njihova nelinearnost je sačuvana.

U potpoglavlju 5.1 opisujemo članak [4], o kojemu je već bilo riječi u Uvodu. U tom radu se promatra isključivo AdS_5 prostor-vrijeme, odnosno 5-dimenzionalni volumen. Iako se vrši perturbativni razvoj u rubnim derivacijama, zadržava se egzaktna radijalna ovisnost. U potpoglavlju 5.2 opisujemo članak [11], u kojemu autori dokazuju nužnost modifikacije Landau-Lifshitzovog formalizma opisanog u potpoglavlju 3.2, u slučaju postojanja tzv. trokutnih anomalija.

5.1 Nelinearna hidrodinamika iz gravitacije

Promotrimo prvo stacionarno rješenje Einsteinovih jednadžbi sa negativnom kozmološkom konstantom koje odgovara potisnutoj planarnoj Schwarzschild-AdS crnoj rupi:

$$ds^2 = -2u_\mu dx^\mu dr + r^2\left(\eta_{\mu\nu} + \left[1 - f\left(r/\pi T\right)u_\mu u_\nu\right]\right)dx^\mu dx^\nu, \tag{64}$$

gdje je $f(r) \equiv 1 - \frac{1}{r^4}$. Ovaj oblik rješenja je pogodan zato što je metrika regularna na horizontu događaja $r = \pi T$, te je također rubno-kovarijantna. Rješenje (64) se dobiva od statične planarne Schwarzschild-AdS crne rupe:

$$ds^2 = r^2\left(-f(r)dt^2 + \sum_i \left(dx^i\right)^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)}\right), \tag{65}$$

promjenom u Eddington-Finkelsteinove koordinate kako bi se izbjegao koordinatni singularitet na horizontu: $v = t + r_*$, gdje je $dr_* = \frac{dr}{r^2 f(r)}$, te konačno "kovarijantizacijom" pomoću potisnuća $v \to u_\mu x^\mu, x_i \to P_{i\mu}x^\mu$, gdje je $P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$.

Rješenje je sada parametrizirano sa četiri parametra: temperaturom T i potiscima u^μ (koji imaju tri nezavisne komponente u četiri dimenzije zbog normalizacije). Metrika

(64) predstavlja rješenje nultoga reda u našoj iterativnoj proceduri. Idealni fluid opisan temperaturom T i brzinom u^{μ}, dualan metrici (64), ima E-I tenzor

$$T^{\mu\nu} = \pi^4 T^4 \left(\eta^{\mu\nu} + 4u^{\mu}u^{\nu}\right), \tag{66}$$

koji slijedi iz relacije (48) za $d = 4$ i $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Jednadžba sačuvanja (23) automatski je zadovoljena za tenzor (66), kao što su i Einsteinove jednadžbe (57) automatski zadovoljene za metriku (64).

Sada možemo uzeti da su prethodno konstantni parametri u_{μ} i T funkcije rubnih koordinata x^{μ}. U općenitom slučaju metrika (64) sada više nije rješenje Einstenovih jednadžbi, budući da parametri u_{μ} i T sada više nisu konstantni, nego su funkcije rubnih koordinata x^{μ}. Metrika (64) ima dva interesantna svojstva: (i) regularna je za $r > 0$, zbog prelaska u Eddington-Finkelsteinove koordinate; (ii) uz pretpostavku da su funkcije $T(x)$ i $u^{\mu}(x)$ sporo-mijenjajuće funkcije koordinata, odnosno da njihove derivacije po koordinatama općenito imaju malene vrijednosti, logično je pretpostaviti da u lokalnoj domeni metrika (64) dobro aproksimira egzaktnu metriku (64). Matematički govoreći, pretpostavljamo da vrijede relacije

$$\frac{\partial_{\mu} \ln T}{T} \sim O(\varepsilon),\ \frac{\partial_{\mu} u}{T} \sim O(\varepsilon),$$

gdje je ε malen parametar. Možemo još nametnuti baždarenje $g_{rr} = 0, g_{r\mu} = -u_{\mu}$.

U svakoj lokalnoj domeni ove spore varijacije, volumno gravitacijsko rješenje približno odgovara rješenju uniformne crne brane. Volumno rješenje se prema tome može konstruirati međusobnim spajanjem ovih lokalnih domena. Metrika (64), koju možemo označiti sa $g_{\mu\nu}^{(0)}$, nije egzaktno rješenje Einsteinovih jednadžbi. Ovu metriku potrebno je nadopuniti korekcijama višega reda ($g_{\mu\nu}^{(1)}$ itd.), koje se mogu dobiti iterativno pomoću razvoja po parametru ε. Ono što je ovdje važno jest činjenica što je ovako dopunjena metrika regularna unutar horizonta događaja. To je posljedica činjenice što je početna metrika (64) regularna na horizontu, zbog toga što je izražena preko Eddington-

Finkelsteinovih koordinata. U suprotnom bi spomenuta iterativna konstrukcija metrike zakazala u blizini koordinatnog singulariteta na horizontu.

Varijable $g_{\mu\nu}$, T i u^{μ} sada možemo tretirati kao funkcije reskaliranih rubnih.koordinata εx^{μ}. U konačnici možemo staviti da je $\varepsilon = 1$. Sada $g_{\mu\nu}$, T i u^{μ} možemo prikazati u obliku redova po potencijama od parametra ε. Imamo

$$g_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_{\mu\nu}^{(k)}\left(T(\varepsilon x), u^{\alpha}(\varepsilon x)\right), \qquad T = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T^{(k)}(\varepsilon x), \qquad u^{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{\mu(k)}(\varepsilon x). \tag{67}$$

Korekcije $g_{\mu\nu}^{(k)}, u^{\mu(k)}$ i $T^{(k)}$ se određuju rješavanjem Einsteinovih jednadžbi do k-tog reda u gradijentnom razvoju (67) je potrebno uvrstiti u Einsteinove jednadžbe (57), te potom razviti dobiveni rezultat po potencijama od ε.

Pretpostavimo sada da smo odredili $g_{\mu\nu}^{(m)}$ za $m \le n-1$, te $T^{(m)}$ i $u^{\mu(m)}$ za $m \le n-2$. Promatranjem članova uz ε^n u Einsteinovim jednadžbama dolazimo do skupa nehomogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi koje možemo napisati u obliku operatorske jednadžbe

$$H\left[g^{(0)}\left(T^{(0)}, u^{\mu(0)}\right)\right]g^{(n)} = s_n . \tag{68}$$

Kako se svaka derivacija po koordinati x^{μ} pojavljuje sa potencijom od ε, budući da su sve promatrane veličine funkcije εx^{μ}, proizlazi da je linearni operator H diferencijalni operator najviše drugog reda, i to isključivo po varijabli r. On je također neovisan o n. Možemo reći da je ovaj račun smetnje ultra-lokalan u rubnim koordinatama, u smislu da jednadžbe gibanja volumnog prostor-vremena možemo riješiti posebno za svaku točku na rubu. Član s_n na desnoj strani jednadžbe (68) predstavlja članove uz ε^n, u kojima nema radijalnih derivacija. Njega čine doprinosi od raznih redova u računu smetnje. On predstavlja lokalni izraz ($n-m$)-tog reda u rubnim derivacijama parametara $T^{(m)}$ i $u^{\mu(m)}$, za $m \le n-1$. Ključan dio računa smetnje jest određivanje člana s_n. Ovaj član pri svakom višem redu računa postaje sve kompliciraniji, te odražava nelinearnost teorije.

Skup diferencijalnih jednadžbi (68) se sastoji od ukupno 10 jednadžbi. Međutim, nakon baždarne redundancije, broj varijabli smanjuje se na 6. Ovo nepoklapanje nam govori da dio Einsteinovih jednadžbi predstavlja jednadžbe ograničenja, dok ostatak čine fizikalne dinamičke jednadžbe.

Možemo pobliže proučiti diferencijalne jednadžbe (68) kanonskim razdvajanjem volumnih koordinata $X^{\mu} = \left(r, x^{a}\right)$. $E_{r\mu}$ komponente Einsteinovih jednadžbi predstavljaju jednadžbe sačuvanja impulsa za gibanje u radijalnom smjeru. Za ove jednadžbe je dovoljno da budu zadovoljene za bilo koji r. Uzevši to u obzir, najpogodnije ih je proučavati na samom rubu, gdje se one svode na jednadžbe sačuvanja rubnog E-I tenzora

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu}_{(n-1)} = 0 . \tag{69}$$

Rubni E-I tenzor definiran je relacijom $T^{\mu}_{\nu} = -2 \lim_{r\to\infty} r^{4}\left(K^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\right)$ [13], gdje je $K_{\mu\nu}$ ekstrinzični tenzor zakrivljenosti na plohi konstantnog polumjera r. Budući da se u jednadžbi (69) eksplicitno pojavljuje rubna derivacija, koja sa sobom nosi vlastitu efektivnu potenciju od ε, jednadžba (69) ovisi samo o rubnom E-I tenzoru izgrađenom od metrike prostor-vremena reda $n-1$. Posljedica ovoga jest da nepoznata metrika $g^{(n)}$ ne ulazi u jednadžbe (69); operator H u (68) iščezava za ova rješenja. Stoga je (69) ograničenje na rješenje već dobiveno u jednom redu računa smetnje niže. Rješenje za $g^{(n)}$ je u svakom redu računa smetnje jedinstveno izraženo preko rješenja prethodnog reda te tako u konačnici i preko ansatza, odnosno nultog člana u računu smetnju. Konzekventno, jednadžba (69) ograničava polja početne brzine i temperature, te proizlazi da je to jednadžba koja opisuje hidrodinamiku na rubu.

Preostale jednadžbe E_{rr} i $E_{\mu\mu}$ su dinamičke jednadžbe. Korištenjem prostorne rotacijske simetrije rješenja nultog reda, ove se jednadžbe mogu riješiti metodom kvadrature:

$$g^{(n)} = p\left(s_{n}\right) + h\left(H\right), \tag{70}$$

gdje p u gornjoj formuli označava partikularno, a h homogeno rješenje.

Uz specificiranje rubnih uvjeta dobiva se jedinstveno rješenje dinamičkih jednadžbi. Ti uvjeti su normalizabilnost u beskonačnosti i regularnost u unutrašnjosti za $r > 0$. Proizlazi da ovi uvjeti potpuno određuju rješenje, te se na kraju dobiva regularna geometrija crne rupe pri svakom danom redu u ε-razvoju.

U sažetku, u danom redu računa smetnje rješavaju se jednadžbe ograničenja, koje nameću hidrodinamičke jednadžbe na početnu metriku. Zatim se određuje korekcija na metriku. Metrička korekcija se potom ubacuje u jednadžbe ograničenja kako bi se odredile korekcije hidrodinamičkih jednadžbi itd. Ova se procedura može ponavljati do željenog reda u računu smetnje.

Volumna metrika, korigirana do prvoga reda u paremetru ε ima oblik

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2u_\mu dx^\mu dr + r^2\left(\eta_{\mu\nu} + \left[1 - f(r/\pi T)u_\mu u_\nu\right]\right)dx^\mu dx^\nu \\ &+ 2r\left[\frac{r}{\pi T}F(r/\pi T)\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}u_\mu u_\nu \partial_\lambda u^\lambda - \frac{1}{2}u^\lambda \partial_\lambda\left(u_\nu u_\mu\right)\right]dx^\mu dx^\nu , \end{aligned} \tag{71}$$

gdje su $T(x)$ i $u_\mu(x)$ sporo-mijenjajuće funkcije koje zadovoljavaju jednadžbu sačuvanja E-I tenzora idealnog fluida nultog reda,

$$F(r) \equiv \int_r^\infty dx \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{(1+r)^2(1+r^2)}{r^4}\right) - 2\arctan r + \pi\right]. \tag{72}$$

Ovdje je $\sigma^{\mu\nu}$ *shear* tenzor definiran u (41), za $d = 4$. Iz metrike (71) slijedi da E-I tenzor induciran na rubu ima oblik

$$T^{\mu\nu} = \pi^4 T^4\left(\eta^{\mu\nu} + 4u^\mu u^\nu\right) - 2\pi^3 T^3 \sigma^{\mu\nu} . \tag{73}$$

U izrazu (73), prvi član na desnoj strani predstavlja prethodno napisani E-I tenzor idealnog fluida (48), dok je drugi član njegova disipativna korekcija 1. reda. Iz relacije (73) slijedi da je tlak fluida $p = \pi^4 T^4$, otkuda slijedi da je gustoća entropije $s = 4\pi^4 T^3$.

Uspoređivanjem relacija (52) i (73) proizlazi da je viskozni koeficijent $\eta = \pi^3 T^3$, otkuda slijedi da je $\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}$, što je u skladu sa rezultatom članka [5].

E-I tenzor drugog reda ima oblik

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= (\pi T)^4 \left(\eta^{\mu\nu} + 4u^\mu u^\nu\right) - 2(\pi T)^3 \sigma^{\mu\nu} \\
&+ (\pi T)^2 \left((\ln 2) T_{2a}^{\mu\nu} + 2T_{2b}^{\mu\nu} + (2 - \ln 2)\left[\frac{1}{3} T_{2c}^{\mu\nu} + T_{2d}^{\mu\nu} + T_{2e}^{\mu\nu}\right]\right),
\end{aligned}
\tag{74}
$$

gdje su

$$
\begin{gathered}
T_{2a}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\left(\mu\sigma_\lambda^\nu\right)} u_\alpha \lambda_\beta ,\; T_{2a}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\alpha}\sigma_\alpha^\nu - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} , \\
T_{2c}^{\mu\nu} = \partial_\alpha u^\alpha \sigma^{\mu\nu} ,\; T_{2d}^{\mu\nu} = Du^\mu Du^\nu - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} Du^\alpha Du_\alpha , \\
T_{2e}^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} D\left(\partial\left(_\alpha u_\beta\right)\right) - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} P^{\alpha\beta} D\left(\partial_\alpha u_\beta\right).
\end{gathered}
\tag{75}
$$

Korištenjem rastava (40), te uzevši u obzir da sada kovarijantna derivacija prelazi u običnu parcijalnu derivaciju jer smo na metrici Minkowskog, izraze (75) možemo napisati u obliku

$$
\begin{gathered}
T_{2a}^{\mu\nu} = -2\omega^\rho \left\langle {}^\mu \sigma_\rho^\nu \right\rangle , \\
T_{2b}^{\mu\nu} = \sigma^\rho \left\langle {}^\mu \sigma_\rho^\nu \right\rangle , \\
T_{2c}^{\mu\nu} = \theta \sigma^{\mu\nu} , \\
T_{2d}^{\mu\nu} = a \left\langle {}^\mu a^\nu \right\rangle , \\
\frac{1}{3} T_{2c}^{\mu\nu} + T_{2d}^{\mu\nu} + T_{2e}^{\mu\nu} = \left\langle D\sigma^{\mu\nu} \right\rangle + \frac{1}{3} \theta \sigma^{\mu\nu} .
\end{gathered}
\tag{76}
$$

5.2 Hidrodinamika sa trokutnim anomalijama

Kao što je poznato, u kvantnoj teoriji polja moguća je prisutnost trokutnih anomalija [15, 16]. U prisutnosti pozadinskih baždarnih polja vezanih na struje, u takvoj teoriji dolazi do nesačuvanja nekih od tih struja. Konkretno, dolazi do nesačuvanja AVC-a (Axial Vector Current) – aksijalnih vektorskih struja. Ovo kao posljedicu ima modifikaciju hidrodinamičkih jednadžbi.

Radi jednostavnosti prvo možemo promotriti slučaj kada postoji samo jedna $U(1)$ struja sa $U(1)^3$ anomalijom. 4-vektor sačuvane struje j^μ ima oblik

$$j^\mu = nu^\mu - \sigma T\left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu\right)\partial_\nu\left(\frac{\mu}{T}\right) + \xi\omega^\mu , \tag{77}$$

koji se od prethodno dobivenog oblika (39) razlikuje za dodatni član $\xi\omega^\mu$, proporcionalan vrtložnosti definiranoj formulom

$$\omega^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}u_\nu\partial_\lambda u_\rho . \tag{78}$$

Izraz (78) predstavlja relativističko poopćenje vrtložnosti nerelativističkog fluida, dane formulom $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ [6]. ξ je novi kinetički koeficijent koji odražava postojanje anomalije. Razlog postojanja člana $\xi\omega^\mu$ u relaciji (77) jest činjenica što je riječ o nesačuvanju aksijalnih vektorskih struja, čije postojanje općenito u skladu sa njihovim imenom podrazumijeva i neiščezavajuću vrtložnost fluida.

Možemo prvo razmotriti relativistički fluid sa jednim sačuvanim nabojem, sa $U(1)^3$ anomalijom. Pretpostavimo da je struja j_μ vezana na vanjsko pozadinsko polje A_μ. Kako bismo osigurali da rezultantne hidrodinamičke jednadžbe budu 1. reda, kao i u Landau-Lifshitzovom formalizmu, uzimamo da je jakost A_μ istog reda veličine kao i temperatura i kemijski potencijal. U prisustvu vanjskog pozadinskog polja hidrodinamičke jednadžbe imaju oblik

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda, \tag{79}$$

$$\partial_\mu j^\mu = C E^\mu B_\mu, \tag{80}$$

gdje smo definirali električno i magnetsko polje u sustavu mirovanja fluida, $E^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$, $B^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu F_{\alpha\beta}$ [8]. Ove definicije su u skladu sa definicijama u klasičnoj teoriji polja [8]. Jednadžba (80) predstavlja odstupanje od klasične jednadžbe sačuvanja struje $\partial_\mu j^\mu = 0$, koje je uzrokovano prisustvom anomalija, svojstvenih kvantnoj teoriji polja. C se naziva *anomalijski koeficijent*, te je definiran relacijom $\partial_\mu j^\mu = -\frac{1}{8} C \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}$, iz koje zajedno sa gornjim definicijama električnog i magnetskog polja slijedi (80).

Budući da jednadžbe (79) i (80) u slučaju kada im desna strana iščezava predstavljaju zakon sačuvanja E-I tenzora i struje, respektivno, u sadašnjem slučaju one predstavljaju nesačuvanje spomenutih veličina, pa prema tome vanjsko polje vrši rad na sustav, kao i na anomaliju.

Na potpuni analogni način kao i u potpoglavlju 3.2 možemo transformirati izraz $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \mu \partial_\mu j^\mu$, korištenjem jednadžbi (79) i (80). Ovdje je sada s entropija po jedinici volumena. Umjesto (34) dobiva se jednadžba

$$\partial_\mu \left(s u^\mu - \frac{\mu}{T} \nu^\mu \right) = -\frac{1}{T} \partial_\mu u_\nu \tau^{\mu\nu} - \nu^\mu \left(\partial_\mu \frac{\mu}{T} - \frac{E_\mu}{T} \right) - C \frac{\mu}{T} E^\mu B_\mu, \tag{81}$$

koja se od jednadžbe (34) razlikuje za drugi član u zagradi na desnoj strani, te treći član. Također, u sadašnjem slučaju desnu stranu formule (39) treba nadopuniti sa članom σE^μ, budući da je sustav vezan na vanjsko polje. Zadnji član na desnoj strani jednadžbe (81) je problematičan, budući da zbog Levi-Civita tenzora koji se pojavljuje u definicijama električnog i magnetskog polja desna strana jednadžbe nije nužno pozitivna, a sam član iznosom može nadvladati ostale članove na desnoj strani jednadžbe (81). Prema tome dolazi do mogućnosti narušenja zakona porasta entropije, iz čega dolazimo do zaključka da je prethodno izvedene hidrodinamičke jednadžbe potrebno nekako modificirati.

Kako promatrani fluid ima neiščezavajuću vrtložnost, te se nalazi u neiščezavajućem vanjskom magnetskom polju, logično je nadopuniti prethodno dobivene relacije za ν^{μ} i s^{μ}, (39) i (35), dodatnim članovima, proporcionalnim ω^{μ} i B^{μ}

$$\nu^{\mu} = -\sigma T P^{\mu\nu} \partial_{\nu}\left(\frac{\mu}{T}\right) + \sigma E^{\mu} + \xi\omega^{\mu} + \xi_{B} B^{\mu}, \tag{82}$$

$$s^{\mu} = s u^{\mu} - \frac{\mu}{T}\nu^{\mu} + D\omega^{\mu} + D_{B} B^{\mu}. \tag{83}$$

Ovdje su ξ, ξ_{B}, D i D_{B} funkcije T i μ. Ako sada relacije (82) i (83) uvrstimo u jednadžbu (81), na njenoj desnoj strani pojavit će se dodatni članovi koji sadrže
ω^{μ} i B^{μ}. Konkretno, dobiva se jednadžba

$$\partial_{\mu} s^{\mu} = -\frac{1}{T}\partial_{\mu} u_{\nu} \tau^{\mu\nu} - \left(-\sigma T P^{\mu\nu}\partial_{\nu}\left(\frac{\mu}{T}\right) + \sigma E^{\mu}\right)\left(\partial_{\mu}\frac{\mu}{T} - \frac{E_{\mu}}{T}\right) + \left(\frac{\xi_{B}}{T} - C\frac{\mu}{T}\right)E^{\mu} B_{\mu} +$$
$$\left(\partial_{\mu} D - \xi\partial_{\mu}\frac{\mu}{T}\right)\omega^{\mu} + \left(\partial_{\mu} D_{B} - \xi_{B}\partial_{\mu}\frac{\mu}{T}\right)B^{\mu} + D\partial_{\mu}\omega^{\mu} + D_{B}\partial_{\mu} B^{\mu} + \frac{\xi}{T}\omega^{\mu} E_{\mu} \tag{84}$$

Već smo prethodno napomenuli kako su članovi sa ω^{μ} i B^{μ} problematični zbog svojih definicija u kojima se pojavljuje Levi-Civita tenzor. Jedini mogući način da zakon porasta entropije uvijek bude zadovoljen jest pojedinačno iščezavanje svih koeficijenata ispred problematičnih članova u jednadžbi (84). Ovdje sada još možemo iskoristiti relacije koje zadovoljava idealni fluid

$$\partial_{\mu}\omega^{\mu} = -\frac{2}{w}\omega^{\mu}\left(\partial_{\mu} p - n E_{\mu}\right), \tag{85}$$

$$\partial_{\mu} B^{\mu} = -2\omega E + \frac{1}{w}\left(-B\partial p + n E B\right). \tag{86}$$

Relacije (85) i (86), uvrštene u jednadžbu (84) daju

$$\partial_\mu s^\mu = -\frac{1}{T}\partial_\mu u_\nu \tau^{\mu\nu} - \left(-\sigma T P^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\frac{\mu}{T}\right) + \sigma E^\mu\right)\left(\partial_\mu \frac{\mu}{T} - \frac{E_\mu}{T}\right) +$$
$$\left(\partial_\mu D - 2\frac{\partial_\mu p}{w}D - \xi\partial_\mu \frac{\mu}{T}\right)\omega^\mu + \left(\partial_\mu D_B - \frac{\partial_\mu p}{w}D_B - \xi_B\partial_\mu \frac{\mu}{T}\right)B^\mu + \left(\frac{2nD}{w} - 2D_B + \frac{\xi}{T}\right)\omega^\mu E_\mu +$$
$$\left(\frac{nD_B}{w} + \frac{\xi_B}{T} - C\frac{\mu}{T}\right)E^\mu B_\mu \quad . \tag{87}$$

Uvjet iščezavanja koeficijenata ispred problematičnih članova u jednadžbi (87) daje četiri jednadžbe

$$\partial_\mu D - 2\frac{\partial_\mu p}{w}D - \xi\partial_\mu \frac{\mu}{T} = 0, \tag{88}$$

$$\partial_\mu D_B - \frac{\partial_\mu p}{w}D_B - \xi_B\partial_\mu \frac{\mu}{T} = 0, \tag{89}$$

$$\frac{2nD}{w} - 2D_B + \frac{\xi}{T} = 0, \tag{90}$$

$$\frac{nD_B}{w} + \frac{\xi_B}{T} - C\frac{\mu}{T} = 0. \tag{91}$$

Sada možemo prijeći sa varijabli μ i T na nove varijable $\bar{\mu} \equiv \frac{\mu}{T}$ i p. Iz termodinamičke relacije $dp = sdT + nd\mu$ [9] slijedi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\bar{\mu}} = \frac{T}{w}, \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{\mu}}\right)_{\bar{\mu}} = -\frac{nT^2}{w}. \tag{92}$$

Sada možemo iskoristiti pravilo lančanog deriviranja kako bismo izraz $\partial_i D$ prikazali u obliku $\partial_i D = \left(\frac{\partial D}{\partial P}\right)\partial_i P + \left(\frac{\partial D}{\partial \overline{\mu}}\right)\partial_i \overline{\mu}$. Uzevši u obzir da koeficijenti ispred $\partial_i P$ i $\partial_i \overline{\mu}$ moraju iščezavati, jednadžba (88) se može rastaviti na dvije jednadžbe

$$-\xi + \frac{\partial D}{\partial \overline{\mu}} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial p} - \frac{2}{w} D = 0. \tag{93}$$

Korištenjem jednadžbe (92), vidimo da je općenito rješenje jednadžbi (93)

$$D = T^2 d(\overline{\mu}), \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial \overline{\mu}}\left[T^2 d(\overline{\mu})\right]_p. \tag{94}$$

$d(\overline{\mu})$ je nova funkcija. Iz jednadžbe (89) slijedi

$$D_B = T d_B(\overline{\mu}), \qquad \xi_B = \frac{\partial}{\partial \overline{\mu}}\left[T d_B(\overline{\mu})\right]_p, \tag{95}$$

gdje je $d_B(\overline{\mu})$ još jedna nova funkcija. Iz jednadžbi (90) i (91) slijedi

$$d_B(\overline{\mu}) = \frac{1}{2} d'(\overline{\mu}), \quad d_B(\overline{\mu}) - C\overline{\mu} = 0. \tag{96}$$

Integriranjem jednadžbi (96) dobivamo

$$d_B(\overline{\mu}) = \frac{1}{2} C\overline{\mu}^2, \quad d(\overline{\mu}) = \frac{1}{3} C\overline{\mu}^3. \tag{97}$$

Kinetički koeficijenti ξ i ξ_B prema tome imaju oblik

(22)

$$\xi = C\left(\mu^2 - \frac{2}{3}\frac{n\mu^3}{w}\right),\ \xi_B = C\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\frac{n\mu^2}{w}\right). \tag{98}$$

Promotrimo sada slučaj kada imamo mnogo naboja. Pretpostavljamo da je riječ o $U(1)$ nabojima koji međusobno komutiraju. Anomalijski koeficijenti su sada C^{abc}, te su totalno simetrični na zamjenu indeksa. Relacija $\partial_\mu j^\mu = -\frac{1}{8}C\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}$ se sada poopćuje u

$$\partial_\mu j^{a\mu} = C^{abc}E^b B^c, \tag{99}$$

gdje indeks a numerira struju. Relacija (77) se poopćuje u

$$j^{a\mu} = n^a u^\mu + \cdots + \xi^a \omega^\mu + \xi_B^{ab} B^\mu, \tag{100}$$

gdje su ξ^a i ξ_B^{ab} novi transportni koeficijenti. Relacija (83) se poopćuje u

$$s^\mu = su^\mu - \frac{\mu^a}{T}\nu^a + D\omega^\mu + D_B^a B^{a\mu}. \tag{101}$$

Analognim načinom kao i u prethodno razmatranom slučaju jednog sačuvanog naboja, dobivamo

$$D = \frac{1}{3}C^{abc}T^2\overline{\mu}^a\overline{\mu}^b\overline{\mu}^c,\quad D_B^a = \frac{1}{2}C^{abc}T\overline{\mu}^b\overline{\mu}^c, \tag{102}$$

$$\xi^a = \frac{\partial}{\partial\overline{\mu}^a}D\bigg|_p,\ \xi_B^{ab} = \frac{\partial}{\partial\overline{\mu}^a}D_B^b\bigg|_p. \tag{103}$$

Iz relacija (102) i (103) dobiva se, korištenjem termodinačkih relacija, formula

$$\xi^a = C^{abc}\mu^b\mu^c - \frac{2}{3}n^a C^{bcd}\,\frac{\mu^b\mu^c\mu^d}{w}\,, \tag{104}$$

koja predstavlja poopćenje relacije (98) na slučaj višestrukih naboja.

6 Zaključak

Podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida predstavlja prirodan način preslikavanja hidrodinamičkih rješenja u gravitacijska rješenja, čime se omogućuje konstrukcija rješenja Einsteinovih jednadžbi u obliku vremenski nezavisnih nehomogenih crnih rupa, zadržavajući pritom cjelokupnu nelinearnost Einsteinovih jednadžbi. Iako je ova konstrukcija nastala iz B-G dualnosti, ona se očigledno može razmatrati na općenitijem nivou.

Jedan od najvećih neriješenih problema klasične fizike jest konzistentno shvaćanje turbulentnog toka fluida. Podudaranje gravitacijske fizike i fizike fluida otvara nove mogućnosti istraživanja turbulencije, u vidu holografskih teorija turbulencije. Stvar je budućnosti kako će se ove teorije razvijati.

Bibliografija

[1] Maldacena, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. // Int. J. Theor. Phys. Vol. 38 (1999), str. 1113-1133

[2] Gubser, S. S.; Klebanov, I. R.; Polyakov, A. M. Gauge theory correlators from noncritical string theory. // Phys. Lett. B. Vol. 428 (1998), str. 105-114

[3] Witten, E. Anti-de Sitter space and holography. // Adv. Theor. Math. Phys. Vol. 2 (1998), str. 253-291

[4] Sayantani, B.; Hubeny, V. E.; Minwalla, S.; Rangamani, M. Nonlinear fluid dynamics from gravity. // JHEP. 0802 (2008), 045

[5] Policastro, G.; Son, D. T.; Starinets, A. O. The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma. // Phys. Rev. Lett. Vol. 87 (2001), 081 601

[6] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Fluid Mechanics. 2nd ed. : Elsevier, 1987.

[7] Rangamani, M. Gravity and hydroynamics : lectures on the fluid-gravity correspondence. // Class. Quant. Grav. Vol 26 (2009), 224 003

[8] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. The Classical Theory of Fields. 4th ed. : Elsevier, 1975.

[9] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. Statistical Physics Part 1. 3rd ed. : Elsevier, 1980.

[10] Eckart, C. The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid. // Phys. Rev. Vol. 58 (1940), 919

[11] Son, D. T.; Surówka, P. Hydrodynamics with triangle anomalies. // Phys. Rev. Lett. Vol. 103 (2009), 191 601

[12] Wald, R. M. General Relativity : The University of Chicago Press, 1984.

[13] Balasubramanian, V.; Kraus, P. A stress tensor for anti-de sitter gravity. // Commun. Math. Phys. Vol. 208 (1999), str. 413-428

[14] Adler, S. L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. // Phys. Rev. Vol. 177 (1969), 2426

[15] Bell, J. S.; Jackiw, R. A PCAC puzzle: $\pi 0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ-model. // Nuovo Cimento A. Vol. 60 (1969), 47