Geometrija prostora u srednjoškolskoj nastavi

Andačić, Slavica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Slavica Andačić

GEOMETRIJA PROSTORA U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici, prof.dr.sc. Željki Milin Šipuš, na pomoći oko izrade diplomskog rada.
Najviše zahvaljujem mojim roditeljima, bratu i sestri te prijateljima koji su mi davali podršku tijekom mojeg obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radom bavit ćemo se geometrijom prostora u srednjoškolskoj nastavi matematike. Razlog zašto je naslov mog diplomskog rada takav je to što je geometrija kao matematička grana, pogotovo geometrija prostora jako malo zastupljena u školama. U srednjoškolskoj nastavi *spominje* se u drugom razredu srednje škole kao zadnje poglavlje u toj školskoj godini. Učenici tada nadograđuju znanje vezano za geometrijska tijela i njihova svojstva s kojima su se prije upoznali u osnovnoj školi (najviše u osmom razredu).

Ovim diplomskim radom želim istaknuti da se geometriju ne gleda kao dosadno i nepotrebno gradivo u našim školama. Geometrija može biti jako zanimljiva, učenici su u mnogim situacijama iz svakodnevnog života pozvani prepoznati geometrijske veličine. No, ne samo to već jednostavnim pitanjem: "Kako bismo izradili/izgradili taj objekt?" može se otvoriti cijeli novi geometrijski svijet. Stječe se dojam da se kod geometrije prostora samo računa volumen i oplošje, medutim to zaista ne mora biti tako i to ću ovim radom pokazati. Još jedan razlog zašto je ovaj dio gradiva poželjan je taj što se jako lako može povezati s ostalim disciplinama bile one prirodoslovne ili tehničke.

U prvom poglavlju reći ću nešto o prikazu geometrijskih tijela u ravnini te o nekim svojstvima tih tijela. Cilj poglavlja je objasniti na koji je način učenicima najbolje približiti te prikaze.

U drugom poglavlju reći ću nešto o presjecima geometrijskih tijela ravninom. U poglavlju ću govoriti o presjecima prizme, piramide i oblih tijela. Napravit ću aktivnost koju možemo provesti na nastavi ako želimo da učenici otkriju svojstva presjeka ravnine i geometrijskog tijela. Tijekom poglavlja navest ću primjere koji se mogu napraviti kao uvodni dio tog dijela gradiva. Reći ću do kojih poteškoća mogu doći učenici vezano za to gradivo.

U trećem poglavlju ću nešto reći o ideji uvođenja u nastavu raznih primjera iz svakodnevnog života koji mogu pomoći u razumijevanju pojmova i postupaka vezanih uz geometriju prostora. Nazvat ću to geometrijsko modeliranje. Najprije ću reći što je modeliranje te što se podrazumijeva pod geometrijskim modeliranjem. Nakon toga ću prikazati aktivnosti koje se mogu provesti na nastavi matematike vezane uz geometrijsko modeliranje.

Poglavlje 1

Prikazivanje i svojstva tijela

U srednjoškolskoj nastavi učenici se s geometrijom prostora susreću u drugom razredu srednje škole. Po Nacionalnom okvirnom kurikulumu (kraće NOK-u) ishodi koji su vezani za ovu temu se nalaze u dijelu Matematički koncepti pod Oblici i prostori te glase:

- skicirati, opisati i tumačiti ravninske prikaze prostornih oblika
- rabiti geometrijske transformacije ravnine za opisivanje pravilnosti i svojstva geometrijskih uzoraka
- prepoznati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnom okruženju i umjetnosti te ih upotrijebiti za opis i analizu svijeta oko sebe. ([8])

Prikaz geometrijskog tijela u ravnini je jedan od bitnih ishoda po NOK-u. Iz tog razloga ćemo se u ovom poglavlju baviti time.

1.1 Mreže geometrijskih tijela

Geometrijska tijela se mogu prikazati pomoću svojih mreža, tj. crtanjem njihovog plašta i osnovke (baze) u ravnini. Bitno je da učenici znaju nacrtati mreže ako im je zadano geometrijsko tijelo te je bitan i obrnuti smjer zbog razvijanja vizualizacije predmeta u prostoru. Kako bi znali nacrtati mreže različitih geometrijskih tijela učenici moraju znati njihova svojstva kao što su broj osnovki, od koliko se geometrijskih likova sastoji plašt, o kojim se geometrijskim likovima se radi te svojstva tih likova. Geometrijska tijela u nastavi matematike dijele se na uglata i obla tijela. Uglata tijela se dijele na prizme i piramide ovisno o tome koliko imamo osnovki, dok se obla tijela dijele na valjak, stožac i kuglu. Pojam koji je još bitan kod prikaza mreža geometrijskih tijela je vidljivost. Učenici se prvi put kod geometrijskih tijela susreću s takvim pojmom zato je jako bitno objasniti značenje tog pojma te njegovu važnost. Pojam vidljivosti je također apstraktan pojam učenicima zbog toga ga prvo objašnjavamo na konkretnom primjeru (modelu). Učenici su se s mrežama tijela susreli već u osnovnoj školi tako da im to nije u potpunosti nepoznat pojam. Iz tog razloga ćemo napraviti aktivnost uvježbavanja kako bi se učenici podsjetili tog gradiva.

AKTIVNOST: *"Izradi"*

U ovoj će aktivnosti učenici:

- izrađivati mreže različitih geometrijskih tijela pomoću papira
- pri izradi koristiti svojstva određenih geometrijskih tijela i likova

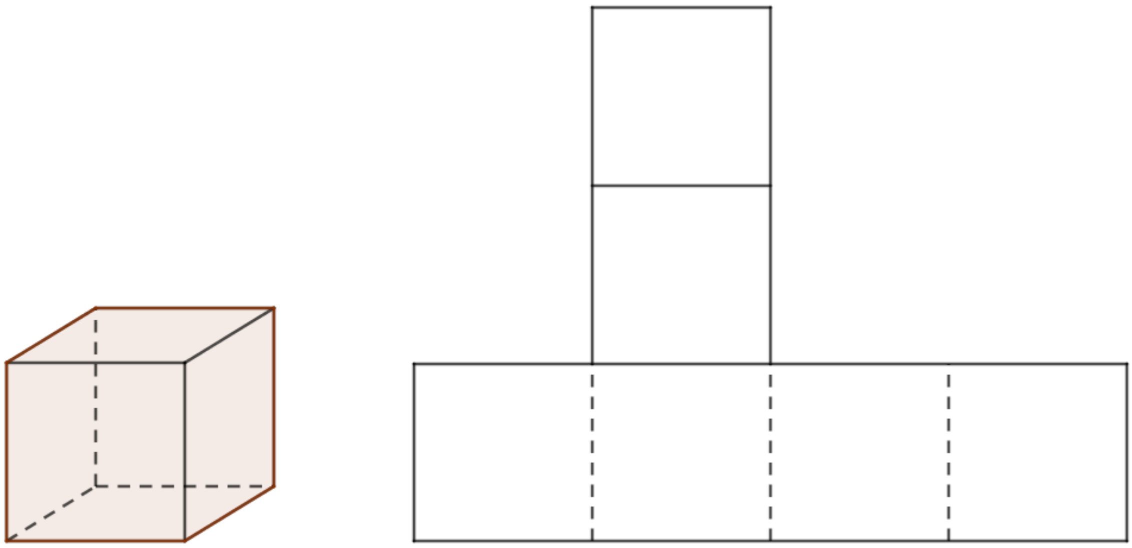
Aktivnost je predviđena za jedan školski sat.

Što ćemo raditi?
Izrađivati mreže prizme, piramide i oblih tijela pomoću papira.

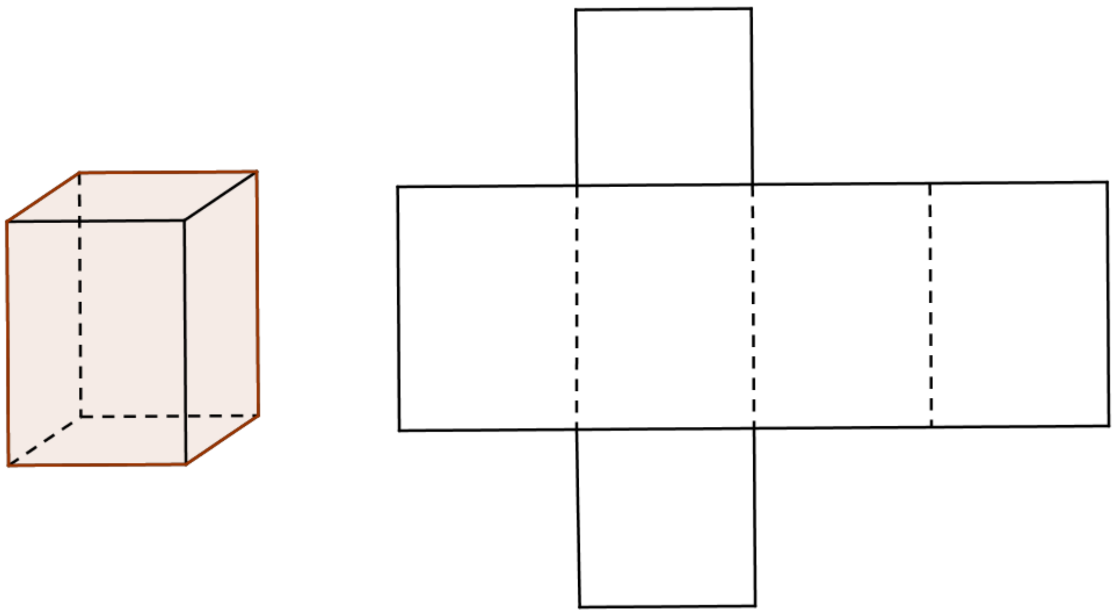
Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: papir i škare
Oblik rada: invidulni rad
Svakom učeniku podijelimo jedan papir, te učenicima damo upute da će jedan red raditi mrežu prizme, drugi piramide te treći mrežu oblih tijela. Učenici mogu sami izabrati od kojeg će tijela raditi mrežu samo je bitno da se drže upute. Nakon što naprave svoje mreže stavit ćemo ih na ploču te komentirati od kojeg je tijela ta mreža i da li postoji još neki drugi način prikaza mreže tog tijela ili je on jedinstven.

Uputa nastavnik:
Bilo bi dobro učenike potaknuti da ne rade mreže samo uspravnih tijela već i kosih. Razred možemo rasporediti i drugačije tako da imamo papir triju različitih boja te da svaki učenik bira boju koju želi a svaka boja predstavlja prizmu, piramidu ili oblo tijelo. Naravno, za svaku skupinu bi trebalo biti podjednak broj papira. S učenicima moramo prodiskutirati kako da znaju jesu li mrežu dobro napravili, tj. dati uputu da kad naprave mrežu da od te mreže naprave geometrijsko tijelo.

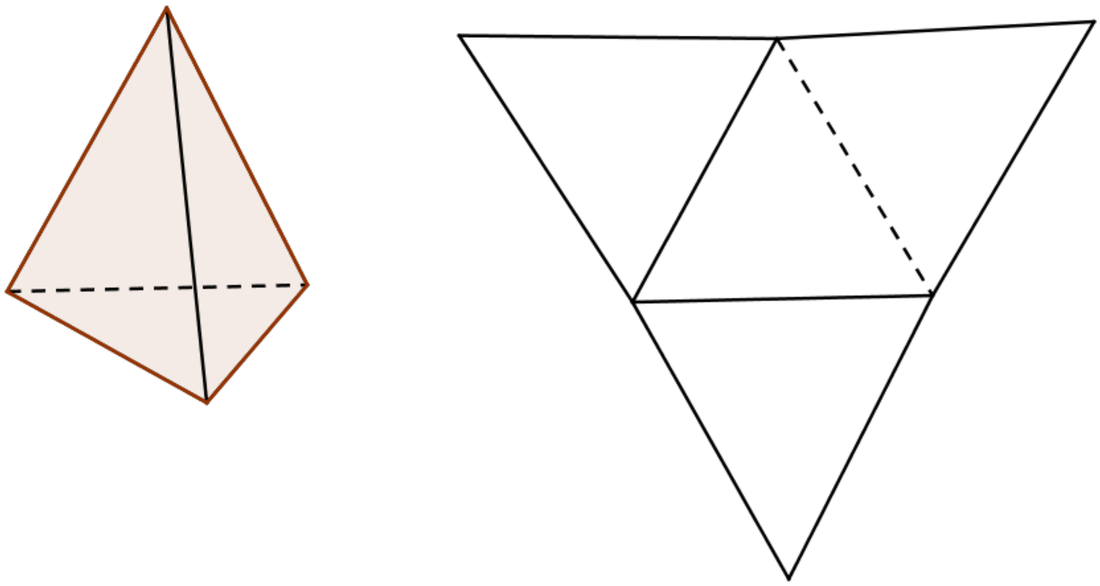
Primjeri mreža koje učenici mogu napraviti:



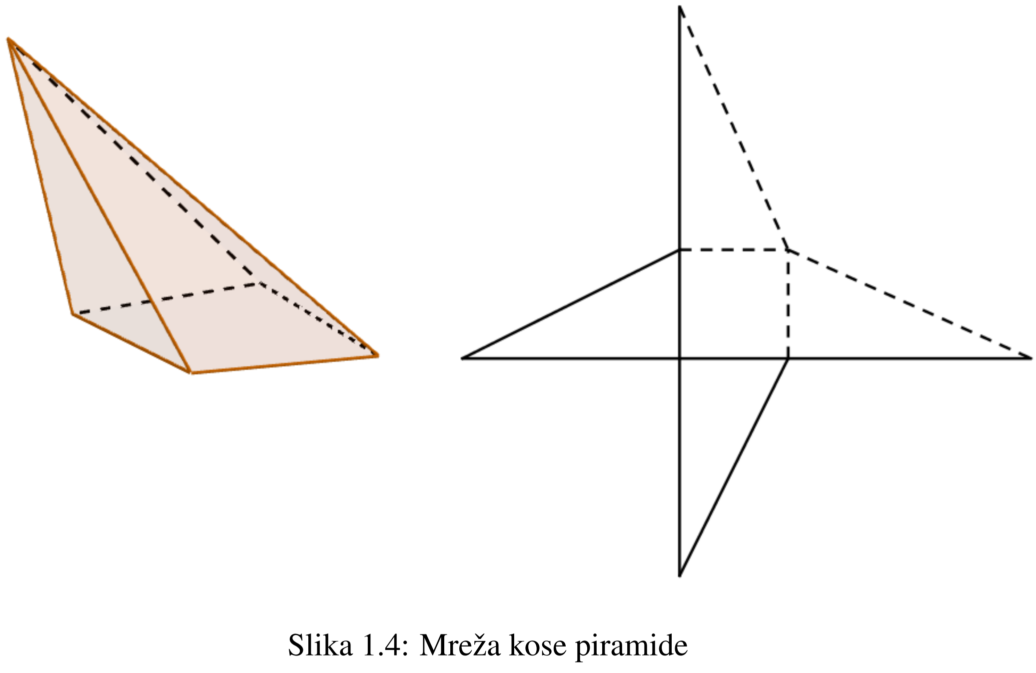
Slika 1.1: Mreža kocke



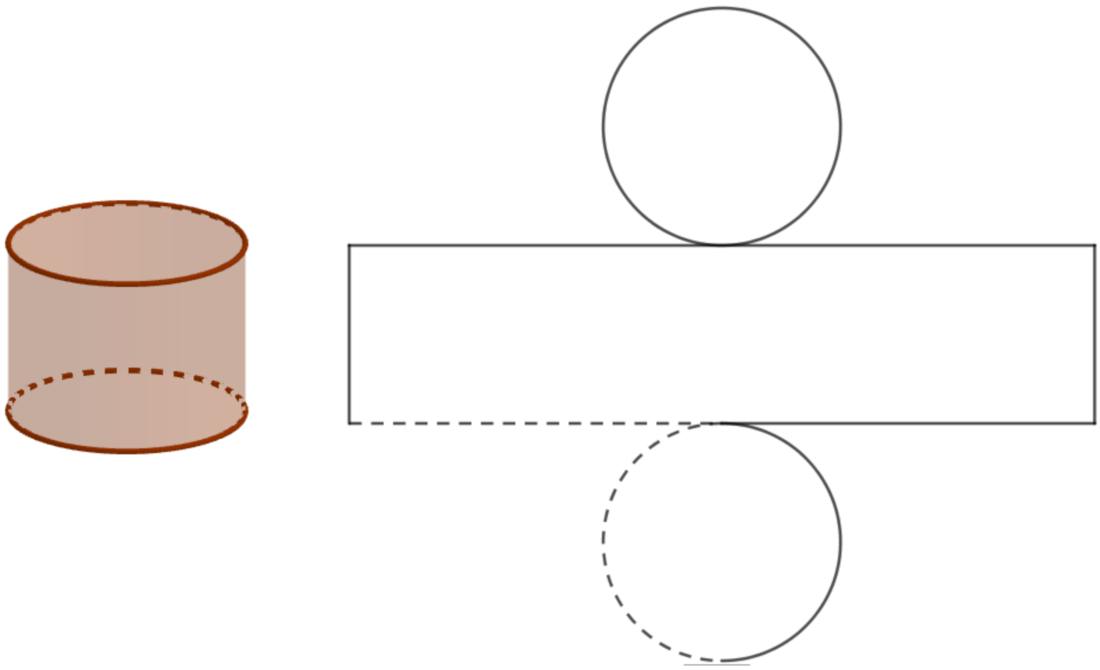
Slika 1.2: Mreža kvadra



Slika 1.3: Mreža piramide



Slika 1.4: Mreža kose piramide



Slika 1.5: Mreža valjka

1.2 Nacrt, tlocrt, bokocrt

Mreže tijela nam pomažu kod još jednog prikaza. Riječ je o prikazu tijela kad ih gledamo s različitih strana, tj. tijelo gledamo odozgo, sprijeda ili sa strane. Takav prikaz je najzanimljivije promatrati kod nekih zgrada te učenicima pomaže kod prijelaza iz konkretnog prema apstraktnom. Kod ovog prikaza dolazi do izražaja spomenuti pojam vidljivosti iz tog razloga što na temelju toga učenici iz slike mogu protumačiti s koje strane je gledano geometrijsko tijelo nacrtano u ravnini. Jedna od aktivnosti koja se može provesti vezano za ovu temu u srednjoškolskoj nastavi je sljedeća.

AKTIVNOST: *"Od kud gledamo?"*

U ovoj će aktivnosti učenici:

- određivati i crtati tlocrt, nacrt i bokocrt zadanih geometrijskih likova i zgrada iz svakodnevnog života
- crtati geometrijsko tijelo ako im je zadan tlocrt, nacrt i bokocrt.

Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

Što ćemo raditi?
Određivat ćemo tlocrt, nacrt i bokocrt zadanog geometrijskog tijela ili zgrade iz svakodnevnog života.

U čemu je problem?
Ako imamo zadanu sliku geometrijskog tijela treba odrediti njihov tlocrt, nacrt i bokocrt.

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: nastavni listić, papir s pravokutnom mrežom
Oblik rada: individualni rad
Učenicima podijelimo nastavne listiće i papire s pravokutnom mrežom te im damo vremena da ih riješe. Nakon toga prođemo rješenje i provedemo diskusiju vezano za te zadatke.

Nastavni listić
Zadatak 1: Zadana je slike zgrade Knjižnice filozofskog fakulteta u Zagrebu (slika 1.6 preuzeta s ([4]).

Slika 1.6: Knjižnica filozofskog fakulteta

Odredi iz kojeg je smjera gledala osoba koja je slikala sljedeće slike.

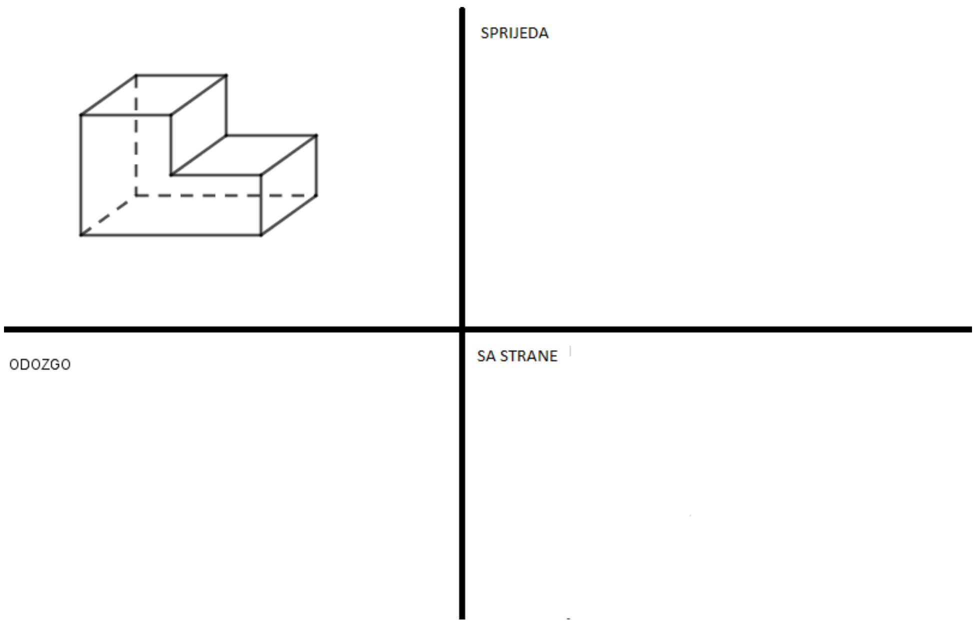
Slika 1.8: Knjižnica fakulteta iz raznih perspektiva

Zadatak 2:

a) Odredi kako izgleda geometrijsko tijelo kad ga gledamo odozgo, sa strane i sprijeda te nacrtajte na predviđeno mjesto.

   Uputa za crtanje:

   - s **isprekidanom crtom** označavamo nevidljive bridove (bridovi koje znamo da postoje ali kad gledamo geometrijsko tijelo ih ne vidimo),
   - kod situacije kad gledamo sa strane lik ćemo uvijek gledati s **desne strane**.



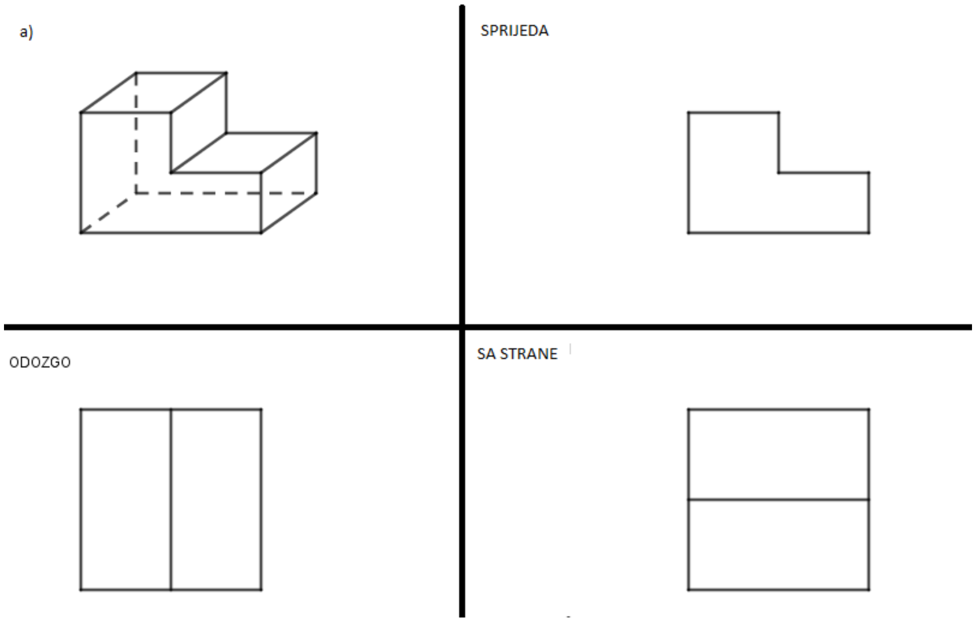
b) Oboji stranicu koja se **ne vidi** u kosoj projekciji te u sve tri ortogonalne projekcije ako:

   a. gledamo odozgo (zelenom bojom),
   b. gledamo sa strane (crvenom bojom),
   c. gledamo sprijeda (plavom bojom).

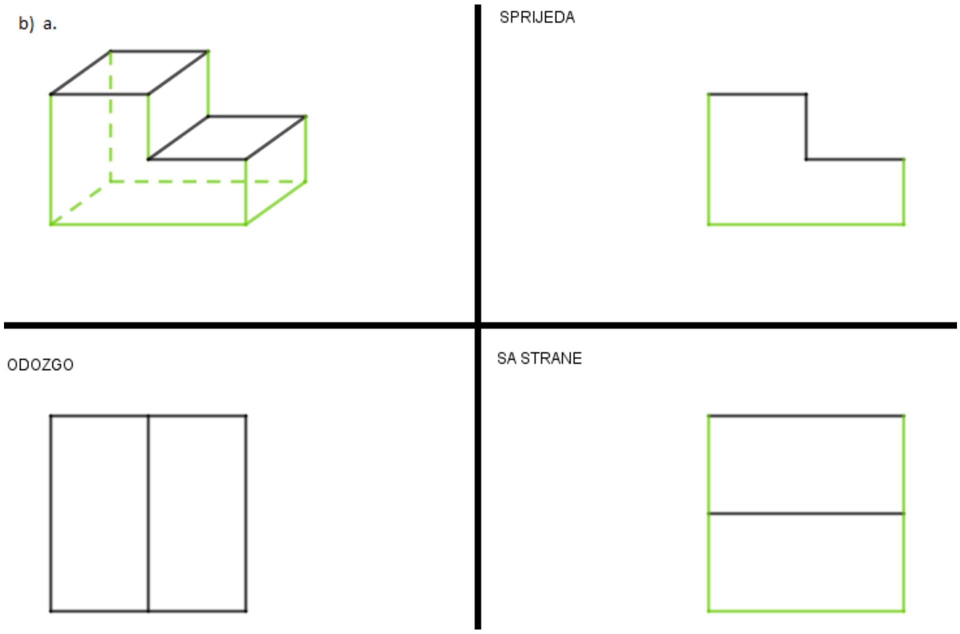
Rješenje nastavnog listića

Zadatak 1: Ako gledamo sliku knjižnice odredit ćemo da je prednja strana ona koju prvo vidimo. Pa prema tome prva slika koja je zadana prikazuje prednji dio zgrade pa se fotograf nalazio na toj strani zgrade kad je slikao. Druga slika je slikana iz kuta gdje se vidi prednji dio i jedna bočna strana zgrade. Treća slika je također slikana iz kuta di se vidi prednja i bočna strana (različita od prethodne slike). Na četvrtoj slici se vidi stražnja strana i jedna bočna strana.

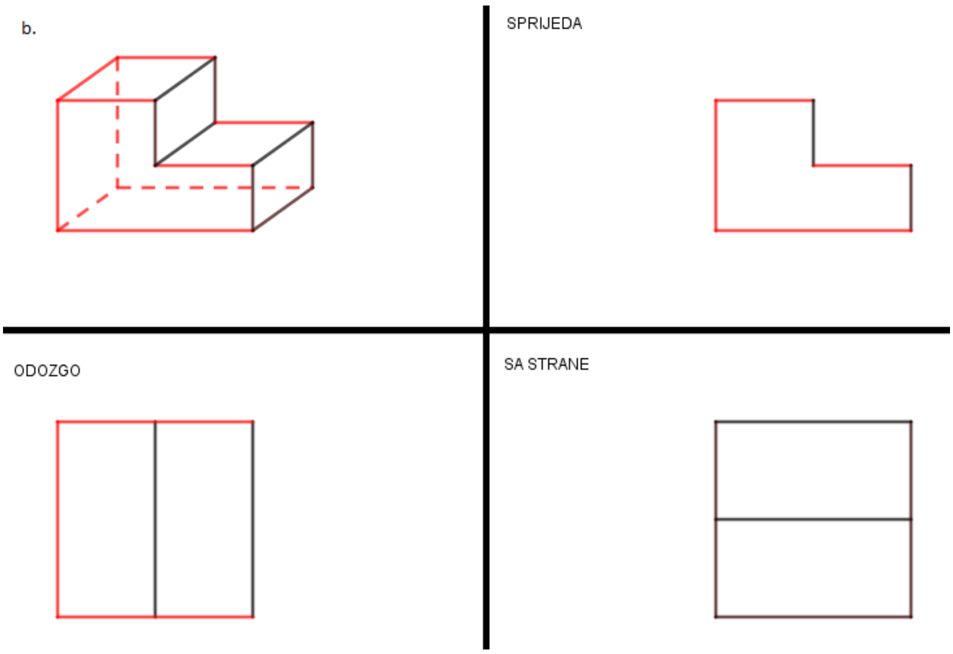
Zadatak 2:



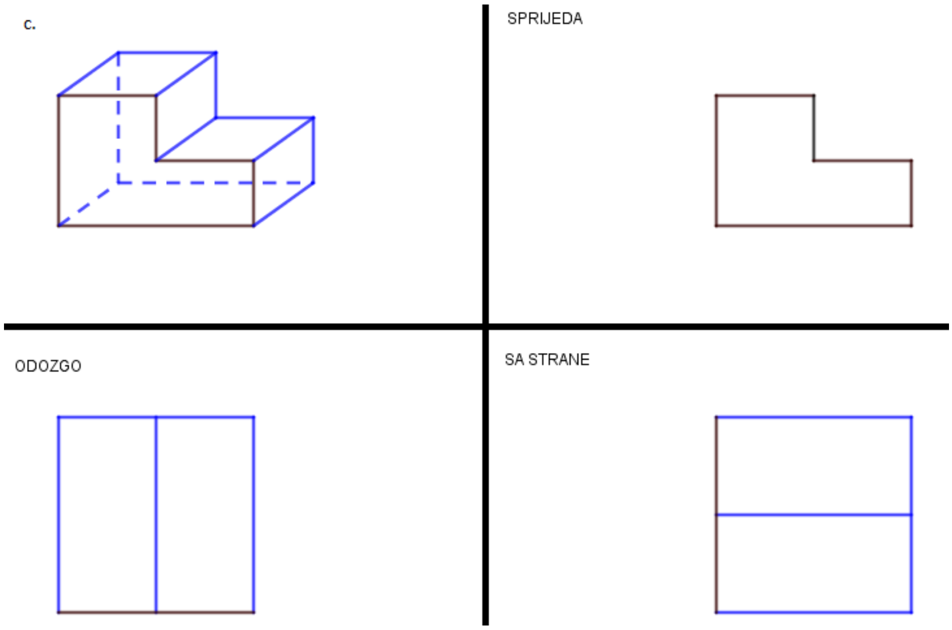
Primjer je jednostavan za učenike. Ono što je bitno napomenuti je da moramo crtati u pravim veličinama te je s učenicima dobro diskutirati na koji način su dolazili do slike, jesu imali neku metodu.



Slika 1.9: Nevidljive stranice ako gledamo odozgo



Slika 1.10: Nevidljive stranice ako gledamo sa strane

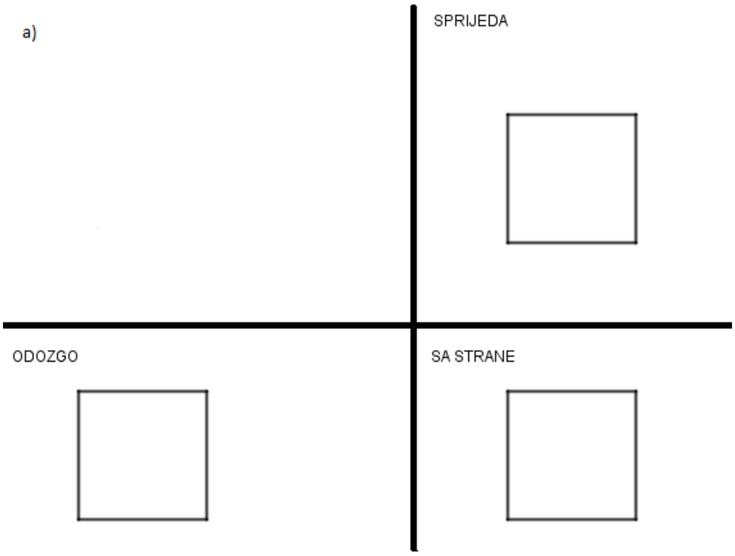


Slika 1.11: Nevidljive stranice ako gledamo sprijeda

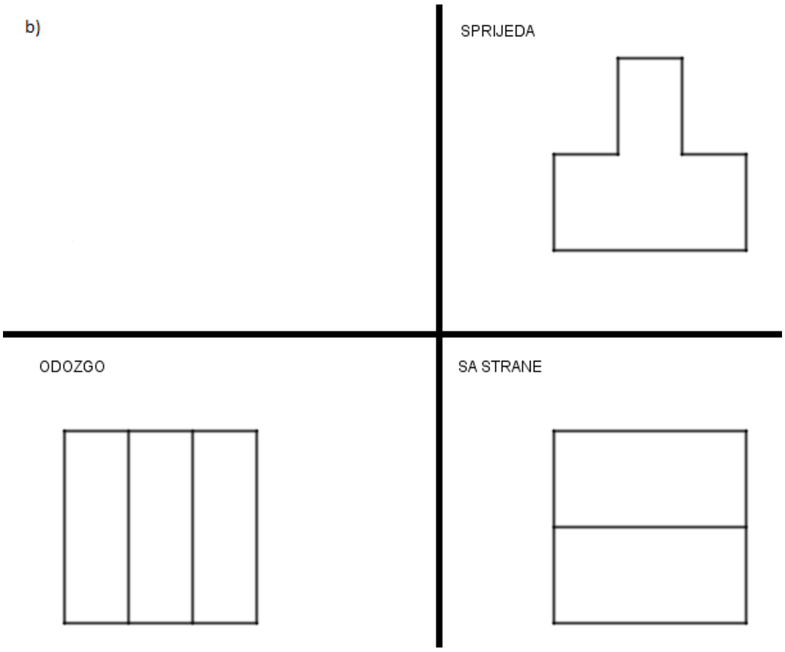
Ovaj primjer je primjeren za naprednije učenike iz tog razloga što je potrebna dobra vještina vizualizacije.

Možemo li i više?
U ovom dijelu će učenici iz tog što imaju tlocrt, bokocrt i nacrt crtati geometrijsko tijelo. Radi će to uz pomoć nastavnog listića, individualno ali mogu prokomentirati s kolegom u klupi. Učenicima je ovaj smjer teži zbog vizualizacije i zbog toga što iz dvodimenzionalnog prikaza moraju zamisliti trodimenzionalnu sliku te nakon toga opet crtati u dvodimenzionalnom prostoru. Učenici će geometrijsko tijelo prikazati u kosoj projekciji.

Zadatak: Odredite o kojem se geometrijskom tijelu radi te ga nacrtajte. Iskoristite kvadratnu mrežu kako bi ste lakše skicirali geometrijsko tijelo.

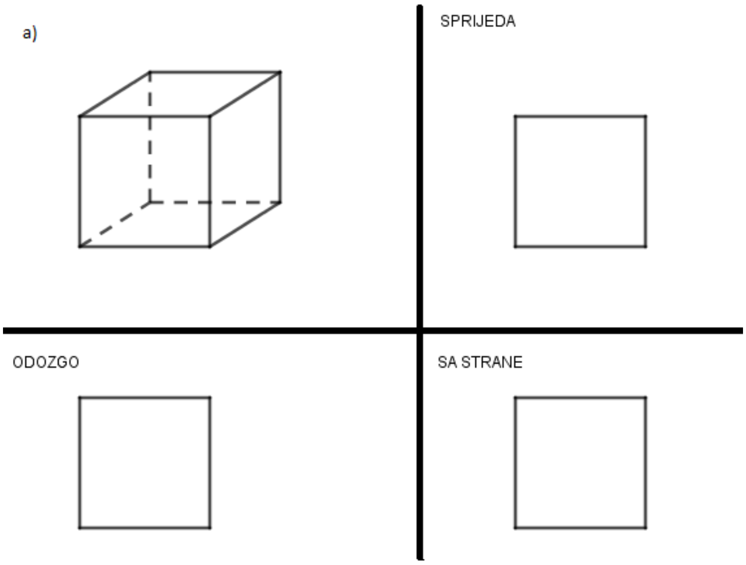


Slika 1.12: Tlocrt, bokocrt i nacrt kocke

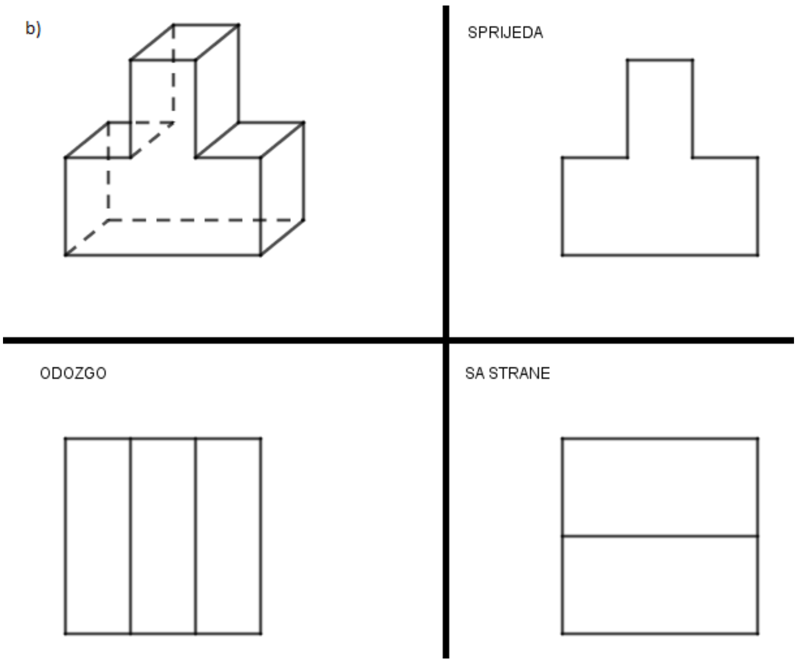


Slika 1.13: Tlocrt, bokocrt i nacrt geometrijskog tijela

Rješenje:



Slika 1.14: Tlocrt, bokocrt, nacrt kocke te kocka u kosoj projekciji



Slika 1.15: Tlocrt, bokocrt, nacrt tijrla te tijelo u kosoj projekciji

Bitno je kad zadajemo zadatke da idemo od jednostavnijih prema kompliciranijim. Iz tog razloga sam prvi zadatak stavila kocku jer je učenicima najjednostavnije za shvatiti o kojem je geometrijskom tijelu riječ.

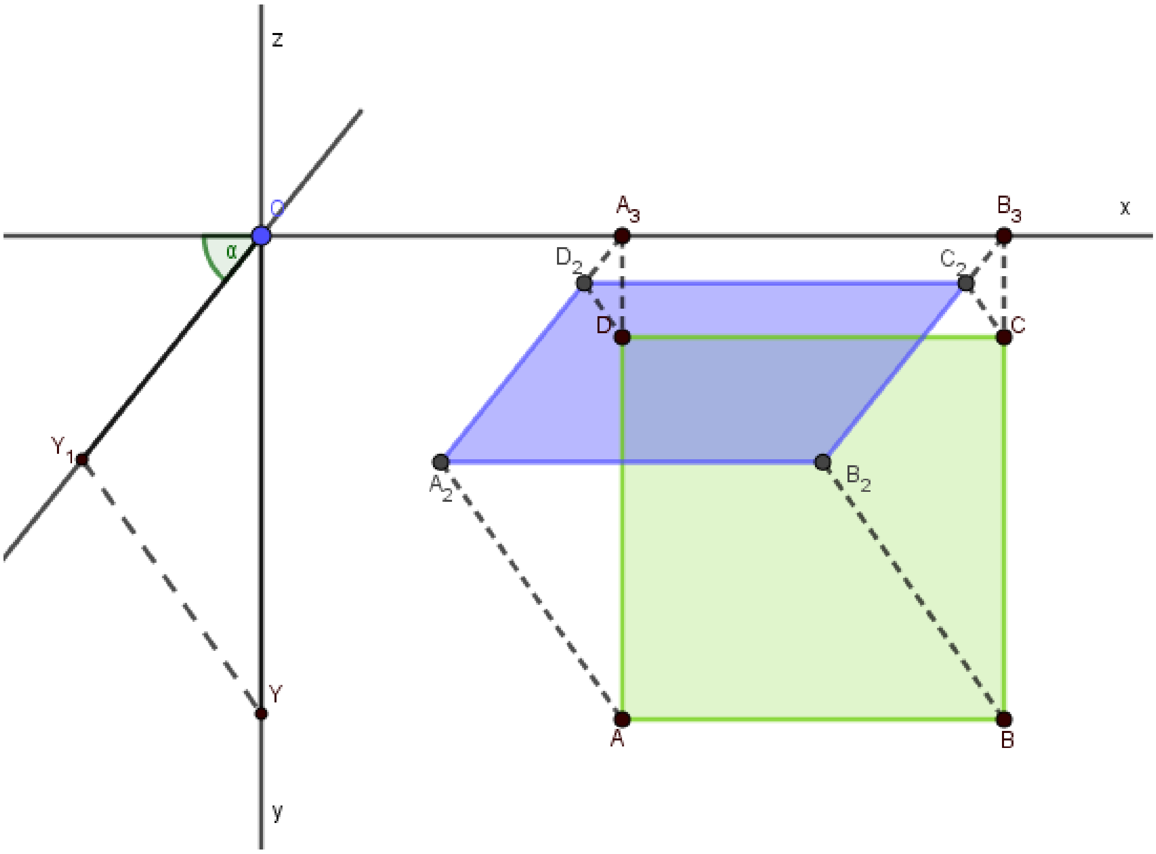
Primjena naučenog
Kod uvježbavanja učenicima možemo staviti slične zadatke tako da imamo primjere i za jedan i za drugi smjer. Učenicima bi bilo zanimljivije raditi u paru stoga učenicima možemo dati da jedan drugome određuju zadatke koje će rješavati. Tako ćemo učenike potaknuti da najprije vizualiziraju geometrijsko tijelo kako bi mogli postaviti zadatak.

U aktivnosti ne spominjem nazive tlocrt, bokocrt i nacrt. Smatram da je bitno da učenici najprije razumiju o čemu se radi, što se crta. Nakon toga može se prirodno javiti potreba da se ti pojmovi imenuju, tj. da im se odredi naziv. Učenicima se može zadati zadatak za doma da na putu do kuće slikaju neku zgradu ili bilo koji predmet te da probaju nacrtati što vide kad gledaju sprijeda, sa strane te da probaju vizualizirati kako bi zgrada izgledala odozgo.

1.3 Kosa projekcija

Najvažniji prikaz geometrijskih tijela u nastavi matematike je kosa projekcija. Riječ je o najjednostavnijoj projekciji koja "vjerno" prikazuje tijelo. U nastavi matematike je bitna zbog prijelaza iz konkretnog prema apstraktnom, tj. prijelaz iz prostora u ravninu. Taj prijelaz omogućuje da uočimo određena svojstva tijela s crteža te što lakše riješimo matematički problem koji nam je zadan. Ono što učenicima može biti zbunjujuće je to da osnovka kocke na crtežu postaje paralelogram, a osnovka valjka postaje elipsa. Učenicima je to najbolje objasniti pomoću modela kocke i valjka tako da gledaju modele s različitih daljina i strana. Tako će primijetiti da slika kocke ili valjka uvijek izgleda drugačije te će primijetiti ako gledaju sa strane da će zaista osnovka biti ili paralelogram ili elipsa. Bitno je da učenici razumiju na koji način se dolazi do tih crteža te da vide koja svojstva ima kosa projekcija radi lakšeg razumijevanja crteža.

Kod kose projekcije biramo ravninu koja je paralelna s ravninom slike (tijela), najčešće je to xz-ravnina, te je smjer projekcije kos. Svi bridovi nekog tijela koji su paralelni s x i z osi projiciraju se u pravoj veličini te se okomitost čuva. Treća os y se projicira koso u položaj y_1 te se duljina kose projekcije neke dužine na os y ne čuva, tj. može biti veća ili manja od dane duljine. Glavni element kose projekcije je takozvani trokut prikrate koji se sastoji od elemenata koji određuju kosu projekciju a to je kut između osi y_1 i x osi te prikrate koja označava omjer između veličine projekcije i dane veličine. Prikažimo to na slici (1.16).



Slika 1.16: Kosa projekcija kvadrata

Nakon što s učenicima prođemo konstrukciju nekog geometrijskog tijela pomoću kose projekcije s njima dolazimo do svojstva kose projekcije. Svojstva kose projekcije su sljedeća:

- trokut prikrate i trokut A_2A_1A (vidi 1.16) su uvijek slični,
- likovi koji leže u ravnini paralelnoj s ravninom slike pri projiciranju ostaju u danoj veličini te su paralelni s tim likom,
- kut koji leži u ravnini paralelnoj s ravninom slike projicira se u pravoj veličini, tj. čuva okomitost,
- kosa projekcija pravca okomitog na ravninu baze okomit je na os x,
- kosa projekcija pravca okomitog na ravninu slike paralelna je s osi y_1,
- paralelni pravci preslikavaju se u paralelne pravce (osim ako nisu paralelni sa smjerom projiciranja),

- kosa projekcija kružnice u općem položaju je elipsa. ([7])

Učenici će crteže geometrijskih tijela uglavnom raditi prostoručno ali je bitno da znaju na koji se način došlo do njih i koja su svojstva tijela čuvaju na crtežu a koja ne.

Poglavlje 2

Presjeci ravninom

Problem određivanja presječnog lika tijela i ravnine je nešto što često susrećemo u svakodnevnom životu, primjerice, to može biti rezanje kruha, jabuke, sira, torte i slično. ([5])

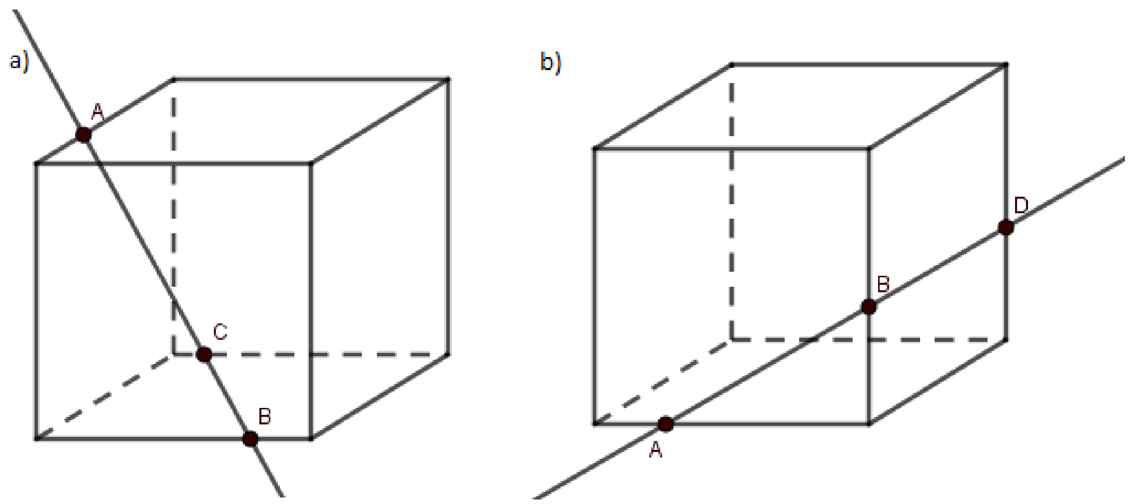
Slika 2.1: Limun kao primjer presjeka iz svakodnevnog života

Slika 2.2: Stolni margarin kao primjer presjeka iz svakodnevnog života

U nastavi matematike s takvim problemom bi se upravo trebalo krenuti s takvim primjerima (vidi 2.1,2.2), to je učenicima nešto s čim se susreću svakodnevno pa će lakše shvatiti bit problema. Nakon što smo krenuli s konkretnim primjerima prelazimo na apstraktni dio, međutim taj prijelaz ne smije biti prebrz. Prijelaz možemo napraviti pomoću geometrijskih modela ili koristeći softver dinamičke geometrije (npr. GeoGebra, Sketchpad, Mathematica).

Problem ravninskog presjeka je zapravo problem određivanja presjeka pravca i ravnine, tj. probodišta koji se dobije presijecanjem bridova tijela s ravninom. [5] U srednjoškolskoj nastavi matematike ovaj problem se rješava preko elementarno- geometrijskih metoda. Učenici kod pronalaženja probodišta mogu imati problem kod misaone vizualizacije nacrtanih likova. Iz tog razloga bi bilo dobro da se krene od jednostavnijih primjera kao što je presjek tijela i pravca tek nakon toga na presjek između ravnine i tijela. Geometrijsko tijelo koje je najpogodnije za istraživanje pravilnosti kod ovog problema je kocka. Najbolje je uzeti to geometrijsko tijelo iz tog razloga što su joj sve strane istih veličina te učenici znaju najbolje njezina svojstva. Kod presjeka pravca s ravninom učenici crtaju pravac ako su zadana probodišta te moraju znati kroz koje točke prolaze taj pravac a kroz koje ne. Učenicima određivanje tih točaka može stvarati problem zbog misaone vizualizacije. Primjer zadatka koji se može zadati na nastavi je sljedeći.

Zadatak: Prikazana je kocka u kosoj projekciji te pravac AB. Odredi da li točke C i D pripadaju tom pravcu?



Slika 2.3: Presjek pravca i kocke

Rješenje kod oba dva primjera je da niti jedna od točaka C i D na pripada pravcu AB. Učenicima je to zbunjujuće iz tog razloga što u dvodimenzionalnom prostoru pravac AB prolazi kroz točke C i D. Poželjno je da na prvim primjerima učenicima pomoću modela kocke (model izrađen od žice koje prikazuju bridove kocke) i slamke (olovke) prikažemo te točke i pravac. Učenici će tako vidjeti da pravac prolazi kroz unutrašnjost kocke te će im kasnije biti lakše vizualizirati te situacije bez potrebe modela. Poželjno je učenicima dati što više različitih primjera.

2.1 Prizme

Shvativši presjek između pravca i geometriskog tijela s učenicima možemo krenuti na presjek između ravnine i geometrijskog tijela. Cilj je da učenici nakon ovog dijela gradiva znaju nacrtati presječni lik ako im je zadano geometrijsko tijelo i točke probodišta te da znaju procijeniti o kojem se geometrijskom liku radi. Aktivnost gdje bi učenici mogli vidjeti o kojim se geometrijskim likovima radi može se provesti pomoću gline i ravnala tako da od gline naprave kocku te režu s ravnalom i gledaju koje će presječne likove dobiti. Naravno, potrebno je da učenici dobiju upute na koji način da dobiju većinu presjeka te da primjere skiciraju u bilježnicu. Zaključak do kojeg trebaju doći je da presjeci mogu biti točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut te najviše šesterokut s obzirom na to da kocka ima šest strana. Nakon što učenici dođu do tih zaključaka potrebno je da sami dođu do svojstava koji su potrebni za konstruiranje presječnih likova u ravnini ako su zadana tri probodišta. Sljedeća aktivnost je primjer kako bi se to moglo napraviti u nastavi matematike.

AKTIVNOST: ”*Presjeci ravninom*”

U ovoj će aktivnosti učenici:

- konstruirati presjeke kocke ravninom,
- otkriti svojstva koja će im pomoći pri konstruiranju presječnog lika,
- izračunati površinu presječnog lika,
- odrediti jednadžbu presječne ravnine,
- primjeniti presjeke u problemu iz svakodnevnog života,
- koristiti tehnologiju.

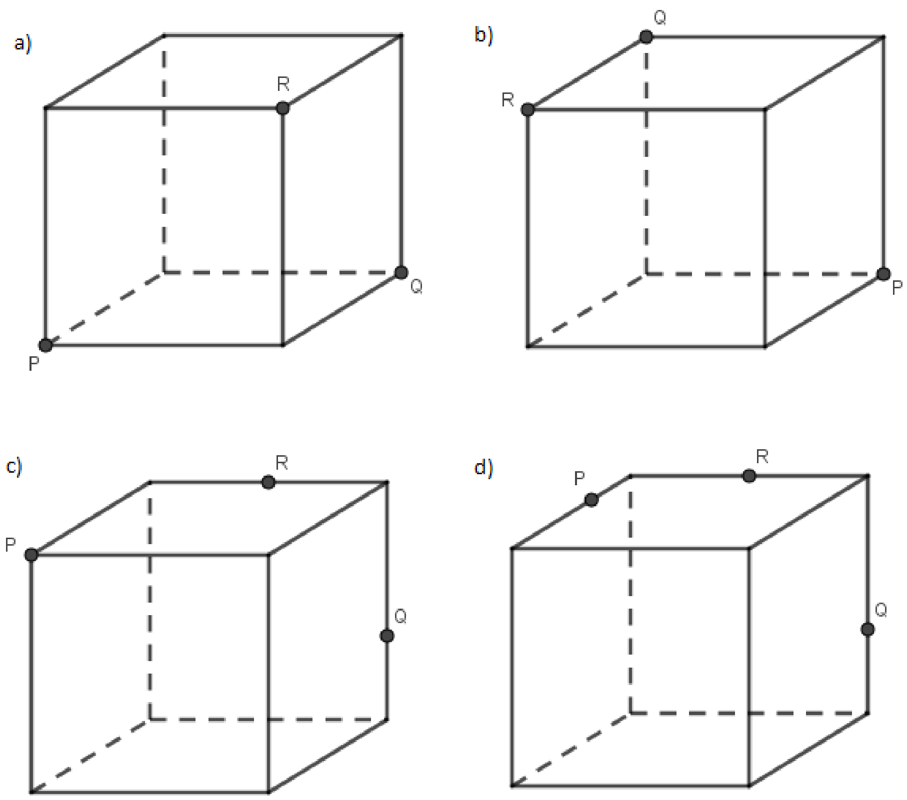
Aktivnost je predviđena za dva školska sata.

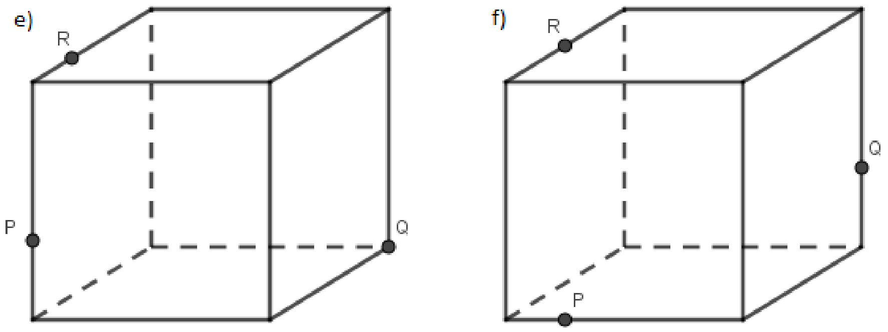
Što ćemo raditi?
Određivat ćemo presjeke kocke s ravninom ako su zadana tri probodišta.

U čemu je problem?
Ako imamo zadana tri probodišta na kocki kako konstruirati presječni lik?
Koja su svojstva koja koristimo konstruirajući presječni lik u dvodimenzionalnom prostoru?

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: nastavni listić
Oblik rada: suradnički rad u paru
Učenike podijelimo u parove. Podijelimo svakom učeniku nastavni listić te im damo upute na koji će ga način rješavati. Uputa će glasiti da svaki učenik prvo sam za sebe riješi zadatak nakon toga prokomentiraju međusobno koje je rješenje točno, da li primjećuju neko svojstvo, pravilnost te ako primjećuju zapisuju to u bilježnicu. Nakon što većina riješi nastavni listić prikažemo putem GeoGebre sva rješenja te komentiramo do kojih smo svojstava došli te ih zapisujemo na ploči.

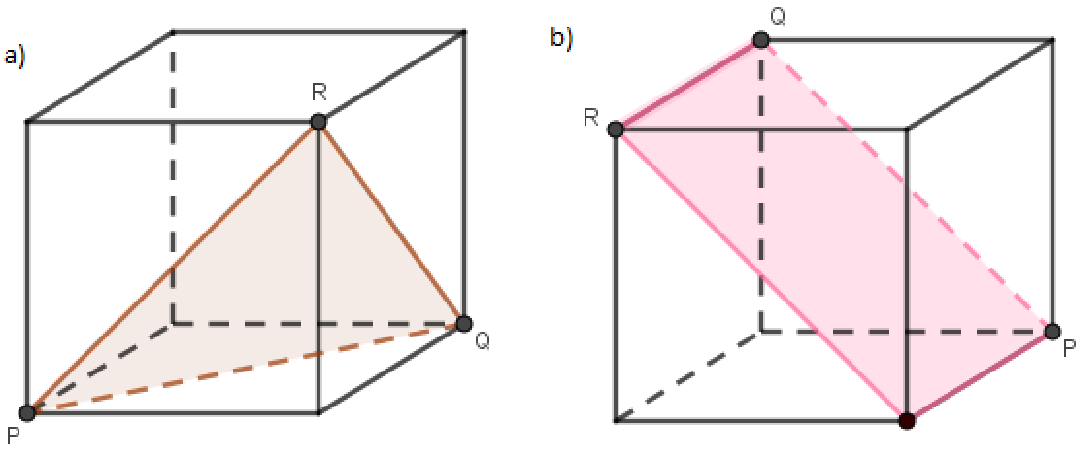
Nastavni listić
Zadatak: Nacrtaj presjek kocke s ravninom PQR.



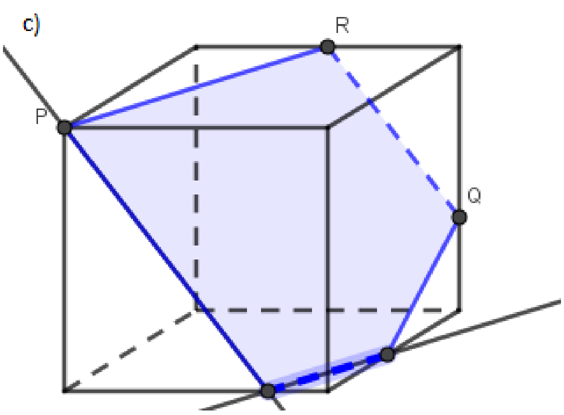


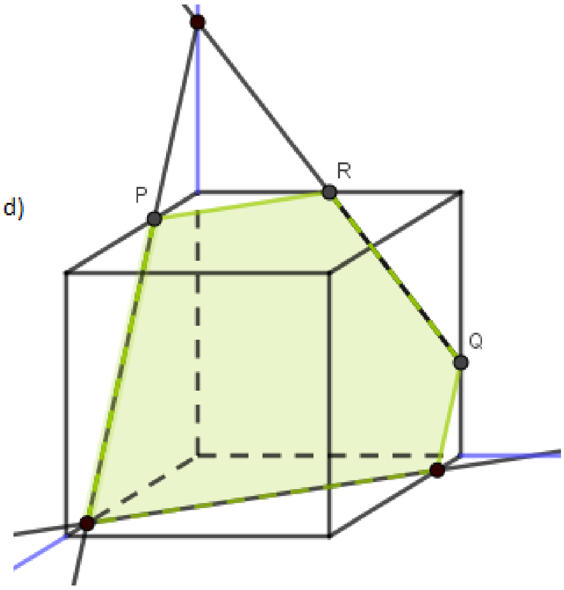
Slika 2.4: Primjer zadatka gdje su određena tri probodišta

Potražite pomoć tehnologije?
Učenicima ćemo rješenja prikazati pomoću softvera dinamičke geometrije. Trenutačno ćemo ih prikazati pomoću GeoGebre, ali to može biti Sketchpad, Mathematica ili bilo koji drugi softver. Bitno je da postupak koji prikazujemo preko GeoGebre bude jednak postupku kojeg bi radili u bilježnici te da se vidi na krajnjoj slici zbog boljeg razumijevanja. Prikažimo kako bi to izgledalo.

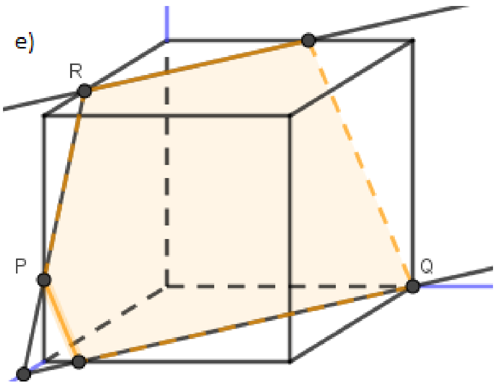


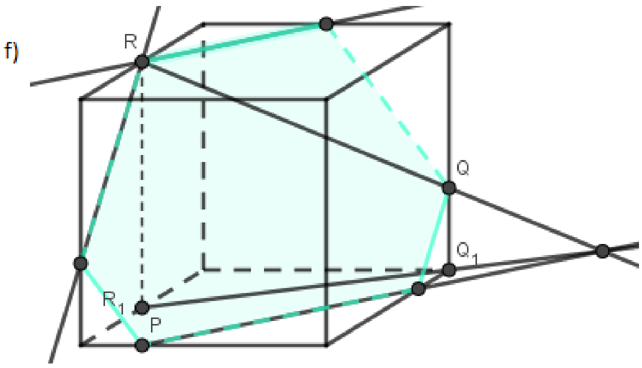
Primjeri pod a) i b) su učenicima najjednostavniji za shvatiti i najlakše im je predvidjeti kakav bi presjek mogao biti. Kod primjera a) će učenici samo spojiti točke koje se nalaze na istim stranama kocke, a kod primjera b) će uz to crtati paralele u paralelnim stranama kocke.





Kod primjera pod c) učenici spajaju točke koje pripadaju istim stranama te konstruiraju paralele na paralelnim stranama. Dok u primjeru d) učenici će naći probodište polupravca RQ i ravnine u kojoj se nalazi točka P. Zatim će spojiti probodište i točku P te tako dobiti probodište s donjom bazom te kroz točku probodišta povući paralelu s PQ. Ovaj primjer su učenici mogli napraviti i na drugi način tako da su prvo tražili probodište pravca QR s donjom bazom. Potrebno je prokomentirati oba dva načina rješavanja.



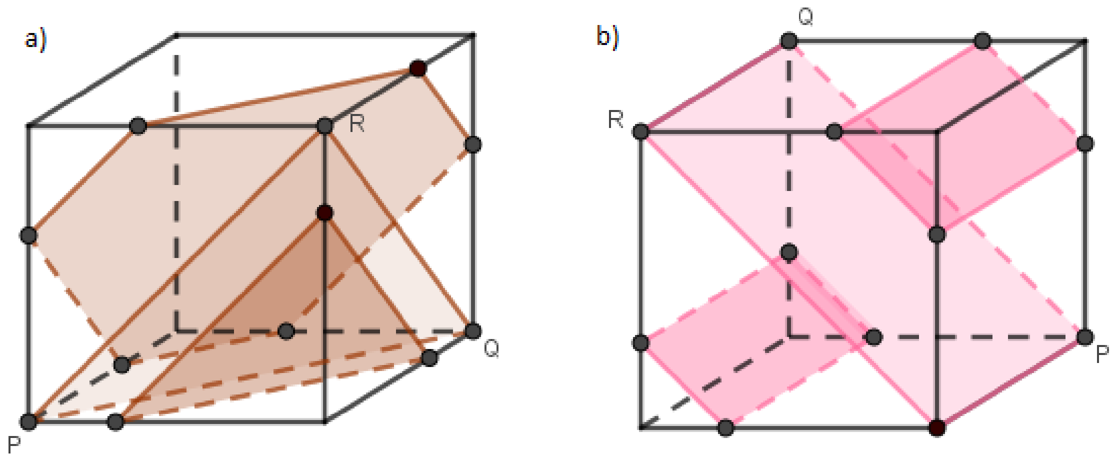


Primjer e) sličan je primjeru d) dakle učenici traže probodište polupravca QP i donje baze kocke. Tada primjećuju da se točka R također nalazi na donjoj bazi kocke iz čega zaključujemo da možemo spojiti točku R i točku probodišta. Tako smo dobili jednu stranicu presječnog lika. Nakon toga povlačimo paralele na paralelne strane kocke. Primjer se još može riješiti tako da prvo nađemo probodište pravca PQ i stražnje strane kocke. Primjer f) je učenicima najteži iz tog razloga što nemaju par točki koji se nalaze na istoj strani. Zato prvo trebaju odrediti probodište pravca PQ s donjom bazom kocke. Napravit ćemo to tako da pravac PQ ortogonalno projiciramo na donju bazu te nađemo presjek između pravca PQ i njegove ortogonalne projekcije. Nakon toga točku probodišta spojimo s točkom R te tako dobijemo jednu stranicu presječnog lika. Ostale stranice dobijemo tako da vučemo paralele na paralelnim stranama kocke.

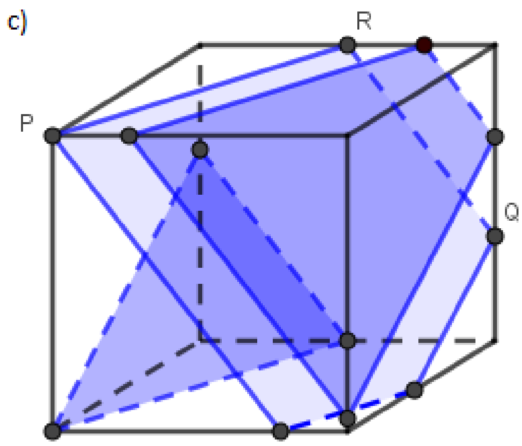
Kako to rješava teorija?
Pri konstruiranju presječnog lika koristimo sljedeća svojstva:

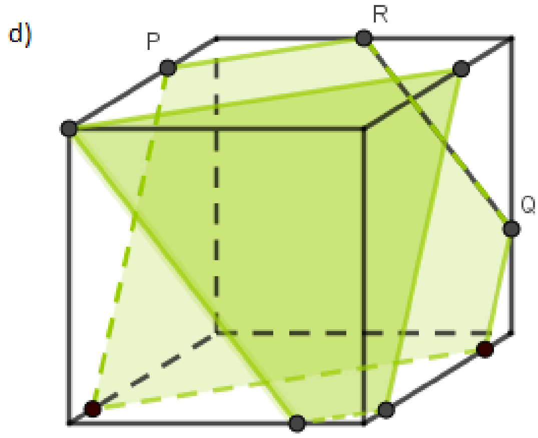
- ako se točke nalaze na istim stranama geometrijskog lika one se mogu spojiti i ta dužina je stranica presječnog lika (*primjer a)*),
- ako presječni lik siječe bar dvije strane usporedne tada su presječni pravci (odnosno stranice presječnog lika) na stranama tog tijela usporedne (*primjer b) i c)*),
- ako se vrhovi presječnog lika (probodišta) nalaze na ravninama koje se sijeku po pravcu tada se presječni pravci sijeku na tom pravcu (*primjer d), e) i f)*).

Možemo li više?
Učenici će u ovom dijelu pokušati odrediti presjeke s kockom koje su paralelne s ravninom PQR. Učenike možemo podijeliti u grupe po četvero te zadati da svaka grupa uzme jedan od zadataka na nastavnom listiću te da nacrtaju što više paralelnih ravnina. Nakon toga učenici će pokušati odrediti jednadžbe ravnine PQR tako da veličina brida kocke bude jednaka a.

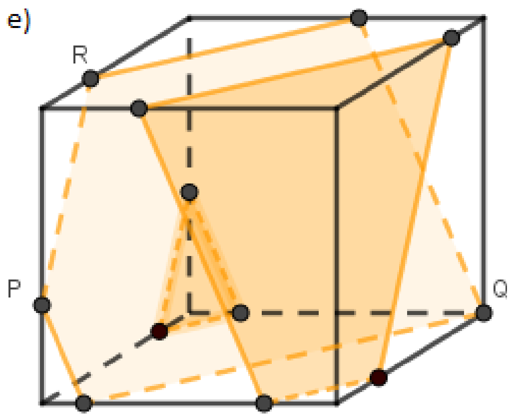


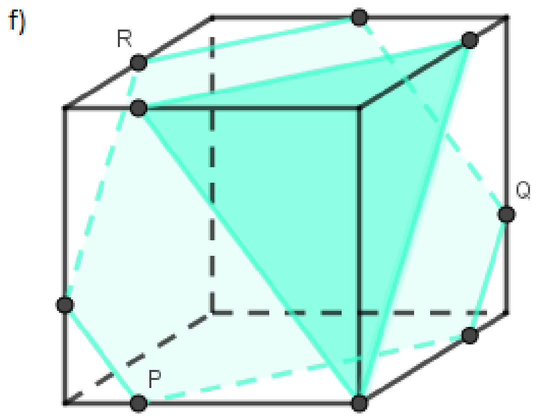
$$\text{a)} \begin{cases} x = a - a\lambda \\ y = a\lambda + a\mu \\ z = a\mu \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a] , \quad \text{b)} \begin{cases} x = a\lambda \\ y = a\mu \\ z = a - a\mu \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a]$$





$$\text{c)} \begin{cases} x = a\lambda \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\lambda + \frac{1}{2}a\mu \\ z = a - \frac{2}{3}a\mu \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a], \quad \text{d)} \begin{cases} x = \frac{1}{4}a\lambda \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\lambda + \frac{1}{2}a\mu \\ z = a - \frac{2}{3}a\mu \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a]$$

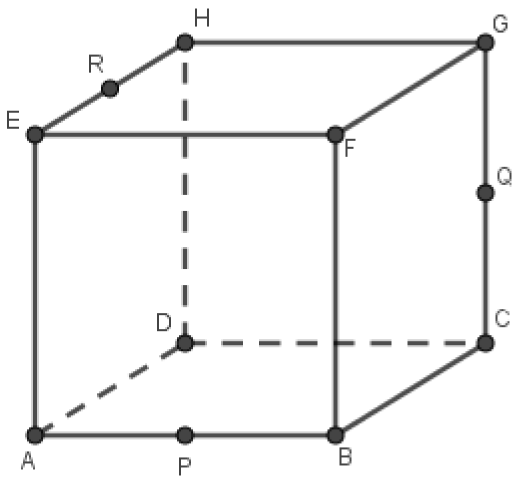




$$\text{e)} \begin{cases} x = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a\lambda - \frac{2}{3}a\mu \\ y = \frac{1}{2}a\mu \\ z = a - \frac{2}{3}a\lambda \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a], \quad \text{f)} \begin{cases} x = \frac{1}{2}a\lambda \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\lambda + \frac{1}{2}\mu \\ z = a - \frac{2}{3}a\mu \end{cases} , \lambda, \mu \in < 0, a]$$

Važno je da s učenicima provedemo diskusiju oko metoda rješavanja ovakvih situacija. Neki učenici će moći sebi vizualizirati odmah u glavi paralelne ravnine međutim neki učenici će koristiti drugo svojstvo, tj. izabrat će jednu točku te vući paralele na paralelnim stranama. Potrebno je provesti i diskusiju oko veze položaja triju točaka na bridovima kocke s presječnim likom. Tako učenici mogu primijetiti ako se sve tri točke nalaze na susjednim bridovima dobit ćemo trokut, ako se niti jedna od točaka ne nalazi na susjednim bridovima dobit ćemo šesterokut te ako imamo dvije točke koje se nalaze na susjednim bridovima dobit ćemo četverokut ili peterokut. Najjednostavniji način zapisa ravnine je u parametarskom obliku, ali učenici je mogu zapisati i u drugim oblicima tako da je bitno to diskutirati s njima.

Primjena naučenog
Zadatak 1: Dana je kocka $ABCDEFGH$.



Slika 2.5: Kocka $ABCDEFGH$ i zadana probodišta P, Q i R

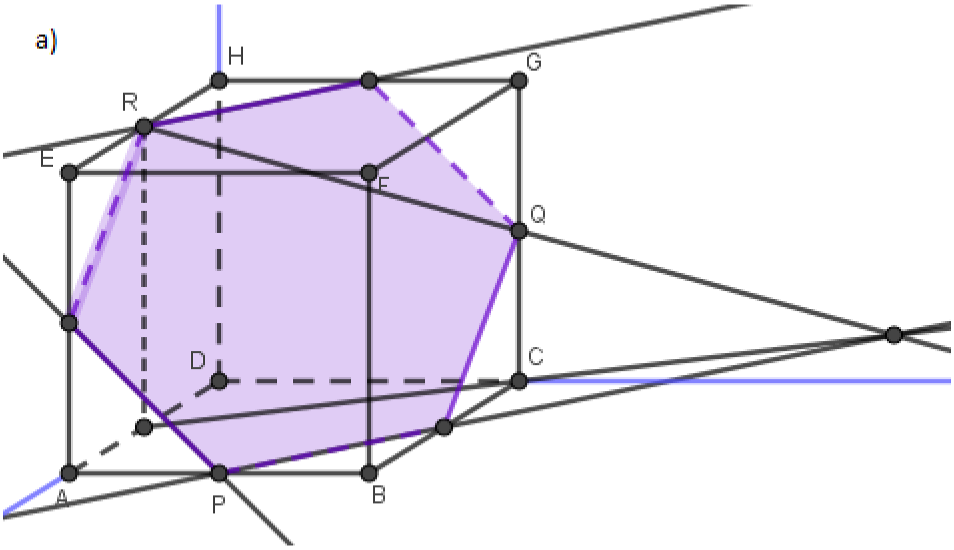
a) Nacrtajte presjek kocke s ravninom PQR. Što je presječni lik?

b) Odredite presjek kocke s ravninom koja je paralelna ravnini PQR, a sadrži točku A. Što je presječni lik?

c) Odredite jednadžbu svih paralelnih ravnina s ravninom PQR koje zadanu kocku presijecaju po trokutu (duljina stranice jednaka je a).

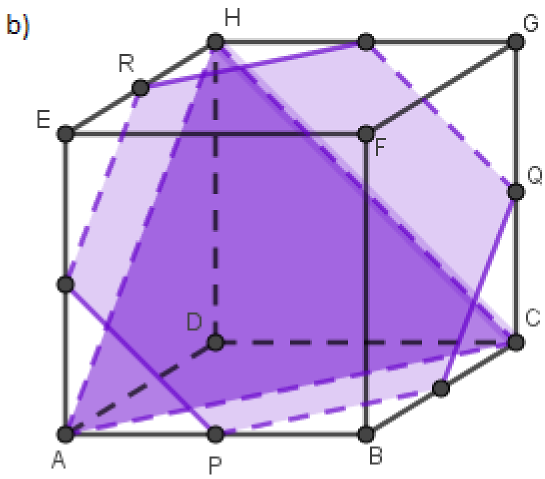
d) Odredite površinu presječnih likova iz zadatka a) i b) ako duljina brida kocke iznosi a te znamo da su točke P, Q i R redom polovišta stranica AB, CG i EH.

Rješenje:



Slika 2.6: Presječna ravnina PQR

Presječni lik je pravilni šesterokut.



Slika 2.7: Paralelna ravnina kroz točku A

Presječni lik je jednakostraničan trokut.

c)Najprije odredimo koordinate točaka A, H i C te ćemo pomoću njih dobiti koordinate vektora smjera. Pomoću tih podataka moći ćemo napisati parametarsku jednadžbu ravnine. Pa sa slike 2.5 vidimo $A(a, 0, 0), C(0, a, 0), H(0, 0, a)$. Vektori smjera su: $(a, 0, -a)$ i $(0, a, -a)$. Dakle, jednadžba ravnine paralelne s ravninom PQR u obliku trokuta je:

$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = a\mu \\ z = a - a\lambda - a\mu \end{cases}, \lambda, \mu \in <0, a].$$

d) U zadatku a) imamo pravilni šesterokut, njegovu površinu računamo pomoću formule

$$P = 6 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$$

tako da s označava stranicu šesterokuta. Najprije trebamo odrediti kolika je duljina stranice šesterokuta koju ćemo dobiti pomoću Pitagorina poučka iz trokuta koji se sastoji od strane šesterokuta te od dvaju bridova kocke. Pa imamo:

$$s^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + (\tfrac{a}{2})^2.$$

Kada izračunamo desnu stranu i korijenujemo dobivamo sljedeće rješenje.

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, stranica šesterokuta iznosi $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, pa je površina jednaka:

$$P = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

U zadatku b) imamo jendakostraničan trokut kojemu se stranice jednake duljini dijagonale kvadrata koja iznosi $a\sqrt{2}$. Površina jednakostraničnog trokuta se računa po formuli

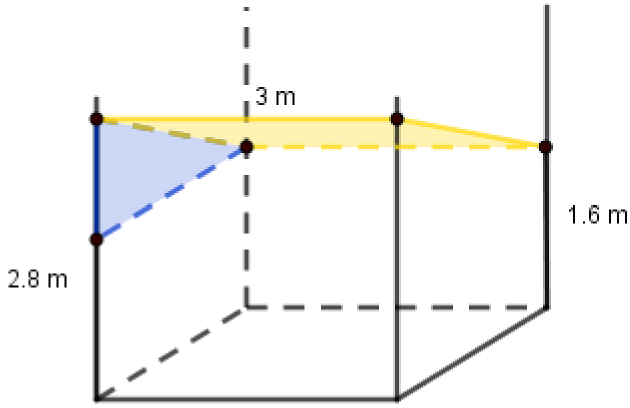
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2,$$

gdje je s stranica jednakostraničnog trokuta. Pa imamo da površina zadanog trokuta iznosi:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Zadatak 2: (preuzeto s ([6])) Gospodin Kockica djeci je odlučio napraviti ljetnu kućicu za igru. Kao temelje postavio je čvrstu ploču kvadratnog oblika dimenzije 3m x 3m te u vrhovima temelja uzdignuo stupove visine 3 m. No, zbog krošnje drveta ispod kojeg se nalazi kućica nije mogao postaviti ravni krov na najvećoj visini. Odlučio je čvrstu tkaninu privezati o stupove i napraviti krov. Dopuštene visine bile su 2.8 m na prednjim stupovima, a na stražnjim samo 1.6 m. Odredite površine tkanine potrebne za završetak kućice gospodina Kockice.

Rješenje:
Najprije napravimo skicu da znamo kojeg će oblika biti tkanina te na skici označimo sve što znamo iz teksta zadatka.



Slika 2.8: Skica zadatka

Primjećujemo da je tkanina pravokutnog oblika (presjek kocke ravninom) kojemu je jedna stranica duljine 3 m (paralelna je s bridom kocke), a drugu treba izračunati. Iz pravokutnog (plavi trokut sa 2.8) trokuta dobivamo duljinu druge stranice

$$\sqrt{(2.8-1.6)^2+3^3} = \sqrt{1.2^2+3^2} = \sqrt{10.44} \approx 3.23m\ .$$

Dakle, dimenzija tkanine je 3 m x 3.23 m, odnosno približna površina tkanine je 9.69 m^2.

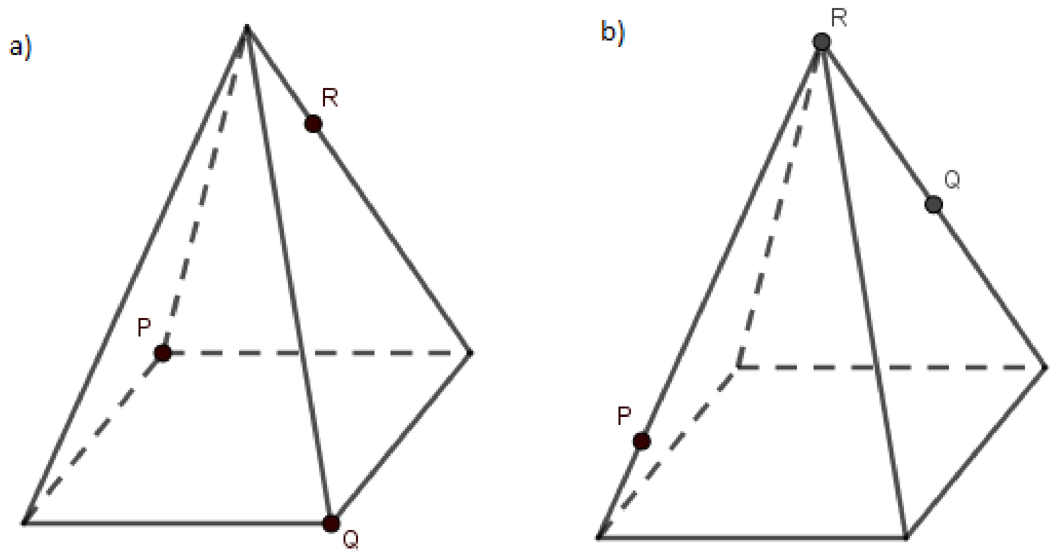
Uputa nastavniku
Aktivnost se može provesti tako da svaki učenik može sam pomoću računala konstruirati presjeke ako škola ima mogućnost za to. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije u trećem razredu srednje škole rade analitičku geometriju u trodimenzionalnom prostoru (jednadžbe ravnina) dok drugi učenici to ne rade. Stoga je s njima moguće izgraditi te

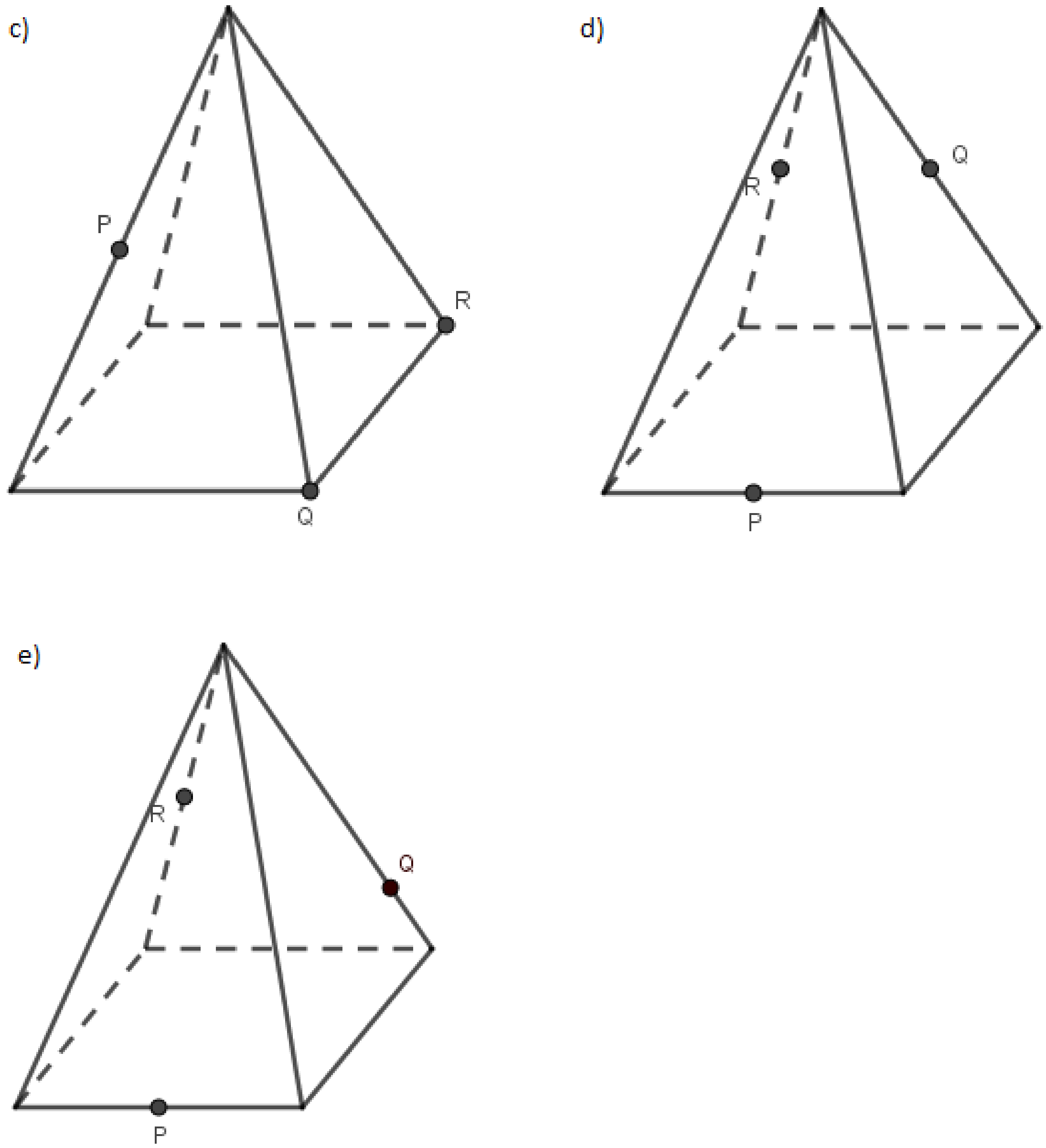
dodatne veze u matematičkim sadržajima, te povezati elementarnu trodimenzionalnu geometriju s analitičkom. Učenicima tijekom uvježbavanja možemo dati ostale vrste prizmi kao što je trostrana, peterostrana ili šesterostrana prizma tako će učenici analogijom doći do zaključka da vrijede ista svojstva za konstrukciju kao i kod kocke.

2.2 Piramide

Nakon što su učenici otkrili svojstva za konstrukciju presječnog lika kod prizmi trebali bi se zapitati što se događa kada imamo presjek ravnine i piramide da li se konstrukcija radi na isti način kao i kod prizmi ili su ipak drugačija svojstva. Aktivnosti se mogu napraviti kao i što smo kod kocke, najprije da učenici pomoću gline, geometrijskih modela dolaze do raznih presječnih likova te nakon toga otkrivaju svojstva konstrukcije na raznim primjerima. Međutim, ako smo primijetili da učenici više nemaju problema oko vizualizacije presjeka geometrijskog tijela i ravnine možemo odmah prijeći na svojstva. Prikazat ću primjere koji se mogu primijeniti u aktivnosti te njihova rješenja. Koristit ću četverostranu piramidu, ali s učenicima bi se trebalo proći kroz ostale vrste piramide.

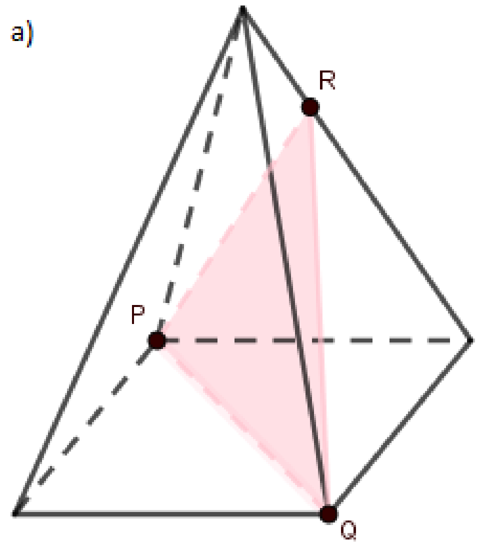
Primjer: Nacrtaj presjek piramide s ravninom *PQR*.

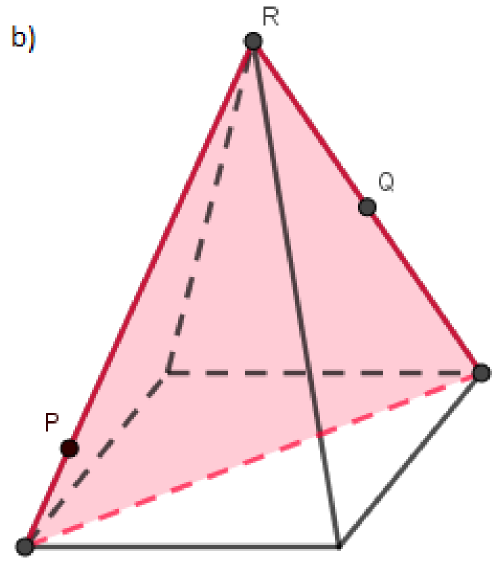




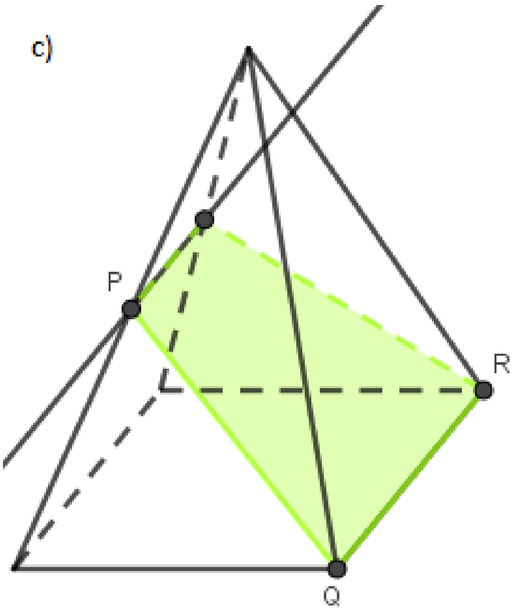
Slika 2.9: Primjeri zadatka za presjek ravnine i piramide

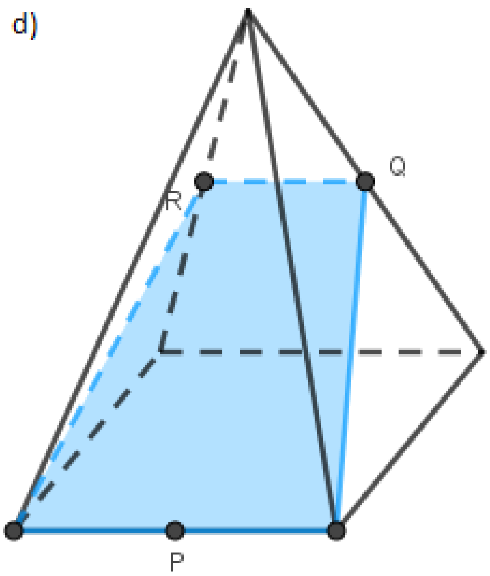
Rješenje:



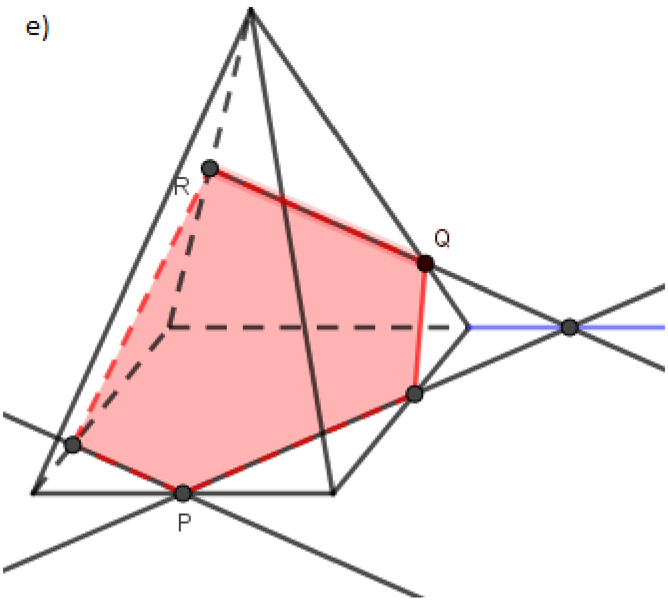


Učenici će u primjeru a) i b) spajati dužine sa zadanim točkama jer se parovi točaka nalaze na istim stranama, moguće je da im b) primjer bude zbunjujući ako si ne mogu tu situaciju vizualizirati.





Kod primjera c) učenici povuku paralelu kroz R s dužinom PQ te tako dobivamo jednu stranicu presječnog lika. Nakon toga povežemo točke na istim stranama. Kod primjera d) učenici moraju primijetiti da je dužina RQ srednjica tog trokuta te znamo da je ona paralelna s osnovicom trokuta, u našem slučaju bridom baze koja je paralelna s bridom na kojem se nalazi točka P iz čega zaključujemo da je taj brid paralelan s RQ te da je to jedna stranica presječnog lika. Na kraju samo povežemo sve točke koje znamo.



Učenici će prvo primijetiti da se točke R i Q ne nalaze na istoj strani kao i točka P zbog toga tražimo probodište polupravca RQ s bazom (točka P se nalazi u njoj). Probodište spojimo s točkom P te dobivamo jednu stranicu presječnog lika. Nakon toga povlačimo paralele i spajamo točke na istim stranama. Drugi način na koji se može riješiti ovaj primjer je da crtamo paralelu s dužinom RQ kroz točku P te na kraju povežemo točke na istim stranama.

Učenici bi trebali zaključiti nakon te aktivnosti da svojstva konstrukcije vezano za prizme vrijedi i za piramide bilo riječ o trostranoj, četverostranoj ili bilo kojoj drugoj piramidi.

2.3 Obla tijela

Učenici se mogu još susresti s presjecima gdje su geometrijska tijela valjak, stožac ili kugla. U tim situacijama za presjeke možemo dobiti krivulje drugog reda. Kod presjeka valjka i ravnine možemo dobiti kružnicu (ravnina je paralelna s bazom) i elipsu (ravnina nije paralelna s bazom). U situaciji ako je ta ravnina okomita na bazu dobivamo pravokutnik kao presječni lik. Kod presjeka stošca i ravnine dobivamo kružnicu (ravnina je paralelna s bazom), elipsu (ravnina nije paralelna s bazom) te parabolu (ravnina je okomita na bazu). Specifičan je slučaj ako je ravnina okomit ana bazu i prolazi kroz vrh stošca dobivamo trokut kao presječan lik. Ravninski presjeci kugle su kružnice što je specifično za to geometrijsko tijelo. Učenicima je ove presjeke najzanimljivije prikazati pomoću animacije u nekom geometrijskom softveru kao što je GeoGebra, Sketchpad itd.

Poglavlje 3

Geometrijsko modeliranje

U matematičkom obrazovanju modeliranje je jedna od važnih sastavnica za razvijanje "matematičkih navika uma". Ono nam omogućava da prikažemo kako se matematika može koristiti u svakodnevnom životu. Zapravo, matematičko modeliranje je otkrivanje i testiranje matematičkih modela ili prikaza stvarnih predmeta ili procesa. Ono se može opisati kao proces od stvarne situacije do matematičkog modela i natrag, tj. kažemo da je modeliranje cikličku proces. Cilj matematičkog modeliranja je da se svakodnevni problem objasni na matematički način. ([1]) Geometrijsko modeliranje je jedna vrsta matematičkog modeliranja koja se bavi geometrijskim problemima. U ovom poglavlju ćemo prikazati takve geometrijske probleme vezane za geometriju prostora. Dakle, svakodnevne geometrijske probleme ćemo rješavati pomoću matematike. Ovakvi problemi učenicima ponekad znaju biti monotoni jer su najčešće povezani s računanjem volumena ili oplošja zato ih treba napraviti na što zanimljiviji način. Probleme ćemo prikazati pomoću aktivnosti uvježbavanja.

Aktivnost uvježbavanja koja se može provesti nakon što učenici nauče sva geometrijska tijela te dobro znaju njihova svojstva je sljedeća.

AKTIVNOST:"*Pronađi tijelo*"

U ovoj će aktivnosti učenici:

- prepoznavati sa slike geometrijska tijela,
- razlikovati prizmu, piramidu i oblo tijelo.

Aktivnost je predviđena za 20 minuta nastavnog sata.

Što ćemo raditi?
Učenici će sa slike prepoznati što više geometrijskih tijela te za ta geometrijska tijela odre-

diti jesu li prizme, piramide ili obla tijela.

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: nastavni listići sa slikama
Oblik rada: invidualan rad
Svakom učeniku podijelimo nastavni listić na kojemu se nalaze slike te damo uputu da nađu što više geometrijskih tijela na slikama te u svoje bilježnice napišu o kojim je geometrijskim tijelima riječ.

Nastavni listić
Pronađi geometrijsko tijelo.

Slika 3.1: Slike Zagreba s Gornjeg grada

Slika 3.2: Slika Zagreba s Gornjeg grada te prostor ispred Škole primijenjene umjetnosti i dizajna Zagreb

Slike su slikane u gradu Zagrebu tako da učenici mogu prepoznati zgrade te s njima možemo i komentirati zašto su te zgrade bitne (poveznica s poviješću). Učenici će naći razna tijela ne samo ona na koja su navikli. Bitno je da im omogućimo da se na slikama vide i kosa tijela, a ne samo uspravna. Na ovaj način možemo vidjeti jesu li učenici shvatili ovaj dio gradiva. Aktivnost se može provesti tako da se učenike podijeli u grupe te da se napravi malo natjecanje koja će grupa naći više geometrijskih tijela. Tada ćemo slike prikazivati na projektoru te će aktivnost trajati duže od 20 min. Slike koje se daju kao primjeri mogu biti iz bilo kojeg grada ne treba biti određeno iz Zagreba.

3.1 Prizme

Prizma je uglato geometrijsko tijelo koje ima dvije baze. Učenici po toj definiciji najlakše razlikuju prizme od ostalih tijela. Ono što učenici još moraju znati o prizmama je računati volumen, oplošje, crtati dijagonalne presjeke te računati njihove površine, crtati presječne likove,... U sljedećoj aktivnosti će učenici na primjeru iz stvarnog života provjeriti svoje znanje vezano za prizme te ih povezati i s ostalim geometrijskim tijelima.

AKTIVNOST: "*Prizme*"

U ovoj će aktivnosti učenici:

- izrađivati stvarne modele danih objekata,
- otkriti pojam krnje prizme,
- skicirati tlocrt, nacrt i bokocrt objekta,
- određivati mjerna obilježja tijela (računati duljine, oplošje, volumen i mjeru kuta),
- koristiti mrežu geometrijskih tijela pri rješavanju zadataka,
- rješavati problemske zadatke iz svakodnevnog života.

Što ćemo raditi?
Učenici će sa slike prepoznati od kojih se geometrijskih tijela sastoji zadani objekt te rješavati zadatke koji su im zadani vezano za taj zadatak.

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: nastavni listić, papiri u bojama, škare, ljepilo, geometrijski pribor
Oblik rada: suradnički rad u timovima

Učenike podijelimo u četveročlane grupe te im damo radne listiće (imamo tri različita nastavna listića) te potreban materijal. Nakon toga učenici zajedno rješavaju zadatke koji su im zadani.

Nastavni listić 1

a) Izradite stvarni model objekta na slici pomoću papira kojeg ste dobili.

b) Odredite od kojih geometrijskih tijela se sastoji dani objekt.

c) Koliko je sukladnih geometrijskih tijela?

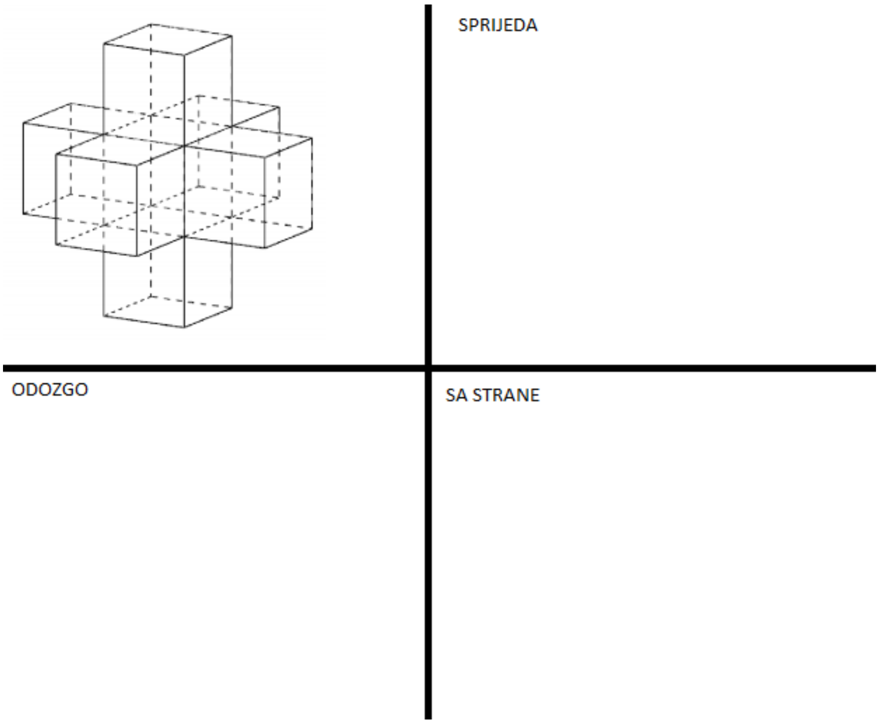
d) Koja sukladna tijela treba dodati i koliko njih kako bismo dobili kocku?

e) Procijenite duljinu brida jedne kocke sa slike koja čini ovaj objekt. Na temelju te procjene izračunajte oplošje i volumen objekta sa slike.

f) Izračunajte oplošje i volumen nadopunjenje kocke iz d) zadatka.

g) Za koliki kut moramo zarotirati objekt ako ga želimo postaviti u uspravnom obliku (baze paralelne sa zemljom)?

h) Odredite kako izgleda taj objekt ako je postavljen uspravno (zadatak g))kada ga gledamo odozgo, sa strane i sprijeda te nacrtajte na predviđeno mjesto.



Slika 3.3: Prilog uz zadatak h)

Nastavni listić 2

Slika 3.4: Sat u obliku "krnje kocke" na okretištu Dubrava

a) Koje je geometrijsko tijelo najsličnije objektu danom na slici?

b) Izradite stvaran model tog geometrijskog tijela pomoću njegove mreže.

c) Kako bismo dobili model od danog objekta, koja geometrijska tijela moramo odrezati? Koliko je tih tijela?

d) Procijenite duljinu brida tog geometrijskog tijela iz zadatka a) te izračunajte oplošje i volumen.

e) Pomoću te procijenjene duljine izračunajte oplošje i volumen danog objekta te volumen geometrijskih tijela koje moramo odrezati (zadatak c)).

f) Pretpostavimo da unutar sata postoji mehanizam valjkastog oblika. Koliki prostor unutar sata najviše može zauzeti taj mehanizam?

Nastavni listić 3

Slika 3.5: Sat u obliku ”krnje trostrane prizme” u blizini Trešnjevačkog placa

a) Koje je geometrijsko tijelo najsličnije objektu danom na slici?

b) Izradite stvaran model tog geometrijskog tijela pomoću njegove mreže.

c) Kako bismo dobili model od danog objekta, koja geometrijska tijela moramo odrezati? Koliko je tih tijela?

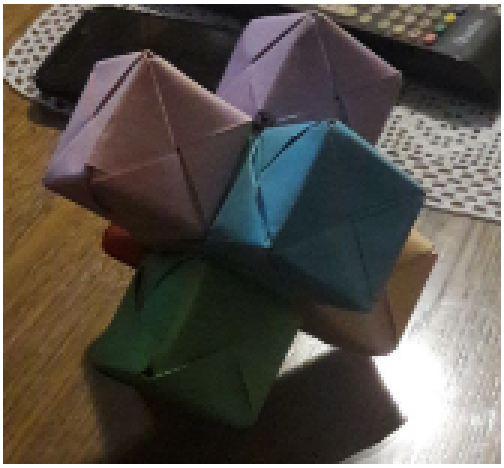
d) Procijenite duljinu brida tog geometrijskog tijela iz zadatka a) te izračunajte oplošje i volumen.

e) Pomoću te procijenjene duljine izračunajte oplošje i volumen danog objekta te volumen geometrijskih tijela koje moramo odrezati (zadatak c)).

f) Pretpostavimo da unutar sata postoji mehanizam valjkastog oblika. Koliki prostor unutar sata najviše može zauzeti taj mehanizam?

Rješenja nastavnih listića

Nastavni listić 1



Slika 3.6: Stvarni model objekta iz nastavnog listića 1

S obzirom na to da učenicima nismo odredili na koji način da naprave model možemo očekivati različita rješenja. Cilj je da učenici u tom koraku shvate da se model sastoji od sedam kocaka i da se pomoću tih kocaka rade modeli. Kocke učenici mogu napraviti na razne načine pomoću mreže ili pomoću nekih tehnika origamija.

b) Dani objekt se sastoji od kocki.

c) Sukladnih geometrijskih tijela, tj. kocki je sedam.

d) Trebamo dodati osam kocki kako bismo objekt nadopunili do kocke.

e) Najprije odredimo kolika bi bila duljina brida jedne kocke od koje se sastoji objekt. Primijetimo da se pokraj objekta nalaze djeca u dobio oko 6, 7 godina njihova prosječna visina je oko 1.2 m (učenici mogu izraziti i u cm pa bi to bilo 120 cm. Ako usporedimo njihovu visinu i duljinu brida jedne kocke možemo primijetiti da je visina približno jednaka bridu, pa možemo procijeniti da je brid duljine 1.2 m. Sada izračunajmo oplošje i volumen objekta. Oplošje tijela je zbroj površina svih likova koje određuju geometrijsko tijelo. Pa pomoću stvarnog modela pogledajmo koliko je tih likova. Vidimo da ih je 30 i znamo da su ti likovi kvadrati, pa izračunajmo oplošje:

$$O = 30 \cdot (1.2)^2 = 43.2m^2.$$

Volumen ćemo izračunati tako da znamo da se objekt sastoji od sedam kocki te znamo kako se računa volumen kocke, pa imamo:

$$V = 7 \cdot (1.2)^3 = 12.096m^3.$$

Dakle, oplošje zadanog objekta iznosi 43.2 m^2, a volumen 12.096 m^3.

f) Pomoću stvarnog modela primijetit ćemo da se jedna strana nadopunjene kocke sastoji od 9 kocaka te da je brid nadopunjene kocke tri puta veći od jedne kocke brida, tj. iznosi $3 \cdot 1.2 = 3.6m$. Dakle, oplošje nadopunjene kocke iznosi:

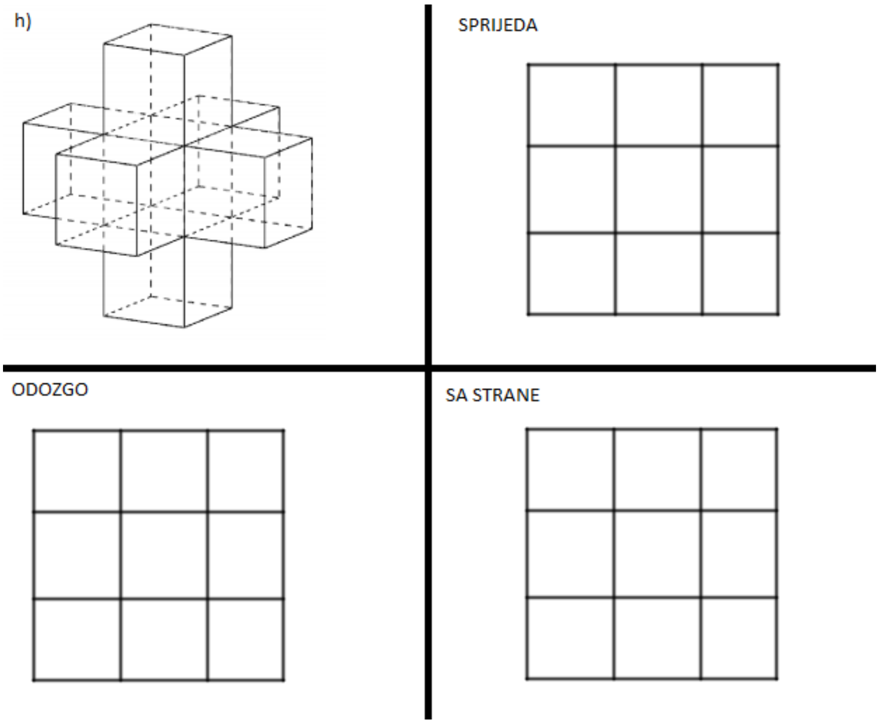
$$O = 6 \cdot (3.6)^2 = 77.76m^2.$$

Dok, volumen iznosi:

$$V = (3.6)^3 = 46.656m^3.$$

Učenici su mogli i na drugačiji način izračunat volume tako da zbroje volumen objekta s nadodanim volumenom kocaka.

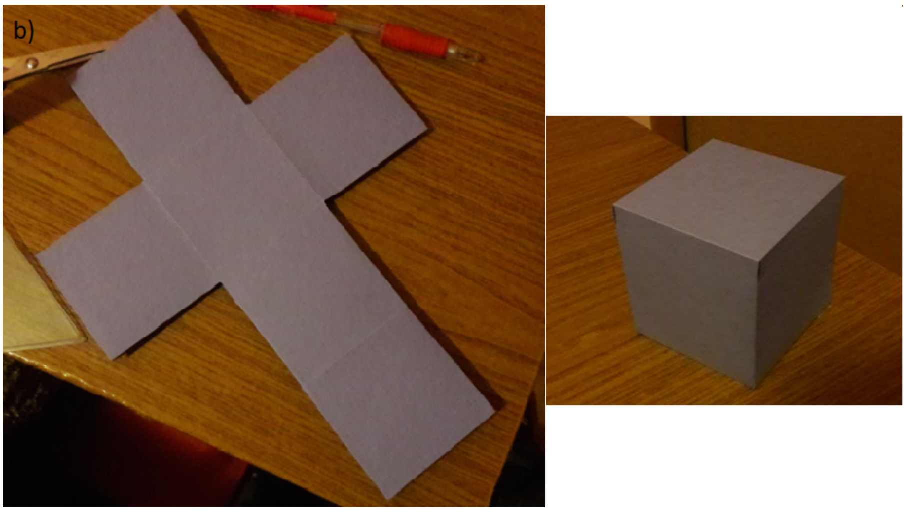
g) Pomoću stvarnog modela i slike objekta primijetiti ćemo da lako dođemo do tog kuta. Učenici će lako primijetiti da se radi o kutu koji je veličine 60°.



Uputa nastavniku: Stvarni modeli se mogu još raditi pomoću Lego kockica ili drvenih kockica. Učenicima prilikom procjene možemo dati uputu da obrate pažnju na djecu na slici i da li znaju koja je njihova prosječna visina. Bitno je da učenicima priznajemo sve načine rješavanja.

Nastavni listić 2

a) Najsličnije geometrijsko tijelo je kocka.



Slika 3.7: Postupak dolaženja do stvarnog modela pomoću mreže kocke

c) Trebamo odrezati osam sukladnih piramida.

d) Učenici bi trebali procijeniti da je duljina brida kocke otprilike jedan metar, pa je oplošje jednako:

$$O_k = 6 \cdot 1^2 = 6m^2.$$

Volumne iznosi:

$$V_k = 1^3 = 1m^3.$$

e) Ovaj zadatak ćemo najlakše riješiti tako da najprije izračunamo sve podatke vezano za piramide pa tek na zadani objekt. Po slici možemo primijetiti da su te piramide zapravo tetraedri i da bi duljina njihova brida po procijeni trebala biti jedna četvrtina brida kocke, tj. $0.25m$. Dakle, oplošje tetraedar iznosi:

$$O_t = 4 \cdot \frac{(0.25)^2\sqrt{3}}{4} = 0.0625\sqrt{3}m^2.$$

Volumen iznosi:

$$V_t = \frac{(0.25)^3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{768}m^3.$$

Sad izračunajmo volumen i oplošje objekta. Oplošje ćemo izračunati tako da izračunamo površinu jedne strane i pomnožimo sa šest. Površinu ćemo dobiti tako da od kvadra oduzmemo četiri puta trokut koji pripada tetraedru. Pa imamo:

$$P = 1^2 - 4 \cdot \frac{(0.25)^2\sqrt{3}}{4} = 1 - 0.0625\sqrt{3}m^2.$$

Izračunajmo oplošje objekta:

$$O_o = 6 \cdot (1 - 0.0625\sqrt{3}) = 6 - 0.375m^2.$$

Volumen ćemo dobiti tako da od volumena kocke oduzmemo osam puta volumen tetraedra. Pa imamo:

$$V_o = 1 - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{768} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{96} = \frac{96-\sqrt{3}}{96}m^3.$$

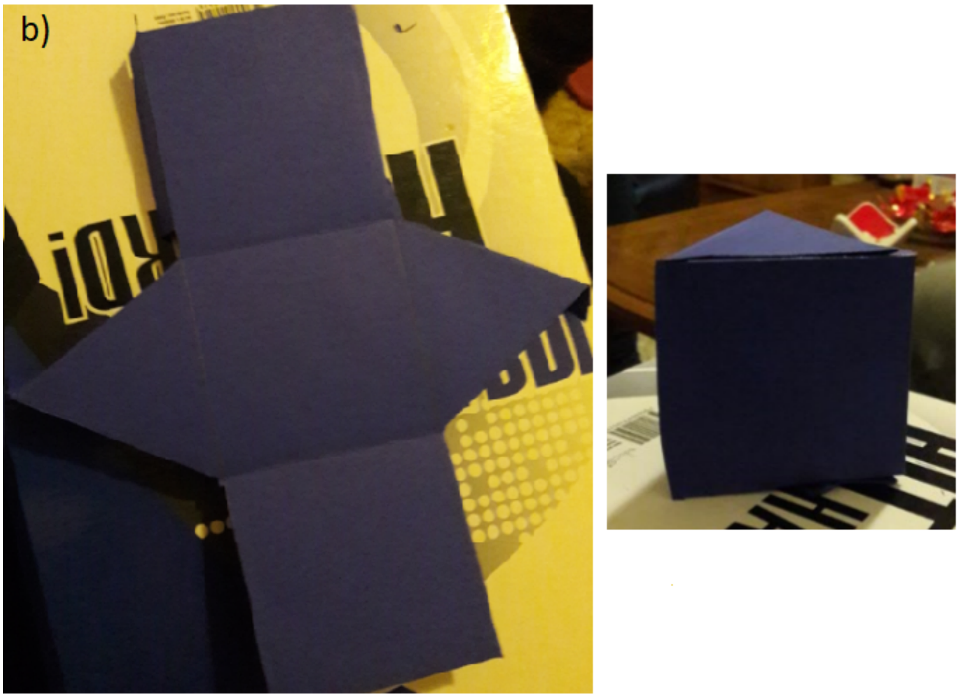
f) Znamo da je visina valjka jednaka $1m$ iz tog razloga što se nalazi unutar zadanog objekata. Taj volumen iz istog razloga ne smije biti veći od volumena objekta, tj. $\frac{96-\sqrt{3}}{96}m^3$. Promjer baze ne smije biti veći od $\sqrt{2} - 0.5m$, pa ćemo taj promjer uzeti kao maksimalan. Dakle, polumjer iznosi $\frac{\sqrt{2}-0.5}{2}m$. Izračunajmo sad maksimalan volumen.

$$V_v = (\frac{\sqrt{2}-0.5}{2})^2\pi \cdot 1 = \frac{(2.25-\sqrt{2})\pi}{4}m^3.$$

Na kraju samo provjerimo da li zaista volumen valjka manji od volumena objekta što zaista jest.

Nastavni listić 3

a) Najsličnije geometrijsko tijelo je trostrana prizma.



Slika 3.8: Postupak dolaženja do stvarnog modela pomoću mreže trostrane prizme

c) Trebamo odrezati šest sukladnih piramida.

d) Učenici bi trebali procijeniti da je duljina brida trostrane prizme otprilike jedan metar te primijetiti da se plašt sastoji od tri kvadra. Dakle, oplošje trostrane prizme jednak je:

$$O_p = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6+\sqrt{3}}{2} m^2.$$

Volumen iznosi :

$$V_p = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} m^3.$$

e) Što se tiče odrezanih geometrijskih tijela radi se o tetraedrima koji imaju jednake dimenzije kao u prethodnom nastavnom listiću pod e). Zato izračunajmo oplošje i volumen zadanog objekta pomoću tih podataka te je strana plašta jednaka strani prethodnog objekta. Pa kako bi izračunali oplošje trebamo još izračunati površinu baze koju ćemo dobiti da od površine baze trostrane prizme oduzmemo tri puta jednakostraničan trokut od tetraedra, pa imamo:

$$P_b = \frac{\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{0.0625\sqrt{3}}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{64} m^2.$$

Sada možemo izračunati oplošje objekta koje iznosi:

$$O_o = 3 \cdot (1 - 0.0625\sqrt{3}) + 2 \cdot \frac{13\sqrt{3}}{64} = \frac{96+7\sqrt{3}}{32} m^2.$$

Volumen ćemo dobiti tako da od volumena trostrane prizme oduzmemo šest puta volumen tetraedra, pa imamo:

$$V_o = \frac{\sqrt{3}}{4} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{768} = \frac{31\sqrt{3}}{128} m^3.$$

f) Ovdje moramo primijetiti da visina valjka može biti maksimalno $0.5m$, a polumjer jednak kao što je bio u prethodnom nastavnom listiću $\frac{\sqrt{2}-0.5}{2}m$. Pa imamo da je volumen tog valjka jednak:

$$V_v = (\frac{\sqrt{2}-0.5}{2})^2 \cdot 0.5 \cdot \pi = \frac{(9-4\sqrt{2})\pi}{32}.$$

Uputa nastavniku: Nakon što svi učenici riješe svoje listiće treba im objasniti pojam krnje prizme. Treba im omogućiti da oni daju ideje kako bi zvali takve prizme te nakon nekog vremena ako ne otkriju im reći naziv. Tako će najbolje zapamtiti tu vrstu prizme.

3.2 Piramide

Piramida je uglato geometrijsko tijelo koje ima jednu bazu. Učenici po toj definiciji najlakše razlikuju piramidu od ostalih tijela. Ono što učenici još moraju znati o piramidi je računati volumen, oplošje, crtati presječne likove,... U sljedećoj aktivnosti učenici će saznati koji objekt može nastati ako spojimo dvije piramide te će ponoviti stvari vezane za piramidu.

AKTIVNOST: "*Piramide!*"

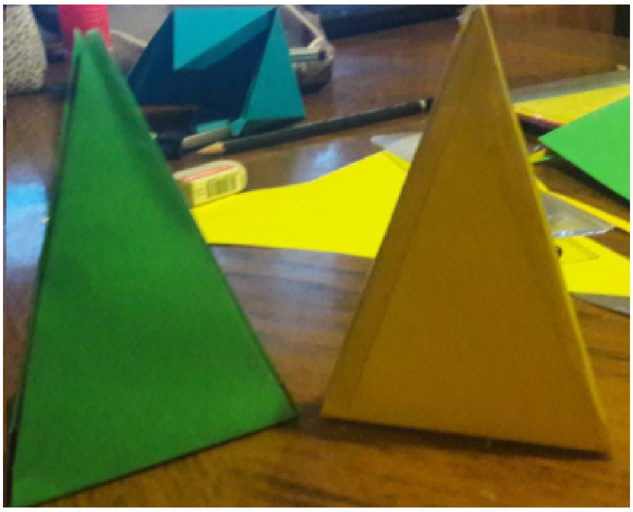
U ovoj će aktivnosti učenici:

- pomoću stvarnih modela otkriti presjek dviju piramida,
- određivati mjerna obilježja tijela (računati duljine, oplošje, volumen,...),

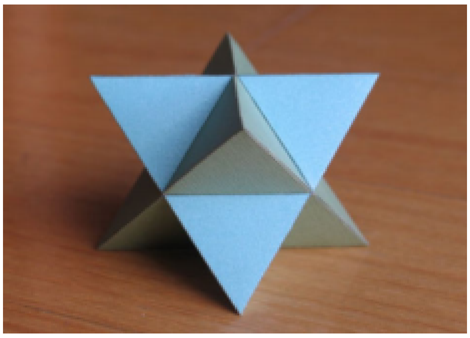
- rješavati problemske zadatke.

Što ćemo raditi?
Učenici će pomoću stvarnih modela otkriti presjek između dvije piramide te rješavati zadatke koji su im zadani.

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: škare, papiri u boji, nastavni listić
Oblik rada: individualni rad
Svakom učeniku podijelimo potreban materijal te zajedno s učenicima napravimo upute dajući im upute. Nakon toga presijecamo te dvije piramide i komentiramo što dobivamo za presjek. Kasnije učenici svako za sebe rješava nastavni listić.



Nastavni listić



a) Napravi stvarni model objekta sa slike.

b) Presjek dviju piramide sa slike tvori koje geometrijsko tijelo?
Uputa: Iskoristi stvarni model presjeka.

c) Izračunaj oplošje i volumen piramida stvarnog modela koristeći stvarne mjere modela.

d) Gledajući sliku i koristeći stvarni model koji smo napravili koliki bi bio volumen malih piramida.

Rješenje nastavnog listića

a) Prikazano na slici od nastvanog listića.

b) Geometrijsko tijelo koje tvori presjek je oktoedar.

c) Visina i stranica baze iznosi 7 cm. Oplošje ćemo izračunati tako da površinu jednkostraničnog trokuta pomnožimo s četiri. Pa imamo:

$$O = 4 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 7^2}{4} = 49\sqrt{3} cm^2.$$

Volumen piramide iznosi :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 7^2}{4} \cdot 7 = \frac{343\sqrt{3}}{12} cm^3.$$

d) Tri piramdice tvore polovinu volumena jedne piramide, pa je površina male piramidice jednak trećini polovine piramide, a to iznosi $\frac{343\sqrt{3}}{72} cm^3$.

3.3 Obla tijela

Najlakše od geometrijskih tijela, učenici prepoznaju obla tijela. Učenici moraju znati računati oplošje i volumen tih tijela. U sljedećoj aktivnosti učenici će povezati znanje o oblim geometrijskim tijelima sa znanjem geografije i jednim dijelom astronomije.

AKTIVNOST: "*Planeti*"

U ovoj će aktivnosti učenici:

- će računati stvarne mjere postavljenog prizemljenog Sunčevog sustava u Zgrebu (udaljenost, volumen, promjer,...),
- koristiti koeficijent proporcionalnosti tokom računa,
- prisjetiti se znanstvenog zapisa broja,
- rješavati problemske zadatke.

Što ćemo raditi?
Učenici će pomoću koeficijenta proporcionalnosti računati stvarne mjere prizmeljnog Sunčevog sustava u Zagrebu.

Na koji način ćemo to napraviti?
Potreban materijal: nastavni listić
Oblik rada:individualni rad
Svakom od učenika podijelimo nastavni listić te im ispričamo priču o prizemljenom Sunčevom sustavu u Zagrebu. Slika planeta će se nalaziti na nastavnom listiću te njihove adrese. Nakon toga učenici rješavaju nastavni listić te na kraju provjeravamo rješenja.

Nastavni listić

Slika 3.9: Prizemljen Sunčev sustav u Zagrebu (za Pluton je kasnije dokazano da je patuljasti planet)

Adrese gdje se nalaze planeti i Sunce su:

1. SUNCE - Bogovićeva ulica 1B,
2. MERKUR - Margaretska ulica 3,
3. VENERA - Trg bana Josipa Jelačića 3,
4. ZENLJA - Varšavska ulica 9,
5. MARS - Tkalčićeva ulica 21,
6. JUPITER - Voćarska ulica 71,
7. SATURN - Račićeva ulica 1,
8. URAN - Siget 9,
9. NEPTUN - Kozari put,
10. PLUTON - Aleja Bologne (podvožnjak).

1) Popuni tablicu (podaci preuzeti s ([9])).

PLANETI	UDALJENOST OD SUNCA U SVEMIRU (u km)	STVARNA UDALJENOST OD SUNCA U ZAGREBU (u km)
MERKUR	57 000 000	0.075
VENERA	108 000 000	
ZEMLJA	150 000 000	
MARS	228 000 000	
JUPITER	779 000 000	
SATURN	1 430 000 000	
URAN	2 880 000 000	
NEPTUN	4 500 000 000	
PLUTON*	5 910 000 000	

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

Uputa: koeficijent proporcionalnosti zapišite u znanstvenom obliku te zaokružite na jednu decimalu.

2) Koristeći koeficijent proporcionanosti iz prethodnog zadatka popuni tablicu.

PLANETI	PROMJERI PLANETA U SVEMIRU (u km)	STVARNI PROMJERI PLANETA U ZAGREBU (u km)
MERKUR	4 920	
VENERA	12 100	
ZEMLJA	12 756	
MARS	6 800	
JUPITER	142 700	
SATURN	120 800	
URAN	52 900	
NEPTUN	44 600	
PLUTON*	2 374	

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

3) Koristeći podatke o promjeru izračunajte volumene planeta u svemiru te planeta u Zagrebu i popunite tablicu (zaokružiti na tri decimale).

PLANETI	VOLUMEN PLANETA U SVEMIRU (u km^3)	VOLUMEN PLANETA U ZAGREBU (ukm^3)
MERKUR		
VENERA		
ZEMLJA		
MARS		
JUPITER		
SATURN		
URAN		
NEPTUN		
PLUTON*		

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

Rješenje nastavnog listića

PLANETI	UDALJENOST OD SUNCA U SVEMIRU (u km)	STVARNA UDALJENOST OD SUNCA U ZAGREBU (u km)
MERKUR	57 000 000	0.075
VENERA	108 000 000	0.1404
ZEMLJA	150 000 000	0.195
MARS	228 000 000	0.2964
JUPITER	779 000 000	1.0127
SATURN	1 430 000 000	1.859
URAN	2 880 000 000	3.744
NEPTUN	4 500 000 000	5.85
PLUTON*	5 910 000 000	7.683

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

Učenici će najprije izračunati koeficijnet proporcionalnosti pomoću podataka o Merkuru na sljedeći način:

$$k = \frac{0.075km}{57000000km} = 1.3 \cdot 10^{-9}.$$

Množeći koefijent proporcionalnosti s udaljenostima u svemiru saznajemo ostale stvarne udaljenosti u Zagrebu.

PLANETI	PROMJERI PLANETA U SVEMIRU (u km)	STVARNI PROMJERI PLANETA U ZAGREBU (u km)
MERKUR	4 920	$6.396 \cdot 10^{-6}$
VENERA	12 100	$1.573 \cdot 10^{-5}$
ZEMLJA	12 756	$1.65828 \cdot 10^{-5}$
MARS	6 800	$8.84 \cdot 10^{-6}$
JUPITER	142 700	$1.8551 \cdot 10^{-4}$
SATURN	120 800	$1.5704 \cdot 10^{-4}$
URAN	52 900	$6.877 \cdot 10^{-5}$
NEPTUN	44 600	$5.798 \cdot 10^{-5}$
PLUTON*	2 374	$3.0862 \cdot 10^{-6}$

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

Učenici će pomoću koeficijenta proporcionalnosti izračunati potrebne podatke.

Uputa nastavniku: Kod računanja promjera možemo učenika odvest do Sunca ili nekog planeta koji je u blizini škole da izmjere promjer pa na temelju tog mjerenja izračunaju ostale promjere koristeći koeficijent proporcionalnosti.

PLANETI	VOLUMEN PLANETA U SVEMIRU (u km^3)	VOLUMEN PLANETA U ZAGREBU (ukm^3)
MERKUR	$6.236 \cdot 10^{10}$	$1.37 \cdot 10^{-16}$
VENERA	$9.276 \cdot 10^{11}$	$2.038 \cdot 10^{-15}$
ZEMLJA	$1.087 \cdot 10^{12}$	$2.388 \cdot 10^{-15}$
MARS	$1.646 \cdot 10^{11}$	$3.617 \cdot 10^{-16}$
JUPITER	$1.521 \cdot 10^{15}$	$3.343 \cdot 10^{-12}$
SATURN	$9.23 \cdot 10^{14}$	$2.028 \cdot 10^{-12}$
URAN	$7.751 \cdot 10^{13}$	$1.703 \cdot 10^{-13}$
NEPTUN	$4.645 \cdot 10^{13}$	$1.021 \cdot 10^{-13}$
PLUTON*	$7.005 \cdot 10^{9}$	$1.539 \cdot 10^{-17}$

*Pluton nije planet, već je proglašen patuljastim planetom

Pomoću formule za volumen koja glasi

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

učenici će izračunati volumene planeta. Ono što može biti pogreška je da ne shvate da imaju promjer a ne polumjer zato ih treba malo bolje pratiti dok rješavaju ovaj dio nastavnog listića.

Bibliografija

[1] D. Apatić, *Modeliranje, diplomski rad*, 2016.

[2] B. Dakić, *Matematičar u Zagrebu*, Element, 2014.

[3] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 2 (2.dio), udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije*, Element, 2006.

[4] dalje.com, *Na Filozofskom nova i najmodernija knjižnica*, `http://arhiva.dalje.com/foto.php?id=2&rbr=12657&idrf=546313`.

[5] S. Dečman, A. Halavuk i Ž. Milin Šipuš, *Geometrija prostora - presjeci tijela ravninom*, Poučak **8** (2013), br. 53, 5–13.

[6] XV. gimnazija, *Projekt: "Matematika između realnog i virtuanog" (priručnik za nastavnike)*, 2016.

[7] Z. Kurnik, *Kosa projekcija*, Miš **5** (2008), br. 10, 4–9.

[8] Ministarstvo znanosti ,obrazovanja i športa, *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obavezno i srednjoškolsko obrazovanje*, AZZO, 2010.

[9] A. Zorkić, *Koliko su planete daleko od Sunca*, (2010), `http://www.astronomija.org.rs/sunev-sistem/planete/3198-koliko-su-planete-daleko-od-sunca.pdf`.

Sažetak

U ovom diplomskom radu je cilj razraditi geometriju prostora u srednjoškolskoj nastavi kroz razne aktivnosti i zadatke za učenike.

U prvom poglavlju smo rekli nešto o različitim prikazima geometrijskih tijela u ravnini. Napomenuli smo važnost tih prikaza te prikazati aktivnosti koje se mogu koristiti u nastavi matematike.

U drugom poglavlju smo prikazali presjeke geometrijskih tijela ravninom te aktivnosti vezane za tu temu koje bi učenicima olakšalo zaključivanje.

U trećem poglavlju smo nešto rekli o ideji uvođenja različitih primjera iz svakodnevnog života u nastavu matematike vezanih za temu geometrije prostora. Najprije smo nešto rekli o tom konceptu te nakon toga prikazati razne aktivnosti koje se mogu iskoristiti u nastavi matematike.

Summary

In this graduate thesis, the aim is to elaborate geometry of space in secondary school through various activities and tasks for students.

In the first chapter we have said something about different views of geometric bodies in the plane. We have noted the importance of these views and showing activities that can be used in teaching maths.

In the second chapter, we have presented the intersections of geometric bodies with the plane and the activities related to the subject that would make it easier for the students to conclude.

In the third chapter, we have said something about the idea of introducing different examples from everyday life in mathematics teaching related to space geometry. First of all, we talked about this concept and then presented various activities that can be used in the teaching of mathematics.

Životopis

Rođena sam 3. svibnja 1992. godine u Zagrebu.Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Zagrebu u Osnovnoj školi Augusta Šenoe. Godine 2007. upisujem II. ekonomsku školu u Zagrebu te je završavam 2011. godine kada upisujem preddiplomski studij Matematike, smjer:nastavnički na Prirodoslovnom-matematičko fakultetu u Zagrebu. Godine 2014. stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike te iste godine nastavljam diplomski studij Matematike, smjer:nastavnički na već spomenutom fakultetu. Tijekom studija radila sam razne poslove vezano za telekomunikaciju, međutim trenutačno radim u ”Photomath”-u tvrtki koja razvija aplikaciju koja prepoznaje i rješava matematičke zadatke te daje detaljne korake pri rješavanju.