Kleinov Erlangenski program i primjena na grupu SL(2,R)

Tarandek, David

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

David Tarandek

ERLANGENSKI PROGRAM I PRIMJENA NA GRUPU $SL(2, \mathbb{R})$

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Svrha rada na ovoj temi je dvojaka. U prvom poglavlju cilj je upoznavanje osnovnih ideja Felixa Kleina iznešenih u tekstu "Erlangenski program" 1872. godine. Kleinov manifest rezultat je burnih zbivanja u razvoju geometrije devetnaestog stoljeća i predstavlja svojevrsnu sintezu mimoilaznih pristupa. Primat se daje projektivnoj geometriji i pod njenim okriljem se objedinjuju euklidska geometrija, geometrija Lobačevskog i Riemannova geometrija. Klein im redom daje nazive parabolička, hiperbolička i eliptička. Pri tome napušta aksiomatsku metodu i stavlja u fokus načelo invarijantnosti ili nepromjenjivosti. To znači da grupa transformacija ostavlja neka svojstva (duljinu, kolinearnost, djelišni omjer) netaknutima. Vrlo važno, Klein naglašava i obrnuto: takva svojstva mogu se definirati kao invarijante spram djelovanja dobro odabrane grupe transformacija. Postaje bjelodano da je veza geometrija i odgovarajućih grupa obostrana: svaka geometrija okarakterizirana je nekom grupom transformacija, a svaka grupa rezultira nekom geometrijom.

Pogled na pojedinačne geometrije kao instance projektivne geometrije danas je posve standardan. Subordiniranost geometrija objašnjava se odnosom pojedinih grupa transformacija. Tako na primjer imamo euklidsku, afinu i projektivnu grupu koje su u odnosu $E(n,\mathbb{R}) \leq A(n,\mathbb{R}) \leq PGL(n+1,\mathbb{R})$. Projektivna grupa $PGL(n+1,\mathbb{R})$ čuva projektivne pravce i dvoomjer. Afina grupa sastoji se od grupe $GL(n,\mathbb{R})$ linearnih preslikavanja i grupe translacija izomorfne $\mathbb{R}^n$ i njihovih kompozicija. Ona uz projektivne varijante čuva na primjer i djelišni omjer. Konačno, euklidska grupa je grupa svih izometrija euklidskog prostora čije komponente su $O(n)$, kao podgrupa izometrija koje fiksiraju jednu točku i grupa translacija izomorfna s R^n. Uz afine invarijante, euklidska grupa čuva i metriku i mjeru kuta. Slično se odgovarajuće grupe eliptičkih i hiperboličkih transformacija mogu uložiti u $PGL(n+1,\mathbb{R})$.

Drugi cilj rada je vidjeti koliko ovakve interpretacije iscrpljuju erlangensku metodologiju. Nakon što pobliže pogledamo koje su bile glavne Kleinove zamisli, probat ćemo dati parafrazu erlangenskog pristupa koristeći matematičke alate koji proizlaze iz teorije djelovanja grupa. Kao centralni objekt izabiremo specijalnu linearnu grupu drugog stupnja $SL(2,\mathbb{R})$.

Drugo poglavlje otpočinjemo preliminarnim rezultatima iz teorije grupa s naglaskom na matrične grupe. Orijentiramo se na grupe $SL(2,\mathbb{R})$ i $GL(2,\mathbb{R})$ kao i na neke njihove zanimljivije podgupe. Prolazimo kroz osnove teorije djelovanja grupa i povezujemo s nama značajnim primjerima. Promatramo kako podgrupe zadane grupe kvocijentiranjem induciraju homogeni prostor za djelovanje početne grupe. Obratno, uočavamo kako zadano djelovanje grupe na homogenom prostoru inducira podgrupu te grupe kao stabilizator proizvoljne točke. Metodu primjenjujemo na $SL(2,\mathbb{R})$ i njene podgrupe. U više navrata nadolazimo do Möbiusovih transformacija. Pokazuje se da kompleksni brojevi nude povoljno okružje za razmatranje tog djelovanja. Slično se pokazuje i za preostala dva oblika hiperkompleksnih brojeva - dualne i duple. Uvodi se klasifikacija pojedinih geometrijskih implementacija na eliptičke, paraboličke i hiperboličke. Pokazuju se stanovite invarijante dobivenih djelovanja, posebno invarijantnost familije svih cikala pod djelovanjem SL(2,R). Rad završava naznakom mogućih smjernica za daljnja israživanja i primjene.

Poglavlje 1

Erlangenski program - programatski tekst i pristup geometriji

Felix Klein je 1872. godine povodom dobivanja profesure na Sveučilištu u Erlangenu objavio rad punog naslova ”Komparativno razmatranje novih geometrijskih istraživanja”.[1] Matematička javnost rad je vrlo brzo prihvatila kao ”Erlangenski program”, što je i danas uvriježeni naziv teksta. Ista sintagma koristi se i za konceptualni pristup geometriji kojeg Klein promovira.[2]

Bitno je reći da Erlangenski program nije znanstveni rad, već je svojevrsni manifest ili programatski članak. U pristupu Klein često žrtvuje formalni pristup kako bi dobio širu sliku. Rad je nastao u stoljeću velikog uzleta projektivne geometrije i u doba polaganog prihvaćanja neeuklidske geometrije. Odnosi između klasično-euklidskog, projektivnog i neeuklidskog pristupa još nisu razjašnjeni. Valja ga vidjeti i kao nastavak Kleinovog dvodjelnog teksta ”O takozvanoj neeuklidskoj geometriji” (u originalu Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie) u kojem daje svoj poznati model hiperboličke ravnine na projektivnom disku (krugu) u projektivnoj ravnini. Ovdje je najbitnije spomenuti da se metrika u hiperboličkoj ravnini generira unutar ambijentne projektivne ravnine bez definirane metrike. Upravo će to zapažanje dati projektivnoj geometriji ključnu ulogu u daljnjim Kleinovim razmatranjima. Naposljetku, naglašen je pojam *invarijantnosti* geometrijskih svojstava (poglavito metrike i mjere kuta) pod nekim projektivnim transformacijama.

U prvim redovima Erlangenskog programa Klein opet u fokus stavlja projektivnu geometriju. Cilj projekta je objedinjenje geometrije, jer ”...geometrija, koja je naposljetku jedna supstancijom, previše je puta uslijed nedavnog brzog razvoja rascjepkana na nizove

[1] Naslov originala je ”Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen”, a dalje se u radu pozivam na engleski prijevod M. W. Haskella ”A comparative review of recent researches in geometry”.

[2] U tom duhu ”Erlangenski program” referira na manifest, a pod ”erlangenskim programom” misli se na sam pristup.

gotovo nepovezanih teorija." ([2], str.215.) Uvodi se pojam transformacije prostora[3]. Posebno je zanimljiv skup svih transformacija koje čuvaju željena svojstva dane konfiguracije. One čine grupu s obzirom na kompoziciju - nazivamo je *glavna grupa*[4].

"Jer geometrijska svojstva su, po vlastitoj ideji, nezavisna o položaju koji u prostoru zauzima promatrana konfiguracija, o njezinoj apsolutnoj veličini i, konačno, o smislu [danas bismo rekli orijentaciji] u kojem su njeni djelovi posloženi. Zato svojstva konfiguracije ostaju nepromijenjena pod bilo kojim prostornim gibanjima[5], transformacijama u simetrične konfiguracije s obzirom na ravninu (refleksijama), kao i bilo kojom kombinacijom ovih transformacija. Ukupnost ovih transformacija nazivamo *glavna grupa* transformacija prostora; *geometrijska svojstva ne mijenjaju se transformacijama glavne grupe*. I, obratno, *geometrijska svojstva mogu se okarakterizirati time što ostaju nepromijenjena pod transformacijama glavne grupe*([2]str. 218., kurziv u originalu).

Navode se još neke grupe transformacija, npr. grupa rotacija oko zadane točke i grupa kolineacija. Potom se vrši prijelaz s prostora na mnogostrukosti[6]. Klein ističe cilj:

"*Za danu mnogostrukost i grupu transformacija na njoj; razviti teoriju invarijanti te grupe*" ([2], str. 219.)

Nakon ovakvog redefiniranja geometrije, Klein nastavlja s dvije algebarske primjedbe. Prvo, zamjećuje da se grupa transformacija smanjuje povećavanjem broja invarijantnih svojstava i obratno - danas to u terminima djelovanja grupa nazivamo teorem o stabilizatoru i orbiti. Drugo, djelovanje grupe B na mnogostrukosti A jednoznačno određuje djelovanje neke grupe B' na mnogostrukosti A' (koja je u nekom ne-striktnom smislu izomorfna s A) i geometrije koje izniču iz takvih djelovanja su u suštini iste. U primjeru koji potom navodi (A, B) su Möbiusove transformacije na projektivnom pravcu, a (A', B') projektivne transformacije koje fiksiraju željenu koniku.

U radu se dalje spominje *Hesseovo načelo transfera*, gdje grupa ostaje ista, ali djeluje na različitim prostorima. Tako na primjer Möbiusove transformacije djeluju na parovima točaka konike. Pošto svaki par točaka određuje pravac, na taj način grupa sad djeluje na skupu pravaca projektivne ravnine. Posljedica toga je da možemo izjednačiti teoriju Möbiusovih transformacija i projektivnu metričku geometriju.

Nižu se primjeri geometrija i načini na koji se uklapaju u okvir koji je Klein zacrtao. Među njima se ističu *inverzivna*[7] geometrija (promatranje invarijanti spram djelovanja inverzija) i geometrija kontaktnih transformacija koju je u to vrijeme razvijao Sophus Lie.

---

[3]Pod prostorom se misli na euklidski prostor. Klein uglavnom argumente gradi na $\mathbb{R}^3$ uz napomenu da se rezultati mogu generalizirati na višedimenzionalne prostore.

[4]U izvorniku *principal group*

[5]U izvorniku *motions*

[6]U izvorniku *manifoldness*. I sam engleski naziv ukazuje na to da se radi o relativnoj novini u devetnaestom stoljeću (danas je uvriježen naziv *manifold*). Klein ne definira pobliže ovaj pojam, ali čini se da je on dovoljno širok da obuhvati metričku, pa čak i diferencijabilnu strukturu na mnogostrukostima.

[7]U izvorniku *geometry of reciprocal radii vectores*.

Ovdje gledamo djelovanje grupe na uređenu petorku (x, y, z, p, q) gdje je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial x}$, a invarijanta je izraz $dz - p \cdot dx - q \cdot dy = 0$. Svrha potonje teorije je klasifikacija plohi određenih sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Klein završava program nizom od sedam primjedbi konceptualno-filozofskog karaktera. Prva je o sintetičkoj i analitičkoj metodi u geometriji. Druga govori o rasedinjenosti geometrijskih pristupa. U trećoj pridaje važnost prostornom zoru. U četvrtoj poopćuje svoja razmatranja na mnogostrukosti proizvoljnih dimenzija. Peta primjedba otklanja filozofske prigovore neeuklidskoj geometriji i daje prednost matematičkoj operabilnosti. Šesta je primjedba posvećena mnogostrukostima konstantne zakrivljenosti. U sedmoj razmatra binarne forme.

Poglavlje 2

Erlangenski program - suvremena interpretacija

U nastavku rada okrećemo se suvremenoj parafrazi erlangenskog programa kroz razmatranja invarijanti djelovanja grupa. Pokušavamo proširiti standardni pristup i uočiti moguće posljedice. Pritom pretpostavljamo poznavanje osnovne teorije linearne algebre i teorije skupova. Ukratko izlažemo osnovne definicije, teoreme i dokaze iz teorije grupa, matričnih grupa i djelovanja grupa koji čine okosnicu matematičkog aparata koji dalje koristimo. Zadržavamo se na grupama $SL(2,\mathbb{R}) \leq GL(2,\mathbb{R})$ i istaknutijim primjerima podgrupa. Promatramo djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na realnom i kompleksnom projektivnom pravcu. Promatramo odnos homogenih prostora i podgrupa specijalne linearne grupe. Uočavamo da prethodno navedena djelovanja nisu proizvoljno zadana, već prirodno izniču unutar danog okvira izborom podgrupe.

2.1 Uvodni rezultati

Teorija grupa

Definicija 1. *Neka je G neprazan skup i neka postoji funkcija $G \times G \to G$. Takvu funkciju zovemo* binarnom operacijom *na G. Kažemo da je G* grupa *ako vrijedi*

1. $f(gh) = (fg)h$ *za sve* $f, g, h \in G$*;*
2. *postoji* $e \in G$ *takav da* $ge = eg = g$*, za sve* $g \in G$*;*
3. *za svaki* $g \in G$ *postoji* $g^{-1} \in G$ *takav da* $gg^{-1} = g^{-1}g = e$*.*

Vrijedi li i sljedeći uvjet, grupa je komutativna *ili* Abelova*:*

4. *$gh = hg$ za sve $g, h \in G$*

Primjedba 1. Element e iz drugog uvjeta jedinstven je i nazivamo ga *neutralom*. Naime, vrijedi li 2) za e' tada $e = ee' = e'$. Za proizvoljni $g \in G$, element g^{-1} je jedinstven i nazivamo ga *inverzom* od g. Iz $fg = e$ slijedi $fgg^{-1} = eg^{-1}$, pa $f = g^{-1}$.

Primjer 1. Skupovi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su Abelove grupe s obzirom na zbrajanje. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\}, \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ su Abelove grupe s obzirom na množenje. U slučaju aditivnog tipa zapisa binarne operacije u grupi, tj, oznake $+$ i njezinih varijanti, neutral se standardno označava s 0, a inverzni element od g s $-g$. Aditivni zapis češći je kod Abelovih grupa, npr. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i C s uobičajenim zbrajanjem. Kod multiplikativnog zapisa, tj. oznake $\cdot$ - koja se često i izostavlja te $\circ, *$ itd, neutral se naziva jedinicom u grupi i označava s 1, a inverzni element od g je g^{-1}, katkad $1/g$ u multiplikativnim grupama brojeva.

Primjer 2. Neka je X neprazan skup, a $S(X)$ skup svih bijekcija $X \to X$. $S(X)$ je grupa s obzirom na kompoziciju funkcija. U slučaju konačnog skupa X kardinalnosti n, elementi od $S(X)$ su *permutacije*, a $S(X)$ je *simetrična grupa* S_n. Grupa bijekcija općenito nije Abelova, npr. $f, g \in S(\mathbb{R}), f(x) = 2x, g(x) = x + 1, (f \circ g)(x) = 2x + 2, (g \circ f)(x) = 2x + 1$.

Definicija 2. *Neka je G grupa i $H \subseteq G$. H je* podgrupa *od G (s oznakom $H \leq G$)ako je H grupa s obzirom na restrikciju binarne operacije s G na H.*

Primjer 3. Svaka grupa kao podgrupu sadrži *trivijalnu* grupu $\{e\}$ i samu sebe. Ako je $H \leq G$ i k tome vrijedi $\{e\} \neq H \neq G$, tada je H *prava* podgrupa od G, s oznakom $H < G$.

Primjer 4. $\mathbb{R}$ je prava podgrupa od $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}^*$ je prava podgrupa od $\mathbb{C}^*$. Parne permutacije konačnog skupa (s oznakom A_n) čine pravu podgrupu simetrične grupe. Zovemo je *alternirajuća* grupa.

Lema 1. *Neka je G grupa i $\emptyset \neq H \subseteq G$. Vrijedi $H \leq G$ akko $gh^{-1} \in H$ za sve $g, h \in H$.*

Dokaz. Ako $H \leq G$, tada je H grupa pa $gh^{-1} \in H$ za sve $g, h \in H$. Obratno, neka vrijedi $gh^{-1} \in H$ za sve $g, h \in H$. H je neprazan, dakle postoji $h \in H$. Tada je i $e = hh^{-1} \in H$ (dakle H sadrži neutral). Kako su e i $h \in H$, slijedi da je i $h^{-1} = eh^{-1} \in H$ (za proizvoljni element H sadrži i njegov inverz). Tada za proizvoljne $g, h \in H$ vrijedi $gh = g(h^{-1})^{-1} \in H$, pa je restrikcija binarne operacije zaista zatvorena na H. Asocijativnost se nasljeđuje iz G. □

Propozicija 2.1.1. *Neka je $H \leq G$. Definiramo relaciju $\sim$ na G tako da za $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $g_1 \sim g_2$ točno onda kada postoji $h \in H$ takvo da $g_1 = g_2 h$. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Refleksivnost slijedi iz činjenice da svaka podgrupa od G sadrži neutralni element. $\forall g \in G,\ g = ge$. Iz $g_1 = g_2 h$ slijedi $g_1 h^{-1} = g_2$, što dokazuje simetričnost. $g_1 = g_2 h$ i $g_2 = g_3 h'$ povlače $g_1 = g_3 h' h$, pa vrijedi i tranzitivnost. □

Definicija 3. *Klasu ekvivalencije elementa g označavamo s* $[g]$. *Kvocijentni skup od G s obzirom na* $\sim$, *odnosno* $\{[g] : g \in G\}$ *oznacavamo s* G/H. *Definiramo* kanonsku projekciju $p : G \to G/H$, $p(g) = [g]$. *Kardinalni broj kvocijentnog skupa zovemo* indeksom od H u G *s oznakom* $[G : H] =| G/H |$.

Primjedba 2. Za svaki $g \in G$ vrijedi $[g] = \{x \in G \mid g^{-1}x = h \in H\} = \{x \in G \mid x = gh; h \in H\} = \{gh \mid h \in H\} = gH$. Takve skupove zovemo *lijevim susjednim klasama* od H u G.

Definicija 4. *Neka su G i H grupe. Funkcija* $f : G \to H$ *je* homomorfizam *grupa ako vrijedi:*

$$f(gh) = f(g)f(h) \text{ za sve } g, h \in G$$

Monomorfizam *je injektivni homomorfizam.* Epimorfizam *je surjektivni homomorfizam.* Izomorfizam *je bijektivni homomorfizam. U posljednjem slučaju kažemo da su grupe G i H izomorfne i to označavamo s* $G \cong H$. Endomorfizam *grupe G je homomorfizam* $f : G \to G$. Automorfizam *grupe G je izomorfizam* $f : G \to G$.

Primjer 5. Neka je G grupa. $\mathrm{Aut}\, G$, skup automorfizama na G, je grupa s obzirom na komponiranje funkcija i vrijedi $\mathrm{Aut}\, G \leq S(G)$

Definicija 5. *Neka je* $f : G \to H$ *homomorfizam grupa.* Jezgra *od f je skup* $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e \in H\}$. Slika *od f je skup* $\mathrm{Im}\, f = \{f(g) \mid g \in G\}$.

Lema 2. *Neka je* $f : G \to H$ *homomorfizam grupa. f je monomorfizam akko* $\ker f = \{e_G\}$

Dokaz. Ako je f monomorfizam i $g \in \ker f$, tada $f(g) = e_H = f(e_G)$, pa $g = e_G$. Obratno, ako je $\ker f = \{e_G\}$ i $f(g) = f(h)$, onda $e_H = f(g)f(h)^{-1} = f(gh^{-1})$, pa $gh^{-1} \in \ker f = \{e_G\}$, pa $gh^{-1} = e_g$ i konačno $g = h$, pa je f monomorfizam. □

Propozicija 2.1.2. *Neka je* $f : G \to H$ *homomorfizam grupa,* $A \leq G$ *i* $B \leq H$ *proizvoljne. Vrijedi*

1. $f^{-1}(B) \leq G$. *Posebno,* $\ker f \leq G$.
2. $f(A) \leq H$. *Posebno,* $\mathrm{Im}\, f \leq H$.

Dokaz.

1. Neka su $g, h \in f^{-1}(B)$ proizvoljni. Tada postoje $a, b \in B$ takvi da $f(g) = a, f(h) = b$. Sad, $f(gh^{-1}) = f(g)f(h)^{-1} = ab^{-1}$, što je sadržano u B pošto je ona grupa. To znači da je $gh^{-1} \in f^{-1}(B)$, pa $f^{-1}(B) \leq G$. Posebno, $\ker f = f^{-1}(\{e\})$.
2. Neka su $a, b \in f(A)$ proizvoljni. Tada postoje $g, h \in A$ takvi da $f(g) = a, f(h) = b$. Grupa A sadrži gh^{-1}, a $f(A) \ni f(gh^{-1}) = f(g)f(h)^{-1} = ab^{-1}$. Slijedi $f(A) \leq H$. Posebno, $\mathrm{Im}\, f = f(G)$.

□

Definicija 6. *Neka je $H \leq G$. H je* normalna *podgrupa od G ako vrijedi $gH = Hg$, za svaki $g \in G$. To označavamo s $H \trianglelefteq G$.*

Primjer 6. Za proizvoljni G vrijedi $\{e\} \trianglelefteq G$. Za Abelovu grupu G iz $H \leq G$ slijedi $H \trianglelefteq G$.

Definicija 7. Centar *grupe G je skup $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx,$ za sve $g \in G\}$.*

Propozicija 2.1.3. *$Z(G)$ je Abelova podgrupa od G. $Z(G) \trianglelefteq G$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in Z(G), g \in G$ proizvoljni. Tada $xy^{-1}g = xy^{-1}gyy^{-1} = xy^{-1}ygy^{-1} = xgy^{-1} = gxy^{-1}$, pa imamo $Z(G) \leq G$. Elementi centra komutiraju sa svim elementima grupe, pa komutiraju i sa svim elementima centra. $gZ(G) = \{gx \mid xg = gx,$ za sve $g \in G\} = \{xg \mid xg = gx,$ za sve $g \in G\} = Z(G)g$. Slijedi $Z(G) \trianglelefteq G$. □

Primjer 7. Primijetimo da je općenito "biti centar od G" bitno jači zahtjev od "biti normalna podgrupa od G". Prvo znači komutativnost po elementima, a drugo skupovnu komutativnost. Nadalje, centar je nužno komutativna grupa, dočim normalna podgrupa ne mora biti.

Definicija 8. *Neka je G grupa i $S \subseteq G$.* Centralizator *skupa S je skup svih grupovnih elemenata G koji komutiraju sa svim elementima zadanog skupa S: $Z(S) = \{g \in G \mid gs = sg,$ za svaki $s \in S\}$. Centralizator jednočlanog skupa označavamo $Z(g) = Z(\{g\})$, za $g \in G$.* Normalizator *skupa S je skup svih grupovnih elemenata G koji komutiraju sa zadanim skupom S: $N(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\}$.*

Primjedba 3. Notacija prati prethodnu definiciju centra: centralizator grupe upravo je centar grupe. Opet, točkovno komutiranje jače je od skupovnog, pa $Z(S) \subseteq N(S)$. Oba skupa su podgrupe od G. Štoviše, vrijedi $Z(S) \trianglelefteq N(S)$.

Propozicija 2.1.4. *Neka vrijedi $H \trianglelefteq G$. Definiramo binarnu operaciju na G/H s $(aH)(bH) = abH$. G/H je grupa.*

Dokaz. Binarna operacija je dobro definirana, jer za $a' \in aH$ i $b' \in bH$ vrijedi $a'b' = ahbh' =$ [zbog $H \trianglelefteq G$] $= abhh'$, pa $a'b'H = abH$. Operacija je asocijativna jer $(aHbH)cH = abHcH = abcH = aHbcH = aH(bHcH)$. Neutral je upravo podgrupa H: $(aH)H = (aH)(eH) = aeH = aH$ i, s druge strane, $H(aH) = (eH)(aH) = eaH = aH$. Inverz od aH je $a^{-1}H$, jer $(aH)(a^{-1}H) = aa^{-1}H = H$ i $(a^{-1}H)(aH) = a^{-1}aH = H$ □

Propozicija 2.1.5. *Neka je $f : G \to H$ homomorfizam grupa. Vrijedi:*

1. $\ker f \trianglelefteq G$.

2. *Kanonska projekcija $p : G \to G/N$ je epimorfizam s jezgrom N.*

Dokaz.

1. Neka su $x \in \ker f$ i $g \in G$ proizvoljni. Vrijedi $f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} = e$, pa $gxg^{-1} \in \ker f$. Slijedi da je $g(\ker f)g^{-1} \subseteq \ker f$, pa $g(\ker f)g^{-1} \subseteq \ker f \subseteq g^{-1}(\ker f)g$. Kako argument vrijedi za svaki $g \in G$, slijedi $g(\ker f)g^{-1} = \ker f$, pa $\ker f \trianglelefteq G$.

2. $p : G \to G/N$ je surjektivno jer za svaki $gN \in G/N$ vrijedi $p(g) = gN$. Nadalje, $p(gh) = ghN = (gN)(hN) = p(g)p(h)$, pa je p homomorfizam. Naposljetku, $\ker p = \{x \in G \mid p(x) = N\} = \{x \in G \mid xN = N\} = \{x \in G \mid x \in N\} = N$

□

Teorem 1 (Prvi teorem o izomorfizmu)**.** *Ako je $f : G \to H$ homomorfizam grupa, tada $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$*

Dokaz. $f : G \to \operatorname{Im} f$ je epimorfizam. Označimo $N = \ker f$ i definirajmo $\bar{f} : G/N \to \operatorname{Im} f$ s $\bar{f}(gN) = f(g)$, za sve $g \in G$. Funkcija $\bar{f}$ je dobro definirana: uzmemo li $h \in gN$, tj. $h = gn, n \in N$, dobijemo $f(h) = f(gn) = f(g)f(n) = f(n)e = f(g)$. Nadalje, $\bar{f}$ je homomorfizam jer $\bar{f}(gNhN) = \bar{f}ghN = f(gh) = f(g)f(h) = \bar{f}(gN)\bar{f}(hN)$. $\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$, pa je $\bar{f}$ epimorfizam. Promotrimo jezgru dobivenog epimorfizma: $xN \in \ker \bar{f} \iff f(x) = e \iff x \in N \iff \ker \bar{f} = N$. Pošto je jezgra trivijalna, $\bar{f}$ je i monomorfizam. Slijedi da je $\bar{f} : G/\ker f \to \operatorname{Im} f$ izomorfizam. □

Grupe matrica

Interes sužavamo na kvadratne matrice oblika $M(n, F)$, gdje je $n \in N$, a F polje. Najzanimljivije su nam realne i kompleksne matrice, tj. $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Binarna operacija je množenje matrica, a kao okvir nam služi skup invertibilnih matrica. Neutralni element pri množenju je matrica s jedinicama na dijagonali koju standardno označavamo s I. Skup $M(n, F)$ čini monoid s obzirom na množenje. Uzmemo li skup svih invertibilnih elemenata proizvoljnog monoida, dobivamo grupu.

Definicija 9. $GL(n, F) = \{g \in M(n, F) \mid \exists g^{-1}\}$

Primjedba 4. Postojanje g^{-1} ekvivalentno je s $\det g \neq 0$. Elemente gornjeg skupa zovemo *invertibilnim* ili *regularnim* matricama. Matrice iz $M(n, F) \backslash GL(n, F)$ zovemo *singularnim* matricama. Gornji skup zovemo *generalnom linearnom* grupom. Sljedeća propozicija opravdava to ime.

Propozicija 2.1.6. *Za proizvoljni $n \in N$ skup $GL(n, F)$ je grupa s obzirom na množenje matrica.*

Dokaz. Za $g, h \in GL(n, F)$, gh ima inverz i vrijedi $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$. Lako se vidi da je $ghh^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}hg = I$, pa je $GL(n, F)$ zatvoren na množenje. Asocijativnost množenja se nasljeđuje iz $M(n, F)$. $I^{-1} = I$, pa $GL(n, F)$ sadrži neutral. Za svaki $g \in GL(n, F)$ postoji g^{-1} koji je također invertibilan, jer $(g^{-1})^{-1} = g$, pa $g^{-1} \in GL(n, F)$. □

Primjedba 5. Prisjetimo je korisne karakterizacije pomoću determinante: Za $g \in M(n, F)$ vrijedi $g \in GL(n, F)$ akko $\det G \neq 0$

Definicija 10. $SL(n, F) = \{g \in GL(n, F) \mid \det g = 1\}$

Lema 3. *Determinanta* $\det : GL(n, F) \to F^*$ *je homomorfizam grupa.*

Dokaz. $\det(gh) = \det g \det h$, za svaki $g, h \in GL(n, F)$. □

Korolar 1. $SL(n, F) \trianglelefteq GL(n, F)$.

Dokaz. $SL(n, F)$ je jezgra homomorfizma $\det : GL(n, F) \to F^*$ □

Primjedba 6. $SL(n, F)$ zovemo *specijalnom linearnom* grupom.

Primjer 8. $\{g \in GL(n, F) \mid \det g = \pm 1\} \leq GL(n, F)$, jer je praslika od $\{-1, 1\} \leq F$. Analogno, $\{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det g \in \{1, -1, i, -i\}\} \leq GL(n, \mathbb{C})$, $\{g \in GL(n, \mathbb{C}) : \mid \det g \mid = 1\} \leq GL(n, \mathbb{C})$. Kod realnih matrica imamo $\{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det g > 0\} \leq GL(n, F)$. Pošto vrijedi $\det(g^{-1}hg) = \det h$, sve navedene podgrupe su normalne

Primjer 9. Regularne gornjotrokutaste matrice čine podgrupu od $GL(n, F)$, kao i regularne donjotrokutaste, regularne dijagonalne i regularne skalarne (oblika λI, $\lambda \in F^*$).

Primjer 10. $O(n, F) = \{g \in GL(n, F) \mid gg^\top = g^\top g = I\}$ zovemo *ortogonalnom* grupom. $SO(n, F) = \{g \in O(n, F) \mid \det g = 1\}$ zovemo *specijalnom ortogonalnom* grupom. $U(n, \mathbb{C}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid gg^* = g^*g = I\}$ zovemo *unitarnom* grupom. $SU(n, \mathbb{C}) = \{g \in U(n, \mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$ zovemo *specijalnom unitarnom* grupom.

Propozicija 2.1.7. $GL(n, F)/SL(n, F) \cong F^*$

Dokaz. $\det : GL(n, F) \to F^*$ je epimorfizam s jezgrom $SL(n, F)$. Rezultat slijedi po prvom teoremu o izomorfizmu. □

Primjer 11. Centar generalne linearne grupe čine skalarne regularne matrice, tj. $Z(GL(n, F)) = \{k \cdot I \mid k \in F^*\}$. Centar specijalne linearne grupe čine skalarne matrice s jediničnom determinantom. $Z(SL(n, F)) = \{k \cdot I \mid \det(k \cdot I) = 1\} = \{k \cdot I \mid k \in F, k^n = 1\}$.

$GL(2,\mathbb{R})$ i neke istaknute podgrupe

Primjedba 7. Među svim grupama oblika $SL(n,\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, ovdje su nam od najvećeg interesa one drugog stupnja. To je nagovještaj dosega naših geometrijskih razmatranja: ograničavamo se na prostore dimenzije najviše dva.

Primjedba 8. Neka je $SL(2,\mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Propozicija 2.1.8. *Neka su $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$ definiramo $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\varphi_{a,b}(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Skup svih takvih funkcija $A = \{\varphi_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}\}$ je grupa s obzirom na komponiranje funkcija.

Dokaz. $\varphi_{a',b'} \circ \varphi_{a,b}(x) = \varphi_{a',b'}(ax+b) = a'ax+a'b+b' \in A$, pošto je $a'a > 0$. Asocijativnost slijedi iz asocijativnosti komponiranja funkcija. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\varphi_{1,0}(x) = x$, pa je $\varphi_{1,0} \equiv id$ neutralni element. Inverz od $\varphi_{a,b}$ je $\varphi_{1/a,-b/a}$ jer $\varphi_{a,b}(x/a - b/a) = x$ i $\varphi_{1/a,-b/a}(ax + b) = x$. □

Definicija 11. *Gornju grupu zovemo* afinom grupom *realnog pravca s oznakom $AGL(1,\mathbb{R})$.*

Primjedba 9. Uočimo da smo u definiciji istaknuli uvjet $a > 0$. Općenito, puna afina grupa definira se uvjetom $a \neq 0$. Imajući to na umu, nastavljamo s uvedenom terminologijom. $AGL(1,\mathbb{R})$ korisno je okarakterizirati na nekoliko načina. Na primjer, izomorfna je desnoj realnoj poluravnini $A \cong \{(a,b) : a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}\}$ s obzirom na množenje: $(a_1,b_1) * (a_2,b_2) = (a_1 \cdot a_2,\ a_1 \cdot b_2 + b_1)$.

Teorem 2. *Skup $F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R} \right\}$ je podgrupa od $SL(2,\mathbb{R})$ izomorfna s $AGL(1,\mathbb{R})$.*

Dokaz. Skupovna inkluzija vrijedi jer $\det\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1$. Nadalje, imamo $\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{bmatrix} 1 & -d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \begin{bmatrix} a & -ad+bc \\ 0 & c \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a/c & (-ad+bc)/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in F$, pa je $F \leq SL(2,\mathbb{R})$. Neka je $\phi : AGL(1,\mathbb{R}) \to F$ preslikavanje takvo da vrijedi $\phi(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ϕ je očito bijekcija i vrijedi $\phi((a,b)*(c,d)) = \phi(ac, ad+b) = \frac{1}{\sqrt{ac}} \begin{bmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(a,b) \cdot \phi(c,d)$. Slijedi $AGL(1,\mathbb{R}) \cong F$. □

Primjedba 10. Ovim izomorfizmom uložili smo afinu grupu u specijalnu linearnu i nadalje je tretiramo kao njenu podgrupu.

Propozicija 2.1.9. *Označimo s $\tilde{F}$ skup svih donjetrokutastih matrica u $SL(2,\mathbb{R})$. Vrijedi $\tilde{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1/a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, c \in \mathbb{R} \right\}$ je podgrupa od $SL(2,\mathbb{R})$.*

Dokaz. $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 1/a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 1/a_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 1/a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_2 & 0 \\ -c_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1/a_2 & 0 \\ c_1/a_2 - c_2/a_1 & a_2/a_1 \end{bmatrix} \in \tilde{F}.$ □

Lema 4. *Neka su $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} : x > 0 \right\}$; $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$ i $K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. A, N i K su podgrupe od $SL(2,\mathbb{R})$.*

Dokaz. Skupovne inkluzije su očite, pošto su determinante svih ovih matrica 1. Potom, za $a_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1/x_1 \end{bmatrix}$ i $a_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1/x_2 \end{bmatrix}$ imamo $a_1 a_2^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1/x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{x_1} \end{bmatrix} \in A$. Slično, za $n_1 = \begin{bmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $n_2 = \begin{bmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ imamo $n_1 n_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -y_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in N$. Za $k_1 = \begin{bmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 \\ -\sin t_1 & \cos t_1 \end{bmatrix}$ i $k_2 = \begin{bmatrix} \cos t_2 & \sin t_2 \\ -\sin t_2 & cost_2 \end{bmatrix}$ imamo $k_1 k_2^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 \\ -\sin t_1 & \cos t_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t_2 & -\sin t_2 \\ \sin t_2 & \cos t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 & -\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2 \\ \cos t_1 \sin t_2 - \sin t_1 \cos t_2 & \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t_1 - t_2) & \sin(t_1 - t_2) \\ -\sin(t_1 - t_2) & \cos(t_1 - t_2) \end{bmatrix} \in K$. □

Primjedba 11. Uočimo nekoliko stvari. Prvo, iz raspisa dokaza očito je da je K upravo $SO(2,\mathbb{R})$. Drugo, vrijedi AN=NA pošto

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^2 y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}$$

Treće, to implicira da je $AN = NA$ grupa, jer za $g = a_1 n_1$, $h = a_2 n_2$ imamo $gh^{-1} = a_1 n_1 n_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 a_2^{-1} n_3 \in AN$. Četvrta primjedba je notacijska - A je Abelova grupa, N je nilpotentna, a K kompaktna. Definicije kompaktne i nilpotentne grupe nadilaze potrebe ovog rada.

Teorem 3 (ANK dekompozicija)**.** *$SL(2,\mathbb{R}) = ANK$, tj. za svaki $g \in SL(2,\mathbb{R})$ postoje jedinstveni $a' \in A, n' \in N, k' \in K$ takvi da*

$$g = a' n' k' \tag{2.2}$$

Dokaz. Neka je $SL(2, \mathbb{R} \ni g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ proizvoljna. Stavimo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos t - xy\sin t & x\sin t + xy\cos t \\ -\frac{1}{x}\sin t & \frac{1}{x}\cos t \end{bmatrix}$$

Kvadrirajući odgovarajuće iznose za c i d i zbrajajući ih dobijemo $c^2 + d^2 = \frac{1}{x^2}$, pa zbog $x > 0 \Rightarrow x = (c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dalje se dobije $\cos t = d(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$ i $\sin t = -c(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$. Ako pak kvadriramo unose za a i b pa zbrojimo, dobijemo $a^2 + b^2 = x^2 + x^2y^2$ iz čega slijedi $y^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)-1 = a^2c^2+b^2d^2+(a^2d^2+b^2c^2)-1 = a^2c^2+b^2d^2+(ad-bc)^2+2abcd-1 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = (ac + bd)^2$. Uvrštavanjem u početni sustav provjeri se da od dva moguća rješenja $y = \pm(ac + bd)$ preživi samo $y = ac + bd$. □

Primjedba 12. Eksplicirajmo dekompoziciju. Za sve $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ vrijedi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2 + d^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ac + bd \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{-c}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} \end{bmatrix}.$$

Uzmimo sada proizvoljni $g \in G$ i prikažimo ga u obliku $g = uk$, pri čemu $u \in AN, k \in K$. Tada $g^{-1} = k^{-1}u^{-1} \in KAN$. Budući da skup invertiramo po svim elementima grupe, slijedi $G = ANK = KAN$, tako da se često govori i o KAN dekompoziciji. Valja pripaziti - odgovarajući a', n' i k' elementi neće se općenito podudarati u oba slučaja. Obje dekompozicije poznate su i pod imenom *Iwasawina* dekompozicija.

2.2 Djelovanje grupa

Definicija 12. *Neka je G grupa, a X neprazni skup. Grupa G djeluje na skup X ako postoji funkcija $G \times X \to X : (g, x) \mapsto gx$ za koju vrijedi*

1. $ex = x, \quad \forall x \in X$

2. $g(fx) = (gf)x, \quad \forall g, f \in G, x \in X$

Takvu funkciju zovemo djelovanjem G na X. Djelovanje je vjerno *ako je e jedini element u G koji zadovoljava prvo svojstvo.*

Primjer 12. Pogledajmo neka djelovanja grupe G na samu sebe.

1. Lijevi pomak $L(g) : x \mapsto gx$

2. Desni pomak $R(g) : x \mapsto xg^{-1}$

3. Konjugiranje $C(g) : x \mapsto gxg^{-1}$

$L(g)$ i $R(g)$ su vjerna djelovanja, dok $C(g)$ općenito nije. Uvjet $gxg^{-1} = x$ za $\forall x \in G$ ekvivalentan je s $gx = xg$ za $\forall x \in G$. Drugim riječima $C(g)$ bit će vjerno djelovanje akko je centar od G trivijalan tj. $Z(G) = \{e\}$.

Primjer 13. Neka je G grupa i $X = \{H \mid H \leq G\}$ skup svih podgrupa od G. Za svaki $g \in G$ preslikavanje $H \mapsto gHg^{-1}$ je funkcija $X \to X$. Naime $gHg^{-1} \leq G$ jer ako uzmemo $x' = gh'g^{-1},\ h' \in H$ i $x = ghg^{-1},\ h \in H$, slijedi da je $x'x^{-1} = gh'g^{-1}gh^{-1}g^{-1} = gh'h^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$. Dalje se lagano dobije da je konjugiranje podgrupa od G djelovanje na skupu svih podgrupa X. Uvjet $gHg^{-1} = H$ za svaki $H \in X$ ekvivalentan je uvjetu $gH = Hg$ za svaki $H \in X$. Drugim riječima, ovo djelovanje je vjerno akko je presjek normalizatora svih podgrupa trivijalan.

Definicija 13. *Neka grupa G djeluje na skup X i neka je $x \in X$.* Orbita *elementa x je skup $x^G = \{\, gx \mid g \in G\,\} \subseteq X$.* Stabilizator *elementa x je skup $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$.*

Primjedba 13. Na skupu X definiramo relaciju $xOy \iff y \in x^G$. Relacija je refleksivna jer $x = ex \in G_x$, simetrična jer $y = gx$ povlači $x = g^{-1}y$ i tranzitivna jer $y = gx$ i $z = hy$ povlače $z = hgx$. O je dakle relacija ekvivalencije, a klase ekvivalencije su upravo orbite. Slijedi da orbite čine particiju skupa X.

Definicija 14. *Grupa G djeluje* tranzitivno *na skup X ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji $g \in G$ takvo da $y = gx$. Tada kažemo da je X* homogeni *prostor s obzirom na G, ili kraće, G-homogeni prostor.*

Primjer 14. Orbita proizvoljnog elementa $x \in G$ s obzirom na lijevi i desni pomak je cijela grupa G. Stabilizator od x je trivijalan. Kod točkovnog konjugiranja $x \mapsto gxg^{-1}$, orbitu $x^G = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ zovemo *klasom konjugacije* od x. Stabilizator $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ podudara se s centralizatorom $Z(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$. Kod grupovnog konjugiranja $H \mapsto gHg^{-1}$, imamo orbitu $H^G = \{gHg^{-1} \mid H \in G\}$. Stabilizator $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ podudara se s normalizatorom $N(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$

Primjer 15. Neka su $A = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} : x > 0\right\}, N = \left\{\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\}$ podgrupe od $SL(2,\mathbb{R})$ iz ANK dekompozicije, i neka je $A' = \left\{\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}, N' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\}$. Uočimo prvo da je $A = \left\{\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$. Sada uzmimo $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$, pa je $A' \leq SL(2,\mathbb{R})$, te su A i A' u istoj klasi konjugacije. Isto tako,

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{bmatrix}$, pa je $N' \leq SL(2, \mathbb{R})$, te su N i N' u istoj klasi konjugacije.

Primjer 16. Neka je $G \leq S(X)$ podgrupa grupe svih bijekcija skupa X. Grupa G na prirodan način djeluje na X: za bijekciju $g : X \to X$ i $x \in X$ definiramo $gx = g(x)$. Djelovanje je vjerno jer je identiteta (neutralni element u G) jedina bijekcija koja svaki $x \in X$ preslikava u samoga sebe.

Propozicija 2.2.1. *Neka grupa G djeluje na skup X. Tada postoji homomorfizam grupa $\Phi : G \to S(X)$ takav da je $\Phi(g)(x) = gx$ za sve $g \in G$ i $x \in X$. Djelovanje je vjerno akko je Φ monomorfizam.*

Dokaz. Za proizvoljni $g \in G$ definiramo funkciju $\Phi(g) : X \to X$ s $\Phi(g)(x) = gx$, za sve $x \in X$. $\Phi(g)$ je bijekcija s inverzom $\Phi(g^{-1})$:

$$[\Phi(g) \circ \Phi(g^{-1})](x) = \Phi(g)[\Phi(g^{-1})(x)] = gg^{-1}x = x, \quad \forall x \in X$$

Analogno vidimo da je $\Phi(g^{-1})$ i lijevi inverz od $\Phi(g)$. Pokažimo sad da je $\Phi : G \to S(X)$ homomorfizam grupa. Za proizvoljne $g, h \in G$ vrijedi:

$$\Phi(gh)(x) = (gh)x = g(hx) = \Phi(g)[\Phi(h)(x)] = [\Phi(g) \circ \Phi(h)](x), \quad \forall x \in X$$

Ovaj homomorfizam je injektivan akko ima trivijalnu jezgru, tj. $G \ni e \mapsto id \in S(X)$ je jedini element koji inducira identitetu, što je ekvivalentno vjernosti djelovanja. □

Primjedba 14. $\ker \Phi$ zovemo *jezgrom djelovanja* G na X. Vrijedi $\ker \Phi = \{g \in G \mid \Phi(g) = id_X\} = \{g \in G \mid gx = x, \ \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} \{g \in G \mid gx = x\} = \bigcap_{x \in X} G_x$. Kad je jezgra trivijalna, Φ ulaže grupu G u grupu $S(X)$. Na taj način primjer 16 predstavlja paradigmu vjernih djelovanja.

Primjedba 15. Sljedeća propozicija pokazuje kako djelovanje grupe G na skupu X inducira podgrupe od G. Dobijamo i jači rezultat: djelovanje grupe G na homogenom prostoru X inducira klase ekvivalencije konjugiranih podgrupa od G.

Propozicija 2.2.2. *Za svaki $x \in X$ stabilizator G_x je podgrupa od G. Nadalje, za proizvoljne $x, y \in X$ takve da xOy stabilizatori su međusobno konjugirani: postoji $g \in G$ takva da $G_x = g^{-1}G_y g$.*

Dokaz. Za $g, h \in G_x$ vrijedi $gh^{-1}x = gh^{-1}hx = gx = x$, pa $gh^{-1} \in G_x$, za svaki $x \in X$. Uzmimo proizvoljni $h \in G_x$. Kako su x i y u istoj orbiti, postoji $g \in G$ t.d. $y = gx$. Stabilizator G_y sadrži ghg^{-1}: $ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}g)x = g(hx) = gx = y$. Ekvivalentno, $h \in g^{-1}G_y g$, pa imamo $G_x \subseteq g^{-1}G_y g$. Obratno, ako je h oblika $g^{-1}fg$, gdje $f \in G_y$, tada je $h \in G_x$: $hx = g^{-1}fg(x) = g^{-1}f(gx) = g^{-1}(fy) = g^{-1}y = x$. Slijedi $g^{-1}G_y g \subseteq G_x$, pa $g^{-1}G_y g = G_x$. □

Djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$

Definicija 15. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da $ad \neq bc$. Preslikavanje dano s*

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{-d/c\} \tag{2.3}$$

zovemo Möbiusovom transformacijom *realnog pravca.*

Primjedba 16. Preslikavanje je poznato i kao *linearna razlomljena* transformacija realnog pravca. Naziv je neprecizan, pošto transformacija za $c \neq 0$ nije definirana u $x = -d/c$. Ipak ga koristimo kako bismo razlikovali transformacije od onih domene $\mathbb{C} \backslash \{-d/c\}$. Razmotrimo slučaj $ad = bc$, Ako imamo $c \neq 0$:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{c(ax+b)+ad-ad}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)-(ad-bc)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

čime se (2.4) sažima u konstantno preslikavanje. Ako pak $c = 0$, tada je $a = 0$ (izraz se svodi na $\frac{b}{d}$) ili $d = 0$, pa dobijemo $\dfrac{ax+b}{0}$. Znači da je svako tako dobiveno preslikavanje ili konstatno (ovdje uključujem i $x \mapsto \infty$) ili pak, u slučaju neodređenog izraza $\frac{0}{0}$, naprosto nije dobro definirano. Sve takve slučajeve smatramo podjednako nezanimljivima i odsad razmatramo samo slučaj $ad \neq bc$.

Definicija 16. *Neka je $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pri čemu vrijede sljedeće aritmetičke konvencije:*

$$\frac{1}{0} = \infty; \quad \frac{1}{\infty} = 0; \quad x \cdot \infty = \infty, x \neq 0; \quad x + \infty = \infty$$

$\dot{R}$ zovemo realnim projektivnim pravcem.

Primjedba 17. Möbiusove transformacije možemo proširiti na $\dot{\mathbb{R}} \to \dot{\mathbb{R}}$ ako za $c \neq 0$ definiramo $\frac{-d}{c} \mapsto \infty$ i $\infty \mapsto \frac{a}{c}$, a za $c = 0$ $\infty \mapsto \infty$.

Propozicija 2.2.3. *$GL(2,\mathbb{R})$ djeluje na $\dot{\mathbb{R}}$ s*

$$g : x \mapsto g \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Dokaz.

1. $e \cdot x = \dfrac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1} = x, \quad \forall x \in \dot{\mathbb{R}}$

2. Neka su $g_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ i $g_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ proizvoljne matrice ne-nul determinante.

$$\begin{aligned} g_2(g_1 x) &= \frac{a_2 \dfrac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + d_2} = \left[\text{proširimo razlomak s } c_1 x + d_1\right] \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1)x + a_2 b_1 + b_2 d_1}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)x + b_1 c_2 + d_1 d_2} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_2 c_1 & a_2 b_1 b_2 d_1 \\ a_1 c_2 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix} x \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) x = (g_2 g_1) x \end{aligned}$$

□

Primjedba 18. Djelovanje iz 2.4 nije vjerno: pretpostavimo li da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\frac{ax+b}{cx+d} = x$, dobit ćemo $cx^2 + dx = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, odnosno $b = c = 0$ i $a = d$. Kako smo u $GL(2, \mathbb{R})$, vrijedi $a = d \neq 0$, pa su svi kandidati za $gx = x$ nužno oblika $g \in N = \left\{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}^*\right\}$. Lako se vidi i dovoljnost, naime $gx = \frac{tx+0}{0 \cdot x+t} = x$. Nameće se pitanje postoji li podgrupa od $GL(2, \mathbb{R})$ za koje je djelovanje vjerno i, ako da, koja je "najveća" takva podgrupa.

Primjer 17. $AGL(1, \mathbb{R})$ djeluje na $\mathbb{R}$ s

$$(a, b) : x \mapsto ax + b \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

što se podudara s funkcijskim oblikom afine grupe iz 2.1. To djelovanje je restrikcija Möbiusovog djelovanja (2.4) na $AGL(1, \mathbb{R}) \leq GL(2, \mathbb{R})$: $\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{a}}(ax + b)}{\frac{1}{\sqrt{a}}(0 \cdot x + 1)} = ax + b$. Ovo djelovanje je vjerno: iz $ax + b = x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi $a = 1, b = 0$.

Primjer 18. Pogledajmo djeluje li $SL(2, \mathbb{R})$ vjerno na $\mathbb{R}$ Möbiusovim transformacijama: kao i kod $GL(2, \mathbb{R})$ dobit ćemo $cx^2 + dx = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, odnosno $b = c = 0$ i $a = d$, što uz dodatni uvjet $ad = 1$ daje $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \mapsto x$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} : x \mapsto x$.

Primjer 19. Odredimo orbitu elementa $0 \in \dot{\mathbb{R}}$ s obzirom na djelovanje $G = GL(2, \mathbb{R})$ iz (2.4): $0^G = \left\{\frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} \mid b^2 + d^2 \neq 0\right\} = \left\{\frac{b}{d} \mid b^2 + d^2 \neq 0\right\} = \dot{\mathbb{R}}$. Općenito, X je G-homogeni prostor akko se sastoji od samo jedne orbite, pa izravno dobijemo da je $\dot{\mathbb{R}}$ G-homogen prostor.

Primjer 20. Definirajmo *projektivni kompleksni pravac* $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, gdje vrijedi $\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{1}{\infty} = 0$; $z \cdot \infty = \infty, z \neq 0$; $z + \infty = \infty$. Slijedeći liniju rezoniranja analognu onoj iz primjedbe 17 zaključujemo da $G = SL(2, \mathbb{R})$ djeluje na $\dot{\mathbb{C}}$ Möbiusovim transformacijama. Promotrimo djelovanje i pronađimo orbite elemenata $z = 0, i, -i$:

$$
\begin{aligned}
0^G &= \left\{ \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\} = \left\{ \frac{b}{d} \mid b, d \in \mathbb{R} \right\} = \dot{\mathbb{R}} \\
i^G &= \left[\frac{b + ai}{d + ci} = \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} + i\frac{ad - bc}{d^2 + c^2} = \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} + i\frac{1}{d^2 + c^2} \right] \\
&= \left\{ \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} + i\frac{1}{d^2 + c^2} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\} \\
&= \left[(d, c) \mapsto \frac{1}{d^2 + c^2} \text{ je surjektivno na } \mathbb{R}^+,\ \text{zbog } (d, c) \neq (0, 0) \right] \\
&= \left[(a, b, c, d,) \mapsto \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} \text{ je surjektivno na } \mathbb{R} \right] \\
&= \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+\} \\
(-i)^G &= \left[\frac{b - ai}{d - ci} = \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} - i\frac{ad - bc}{d^2 + c^2} = \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} - i\frac{1}{d^2 + c^2} \right] \\
&= \left\{ \frac{bd + ac}{d^2 + c^2} - i\frac{1}{d^2 + c^2} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\} \\
&= \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^-\}
\end{aligned}
$$

Djelovanje ima tri orbite: realnu projektivnu os i gornju i donju poluravninu.

Primjer 21. Pronađimo stabilizator elementa $x = 0$ s obzirom na djelovanje afine grupe iz (2.5): iz $a \cdot 0 + b = 0$ slijedi $b = 0$, pa je $AGL(1, \mathbb{R})_0 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$, što je izomorfno grupi pozitivnih homotetija s obzirom na ishodište realnog pravca.
Analogno, ako promatramo $x = 0$ i $SL(2, \mathbb{R})$ dobijemo $\frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = 0$ i opet $b = 0$, pa je $SL(2, \mathbb{R})_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1/a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$.
Zanimljivi rezultati dobiju se u slučaju djelovanja $SL(2, \mathbb{R})$ na $\dot{\mathbb{C}}$. Za $x = 0$ rezultat je isti kao u situaciji s realnim pravcem. Za $x = i$ imamo $\frac{ai+b}{ci+d} = i \Rightarrow ai + b = di - c \Rightarrow a = d, b = -c$. Slijedi da je $SL(2, \mathbb{R})_i = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\} = SO(2, \mathbb{R})$, *specijalna ortogonalna grupa* drugog stupnja. Ista grupa je stabilizator za $-i$, jer $\dfrac{-ai + b}{-ci + d} = -i \Rightarrow -ai + b = -di - c \Rightarrow a = d, b = -c$.

2.3 Homogeni prostori i podgrupe

Primjedba 19. U propoziciji 2.2.2 pokazali smo prirodan način kojim djelovanje grupe G na homogeni prostor X inducira podgrupe od X (čak i više - klase konjugiranih podgrupa). Obratno, teorem 4 pokazuje kako $H \leq G$ inducira djelovanje na homogenom prostoru $X = G/H$. Cilj je dokazati da je $X = G/H$ homogeni prostor pod lijevim pomakom $L(g) : g_1 \mapsto g \cdot g_1$. Korisno je pritom parametrizirati X funkcijom $s : X \to G$ koja je desni inverz kanonske projekcije.

Definicija 17. *Neka je $H \leq G$ i $X = G/H$, i neka je $p : G \to X$ kanonska projekcija.* Prerez[1] *projekcije je desni inverz kanonske projekcije, tj. $s : X \to G$*

$$p(s(x)) = x, \quad \forall x \in X$$

Primjedba 20. Prerez postoji, npr. za proizvoljni izbor $g \in G$ istaknimo upravo element g kao predstavnika klase gH i definirajmo $s(gH) = g$. Prerez ne mora biti jedinstven, pošto $s(gH)$ možemo definirati kao bilo koji $h \in gH$.

Lema 5. *Za svaki $g \in G$ postoji $h \in H$ takav da $s(p(g)) = gh$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} x &= s(p(g)) \\ p(x) &= p(s(p(g))) \\ p(x) &= p(g) \\ x &\sim g \end{aligned}$$

□

Primjedba 21. Iz leme slijedi da je $h = g^{-1} \cdot s(p(g))$, pa je h jednoznačno određen s g. Nadalje, možemo dobiti $g = s(p(g))h^{-1}$, pa uz minimalnu modifikaciju oznaka slijedi:

Korolar 2. *Za svaki $g \in G$ postoji jedinstvena dekompozicija $g = s([g]) \cdot h, \quad h \in H$. Element h funkcijski ovisi o g na način $h = r(g) := s([g])^{-1}g$.*

Ideja je pomoću operacije na grupi G inducirati njeno djelovanje na $X = G/H$. Grupovnu operaciju označujem s $*$, a djelovanje na X s $g\cdot$. Djelovanje definiramo tako da dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g*"] & G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[u, "s"] \arrow[r, red, "g\cdot"] & X \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

[1]Engleski *section*

Teorem 4. *$X = G/H$ je $G-$homogeni prostor s obzirom na djelovanje dano s:*

$$g : x \mapsto g \cdot x := p(g * s(x)) \tag{2.7}$$

Dokaz.

1. $g \cdot x$ je dobro definirano u sljedećem smislu: Ako su s_1 i s_2 funkcije za koje vrijedi $p(s_1(x)) = p(s_2(x)) = x$, $\forall x \in X$, tada $p(g * s_1(x)) = p(g * s_2(x))$. Primjetimo da $s_1(x) \sim s_2(x)$, pa $s_1(x) = s_2(x) * h$. Tada vrijedi $g * s_1(x) = g * s_2(x) * h$, odnosno $g * s_1(x) \sim g * s_2(x)$.

2. $g \cdot x$ je djelovanje grupe G na X jer za svaki $x \in X$ vrijedi $e \cdot x = p(e * s(x)) = p(s(x)) = x$ i $f \cdot (g \cdot x) = f \cdot (p(g * s(x))) = p(f * s(p(g * s(x))) = p(f * g * s(x)) = (f * g) \cdot x$

3. Ovo djelovanje je tranzitivno, tj. $(\forall x_1, x_2 \in X)(\exists g \in G)(g \cdot x_1 = x_2)$. Naime, za proizvoljne $x_1, x_2 \in X$ promatrajmo $s(x_1), s(x_2) \in G$. Postoji $g \in G$ t.d. $g * s(x_1) = s(x_2)$. Ako na jednakost djelujemo kanonskom projekcijom dobit ćemo $p(g * s(x_1)) = p(s(x_2))$, pa stoga i $g \cdot x_1 = x_2$.

□

2.4 Inducirano djelovanje $SL(2, \mathbb{R})$

Primjedba 22. Promotrimo situaciju $\tilde{F} \subseteq SL(2, \mathbb{R})$, gdje je $\tilde{F}$ skup svih donjotrokutastih matrica u $SL(2, \mathbb{R})$. Dokazali smo da vrijedi $\tilde{F} \leq SL(2, \mathbb{R})$ pa promatramo pripadni homogeni prostor $X = SL(2, \mathbb{R})/\tilde{F}$.

Propozicija 2.4.1. *Elementi u $X = SL(2, \mathbb{R})/\tilde{F}$ su klase matrica oblika $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : \frac{b}{d} = k \in \mathbb{R}\right\}$ sa jednakom vrijednošću $k = b/d$, za $d \neq 0$, i klasa $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\right\}$, za $d = 0$.*

Dokaz. Neka je $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$. To znači da je $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2a_1 - b_2c_1 & d_2b_1 - b_2d_1 \\ -c_2a_1 + a_2c_1 & -c_2b_1 + a_2d_1 \end{bmatrix} \in \tilde{F}$, što nam daje dva uvjeta:

1. $d_2b_1 - b_2d_1 = 0$, odnosno $b_1d_2 = b_2d_1$.

2. $(d_2a_1 - b_2c_1) \cdot (c_2b_1 + a_2d_1) = 1$. Ako raspišemo drugi uvjet i iskoristimo jednakost iz prvog, dobivamo $-d_2a_1c_2b_1 + b_1b_2c_1c_2 + a_1a_2d_1d_2 - a_2b_2c_1d_1 = -a_1d_1b_2c_2 + b_1b_2c_1c_2 + a_1a_2d_1d_2 - b_1c_1a_2d_2 = a_1d_1(a_2d_2 - b_2c_2) - b_1c_1(a_2d_2 - b_2c_2) = a_1d_1 - b_1c_1 = 1$

Ovo znači da je uvjet $b_1 d_2 = b_2 d_1$ i nužan i dovoljan za $g_1 \sim g_2, g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{R})$. Razlikujemo dva slučaja:

a) Ako $d_1 \neq 0$, onda mora biti i $d_2 \neq 0$. Jasno je da su sve $SL(2, \mathbb{R})$ matrice sa istim b/d u istoj klasi ekvivalencije.

b) Ako $d_1 = 0$, onda slijedi $b_1 = 0$ ili $d_2 = 0$. No $b_1 = 0$ otpada, jer bi tada g_1 bila singularna. Stoga $SL(2, \mathbb{R})$ matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix}$ sačinjavaju dodatnu klasu ekvivalencije.

□

Lema 6. *Definirajmo funkciju* $f : X \to \dot{R}$ *s*

$$f : \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : \frac{b}{d} = k \in \mathbb{R} \right\} \mapsto \frac{b}{d}, \ \textit{za } d \neq 0;$$

$$f : \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \mapsto \infty, \ \textit{za } d = 0.$$

Ona je bijekcija s inverzom $f^{-1} : \dot{\mathbb{R}} \to X$

$$f^{-1}(k) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : \frac{b}{d} = k \right\}, k \in \mathbb{R};$$

$$f^{-1}(\infty) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dokaz. Funkcije su, prema prethodnoj propoziciji, dobro definirane. Preostaje provjeriti surjektivnost od f: neka je $k \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada se klasa elementa $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ preslikava u k. Inverznost f i f^{-1} očita je iz definicije. □

Primjedba 23. Bijekcijom f poistovjećujemo homogeni prostor $X = G/\tilde{F}$ s $\dot{\mathbb{R}}$, te projekciju p s $f \circ p$ (kompozicija bijekcije i surjekcije je surjekcija). Sekciju s izjednačavamo sa $s \circ f^{-1}$. Zaista, $(f \circ p)[(s \circ f^{-1})(x)] = f \circ (p \circ s)(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Takva parametrizacija uvelike nam olakšava izvod djelovanja grupe.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, bend right, "f \circ p"'] & X \arrow[d, leftrightarrow, "f"] \\ & \dot{\mathbb{R}} \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Kao očiti izbor kanonske projekcije uzmimo $p : SL(2, \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$

$$p : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{b}{d}, \text{ za } d \neq 0;$$
$$p : \begin{bmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix} \mapsto \infty.$$

Lema 7. *Funkcija* $s : \dot{\mathbb{R}} \to SL(2, \mathbb{R})$*:*

$$k \mapsto \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R};$$
$$\infty \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je prerez od p.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada $p(s(x)) = p\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = x$. $p(s(\infty)) = p\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1/0 = \infty$ □

Primjedba 24. Prema postupku iz Korolara 2, za proizvoljni $SL(2, \mathbb{R}) \ni g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, d \neq 0$ imamo $r(g) = s(p(g))^{-1} \cdot g = s(b/d)^{-1} \cdot g = \begin{bmatrix} 1 & -b/d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-bc)/d & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in \tilde{F}$. Zato imamo dekompoziciju oblika $g = s(p(g)) \cdot r(g)$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/d & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Korolar 3. *Pripadno djelovanje* $SL(2, \mathbb{R})$ *na* $\dot{\mathbb{R}}$ *dano je s:*

$$g : x \mapsto g \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Dokaz. $g \cdot x = p(g * s(x)) = p\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = p\left(\begin{bmatrix} a & ax + b \\ c & cx + d \end{bmatrix}\right) = \frac{ax + b}{cx + d}$ □

Primjedba 25. Potrebno je posebno razmotriti djelovanje $SL(2, \mathbb{R})$ na $x = \infty$:

$$\infty \mapsto g \cdot \infty = p(g * s(\infty)) = p\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = p\left(\begin{bmatrix} a - b & a \\ c - d & c \end{bmatrix}\right) = \frac{a}{c},$$

što je u skladu s proširenjem iz primjedbe 17.

Primjedba 26. Uočimo da djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na projektivni realni pravac Möbiusovim transformacijama prirodno proizlazi iz izbora $\tilde{F} \leq SL(2,\mathbb{R})$.

Primjer 22. Promotrimo sad $K \leq SL(2,\mathbb{R})$, gdje je $K = \left\{\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$. Pri karakterizaciji klasa u $SL(2,\mathbb{R})/K$ poslužit ćemo se ANK dekompozicijom. Kao i u prethodnom slučaju, homogeni prostor ćemo bijekcijom poistovjetiti s jednostavnijom strukturom.

Propozicija 2.4.2. *U svakoj klasi iz $SL(2,\mathbb{R})/K$ postoji do na predznak jedinstvena gornjotrokutasta matrica.*

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Neka su g, h gornjotrokutaste matrice iz iste klase. Tada vrijedi $g = hk$, gdje je $k \in K$, pa dobijemo $h^{-1}g = k$. Gornjotrokutaste $SL(2,\mathbb{R})$ matrice čine grupu, pa je i k gornjotrokutasta matrica. Pošto je $\sin t = 0$, slijedi $\cos t = \pm 1$, pa $k = \pm I$, pa $h = \pm g$. Dokažimo sad egzistenciju. Prisjetimo se da proizvoljnu $g \in SL(2,\mathbb{R})$ postoje jedinstvene $a \in A, n \in N, k \in K$ takve da $g = ank$. Prema tome, g i an su u istoj klasi, tj. prema računu iz teorema 3 za $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ vrijedi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{ac+bd}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ 0 & \sqrt{c^2+d^2} \end{bmatrix}$$

□

Primjedba 27. Jednom kad izaberemo predstavnika klase oblika $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix}$, poistovjećujemo ga s $(a_1b_1, a_1^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. To poistovjećivanje je bijekcija s inverzom $(u, v) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{bmatrix}$.

Propozicija 2.4.3. *Uz identifikaciju $SL(2,\mathbb{R})/K$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ imamo $p : SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to SL(2,\mathbb{R})$ oblika:*

$$p : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mapsto (a_1b_1, a_1^2)$$
$$s : (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dokaz. Neka je $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ proizvoljan. Tada $p(s(u, v)) = p\left(\begin{bmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} \end{bmatrix}\right) = (u, v)$. □

Primjedba 28. Uzmimo proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = g \in G$. Projicirajmo predstavnika njene klase:

$$p : \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{ac+bd}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ 0 & \sqrt{c^2+d^2} \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{1}{c^2+d^2} \right) \tag{2.11}$$

Korolar 4. *Inducirano djelovanje* $SL(2,\mathbb{R})$ *na* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *dano je s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u,v) \mapsto \left(\frac{(au+b)(cu+d)+cav^2}{(cu+d)^2+(cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2+(cv)^2} \right) \tag{2.12}$$

Dokaz. $g{\cdot}(u,v) = p(g{*}s(u,v)) = p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} av & au+b \\ cv & cu+d \end{bmatrix} \right) = [\text{prema } (2.11)] =$

$$\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{v}}av\frac{1}{\sqrt{v}}cv + \frac{1}{\sqrt{v}}(au+b)\frac{1}{\sqrt{v}}(cu+d)}{\frac{1}{v}(cv)^2 + \frac{1}{v}(cu+d)^2}, \frac{1}{\frac{1}{v}(cv)^2 + \frac{1}{v}(cu+d)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{(au+b)(cu+d)+cav^2}{(cu+d)^2+(cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2+(cv)^2} \right).$$ □

Primjedba 29. Uočimo da je rezultat djelovanja također u gornjoj poluravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Uvrštavajući $-v$ umjesto v dobijemo djelovanje u donjoj poluravnini $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$. Dva djelovanja simetrična su s obzirom na apscisu. Prirodno se nameće $\mathbb{C} = \{z = u + iv : u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ i stavimo $z = u + iv$, gdje je $i^2 = -1$, kao okvir u kojem možemo elegantnije sažeti dobivena djelovanja.

Teorem 5. $SL(2,\mathbb{R})$ *djeluje na* $\dot{\mathbb{C}}$ *s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = u + iv. \tag{2.13}$$

Dokaz. Za $z \in \dot{\mathbb{R}}$ izravno se vidi da dobivamo upravo djelovanje na realnom projektivnom pravcu opisano u (2.10). Zbog simetričnosti spram apscise, dovoljno je vidjeti da se restrikcija djelovanja na gornju poluravninu poklapa s djelovanjem iz prethodnog korolara.

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{au+b+iav}{cu+d+icv} = \frac{au+b+iav}{cu+d+icv} \cdot \frac{cu+d-icv}{cu+d-icv} \\
&= \frac{(au+b)(cu+d) - i^2cav^2 + i(avcu + avd - cvau - cvb)}{(cu+d)^2+(cv)^2} \\
&= \frac{(au+b)(cu+d) + cav^2 + iv(ad-cb)}{(cu+d)^2+(cv)^2} \\
&= \frac{(au+b)(cu+d) + cav^2 + iv}{(cu+d)^2+(cv)^2}
\end{aligned}$$

□

Primjer 23. Okrenimo se sad slučaju $N' \leq SL(2,\mathbb{R})$, gdje je $N' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

Propozicija 2.4.4. *Neka je* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ *takva da* $d \neq 0$. *U svakoj klasi* gN' *iz* $SL(2,\mathbb{R})/N'$ *postoji jedinstvena gornjotrokutasta matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + yt & y \\ tx^{-1} & x^{-1} \end{bmatrix}$$

Slijedi $x = d^{-1}$, $y = b$, $t = cd^{-1}$, pa imamo dekompoziciju

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{-1} & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ cd^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad d \neq 0.$$

Kad je $d = 0$, takva dekompozicija je nemoguća. □

Primjedba 30. Analogno prethodnom slučaju poistovjećujemo $SL(2,\mathbb{R})/N'$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i imamo istu projekciju i prerez. $p : SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to SL(2,\mathbb{R})$ oblika:

$$p : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mapsto (a_1 b_1, a_1^2)$$
$$s : (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uzmimo proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = g \in G$, $d \neq 0$. Projicirajmo predstavnika njene klase:

$$p : \begin{bmatrix} d^{-1} & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mapsto \left(d^{-1}b, d^{-2}\right) \tag{2.14}$$

Korolar 5. *Inducirano djelovanje* $SL(2,\mathbb{R})$ *na* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *dano je s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u, v) \mapsto \left(\frac{au + b}{cu + d}, \frac{v}{(cu + d)^2}\right) \tag{2.15}$$

Dokaz. $g \cdot (u, v) = p(g * s(u, v)) = p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} av & au + b \\ cv & cu + d \end{bmatrix}\right) =$ [prema (2.14)] $=$ $\left(\frac{\sqrt{v}}{cu + d} \cdot \frac{au + b}{\sqrt{v}}, \frac{\sqrt{v}^2}{(cu + d)^2}\right) = \left(\frac{au + b}{cu + d}, \frac{v}{(cu + d)^2}\right)$ □

Primjedba 31. Opet se može vidjeti da se gornja poluravnina preslikava u gornju poluravninu, i da zamjenom $-v$ umjesto v dobivamo simetrično djelovanje na donjoj poluravnini u odnosu na apscisu. Ovaj put implementirat ćemo dobivena djelovanja u sustavu *dualnih* brojeva $\mathbb{D} := \{x + \epsilon y : x, y \in \mathbb{R}\}$, s nilpotentnom imaginarnom jedinicom $\epsilon^2 = 0$. Za sad ne razmatramo degenerirane slučajeve i proširenje na $\mathbb{D}$.

Teorem 6. *$SL(2,\mathbb{R})$ djeluje na $\mathbb{D}$ s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = u + \epsilon v. \tag{2.16}$$

Dokaz. Opet, restrikcija na realnu os je očita. Restrikcijom na gornjoj, odnosno donjoj poluravnini dobijemo.

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{au+b+\epsilon av}{cu+d+\epsilon cv} = \frac{au+b+\epsilon av}{cu+d+\epsilon cv} \cdot \frac{cu+d-\epsilon cv}{cu+d-\epsilon cv} \\ &= \frac{(au+b)(cu+d) - \epsilon^2 cav^2 + \epsilon(avcu + avd - cvau - cvb)}{(cu+d)^2 - \epsilon^2 (cv)^2} \\ &= \frac{(au+b)(cu+d) + \epsilon v(ad-cb)}{(cu+d)^2} = \frac{au+b}{cu+d} + \epsilon \frac{v}{(cu+d)^2} \end{aligned}$$

□

Primjer 24. Pogledajmo naposljetku slučaj $A' \leq SL(2,\mathbb{R})$, gdje je $A' = \left\{ \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Propozicija 2.4.5. *Neka je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ takva da $d \neq \pm c$. U svakoj klasi gA' iz $SL(2,\mathbb{R})/A'$ postoji do jedinstvena gornjotrokutasta matrica u slučaju $d^2 - c^2 > 0$, odnosno matrica oblika $\begin{bmatrix} y & x \\ -x^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ za $d^2 - c^2 < 0$*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje $x, y, t, u \in \mathbb{R}, t > 0, t^2 - u^2 = 1$ takvi da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u \\ u & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xt + yu & xu + yt \\ ux^{-1} & tx^{-1} \end{bmatrix}$$

Izračunajmo $d^2 - c^2 = x^{-2}(t^2 - u^2) = x^{-2}$, iz čega vidimo da za $d \neq \pm c$ slijedi $x = \frac{1}{\sqrt{d^2-c^2}}$. Potom imamo $t = dx$ i $u = cx$. Zatm izjednačimo $a = xt + yu$, pa za $u \neq 0$ dobijemo

$$\begin{aligned} y = (a - xt)u^{-1} &= \frac{a(d^2 - c^2) - d}{d^2 - c^2} \cdot \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{c} = \frac{d(ad-1) - ac^2}{c\sqrt{d^2 - c^2}} \\ &= \frac{dbc - ac^2}{c\sqrt{d^2 - c^2}} = \frac{db - ac}{\sqrt{d^2 - c^2}}, \end{aligned}$$

pa imamo dekompoziciju

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d^2-c^2}} & \frac{db-ac}{\sqrt{d^2-c^2}} \\ 0 & \sqrt{d^2-c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{\sqrt{d^2-c^2}} & \frac{c}{\sqrt{d^2-c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{d^2-c^2}} & \frac{d}{\sqrt{d^2-c^2}} \end{bmatrix}, \quad d^2 > c^2,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{d^2-c^2} \begin{bmatrix} 1 & db-ac \\ 0 & d^2-c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & c \\ c & d \end{bmatrix}, \quad d^2 > c^2.$$

Za $u = 0$ imamo $c = 0$ i $t = 1$, pa zapravo imamo dekompoziciju

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0,$$

odnosno sama matrica $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ je predstavnik svoje klase. Analogno dobijemo dekompoziciju za slučaj $d^2 < c^2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2-d^2} \begin{bmatrix} ac-db & -1 \\ c^2-d^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}, \quad c^2 > d^2.$$

□

Primjedba 32. Ovaj put poistovjećujemo $SL(2,\mathbb{R})/A'$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, a za projekciju i prerez uzmimo $p : SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ i $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to SL(2,\mathbb{R})$ oblika:

$$p : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mapsto (a_1 b_1, a_1^2),$$

$$p : \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ a_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \mapsto (a_1 b_1, -a_1^2)$$

$$s : (u,v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ za } v > 0$$

$$s : (u,v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{-v}} \begin{bmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ za } v < 0$$

Uzmimo proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = g \in G$, $d^2 > c^2$. Projicirajmo predstavnika njene klase:

$$p : \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d^2-c^2}} & \frac{db-ac}{\sqrt{d^2-c^2}} \\ 0 & \sqrt{d^2-c^2} \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{db-ac}{d^2-c^2}, \frac{1}{d^2-c^2} \right) \tag{2.17}$$

Uzmimo sad matricu oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = g \in G$, $d^2 < c^2$. Projicirajmo predstavnika njene klase:

$$p : \begin{bmatrix} \frac{ac-bd}{\sqrt{c^2-d^2}} & \frac{-1}{\sqrt{c^2-d^2}} \\ \sqrt{c^2-d^2} & 0 \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{db-ac}{c^2-d^2}, \frac{1}{c^2-d^2} \right) \tag{2.18}$$

Korolar 6. *Inducirano djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ dano je s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u, v) \mapsto \left(\frac{(au+b)(cu+d) - cav^2}{(cu+d)^2 - (cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2 - (cv)^2} \right) \tag{2.19}$$

Dokaz. Uzmimo $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
g \cdot (u, v) = p(g * s(u, v)) &= p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = p\left(\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{bmatrix} av & au+b \\ cv & cu+d \end{bmatrix} \right) = [\text{prema (2.17)}] \\
&= \left(\frac{\frac{1}{v}(au+b)(cu+d) - \frac{1}{v}cvav}{\frac{1}{v}(cu+d)^2 - \frac{1}{v}(cv)^2}, \frac{1}{\frac{1}{v}(cu+d)^2 - \frac{1}{v}(cv)^2} \right) \\
&= \left(\frac{(au+b)(cu+d) - cav^2}{(cu+d)^2 - (cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2 - (cv)^2} \right)
\end{aligned}$$

Isto dobijemo i za $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ □

Primjedba 33. Uočimo da ovaj put djelovanje ne čuva gornju i donju poluravninu.Implementirat ćemo gornje djelovanje u sustavu *duplih* brojeva $\mathbb{O} := \{x + jy : x, y \in \mathbb{R}\}$, s idempotentnom imaginarnom jedinicom $j^2 = 1$.

Teorem 7. *Inducirano djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na $\mathbb{O}$ dano je s:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = u + jv. \tag{2.20}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{au+b+jav}{cu+d+jcv} = \frac{au+b+jav}{cu+d+jcv} \cdot \frac{cu+d-jcv}{cu+d-jcv} \\
&= \frac{(au+b)(cu+d) - j^2cav^2 + j(avcu + avd - cvau - cvb)}{(cu+d)^2 - j^2(cv)^2} \\
&= \frac{(au+b)(cu+d) - cav^2 + jv(ad-cb)}{(cu+d)^2 - (cv)^2} = \frac{(au+b)(cu+d) - cav^2}{(cu+d)^2 - (cv)^2} + j\frac{v}{(cu+d)^2 - (cv)^2}
\end{aligned}$$

□

2.5 Hiperkompleksni brojevi i EPH klasifikacija

Pokušajmo sažeti rezultate posljednjeg odjeljka. Općenito, izborom podgrupe $H \leq SL(2,\mathbb{R})$ inducirali smo djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na homogenom prostoru $SL(2,\mathbb{R})/H$. Pritom smo homogene prostore bijekcijama poistovjećivali s pogodnijim ekvipotentnim skupovima. Izabravši $\tilde{F} \leq SL(2,\mathbb{R})$, gdje se $\tilde{F}$ sastoji od donjotrokutastih matrica jedinične determinante, inducirali smo djelovanje $SL(2,\mathbb{R})$ na projektivnom realnom pravcu $\dot{\mathbb{R}} \sim SL(2,\mathbb{R})/\tilde{F}$ Möbiusovim transformacijama. Potom smo pomoću $K = SO(2,\mathbb{R})$ inducirali djelovanje na poluravninama $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. Objedinili smo tri djelovanja u jedno koristeći prostor kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Potom smo pomoću grupe N' inducirali novo djelovanje na poluravninama. Njega smo implementirali koristeći prostor *dualnih* brojeva $\mathbb{D}$. Naposljetku, pomoću grupe A' inducirali smo djelovanje na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Njega smo implementirali pomoću *duplih* brojeva $\mathbb{O}$. U sva tri razmatranja, djelovanja su poprimila oblik Möbiusovih transformacija. Također, u sva tri slučaja, njihova restrikcija na realni pravac svela se na isto djelovanje.

Definicija 18. *Definiramo redom skup* kompleksnih,dualnih *i* duplih *brojeva:*

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1$$
$$\mathbb{D} = \{x + \epsilon y \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \epsilon^2 = 0$$
$$\mathbb{O} = \{x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad j^2 = 1$$

Broj zovemo hiperkompleksnim *ako je element barem jednog od gornjih skupova. Koriste se i općenite oznake $\mathbb{A} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{O}\}$, $\iota \in \{i, \epsilon, j\}$ i $\sigma = \iota^2$. Zbrajanje na $\mathbb{A}$ definiramo po komponentama: za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*

$$(a + b\iota) + (c + d\iota) = (a + b) + (c + d)\iota,$$

a množenje

$$(a + b\iota)(c + d\iota) = ac + bd\iota^2 + (bc + ad)\iota$$

poprima različite oblike u pojedinom skupu:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$$
$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (bc + ad)\epsilon$$
$$(a + bj)(c + dj) = ac + bd + (bc + ad)j$$

Primjedba 34. Aditivno gledajući, $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{D} \cong \mathbb{O}$. Kod množenja, vidimo da dobivamo različite strukture. Bitno je istaknuti da su djelitelji nule u $\mathbb{D}$ oblika ϵt, $t \in \mathbb{R}$ (imaginarna os). U $\mathbb{O}$ djelitelji nule su oblika $t(1 \pm j)$, $t \in \mathbb{R}$. Napomenimo da će to imati utjecaja na degenerirane slučajeve koje smo ispustili iz razmatranja. Oni se obuhvaćaju dodavanjem elementa ∞ i definiranjem proširenih ravnina $\dot{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \{\infty\}$ i $\dot{\mathbb{O}} = \mathbb{O} \cup \{\infty\}$. Za opširnije razmatranje ovih proširenja, pogledati Kisila[1].

Primjedba 35. Važno je napomenuti da gornja tri brojevna sustava nisu puki pokušaji generalizacije, već se prirodno javljaju kao modeli djelovanja specijalne linearne grupe na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \dot{\mathbb{R}}$. U izboru hiperkompleksne implementacije možemo primijeniti takozvanu *EPH klasifikaciju*, čest matematički lajtmotiv u kojem slučajeve dijelimo na eliptičke, paraboličke i hiperboličke. Tako ćemo izbor kompleksnih brojeva, smatrati eliptičkim slučajem, izbor dualnih brojeva zvat ćemo paraboličkim slučajem, a izbor duplih brojeva hiperboličkim. Ovakvo nazivlje nije proizvoljno, pokazuje sljedeći rezultat. Prisjetimo se dekompozicije $SL(2,\mathbb{R}) = ANK$, gdje su $A = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} : x > 0\right\}$; $N = \left\{\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\}$ i $K = \left\{\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$.

Teorem 8. *Orbita pri djelovanju grupe K na točku* $(0,t)$, $t > 0$ *je*

1. *Kružnica sa središtem na ordinati koja prolazi kroz* $(0, t^{-1})$*, za* $\mathbb{A} = \mathbb{C}$*,*
2. *Parabola jednadžbe* $y = tx^2 + t$*, za* $\mathbb{A} = \mathbb{D}$*,*
3. *Hiperbola jednadžbe* $-x^2 + (y - \frac{t^2-1}{2t})^2 = \left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$*, za* $\mathbb{A} = \mathbb{O}$*.*

Dokaz.

1. Prisjetimo se koordinatno zadanog djelovanja $SL(2,\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u,v) \mapsto \left(\frac{(au+b)(cu+d)+cav^2}{(cu+d)^2+(cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2+(cv)^2}\right)$$

Sad imamo $a = d = \cos\phi$, $b = -c = \sin\phi$, $(u,v) = (0,t)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (0,t) \mapsto \left(\frac{bd+cat^2}{d^2+c^2t^2}, \frac{t}{d^2+c^2t^2}\right) \tag{2.21}$$

Središte kružnice je $S(0, \frac{t^2+1}{2t})$, radijus $r = \mid t - \frac{t^2+1}{2t} \mid$, pa $r^2 = \frac{(t^2-1)^2}{4t^2}$. Uvrstimo proizvoljnu točku orbite u jednadžbu kružnice.

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$\frac{(bd+cat^2)^2}{(d^2+c^2t^2)^2} + \left(\frac{t}{d^2+c^2t^2} - \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 = \frac{(t^2-1)^2}{4t^2}$$

Raspišimo lijevu stranu jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2b^2(1-2t^2+t^4)}{(a^2+b^2t^2)^2}+\frac{t^2}{(a^2+b^2t^2)^2}-\frac{t^2+1}{a^2+b^2t^2}+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{a^2b^2(1-2t^2+t^4)+t^2-(t^2+1)(a^2+b^2t^2)}{(a^2+b^2t^2)^2}+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{a^2(b^2-1)+t^2(-2a^2b^2+1-a^2-b^2)+t^4(a^2b^2-b^2)}{(a^2+b^2t^2)^2}+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{-a^4-2a^2b^2t^2-b^4t^4}{(a^2+b^2t^2)^2}+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}=-\frac{(a^2+b^2t^2)^2}{(a^2+b^2t^2)^2}+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\\
&=-1+\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}=\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}
\end{aligned}$$

2. Prisjetimo se djelovanja $SL(2,\mathbb{R})$ u dualnom slučaju:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u,v) \mapsto \left(\frac{au+b}{cu+d}, \frac{v}{(cu+d)^2}\right)$$

Imamo $a=d=\cos\phi$, $b=-c=\sin\phi$, $(u,v)=(0,t)$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (0,t) \mapsto \left(\frac{b}{d}, \frac{t}{d^2}\right)$$

Lako je vidjeti da sve točke orbite zadovoljavaju jednadžbu $y=tx^2+t$. Uzmimo proizvoljnu točku orbite i izračunajmo $t\cdot\frac{b^2}{c^2}+t=\frac{tb^2+tc^2}{c^2}=\frac{t}{c^2}=\frac{t}{d^2}$

3. Djelovanje u slučaju $\mathbb{A}=\mathbb{O}$ glasi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (u,v) \mapsto \left(\frac{(au+b)(cu+d)-cav^2}{(cu+d)^2-(cv)^2}, \frac{v}{(cu+d)^2-(cv)^2}\right)$$

Sad imamo $a=d=\cos\phi$, $b=-c=\sin\phi$, $(u,v)=(0,t)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : (0,t) \mapsto \left(\frac{bd-cat^2}{d^2-c^2t^2}, \frac{t}{d^2-c^2t^2}\right)$$

Uvrstimo proizvoljnu točku orbite u jednadžbu hiperbole:

$$-x^2+(y-\frac{t^2-1}{2t})^2=\left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$$

$$-\frac{(bd-cat^2)^2}{(d^2-c^2t^2)^2}+\frac{t^2}{(d^2-c^2t^2)^2}-\frac{t^2-1}{d^2-c^2t^2}+\frac{(t-1)^2}{4t^2}=\left(\frac{t+1}{2t}\right)^2$$

Raspišimo lijevu stranu jednakosti

$$\begin{aligned}
&-\frac{a^2b^2(1+2t^2+t^4)}{(a^2-b^2t^2)^2}+\frac{t^2}{(a^2-b^2t^2)^2}-\frac{t^2-1}{a^2-b^2t^2}+\frac{(t-1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{-a^2b^2(1+2t^2+t^4)+t^2-(t^2-1)(a^2-b^2t^2)}{(a^2-b^2t^2)^2}+\frac{(t-1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{a^2(b^2-1)+t^2(-2a^2b^2+1-a^2-b^2)+t^4b^2(1-a^2)}{(a^2-b^2t^2)^2}+\frac{(t-1)^2}{4t^2}\\
=&\frac{a^4-2a^2b^2t^2+b^4}{(a^2-b^2t^2)^2}+\frac{t^2-2t+1}{4t^2}=1+\frac{t^2-2t+1}{4t^2}=\left(\frac{t+1}{2t}\right)^2
\end{aligned}$$

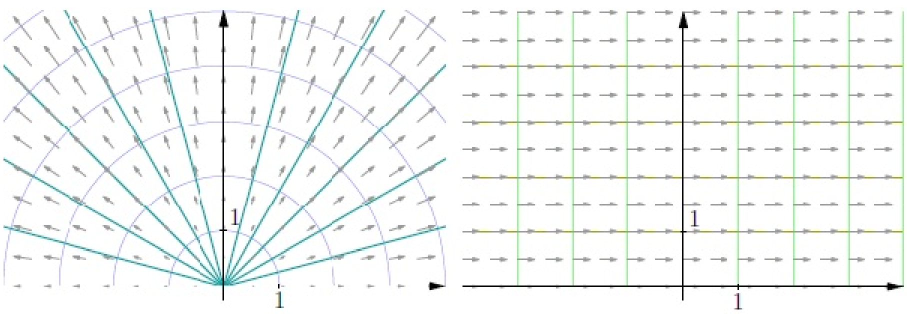
□

Primjedba 36. Lako je vidjeti da A djeluje na sva tri prostora dilatacijom:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{bmatrix}: z\mapsto \frac{\lambda z}{\lambda^{-1}}=\lambda^2 z,\quad \lambda>0,\quad z\in\mathbb{A}$$

Isto tako N djeluje na sva tri prostora translacijom:

$$\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}: z\mapsto \frac{z+t}{1}=z+t,\quad t\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{A}$$

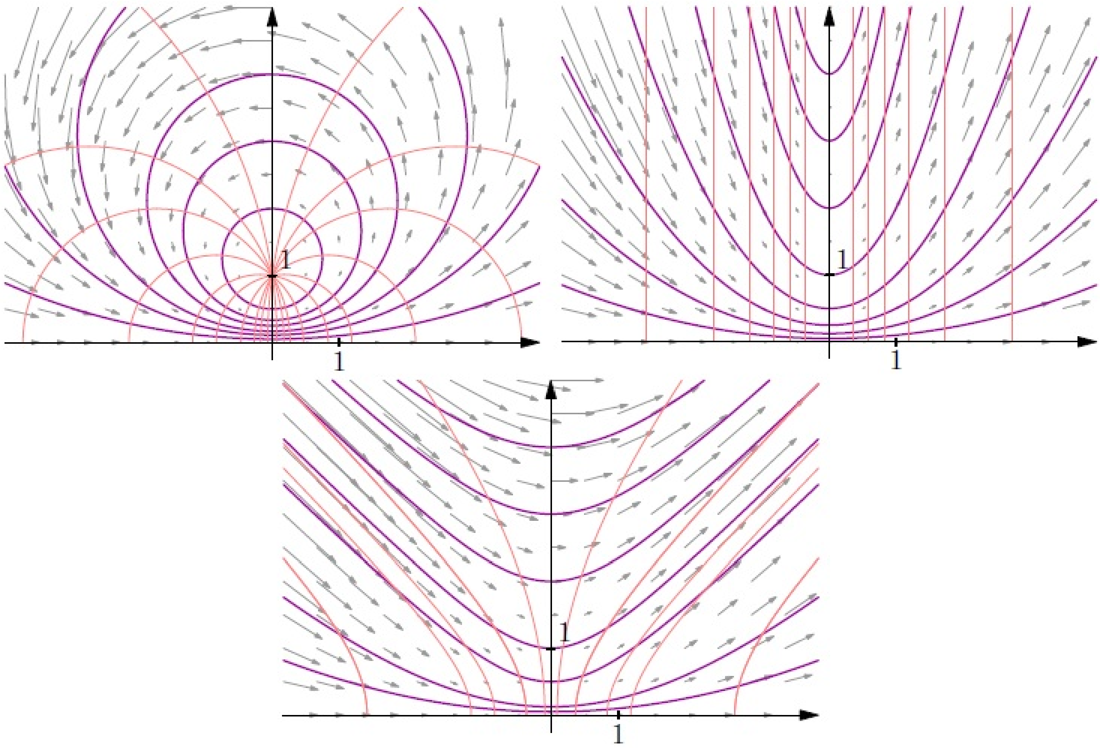


Slika 2.1: Djelovanja podgrupa A i N na gornjoj poluravnini. Slika preuzeta odV.Kisil[1]

EPH klasifikacija koristi se i prilikom razvrstavanja elemenata po broju fiksnih točaka.

Propozicija 2.5.1. *Neka $g\in SL(2,\mathbb{R})$ djeluje na $\mathbb{A}$. g ima točno*

a) dvije fiksne točke akko $tr(g)<-2$ ili $tr(g)>2$



Slika 2.2: Djelovanja podgrupa K na gornjoj poluravnini u kompleksnom, dualnom i duplom slučaju. Slika preuzeta od V.Kisil[1]

b) jednu fiksnu točku akko $tr(g) = \pm 2$

c) nijednu fiksnu točku akko $-2 < tr(g) < 2$.

Dokaz. Neka je $\frac{az+b}{cz+d} = z$, odnosno $az+b = cz^2+dz$. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je $D = (d-a)^2 + 4cb = (d+a)^2 - 4ad + 4cb = tr(g)^2 - 4$. □

Primjedba 37. Elemente iz a) slučaja zovemo *hiperboličkim*. Oni su konjugirani s nekim elementom $a \in A$. Elemente iz b) slučaja zovemo *paraboličkim*, a konjugirani su nekom elementu iz N. Elementi iz c) su *eliptički* i konjugirani su nekom $k \in K$.

2.6 Invarijantnost cikala

U ovom odjeljku dajemo kratke naznake nekih invarijanti spram dobivenih djelovanja. Želimo naznačiti smjerove u kojima se dalje može ići s istraživanjem. Okrećemo se generaliziranim kružnicama - ciklima i pokazujemo da se Möbiusovom transformacijom cikla opet dobiva cikl. Potom u grubim crtama opisujemo kako se cikli opisuju u matričnom obliku. Taj oblik pokazuje se pogodnim za definiranje nekih invarijanti, kao što je na primjer skalarni produkt.

Definicija 19. Cikl *je naziv kojim obuhvaćamo pravce i kružnice (za $\mathbb{A} = \mathbb{C}$), pravce i parabole ($\mathbb{A} = \mathbb{D}$), odnosno pravce i hiperbole $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.*

Teorem 9. *Familija svih cikala u $\mathbb{A}$ invarijantna je spram djelovanja $SL(2, \mathbb{R})$.*

Dokaz. Neka su cikl C i $g \in SL(2, \mathbb{R})$ proizvoljni. Za dani cikl C postoje $a \in A$ i $n \in N$ takve da je anC u K-orbiti djelovanja. Potom dekomponiramo akciju $g(an)^{-1} = a'n'k'$, gdje su $a' \in A$, $n' \in N$ i $k' \in K$. Pogledajmo djelovanje elementa g na C:

$$gC = g(an)^{-1}anC = a'n'k'anC = a'n'anC$$

Ovdje koristimo bez dokaza dvije činjenice: prvo, da djelovanje A i N šalju cikl u cikl, što je prilično očito, dok je drugu, da za svaki cikl postoji element od AN koji ga šalje u K-orbitu, nešto teže dokazati. □

Evo definicije koja vodi do nešto veće operabilnosti:

Definicija 20. *Skup svih $x + \iota y \in \mathbb{A}$, gdje je $\sigma = \iota^2$ zadan s*

$$k(x^2 - \sigma y^2) - 2lx - 2ny + m = 0, \quad k, l, m, n \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

zovemo generaliziranim ciklom. *Označimo s*

$$C_\eta = \begin{bmatrix} l + \eta n & -m \\ k & -l + \eta n \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

gdje je η imaginarna jedinica neovisna od ι, takva da je $\eta^2 \in \{-1, 0, 1\}$

Primjedba 38. Izbor imaginarne jedinice ι predstavlja izbor brojevnog sustava $\mathbb{A}$ u kojem implementiramo generalizirane kružnice ili cikle. Taj prostor često zovemo *točkovnim* prostorom. Točka (k, l, m, n) iz projektivnog prostora $\mathbb{P}^3$ predstavlja cikl u općem obliku. $\mathbb{P}$ stoga zovemo *prostorom cikala*. Izbor imaginarne jedinice η predstavlja izbor definicije prostora u kojem definiramo osnovna svojstva cikla. Zanimljivo je napomenuti da za svaki koncept ovdje imamo devet situacija: tri izbora implementiranja u točkovnom prostoru puta tri izbora definiranja osnovnih svojstava u prostoru cikala.

Definicija 21. *Neka je C cikl u $\mathbb{P}^3$ i neka je η imaginarna jedinica. Definiramo:*

- *Broj* $\det C_\eta \in \mathbb{R}$ *nazivamo η-dijametrom cikla C.*

- $c_\eta = (\frac{l}{k}, -\eta^2 \frac{n}{k})$ *označavamo* $\eta-$*centar cikla* C.

Bez dokaza navodimo sljedeću važnu činjenicu.

Teorem 10. *Neka je* C *cikl,* η *imaginarna jedinica i* $g \in SL(2, \mathbb{R})$. *Element* g *Möbiusovom transformacijom preslikava* C *u* C' *čija je odgovarajuća matrica dana s*

$$C'_\eta = g C_\eta g^{-1} \tag{2.24}$$

Vidimo da ovime imamo dobar temelj za definiranje metričke strukture prostora preko determinanti. Dalja razmatranja mogla bi ići u smjeru istraživanja invarijanti međusobnih odnosa cikala.

Definicija 22. *Za* $C, C' \in \mathbb{P}^3$ *definiramo* η-skalarni produkt

$$\langle C_\eta, C'_\eta \rangle = -tr(C_\eta \bar{C}'_\eta)$$

C *i* C' *su* η-ortogonalni *ako je* $\langle C_\eta, C'_\eta \rangle = 0$.

2.7 Završne napomene

Navodimo još uobičajenu definiciju Kleinove geometrije u terminima Liejevih grupa. U ovom radu ograničili smo se na algebarske aspekte.

Definicija 23. (G, H) *je* Kleinova geometrija *ako je* G *Liejeva grupa,* H *zatvorena Liejeva podgrupa od* G *i* G/H *povezan prostor. Grupu* G *zovemo* glavnom grupom *geometrije, a* G/H prostorom *geometrije.*

Primjedba 39. Dimenzija Liejeve grupe G je dimenzija G kao mnogostrukosti. Primjera radi $\dim GL(2, \mathbb{R}) = 4$, a $\dim SL(2, \mathbb{R}) = 3$. G/H je glatka mnogostrukost i vrijedi $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Vrijedi sljedeća tvrdnja koja pruža još jedan argument istaknutosti podgrupa A, N i K, budući da se na njima temelji svako djelovanje $SL(2, R)$ na 2-dimenzionalnom prostoru.

Propozicija 2.7.1. *Svaka jednodimenzionalna podgrupa od* $SL(2, \mathbb{R})$ *je konjugirana jednoj od podgrupa* A, N *ili* K

Primjedba 40. Ovdje vidimo i ograničenja našeg pristupa: Ukoliko želimo razmatrati topološku ili, jače, diferencijabilnu strukturu prostora geometrije, potrebno je baratati alatom Liejevih grupa i algebri

Primjedba 41. Prigodno je ovdje staviti jednu terminološku opasku. Klein uvodi EPH klasifikaciju po kojoj neeuklidska geometrija Bolyaija i Lobačevskog dobiva naziv *hiperbolička*. Naziv tu odgovara obliku konike u projektivnoj ravnini koju fiksiraju projektivne transformacije, a čija unutrašnjost tada postaje model te geometrije. U ovom radu geometriju Lobačevskog implementiramo u gornju kompleksnu poluravninu i zbog toga je karakteriziramo kao *eliptičku*.

Bibliografija

[1] **V. Kisil**, *Erlangen programme at large: an Overview*, in Advances in Applied Analysis, ch. 1, pp. 1-94. Basel, 2012. E-print: arXiv:1106.1686.

[2] **F. Klein**, *A comparative review of recent research in geometry*, Bull. New York Math. Soc. 2 (1892-1893), 215-249. (engl. prijevod njemačkog izvornog teksta iz 1872.), E-print: arXiv:0807.3161.

[3] **L. Ji, A. Papadopoulos**, *Sophus Lie and Felix Klein: The Erlangen program and its impact in mathematics and physics*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 23, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2015.

[4] **A. Rastegar**, *EPH-classifications in Geometry, Algebra, Analysis and Arithmetic*, 2015. E-print:arXiv:1503.07859.

Sažetak

Erlangenski program je uvriježeni naziv teksta iz 1872. godine u kojem je Felix Klein izložio projekt objedinjenja geometrije. Klein u središnje mjesto stavlja projektivnu geometriju, a svakoj podgeometriji dodjeljuje pripadnu grupu transformacija pod čijim su djelovanjem istaknuta svojstva invarijantna. Obratno, svako djelovanje neke grupe na odgovarajućem homogenom prostoru ima svoju geometriju kao teoriju invarijanti tog djelovanja. Rad je usredotočen na specijalnu linearnu grupu $SL(2, \mathbb{R})$. Kroz izbor njenih podgrupa ostvaruje se djelovanje $SL(2, \mathbb{R})$ na homogenim prostorima Möbiusovim transformacijama. Naposljetku, pokazuje se invarijantnost familije svih cikala pod djelovanjem $SL(2, \mathbb{R})$.

Summary

The Erlangen programme is the name given to a 1872. paper in which Felix Klein presented a project of unification of geometry. Klein highlights the status of projective geometry. To each subgeometry a corresponding group of transformations is assigned, keeping certain properties intact. Conversely, each group action on the associated homogeneous space is attributed with its geometry in the form of invariance theory of the given action. In this paper, I focus on the special linear group $SL(2, \mathbb{R})$. By choosing any of its subgroups, an action of $SL(2, \mathbb{R})$ on a homogeneous space is induced in the form of Möbius transformations. Lastly, the family of all cycles is proved to be invariant under the action of $SL(2, \mathbb{R})$.

Životopis

Rođen sam 14.9.1983. godine, u Čakovcu, gdje sam završio osnovnu školu i Gimnaziju Čakovec. Titulu prvostupnika matematike stekao sam 2014. godine na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Iste godine upisao sam diplomski studij Teorijske matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.