Teorija arbitraže s transakcijskim troškovima

Benedik, Nikolina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Benedik

TEORIJA ARBITRAŽE S TRANSAKCIJSKIM TROŠKOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, studeni, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Uvodno poglavlje **3**
1.1 Vjerojatnost . . . 3
1.2 Slučajni procesi . . . 5
1.3 Konveksna analiza . . . 6
1.4 Dinamički model u diskretnom vremenu . . . 9

2 Model s transakcijskim troškovima **14**
2.1 Financijska pozadina za osnovni model . . . 14
2.2 Matematičko okruženje za osnovni model . . . 18

3 Teoremi o nepostojanju arbitraže **24**
3.1 Slabi uvjet za nepostojanje arbitraže . . . 24
3.2 Jaki uvjet za nepostojanje arbitraže . . . 27

4 Različite varijante modela **31**
4.1 Alternativna parametrizacija . . . 31
4.2 Model tržišta dionica . . . 33
4.3 Model u kojem transakcijski troškovi prolaze kroz novac . . . 35
4.4 Modeliranje u količinskim jedinicama . . . 37
4.5 Modeli sa cjenovnim rasponom . . . 38

Bibliografija **40**

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo teoriju arbitraže s transakcijskim troškovima trgovanja financijskim imovinama u diskretnom vremenu. Arbitraža je strategija trgovanja u kojoj portfelj donosi bezrizični to jest sigurni profit. Pod pojmom financijske imovine mislimo na investicije koje možemo unovčiti na financijskom tržištu, nju čine vrijednosni papiri i ostala financijska sredstva. Financijska imovina kojom trgujemo mogu biti dionice, obveznice, valute ili novac, a vremenski trenutci trgovanja su diskretni.

Teorija arbitraže s transkacijskim troškovima doživjela je ozbiljniji razvoj 1990.-tih godina. Preciznije, 1995. godine Jouini i Kallal objavili su rad u kojem su proučavali neprekidan model temeljen na dva cjenovna procesa, jedan za prodaju, a drugi za kupovinu financijske imovine. U ovakvom su modelu transakcijski troškovi skriveni u razlici kupovne i prodajne cijene ("bid-ask spread"). Glavni rezultat njihovog rada bio je teorem koji je pod restriktivnim uvjetima govorio o nepostojanju arbitraže za tako definiran model. Teorem je govorio da mogućnost arbitraže ne postoji ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ i martingal M u odnosu na mjeru $\mathbb{Q}$ koji prima vrijednosti u "bid-ask" rasponu. Njihov je rezultat bilo teško proširiti na druge modele sve dok se nije počeo proučavati geometrijski pristup problemu arbitraže. Glavne elemente matematičkog okruženja za model s transakcijskim troškovima čine poliedarski konusi i slučajni procesi s vrijednostima u konveksnim konusima.

U svom radu 2001. godine Kabanov i Stricker uvode pojmove slabe i jake mogućnosti arbitraže za model sa konačnim brojem stanja svijeta. U modelu bez transakcijskih troškova ovi su uvjeti nepostojanja arbitraže ekvivalentni. Slaba mogućnost arbitraže prirodna je generalizacija pojma arbitraže iz modela bez transakcijskih troškova, a ona je ostvarena kada postoji portfelj koji je ostvario strogo pozitivnu krajnju vrijednost uz uvjet da je početno ulaganje bilo jednako 0. Jaka mogućnost arbitraže je ostvarena kada postoji portfelj koji u nekom vremenskom trenutku možemo nekim akcijama s plaćanjem transakcijskih troškova pretvoriti u portfelj s pozitivnim pozicijama. Sada u slučaju da su ti transakcijski troškovi pozitivni i da oni nisu podmireni došlo je do bezrizičnog profita.

Iste godine oni proučavaju i različite mogućnosti definiranja uvjeta i dolaze do zaključka da je umjesto popularnog modeliranja vrijednosti financijske imovine u jedinicama *numérairu*, jednostavnije modelirati u jedinicama količine. Modeliranje u jedinicama količine moguće je bez zadavanja *numéraira* te se time pojednostavljuju formulacije nekih modela. *Numéraire* je financijska imovina s kojom možemo, ali i ne moramo trgovati, a preko njega su izražene cijene svih ostalih imovina kojima se trguje.

Cilj ovog rada je razraditi osnovni model arbitraže te ga nadograditi sa transakcijskim troškovima. Rad započinjemo sa pregledom poznatih činjenica iz raznih područja matematike koja će nam biti od koristi, posebnu pažnju dajemo ponavljanju znanja iz konveksne analize u potpoglavlju 1.3. Zatim u potpoglavlju 1.4 dajemo kratki opis bezarbitražne teorije tržišta bez trenja i dajemo iskaz fundamentalnog teorema o arbitraži. Nakon kratkog ponavljanja uvodimo transakcijske troškove. Na početku u poglavlju 2 uvodimo financijsku i matematičku pozadinu te opisujemo osnovni model. Zatim u poglavlju 3 uvodimo pojmove mogućnosti arbitraže i glavne teoreme. Na kraju u poglavlju 4 dajemo kratki pregled različitih varijanti modela i jednakosti kojima opisujemo dinamiku promjene vrijednosti portfelja u tim modelima.

Poglavlje 1

Uvodno poglavlje

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne definicije i tvrdnje koje se koriste kroz cijeli rad. Dotaknut ćemo pojmove iz vjerojatnosti, slučajnih procesa, konveksne analize i posebnu pažnju ćemo dati osnovnom financijskom modelu bez transakcijskih troškova i fundamentalnom teoremu o arbitraži. Poglavlje započinjemo s kratkim podsjetnikom o vjerojatnosnom prostoru.

1.1 Vjerojatnost

Prvo ćemo definirati vjerojatnosni prostor. Skup elementarnih događaja označavamo sa Ω. To je neprazan skup čije elemente označavamo sa ω i zovemo ih elementarni događaji. Na skupu Ω možemo definirati familiju $\mathcal{F}$ podskupova od Ω, ta familija $\mathcal{F}$ bit će $\sigma-$algebra ako su zadovoljna sljedeća tri uvjeta:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) Za $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) Za $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Dakle $\sigma-$algebra je neprazna familija podskupova skupa Ω koja sadrži prazan skup, zatvorena je na komplementiranje i na prebrojive unije.

Kako bismo definirali funkciju vjerojatnosti potrebno je uvesti pojam $\sigma-$aditivnosti. Za funkciju $f : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ kažemo da je $\sigma-$aditivna ako vrijedi:

$$f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n),$$

za svaki niz međusobno disjunktnih skupova $(A_n : n \in N)$, pri čemu je $A_n \in \mathcal{F}$.

Uvodimo pojam funkcije vjerojatnosti na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, to je svaka $\sigma-$aditivna funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ takva da vrijedi $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo vjerojatnosni prostor. Na kraju dajemo definiciju slučajne varijable.

Funkciju $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zovemo slučajnom varijablom na $(\Omega, \mathcal{F})$ ako je izmjeriva u paru $\sigma-$algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$. Ovdje smo sa $\mathcal{B}$ označili Borelovu $\sigma-$algebru, to jest najmanju $\sigma-$algebru generiranu svim otvorenim intervalima u $\mathbb{R}$.

Podsjetimo se još formalne definicije izmjerivosti. Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori, kažemo da je funkcija $f : X \mapsto Y$ izmjeriva u paru $\sigma-$algebri $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$.Ovu tvrdnju smo mogli ekvivalentno iskazati na drugi način. Kažemo da je slučajna varijabla X $\mathcal{F}-$izmjeriva ako je $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pri čemu je sada jasno druga $\sigma-$algebra zapravo Borelova.

Sada dajemo definiciju matematičkog očekivanja i uvjetnog matematičkog očekivanja.

Definicija 1.1.1. *Neka je $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ slučajna varijabla, kažemo da ona ima matematičko očekivanje ako vrijedi:*

$$\mathbb{E}|X| := \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} = \int_{\Omega} |X|(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Tada definiramo matematičko očekivanje slučajne varijable X kao:

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Definicija 1.1.2. *Imamo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ generirana prebrojivom particijom $\{A_1, A_2, \dots\}$ od Ω te neka je $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje. Uvjetno očekivanje od X uz danu σ-algebru $\mathcal{G}$ definiramo formulom:*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \sum_i \mathbb{E}[X|A_i] \mathbf{1}_{A_i} = \sum_i \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i} X]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}.$$

Za kraj ćemo samo nabrojiti neka od glavnih svojstava uvjetnog očekivanja, dokazi ovih tvrdnji se mogu pronaći u [3]. Neka je $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ integrabilna slučajna varijabla, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$, tada vrijedi:

(i) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ g.s.

(ii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}X$

(iii) Ako je $X \geq 0$ g.s., tada je i $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ g.s.

(iv) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|H] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ g.s.

(v) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$ onda je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X$

Nakon što smo definirali vjerojatnosni prostor i slučajne varijable, nastavljamo uvodno poglavlje s definicijama vezanim uz slučajne procese.

1.2 Slučajni procesi

U ovom potpoglavlju definirat ćemo pojmove slučajnih procesa, adaptiranosti, martingala i njihova ostala osnovna svojstva. Započinjemo sa formalnom definicijom slučajnog procesa.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+,\ X_n$ slučajna varijabla na tom prostoru. Familija $X = (X_n,\ n \geq 0)$ je slučajni proces s diskretnim vremenom. Sada ćemo dati definicije filtracije i prirodne filtracije te adaptiranosti slučajnog procesa.

Filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ je familija $\sigma-$podalgebri od $\mathcal{F}$ za koje za svaki $n \geq 0$ vrijedi $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Za slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiramo prirodnu filtraciju tako da za svaki $n \geq 0$ konstruiramo $\sigma-$algebru sa $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, tada je filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0)$ prirodna filtracija procesa X.

Kažemo da je slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, a ako je slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva za svaki $n \geq 1$ i X_0 je $\mathcal{F}_0$ izmjeriv, onda je X predvidiv s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Sada možemo uvesti pojam martingala.

Definicija 1.2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija i $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces koji je adaptiran s obzirom na $\mathbb{F}$ te za sve $n \geq 0$ vrijedi $\mathbb{E}|X_n| < \infty$. Kažemo da je slučajni proces X*

(i) martingal ($(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ − martingal), ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \ g.s., za\ sve\ n \geq 0$$

(ii) supermartingal ($(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ − supermartingal), ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \ g.s., za\ sve\ n \geq 0$$

(iii) submartingal ($(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ − submartingal), ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \ g.s., za\ sve\ n \geq 0.$$

Primjetimo da je martingal slučajni proces koji ima konstantno očekivanje. Zadnji pojam koji uvodimo u ovom potpoglavlju je pojam martingalne transformacije.

Definicija 1.2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom* $\mathbb{F}$ *i neka je* $X = (X_n,\ n \geq 0)$ *adaptirani slučajni proces, a* $H = (H_n,\ n \geq 0)$ *predvidiv slučajni proces. Martingalnu transformaciju procesa* X *po procesu* H *definiramo kao slučajni proces* $H \cdot X = ((H \cdot X)_n,\ n \geq 0)$ *pri čemu je*

$$(H \cdot X)_n = H_0 X_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1}),\ n \geq 0.$$

Ekvivalentne mjere

Pretpostavljamo da se nalazimo u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sa filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$. Dajemo definiciju ekvivalentnosti dviju vjerojatnosnih mjera.

Definicija 1.2.3. *Neka su* $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{P}^*$ *dvije vjerojatnosne mjere, kažemo da su one ekvivalentne ako je zadovoljena relacija:*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^*(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Tada pišemo $\mathbb{P} \approx \mathbb{P}^*$.

Neka su sada $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne vjerojatnosne mjere, te neka je $\rho = (\rho_t)$ odgovarajući proces gustoće to jest martingal kojeg definiramo kao $\rho_t := \mathbb{E}(d\mathbb{P}^*/d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t)$.

Dajemo lemu koja povezuje svojstvo martingalnost i ekvivalentnih vjerojatnosnih mjera.

Lema 1.2.4. *Slučajni proces* M *je* $\mathbb{P}^*$*-martingal ako i samo ako je* ρM $\mathbb{P}$*-martingal.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [2] na strani 256. □

1.3 Konveksna analiza

U ovom ćemo potpoglavlju uvesti glavne pojmove iz konveksne analize te iskazati neke od glavnih rezultata koje ćemo koristiti u radu. Započinjemo sa definicijom konusa.

Definicija 1.3.1. *Skup* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *je konus ako za* $\forall x \in C$ *i za* $\forall a \in \mathbb{R}_+$ *vrijedi* $ax \in C$.

Definicija 1.3.2. *Za skup* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *kažemo da je konveksni konus ako za* $\forall x, y \in C$ *i za* $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$ *vrijedi* $ax + by \in C$. *To jest skup* C *je konveksni konus ako je zatvoren na sve pozitivne linearne kombinacije.*

Za konveksni konus C kažemo da je konačno generiran ako postoji konačan skup $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$, gdje je $c_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i$, takav da vrijedi

$$C = konus\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i c_i, \quad \alpha_j \geq 0 \right\}.$$

Definicija 1.3.3. *Za konveksni konus C kažemo da je poliedarski ako postoji matrica A takva da vrijedi $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 0\}$.*

Intuitivno možemo zamisliti da je konveksni konus poliedarski ako je on presjek konačno mnogo poluprostora $\{x : a_i x \geq 0\}$, $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, N$. Primjetimo ovdje da su a_i zapravo retci matrice A iz Definicije 1.3.3 te da je $a_i x$ skalarni produkt. Alternativna karakterizacija poliedarskog konusa dana je Farkas-Minkowski-Weyl teoremom kojeg iskazujemo bez dokaza.

Teorem 1.3.4. *Konveksni konus je polidearski ako i samo ako je konačno generiran.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema može se naći u [5]. □

Definicija 1.3.5. *Neka je K konveksni konus, onda njegov dualni pozitivni konus definiramo sa*

$$K^* := \{z \in \mathbb{R}^n : \; zx \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Koristeći obrnutu nejednakost dobivamo definiciju polarnog konusa $K^o = -K^*$.

Koristeći definiciju dualnog konusa K^* možemo opisati interior konveksnog konusa K, vrijedi relacija:

$$intK = \{x| \; xy > 0, \;\; \forall y \in K^*, \;\; y \neq 0\}. \tag{1.1}$$

Dajemo lemu koja govori o zatvorenosti skupa poliedarskih konusa u odnosu na linearna preslikavanja. Ova će nam lema biti od koristi kada ćemo razvijati model s transakcijskim troškovima.

Lema 1.3.6. *Slika poliedarskog konveksnog konusa A po linearnom preslikavanju f je neki poliedarski konveksni konus B.*

Dokaz. Želimo pokazati da je skup nastao preslikavanjem poliedarskog konusa po linearnom preslikavanju poliedarski konus. Da bi to vrijedilo taj skup mora biti konus i on mora biti poliedarski. Po Teoremu 1.3.4 konus je poliedarski ako je konačno generiran. Budući da je početni skup A poliedarski konus on ima konačni generator $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, a njegova slika $\{f(a_1), f(a_2), \ldots f(a_n)\}$ je konačna i generira skup B. Sada je još potrebno pokazati da je skup B konus, a to slijedi direktno iz svojstava linearnog preslikavanja i činjenice da je skup A konus. □

Sada dajemo definiciju još jednog svojstva konusa.

Definicija 1.3.7. *Za zatvoreni konveksni konus K, kažemo da je pravilan ako je $F := K \cap (-K) = \{0\}$, to jest, relacije $x \geq_K 0$ i $x \leq_K 0$ impliciraju $x = 0$. Ovdje smo parcijalni uređaj $\geq_K$ definirali sa:*

$$x \geq_K y \iff x - y \in K.$$

Ako je konus K pravilan onda vrijedi

$$intK^* = \{w : wx > 0, \forall x \in K, x \neq 0\}.$$

Prethodna jednakost slijedi jednostavno iz definicija dualnog konusa i definicije interiora skupa. Pogledajmo definiciju dualnog konusa $K^* = \{z \in \mathbb{R}^n : \; zx \geq 0, \forall x \in K\}$. Sada iz (1.1) za skup K^* slijedi

$$intK^* = \{x|\; xy > 0, \; \forall y \in K^{**}, \; y \neq 0\}.$$

Budući da je K zatvoreni konus vrijedi $K = K^{**}$, pa imamo:

$$intK^* = \{x|\; xy > 0, \; \forall y \in K, \; y \neq 0\}.$$

Time smo dokazali da vrijedi prethodna jednakost. Još jedno svojstvo pravilnih konusa je da je interior dualnog konusa neprazan to jest $intK^* \neq \emptyset$.

Slijedi tehnička lema koju će nam biti od koristi u dokazivanju tvrdnji o postojanju arbitraže.

Lema 1.3.8. *Neka su K i R zatvoreni konveksni konusi u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je K pravilan, tada*

$$R \cap K = \{0\} \iff (-R^*) \cap intK^* \neq \emptyset.$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Pretpostavljamo da postoji element w koji se nalazi u presjeku $(-R^*) \cap intK^*$. Budući da se nalazi u polarnom konusu $-R^*$ za taj element w vrijedi $wx \leq 0$ za svaki $x \in R$, a budući da se nalazi i u $intK^*$ te je taj skup neprazan jer je K pravilan, vrijedi $wy > 0$ za svaki $y \in K \backslash \{0\}$. Iz toga očito slijedi da su skupovi R i $K \backslash \{0\}$ disjunktni.

($\Rightarrow$) Neka je skup C konveksan i kompaktan, takav da $0 \notin C$ i označimo $K = \text{konus}C$. Konus K možemo konstuirati na taj način jer vrijedi da je zatvoreni konus u $\mathbb{R}^n$ pravilan ako i samo ako se može konstruirati sa nekim kompaktnim i konveksnim skupom koji ne sadrži 0. Po teoremu o separaciji konveksnih skupova u slučaju gdje je jedan skup zatvoren, a drugi kompaktan, postoji $z \in \mathbb{R}^n$ koji je različit od nule, takav da vrijedi:

$$\sup_{x \in R} zx \leq 0 < a \leq \inf_{y \in C} zy.$$

Budući da je R konus vrijedi da je $0 \in R$ pa je stoga $\sup_{x \in R} zx \geq 0$. Sada slijedi da je lijeva strana ove nejednadžbe jednaka 0, i zbog toga je $z \in -R^*$ i isto tako vrijedi $zy > 0$ za sve $y \in C$ pa je $z \in intK^*$. □

U dokazu prethodne leme koristili smo teorem o separaciji, sada navodimo taj teorem bez dokaza.

Teorem 1.3.9. *(Jaki teorem o separaciji)*
Neka su A i B neprazni konveksni podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$. Neka je A zatvoren, a B kompaktan skup. Ako su A i B disjunktni onda postoji $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ i $a \in \mathbb{R}_+$ takvi da:

$$\sup_{x \in A} zx \leq 0 < a \leq \inf_{y \in B} zy.$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1]. □

Za pravilne zatvorene konuse vrijedi i sljedeći rezultat koji navodimo bez dokaza.

Lema 1.3.10. *Neka su K i R pravilni zatvoreni konusi u $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$R \cap K = \{0\} \iff (-intR^*) \cap intK^* \neq \emptyset.$$

Sljedeće dajemo definiciju relativnog interiora za konveksni skup.

Definicija 1.3.11. *Relativni interior konveksnog skupa A, u oznaci riA, definiramo kao interior skupa A u odnosu na najmanji afini potprostor generiran s A.*

Neka je π prirodna projekcija skupa $\mathbb{R}^n$ na kvocijentni prostor $\mathbb{R}^n/F$. Lemu 1.3.8 možemo iskazati i u općenitijoj formi, slijedi generalizacija navedene leme.

Teorem 1.3.12. *Neka su K i R zatvoreni konusi u R^n, i neka je konus πR zatvoren. Tada vrijedi*

$$R \cap K \subseteq F \iff (-R^*) \cap riK^* \neq \emptyset$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema može se pronaći u [2] na strani 249. □

1.4 Dinamički model u diskretnom vremenu

U ovom ćemo potpoglavlju opisati jednostavni financijski model. Model razvijamo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je Ω prostor elementarnih događaja ω, njih tumačimo kao moguća stanja svijeta. Pretpostavljamo da je Ω konačan skup to jest da se može dogoditi najviše konačno mnogo scenarija u budućnosti, dakle možemo pisati $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Kao $\sigma-$algebru $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup elementarnih događaja to jest $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Na kraju pretpostavljamo da vjerojatnost $\mathbb{P}$ zadovoljava uvjet $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$, to jest svi su događaji mogući.

Model je dinamički sa vremenskim trenutcima $t = 0, 1 \dots, T$. Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ imamo i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. O σ- algebri $\mathcal{F}_t$ razmišljamo kao o poznatim informacijama o stanju svijeta do vremenskog trenutka t. Pretpostavljamo da je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ to jest trivijalna $\sigma-$algebra, a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ dakle u zadnjem vremenskom trenutku imamo sve informacije.

Nadalje, pretpostavljamo da se nalazimo na tržištu bez trenja *(Frictionless market)*. Za tržište bez trenja vrijede sljedeće pretpostavke:

- Svi sudionici tržišta imaju iste informacije o tržištu
- Sva imovina je beskonačno dijeljiva i likvidna
- Kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje
- Ne postoje transakcijski troškovi

Na tržištu postoji d različitih financijskih imovina koje mogu biti dionice, obveznice, opcije, valute ili novac. Uvodimo vektor cijena u trenutku t, definiran sa

$$S_t = (S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

gdje je S_t^i cijena i-te financijske imovine u trenutku t. Budući da cijene unaprijed ne znamo, S_t je zapravo slučajni vektor sastavljen od slučajnih varijabli S_t^i. Logično je za pretpostaviti da cijena u trenutku t ovisi samo o događajima prije tog vremenskog trenutka pa iz tog slijedi da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na $\sigma-$algebru $\mathcal{F}_t$. To znači da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{S_t^i \leq x\} \in \mathcal{F}_t$. Budući da je slučajna varijabla S_t^i $\mathcal{F}_t$-izmjeriva za sve indekse i, tada je slučajni vektor S_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriv. Dakle slučajni proces $S = (S_t,\ t = 0, 1, \dots, T)$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \dots, T)$.

Pretpostavljamo da imamo jednu nerizičnu imovinu, neka je to imovina s indeksom 1. Uz pretpostavku da je kamatna stopa jednaka r, ako u trenutku $t = 0$ imamo jednu jedinicu te imovine, u $t = 1$ vrijednost će biti $1 + r$, to jest za bezrizičnu imovinu vrijedi $S_0^1 = 1$ i $S_1^1 = 1 + r$. U ovom modelu je takva imovina zapravo lokalno nerizična, što znači da u trenutku $t - 1$ znamo njezinu vrijednost za trenutak t, formalno S_t^1 je $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.

U ovom modelu definiramo slučajni portfeljski proces $\phi = (\phi_t,\ t = 1, \dots, T)$. Ovdje smo sa vektorom $\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2, \dots, \phi_t^d)$ iz $\mathbb{R}^d$ označili brojevno stanje pojedinih financijskih imovina u trenutku t. Drugim riječima, sa ϕ_t^i označili broj jedinica $i-$te financijske imovine koju posjedujemo u portfelju u trenutku t. Bitno je za napomenuti da smo u trenutku $t = 0$ konstruirali portfelj ϕ_1, a taj portfelj možemo rebalansirati u trenutku $t = 1$ i time konstruirati portfelj ϕ_2. Primjetimo ovdje da konstrukcija portfelja ϕ_2 ovisi o cijenama financijskim imovina u trenutku $t = 1$ pa je stoga portfelj ϕ_2 $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor. Po definiciji predvidivog procesa slijedi da je portfeljski proces $\phi = (\phi_t,\ t = 0, 1, \dots, T)$ predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \dots, T)$. Uvodimo konvenciju da vrijedi $\phi_0 = \phi_1$. Primjetimo da broj ϕ_t^i može biti i pozitivan i negativan, ako je pozitivan onda posjedujemo toliko jedinica imovine, a ako je on negativan onda smo obavili *short sale* imovine i.

Sada nas zanima kako definiramo vrijednost našeg portfelja ϕ_t, to je suma ukupnih vrijednosti uloženih u imovine. Dakle vrijedi:

$$V_t(\phi) = \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i = \phi_t \cdot S_t.$$

Primjetimo da je vrijednost portfelja $V_t(\phi)$ slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle proces vrijednosti $V(\phi) = (V_t(\phi), t = 1, 2, \dots, T)$ je adaptirani slučajni proces. Prije nego što uvedemo definiciju arbitraže uvodimo još neke opisne pojmove za strategije trgovanja to jest dinamički portfelj ϕ. Kada rebalansiramo portfelj u trenutku t na raspolaganju imamo novac u iznosu vrijednosti portfelja $V_t(\phi)$, dakle u tom trenutku će rebalansirani portfelj imati istu vrijednost kao početni portfelj, to jest vrijedi jednakost:

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t.$$

Portfelj, to jest strategiju ϕ koja ispunjava prethodni uvjet za svaki $t = 0, 1, \dots, T-1$ zovemo samofinancirajućom strategijom.

Budući da investitor u svakom trenutku mora biti u mogućnosti isplatiti svoje dugove, vrijednost portfelja mora biti pozitivna u svakom trenutku inače takva strategija nije dopustiva. Dakle uvodimo definiciju dopustive strategije. Strategija ϕ je dopustiva ako je samofinancirajuća i u svakom trenutku $t = 0, 1, \dots, T$ vrijedi $V_t(\phi) \geq 0$.

Sada uz definirane osnovne značajke modela možemo uvesti i pojam arbitraže. Arbitraža je portfelj koji može ostvariti nerizičan profit. Drugim riječima uz početni ulog jednak 0, sigurno ne možemo izgubiti, dakle za barem jedan scenarij je konačna vrijednost portfelja strogo pozitivna dok je za ostale jednaka 0. Slijedi formalna definicija arbitraže.

Definicija 1.4.1. *Portfelj ϕ naziva se arbitraža ako vrijedi da je $V_0(\phi) = 0$ te je $V_T(\phi) \geq 0$ $\mathbb{P}-$g.s. i vrijedi $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$.*

Primjetimo da smo prethodnu definiciju mogli izreći i korištenjem prethodno definiranih svojstava strategija. Dakle arbitražna strategija je dopustiva strategija ϕ za koju vrijedi $V_0(\phi) = 0$ i $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$. Budući da je po definiciji teško provjeriti za portfelj je li on arbitraža ili nije, zanimaju nas ostali načini na koji to možemo provjeriti. Prvo uvodimo oznaku za diskontirani cjenovni proces

$$\tilde{S}_t^i = \frac{1}{(1+r)^t} S_t^i = \beta_t S_t^i.$$

Ovdje smo sa β_t označili diskontni faktor $\beta_t = \frac{1}{(1+r)^t}$. Sada je diskontirana vrijednost portfelja u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$ jednaka:

$$\tilde{V}_t(\phi) := \beta_t V_t(\phi) = \phi_t \tilde{S}_t.$$

Sada ćemo uz pomoć martingala i martingalne mjere dati karakterizaciju tržišta bez arbitraže, na početku dajemo definiciju martingalne mjere

Definicija 1.4.2. *Za vjerojatnosnu mjeru* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *kažemo da je martingalna mjera ili mjera neutralna na rizik, ako za sve* $t = 0, 1, \ldots, T$ *vrijedi:*

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i_t.$$

Drugim riječima $\mathbb{P}^*$ je martingalna mjera ako su u odnosu na nju diskontirane cijene financijskih imovina martingali. $\mathbb{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera ako je martingalna mjera i ako vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$.

Slijedi najjednostavniji oblik fundamentalnog teorema o arbitraži, kasnije ćemo dati kompliciraniji iskaz istog teorema.

Teorem 1.4.3. *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći na strani broj 50 u [3]. □

Prije nego što damo kompliciraniji iskaz fundamentalnog teorema uvodimo pojam slučajnog zahtjeva i još nekih pojmova vezanih uz slučajne zahtjeve.

Definicija 1.4.4. *Slučajni zahtjev C na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s dospijećem T je* $\mathcal{F}_T$*-izmjeriva slučajna varijabla takva da je*

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Slučajni zahtjev je izvedenica primarnih imovina ako je funkcija slučajnih vektora $S_1, S_2, \ldots S_T$.

Kažemo da je slučajni zahtjev dostižan ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$, tada kažemo da strategija (portfelj) ϕ replicira slučajni zahtjev C. Kažemo da je portfelj ϕ superreplicirajući za slučajni zahtjev C ako vrijedi $V_T(\phi) > C$.

Sada ćemo dati definicije nekih skupova koje ćemo korisiti u alternativnom iskazu Teorema 1.4.3. Vjerojatnosni prostor u kojemu se nalazimo ostaje ne promijenjen. Prisjetimo se da smo sa $S = (S_t, \ t = 0, 1, \ldots, T)$ označili cjenovni proces, a sa $\phi = (\phi_t, \ t = 0, 1, \ldots, T)$ portfeljski proces. Sa ΔS_t ćemo označiti promjenu cijene to jest $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$. Sada definiramo skup R_T koji se sastoji od konačnih vrijednosti koje možemo dostići uz pretpostavku da smo počeli od $V_0(\phi) = 0$. Dakle

$$R_T = \{\phi \cdot S_T\} := \left\{ \sum_{t=1}^{T} \phi_t \Delta S_t, \quad \phi_t \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_{t-1}). \right\}$$

Skup $L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_{t-1})$ je linearni prostor svih slučajnih predvidivih procesa sa realnim vrijednostima. Definiramo skup dostižnih slučajnih zahtjeva (*hedgeable claims*) sa $A_T := R_T - L^0_+$. Elementi ovog skupa su slučajne varijable oblika $\phi \cdot S_T - C$, gdje je slučajna varijabla $C \geq 0$.

Po definiciji arbitraže sada slijedi da se u presjeku skupa R_T i linearnog skupa pozitivnih vrijednosti L^0_+ nalazi 0, jer jedino tada model nema mogućnost arbitraže. Ovaj bezarbitražni uvjet kraće zapisujemo kao NA uvjet. Postoji više ekvivalentnih načina da se ovaj uvjet iskaže i to dajemo u sljedećem teoremu koji je složenija verzija fundamentalnog teorema o arbitraži.

Teorem 1.4.5. *U ovako definiranom okruženju sljedeća su svojstva ekvivalentna:*

(i) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *(NA uvjet)*

(ii) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *i* $A_T = \overline{A}_T$ *(zatvorenost u* L^0*)*

(iii) $\overline{A}_T \cap L^0_+ = \{0\}$

(iv) postoji martingalna mjera, $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$, *takva da je* $S \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^*)$

Dokaz. Dokaz ovog teorema se može pronaći na strani 75. u [2]. □

U iskazu ovog teorema smo sa $\mathcal{M}(\mathbb{P}^*)$ označili prostor martingala u odnosu na mjeru $\mathbb{P}^*$. Svojstvo (*iv*) je zapravo isti zapis koji smo dali na početku, to svojstvo se može zapisati i u drugačijem ekvivalentnom obliku koji ćemo lakše povezati sa modelom s transakcijskim troškovima. Slijedi ekvivalentan zapis:

(*iv'*) *postoji strogo pozitivni proces* $\rho \in \mathcal{M}$ *takav da vrijedi* $\rho S \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Ovime završavamo uvodno poglavlje koje služi kao podsjetnik na glavne rezultate iz raznih područja koje ćemo korisiti u ostatku rada. U sljedećem poglavlju upoznat ćemo se sa financijskom pozadinom u kojoj razvijamo osnovni model te matematičko okruženje za taj model.

Poglavlje 2

Model s transakcijskim troškovima

2.1 Financijska pozadina za osnovni model

Za početak upoznat ćemo se sa financijskim okvirom u skladu s kojim ćemo razviti matematičku teoriju. Cilj nam je razviti matematički model u diskretnom vremenu sa proporcionalnim transakcijskim troškovima, s time da pretpostavljamo da se nalazimo na tržištu s potpunim informacijama. Vjerojatnosni prostor na kojem razvijamo model je isti kao i u uvodnom poglavlju, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Da ponovimo, Ω je skup elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je $\sigma-$algebra definirana kao partitivni skup skupa Ω i $\mathbb{P}$ je vjerojatnosna mjera za koju su svi događaji mogući. Na prostoru imamo definiranu filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots \mathcal{F}_T)$ takvu da vrijedi $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$, pri čemu je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ-algebra, a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Pretpostavljamo da se u portfelju kojeg proučavamo nalazi d različitih financijskih imovina, koje ćemo često interpretirati kao valute. Za potrebe računanja moramo sve vrijednosti iskazati preko neke jedinstvene mjere pa općenito kotacije imovina zadajemo u jedinicama određenog *numéraira*, koji može biti jedna od imovina s kojom se trguje ili neki drugi financijski instrument. U trenutku t kotacije imovina iz portfelja određene su vektorom cijena $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$, pri čemu su komponente ovog vektora strogo pozitivne. Sada naš portfelj možemo opisati na dva načina, možemo govoriti o broju pojedine financijske imovine ili uložene vrijednosti u nju. Dakle definirat ćemo dva vektora, vektor količina $\hat{V}_t = (\hat{V}_t^1, \dots, \hat{V}_t^d)$ i vektor vrijednosti $V_t = (V_t^1, \dots, V_t^d)$. Očito vrijedi:

$$V_t^i = \widehat{V}_t^i S_t^i \qquad \text{gdje je } i = 1, 2 \dots, d$$

to jest kada pomnožimo cijenu imovine s njenom količinom dobit ćemo ukupnu vrijednost koju smo uložili. Analogno vidimo da vrijedi i relacija:

$$\widehat{V}_t^i = V_t^i / S_t^i, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

to nas vodi do zapisa $\widehat{V_t} = V_t/S_t$. Ova razmatranja možemo formalizirati uvođenjem dijagonalnog operatora $\phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Definiramo:

$$\phi_t : (x^1, \ldots, x^d) \mapsto (x^1/S_t^1, \ldots, x^d/S_t^d)$$

Sada prethodno razmatranje možemo zapisati kao

$$\widehat{V_t} = \phi_t V_t.$$

Sada kada smo uveli osnovne oznake za pretpostavljeno tržište, vrijeme je da opišemo i transakcijske troškove. Pretpostavljamo da se svaki instrument može mijenjati s bilo kojim drugim, tj. možemo prodati jedan da bismo kupili neki drugi, ali za takvu transakciju moramo platiti odgovarajući transakcijski trošak. Pretpostavimo sada da želimo kupiti jednu jedinicu *numéraira* i-te imovine i to ćemo financirati prodajom j-te imovine. Kada bismo se nalazili u tržištu bez transakcijskih troškova to bismo učinili tako da bismo povećali količinu i-te imovine za 1 izraženo u jedinici *numéraira*, a smanjili količinu j-te imovine za 1. To matematički možemo zapisati kao:

$$(V_t^1, \ldots, V_t^i, \ldots, V_t^j, \ldots, V_t^d) \mapsto (V_t^1, \ldots, V_t^i + 1, \ldots, V_t^j - 1, \ldots, V_t^d)$$

Budući da se mi nalazimo u modelu s transakcijskim troškovima, bit će potrebno prodati više j-te imovine kako bi financirali i transakcijske troškove. Ako sa λ_t^{ji} označimo transakcijski trošak zamjene j-te imovine za i-tu, onda zapisujemo:

$$(V_t^1, \ldots, V_t^i, \ldots, V_t^j, \ldots, V_t^d) \mapsto (V_t^1, \ldots, V_t^i + 1, \ldots, V_t^j - (1 + \lambda_t^{ji}), \ldots, V_t^d).$$

Dakle, da bismo povećali vrijednost i-te imovine za jednu jedinicu *numéraira*, moramo smanjiti vrijednost j-te imovine za $(1 + \lambda_t^{ji})$ *numéraira*. Na ovaj smo način implicitno definirali matricu transakcijskih troškova $\Lambda_t = (\lambda_t^{ij})$ koja ima nenegativne elemente, a na dijagonali se nalaze nule.

Kako smo definirali općeniti model i način trgovanja, bit će nam zanimljivo promatrati evoluciju našeg početnog portfelja, to jest gledati kako se mijenja njegova vrijednost kroz vrijeme. Uočimo da vektor cijena i matrica transakcijskih troškova ovise o vremenskom trenutku t i da oni zapravo ovise o događajima do trenutka t. Dakle slučajni procesi $S = (S_t)$ i $\Lambda = (\lambda_t)$ su adaptirani procesi u ovom dinamičnom multiperiodnom modelu. Prikladno je izabrati skalu tako da je $S_0^i = 1$ za svaki i i uzimamo kao dogovor da je $S_{0-}^i = 1$.

Sada ćemo pogledati što se događa sa vrijednošću portfelja kroz vrijeme. Postavit ćemo da je vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$ jednaka našem početnom doprinosu kada se pridružujemo tržištu tj. $V_0 = v$. Očito je da je vrijednost portfelja jednaka sumi vrijednosti uloženih u pojedinu financijsku imovinu. Pogledajmo kakva je promjena i-te financijske imovine iz trenutka $t - 1$ do trenutka t. Promjena ovisi o dva faktora, o promjeni cijena instrumenata u tom vremenu te o našim akcijama. Utjecaj promjene cijena instrumenata na vrijednost portfelja računamo kao umnožak vektora količine iz prethodnog trenutka $\widehat{V}_{t-1}$, sa vektorom promjene cijena ΔS_t, pri čemu je $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$. Naše akcije modelirat ćemo sa matricom $\Delta L_t = (\Delta L_t^{ij})$ u kojoj se nalaze željene promjene. Na mjestu (i, j) u matrici ΔL_t nalazi se broj ΔL_t^{ij} koji nam govori da želimo povećati vrijednost imovine na mjestu j za vrijednost ΔL_t^{ij} *numéraira*, u zamjenu za imovinu i. Dakle, promjenu vrijednosti i-te imovine možemo zapisati kao:

$$\Delta V_t^i = \widehat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \Delta B_t^i, \tag{2.1}$$

pri čemu je

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}. \tag{2.2}$$

Primjetimo da smo ΔB_t^i definirali kao razliku dvije sume. Prva suma čini sve pozitivne promjene, to jest sve količine koje smo sa imovine j prebacili na imovinu i, a od nje oduzimamo sve negativne promjene, to jest sve količine koje s imovine i prebacujemo na imovinu j. U drugu smo sumu morali uključiti i transakcijske troškove jer oni u tom slučaju smanjuju vrijednost imovine i. Kada sumiramo formulu (2.2) po svim i od 1 do d, dobit ćemo ukupne troškove koji nam smanjuju nominalnu vrijednost portfelja.

$$\sum_{i=1}^{d} \Delta B_t^i = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \Delta B_t^i = - \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda_t^{ij} \Delta L_t^{ij}$$

$$- \sum_{i=1}^{d} \Delta B_t^i = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda_t^{ij} \Delta L_t^{ij}$$

Vidimo da u ovako opisanom modelu evoluciju portfelja i odluke investitora o kupnji, tj. prodaji pojedine imovine možemo opisati $\mathcal{F}_t$-izmjerivom bijekcijom

$$(\Delta L_t^{ij}) \mapsto (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}.$$

Isto tako vidimo da kada je zadan proces matrica ΔL i početni uvjet v, da je odmah definiran i proces evolucije vrijednosti portfelja $V = (V_t),\ t = 0, \ldots, T$. Pogledajmo sada na jednostavnom primjeru kako izgleda evolucija portfelja.

Primjer 2.1.1. *Promatramo jednoperiodni model s 3 financijske imovine. U početnom trenutku poznat nam je vektor cijena* $S_0 = (20, 10, 30)$ *i poznat nam je vektor količina* $\widehat{V}_0 = (4, 6, 3)$*. Iz toga možemo izračunat vektor vrijednosti uloženih u pojedinu imovinu* $V_0 = (80, 60, 90)$*, tada je vrijednost portfelja u trenutku 0 jednaka 230. Za sljedeći vremenski trenutak prvo saznajemo nove cijene* $S_1 = (25, 16, 20)$*, tada odlučujemo koje su naše akcije. Odlučili smo kupiti 10 jedinica numéraira prvog instrumenta u zamjenu za treći, i 20 jedinica drugoga u zamjenu za prvi. Akcije prikazujemo preko matrice* ΔL_1*, a troškove pomoću matrice* λ_1*:*

$$\Delta L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.7 & 0 & 1.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Iskoristimo sada formule (2.1) i (2.2) da bismo izračunali promjenu vrijednosti portfelja. Prvo ćemo izračunati vektor promjene cijena $\Delta S_1 = (5, 6, -10)$*. Sada redom računamo:*

$$\Delta V_1^1 = 4 \times 5 + 0 + 10 - (1 + 0.5) \times 20 - (1 + 1) \times 0 = 0$$

$$\Delta V_1^2 = 6 \times 6 + 20 = 56$$

$$\Delta V_1^3 = 3 \times (-10) - (1 + 1) \times 10 = -50$$

Time smo izračunali promjene vrijednosti na pojedinim imovinama, promjena vrijednosti portfelja je $\Delta V_1 = 0+56-50 = 6$*. To možemo provjeriti i tako da direktno izračunamo vrijednost portfelja nakon promjene cijena* $\tilde{V}_1 = (100, 96, 60)$ *i onda primjenimo naše akcije.* $\bar{V}_1 = (100 + 10 - (1 + 0.5)20, 96 + 20, 60 - (1 + 1)10) = (80, 116, 40)$*. Vrijednost tog portfelja je 236 pa vidimo da je promjena vrijednosti 6, a to je upravo vrijednost koju smo dobili korištenjem formula (2.1) i (2.2).*

U prethodnom primjeru pokazali smo kako pretpostavke našeg modela izgledaju u jednostavnoj formulaciji te smo na intuitivnoj razini vidjeli kako djeluju pojedine formule, ali analizu evolucije portfelja možemo promatrati i u terminima količina pojedine imovine. Formula za zapis ovakvog modela je mnogo jednostavnija jer količina pojedine imovine ne ovisi o promjenama cijene, već jedino što nas zanima su akcije investitora. Dakle, promjena cijena financijskih instrumenata mijenja vrijednost portfelja, ali ona ne mijenja količinu financijskih instrumenata koje posjedujemo. Količinu financijskih instrumenata mijenjamo akcijama koje smo opisali sa slučajnom varijablom ΔB_t. Budući da slučajna varijabla ΔB_t opisuje promjenu vrijednosti nastalu našim akcijama, da bismo vidjeli kakva je promjena količine potrebno ju je podijeliti sa cijenom financijskog instrumenta kojeg promatramo. Tako za neki financijski instrument i dobivamo sljedeću jednakost

$$\Delta\widehat{V}_t^i = \frac{\Delta B_t^i}{S_t^i}, \quad V_{-1}^i = v^i, \quad i \leq d. \tag{2.3}$$

Jednadžbu (2.3) možemo zapisati kao:

$$\widehat{V}_t^i - \widehat{V}_{t-1}^i = \frac{\Delta B_t^i}{S_t^i}.$$

Rješavanjem ove jednadžbe i korištenjem početnog uvjeta, dobivamo da vrijedi:

$$\widehat{V}_t^i = v^i + \sum_{s=0}^{t} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i}.$$

Sada ako se prisjetimo da je vrijednost portfelja jednaka umnošku vektora cijena i vektora količina, dobivamo jednadžbu za vrijednost portfelja u tretnutku t:

$$V_t^i = S_t^i \widehat{V}_t^i = S_t^i \left(v^i + \sum_{s=0}^{t} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i} \right).$$

Sada kada smo se upoznali sa financijskom pozadinom i vidjeli osnovne jednadžbe za evoluciju portfelja i preko vektora količina i preko vektora vrijednosti, zanima nas kakvo bi nam matematičko okruženje odgovaralo za dani problem. Matematičko okruženje ćemo definirati u sljedećem poglavlju.

2.2 Matematičko okruženje za osnovni model

U ovom ćemo se poglavlju okrenuti matematičkoj strani osnovnog modela i definirati osnovne skupove na kojima ćemo računati.

Uočimo prvo da jednakost (2.1) možemo preformulirati i zapisati u sljedećem obliku:

$$\Delta V_t^i = V_{t-1}^i \Delta Y_t^i + \Delta B_t^i, \quad V_{-1}^i = v, \tag{2.4}$$

gdje je

$$\Delta Y_t^i = \frac{\Delta S_t^i}{S_{t-1}^i}, \quad Y_0^i = 1, \tag{2.5}$$

a slučajna varijabla ΔB_t^i je definirana u formuli (2.2). Primjetimo da je formula (2.4) zapravo linearna (vektorska) diferencijska jednadžba.

Varijabla ΔL_t je d-dimenzionalna matrica s pozitivnim elementima koja je $\mathcal{F}_t$ izmjeriva, a to kraće zapisujemo kao $\Delta L_t \in L^0(\mathcal{M}_+^d, \mathcal{F}_t)$, ovdje smo sa $\mathcal{M}_+^d$ označili skup d-dimenzionalnih matrica s pozitivnim elementima.

Budući da zadavanjem ΔL_t odmah definiramo i ΔB_t, zanima nas u kojem skupu ΔB_t poprima vrijednosti. Pogledajmo jednakost (2.2) :

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}.$$

Iz ove jednakosti vidimo da svaka matrica $\Delta L_t \in \mathcal{M}_+^d$ definira neki slučajni proces ΔB_t. Sada definiramo skup M_t:

$$M_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists a \in \mathcal{M}_+^d \text{ takav da je } x^i = \sum_{j=1}^{d} [(1 + \lambda_t^{ij}) a^{ij} - a^{ji}], \quad i \leq d \right\}. \tag{2.6}$$

Primjetimo da u definiciji skupa M_t, matrica $a \in \mathcal{M}_+^d$ zapravo predstavlja matricu ΔL_t. $\mathcal{F}_t$ izmjeriva slučajna varijabla ΔB_t poprima vrijednosti u skupu $-M_t$. Obrnuto može se pokazati da je svaka slučajna varijabla $\Delta B_t \in L^0(-M_t, \mathcal{F}_t)$ generirana određenom (ali ne nužno i jedinstvenom) varijablom $\Delta L_t \in L^0(\mathcal{M}_+^d, \mathcal{F}_t)$. Primjetimo da ovakav argument možemo koristiti samo u slučaju potpunih informacija. Kada bi investitorove akcije bile izmjerive s obzirom na manju filtraciju, isto ne bi vrijedilo.

Definicija 2.2.1. *Označimo sa $\mathcal{B}$ skup procesa $B = (B_t)$ takvih da je $\Delta B_t \in -M_t$ (isto možemo formalnije zapisati kao $\Delta B_t \in L^0(-M_t, \mathcal{F}_t)$). Tada skup $\mathcal{B}$ zovemo skup kontrolnih strategija.*

U financijama nam je općenito uvijek zanimljivo proučavati skupove solventnosti, to jest skup portfelja takvih da u nekom trenutku akcijama investitora i plaćanjem transakcijskih troškova možemo ostvariti da niti jedna imovina nije u minusu. Skupovi solventnosti su jako važni i oni ovise o događaju $\omega \in \Omega$, tj. o stanju svijeta u kojem se nalazimo, slijedi definicija.

Definicija 2.2.2. *Solventni konus K_t je skup svih portfelja koji se u trenutku t akcijama investitora mogu pretvoriti u portfelj u kojem su sve pozicije, nakon oduzimanja troškova transakcija, pozitivne, drugim riječima nema 'short' pozicija.*
Matematički to zapisujemo:

$$K_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^d ;\ \exists a \in \mathcal{M}_+^d \;\middle|\; x^i + \sum_{j=1}^{d} [a^{ji} - (1 + \lambda_t^{ij}) a^{ij}] \geq 0, \quad i \leq d \right\}. \tag{2.7}$$

Gledajući definicije skupova M_t i K_t očito je da vrijedi $K_t = M_t + \mathbb{R}^d_+$. Slijedi formalni dokaz ove jednakosti.

Lema 2.2.3. *Sukladno s prethodno danim definicijama vrijedi $K_t = M_t + \mathbb{R}^d_+$.*

Dokaz. Primjetimo da jednostavnim prebacivanjem na lijevu stranu skup M_t možemo zapisati i na sljedeći način:

$$M_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \exists a \in \mathcal{M}^d_+ \;\middle|\; x^i + \sum_{j=1}^{d} [a^{ji} - (1 + \lambda^{ij}_t) a^{ij}] = 0, \quad i \le d \right\}.$$

Neka je $x \in M_t$ tada je po definiciji $x \in K_t$.

Neka je sada $x \in K_t$, želimo pokazati da tada x možemo rastaviti na dva dijela, gdje je jedan dio iz M_t, a drugi iz $\mathbb{R}^d_+$. Zbog toga što je $x \in K_t$ vrijedi da postoji matrica $a \in \mathcal{M}^d_+$ takva da vrijedi:

$$x^i + \sum_{j=1}^{d} [a^{ji} - (1 + \lambda^{ij}_t) a^{ij}] \ge 0, \text{ za svaki } i = 1, \dots, d. \quad (*)$$

Ako je prethodni izraz jednak 0 za svaki $i = 1, \dots, d$, onda je po definiciji $x \in M_t$, a dio iz $\mathbb{R}^d_+$ je nulvektor. Pretpostavimo da postoji $k \in \{1, \dots, d\}$ za koji je prethodna jednakost strogo veća od nule, dok je za ostale jednaka 0, tada tu jednakost možemo zapisati:

$$x^k + \sum_{j=1}^{d} [a^{jk} - (1 + \lambda^{kj}_t) a^{kj}] = \epsilon_k.$$

Prebacivanjem ϵ_k na drugu stranu dobivamo sljedeći zapis:

$$x^k - \epsilon_k + \sum_{j=1}^{d} [a^{jk} - (1 + \lambda^{kj}_t) a^{kj}] = 0.$$

Primjetimo da smo time završili dokaz, vektor $\hat{x} = (x_1, \dots, x_k - \epsilon, \dots, x_d)$ nalazi se po definiciji u M_t, i dodatno vektor $\epsilon = (0, \dots, \epsilon_k, \dots, 0)$ nalazi se u $\mathbb{R}^d_+$. To jest početni vektor x razdvojili smo na dva dijela, $x = \hat{x} + \epsilon$. Primjetmo da pretpostavljanjem da u relaciji $(*)$ samo jedna komponenta strogo pozitivna nismo smanjili općenitost, jer bi za sve ostale komponente koje su strogo pozitivne proveli isti postupak.

□

Rezultat Leme 2.2.3 možemo zapisati i kada umjesto modeliranja u vrijednostima uloženim u imovinu modeliramo u fizičkim količinama imovine, tada imamo $\widehat{K_t} = \widehat{M_t} + \mathbb{R}^d_+$, gdje je $\widehat{K_t} = \phi_t K_t$.

U ovom modelu slučajni zahtjev (contingent claim) ξ modeliramo kao slučajnu d- dimenzionalnu varijablu. Ono što mi želimo, je naći proces vrijednosti portfelja $V = (V_t)_{t\leq T}$ takav da u slučaju da dođe do tog potraživanja mi možemo pokriti troškove danog potraživanja, tj. nas zanima kako možemo naći replicirajući ili superreplicirajući portfelj. Ako nađemo takav portfelj onda kažemo da smo se ogradili od potraživanja tj. našli smo 'hedge' strategiju. Slijedi definicija.

Definicija 2.2.4. *Kažemo da je slučajan zahtjev ξ moguće hedgirati ako postoji portfeljski proces $V = (V_t,\ t = 0, 1 \dots T)$ takav da vrijedi $V_T - \xi \in K_T$.*

Ako uvedemo simbol $\geq_T$ na način da je zapis $x \in K_T$ ekvivalentan zapisu $x \geq_T 0$, onda prethodni uvjet iz Definicije 2.2.4 možemo zapisati kao $V_T \geq_T \xi$, pri čemu je T trenutak u kojem je došlo do realizacije slučajnog zahtjeva, a V_T je vrijednost portfelja V u trenutku T.

Lema 2.2.5. *Slučajan zahtjev ξ može se hedgirati ako i samo ako postoji slučajni proces vrijednosti portfelja $V = (V_t)_{t\leq T}$, takav da je $V_T \geq_T \xi$ po komponentama.*

Dokaz. Pokazali smo da ako postoji portfelj za koji je $V_T \geq_T \xi$ da se onda slučajni zahtjev ξ može hedgirati, ovo slijedi direktno iz definicije. Sada želimo pokazati da ako slučajni zahtjev možemo hedgirati, to jest ako vrijedi $V_T \geq_T \xi$ da se onda može pronaći slučajna varijabla V_T koja dominira slučajni zahtjev po komponentama. Ako vrijedi takva nejednakost onda je $V_T - \xi \in K_T$. Prethodno smo vidjeli da vektore iz K_t možemo zapisati kao sumu dvije komponente jednu iz M_t drugu iz $\mathbb{R}^d_+$. Pa tako imamo

$$V_T - \xi = \alpha + \beta, \text{gdje je } \alpha \in L^0(M_T, \mathcal{F}_T), \text{a } \beta \in L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T).$$

Ako zadnju transakciju, ΔB_T, u ovom portfelju zamijenimo sa $\Delta B_T - \alpha$, ostvarili smo veću terminalnu vrijednost ovog portfelja $V_{T_1} = \xi + \beta$ koja dominira slučajni zahtjev ξ po komponentama.

□

Kako smo sada malo bolje upoznali model u kojem se nalazimo zanimat će nas uvjeti na model tako da on ne dopušta arbitražu. Kako bismo našli te uvjete moramo dobro definirati što podrazumijevamo pod pojmom arbitraže. Da bi to mogli lako učiniti, podrobnije ćemo istražiti matematičko okruženje koje bi dobro odgovaralo našem modelu.

To ćemo učiniti tako da bolje proučimo definicije skupova M_t i K_t te njihove strukture. Pogledajmo prvo opet definiciju skupa M_t:

$$M_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists a \in \mathcal{M}^d_+ \ takav\ da\ je\ x^i = \sum_{j=1}^{d} [(1 + \lambda^{ij}_t) a^{ij} - a^{ji}], \quad i \leq d \right\}.$$

Ako definiramo linearno preslikavanje $\Psi : \mathcal{M}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ gdje je

$$[\Psi((a^{ij}))]^i := \sum_{j=1}^{d} [(1+\lambda_t^{ij})a^{ij} - a^{ji}],$$

onda se lako vidi da je skup M_t slika poliedarskog konusa $\mathcal{M}_+^d$ (čak njegovog podskupa $\tilde{\mathcal{M}}_+^d$ sa nulama na dijagonali) po linearnom preslikavanju Ψ. Po Lemi 1.3.6 je i M_t poliedarski konus.

Budući da je M_t slika poliedarskog konusa $\tilde{\mathcal{M}}_+^d$ po Ψ, možemo na lakši način zapisati generatore konusa M_t. Prvo proučimo čime je generiran konus $\tilde{\mathcal{M}}_+^d$. To je skup d- dimenzionalnih matrica koje imaju 0 na dijagonali. Taj skup generiramo sa jediničnim baznim matricama, budući da su na dijagonali 0 slijedi da je $\tilde{\mathcal{M}}_+^d$ generiran sa $d \times (d-1)$ baznih matrica. Slika ovog skupa generatora je generirajući skup za M_t, zbog toga je M_t slučajni poliedarski konus koji možemo zapisati:

$$M_t = konus\{(1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j, \quad 1 \le i, j \le d\}.$$

Zanimljivo nam je gledati njegov dualni pozitivni konus koji je zadan sa:

$$\begin{aligned} M_t^* &:= \{\omega : \omega x \ge 0, \ \forall x \in M_t\} \\ &= \{\omega : (1+\lambda_t^{ij})\omega^i - \omega^j \ge 0, \quad 1 \le i, j \le d\}. \end{aligned}$$

Slično ovim razmatranjima gledajući definiciju konusa K_t vidimo da je on slika prostora $\tilde{M}_+^d \otimes \mathbb{R}_+^d$ i možemo ga još zapisati kao:

$$K_t = konus\{(1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j, \ e_i, \quad 1 \le i, j \le d\},$$

a njegov pozitivni dual je zadan sa

$$K_t^* = M_t^* \cap \mathbb{R}_+^d = \{\omega \in \mathbb{R}_+^d : (1+\lambda_t^{ij})\omega^i - \omega^j \ge 0, \quad 1 \le i, j \le d\}.$$

Solventni konus K_t se može generirati sa mnogo raznih matrica $\Lambda_t = (\lambda_t)_{ij}$, u našoj analizi bit će nam zanimljive one matrice koje imaju najmanju apsolutnu normu to jest one za koje vrijedi $\sum_{ij} \lambda_t^{ij}$ je najmanja.

Lema 2.2.6. *Za matrice s najmanjom apsolutnom normom vrijedi sljedeća nejednakost*

$$1+\lambda_t^{ij} \le (1+\lambda_t^{ik})(1+\lambda_t^{kj}) \quad \forall i, j, k \tag{2.8}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za matricu s najmanjom normom Λ_t vrijedi ovakva nejednakost:

$$1+\lambda_t^{ij} > (1+\lambda_t^{ik})(1+\lambda_t^{kj}) \quad \exists i, j, k$$

Uzmimo dva vektora iz skupa K_t koji je generiran sa matricom Λ. Neka su to vektori $v_1 = (1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j$ i $v_2 = (1+\tilde{\lambda}_t^{ij})e_i - e_j$, gdje smo definirali $\tilde{\lambda}_t^{ij} := (1+\lambda_t^{ik})(1+\lambda_t^{kj}) - 1$. Sada su po definiciji konusa K_t njegovi generatori i skup $\{v_1, e_i\}$ i skup $\{v_2, e_i\}$, gdje za oba skupa vrijedi $1 \leq i, j \leq d$. Koristeći se pretpostavkom, vidimo da će se apsolutna norma smanjiti ako zamijenimo λ^{ij} sa $\tilde{\lambda}^{ij}$, a generirat ćemo isti konus K_t. To je kontradikcija s pretpostavkom da je Λ matrica najmanje norme za dani konus, dakle naša pretpostavka je kriva.

□

Financijska interpretacija ove činjenice vrlo je jednostavna. Iskusni će sudionik tržišta prvo isprobati sve kombinacije prodaje pojedinih instrumenata i odabrati onu koja mu je najjeftinija, iz tog nam je razloga upravo zanimljiva matrica transakcijskih troškova koja ima najmanju apsolutnu normu. U stvarnosti situacija nije uvijek tako jednostavna.

Za kraj pogledajmo jedan zanimljiv linearni prostor, elementi ovog prostora bit će pozicije koje se mogu pretvoriti u nulu bez plaćanja transakcijskih troškova. Ovaj prostor definiramo kao $K_t^0 := K_t \cap (-K_t)$.

Neka je $x \in K_t \cap (-K_t)$, tada je $x \in K_t$ i $x \in (-K_t)$. Iz činjenice da je $x \in K_t$ slijedi da postoji neki $a \in \mathcal{M}_+^d$ takav da:

$$x^i - \sum_{j=1}^{d} [(1+\lambda_t^{ij})a^{ij} - a^{ji}] \geq 0.$$

Prethodnu jednakost možemo ekvivalentno zapisati na sljedeći način:

$$x^i = \sum_{j=1}^{d} [(1+\lambda_t^{ij})a^{ij} - a^{ji}] + h^i.$$

Budući da je $x \in (-K_t)$ vrijedi i sljedeća jednakost:

$$-x^i = \sum_{j=1}^{d} [(1+\lambda_t^{ij})\tilde{a}^{ij} - \tilde{a}^{ji}] + \tilde{h}^i.$$

Sada sumiranjem ova dva izraza po svim imovinama i dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda_t^{ij}(a^{ij} + \tilde{a}^{ij}) + \sum_{i=1}^{d} (h^i + \tilde{h}^i) = 0$$

Što je upravo svojstvo našeg skupa K_t^0.

Poglavlje 3

Teoremi o nepostojanju arbitraže

3.1 Slabi uvjet za nepostojanje arbitraže

Nakon definiranja modela kojim se koristimo dolazimo do glavnog pitanja koje nas zanima. Koji su to uvjeti da ne može doći do mogućnosti arbitraže. Arbitraža je portfelj koji donosi nerizičan profit to jest s početnim ulaganjem od 0 će krajnja vrijednost sigurno biti strogo pozitivna. Slijedi formalna definicija stroge mogućnosti arbitraže.

Definicija 3.1.1. *Strategiju $B \in \mathcal{B}$ zovemo strogom mogućnosti arbitraže, ako krajnja vrijednost portfelja $V = V^B$ u trenutku T pripada linearnom prostoru generiranom nenegativnim realnim d-dimenzionalnim vektorima, ali je različita od nule. Pri tome je početna vrijednost portfelja $V_{0-} = 0$.*

Matematički to zapisujemo $V_T^B \in L^0(\mathbb{R}_+^d)$ i $V_T^B \neq 0$.

Prije nego što nastavimo dalje, pojasnimo malo detaljnjije prethodnu definiciju. Skup $\mathcal{B}$ je skup kontrolnih strategija, element iz tog skupa opisuje akcije nad portfeljem. Portfelj V možemo zamišljati kao slučajni proces koji je definiran pomoću kontrolne strategije B, a jednakost za evoluciju vrijednosti portfelja koji prati strategiju B definirali smo sa (2.1). Vektor $V_T = (V_T^1, V_T^2, \dots, V_T^d)$ je vektor krajnjih vrijednosti u trenutku T po pojedinim imovinama iz portfelja koje dobivamo prateći strategiju B. Ako se radi o arbitraži onda će te vrijednosti biti nenegativne i barem jedna različita od nule.

Definicija 3.1.2. *Kažemo da model zadovoljava slabi uvjet za nepostojanje arbitraže (NA^w) ako ne postoji mogućnost stroge arbitraže.*

Ako sa R_T^0 označimo skup krajnjih vrijednosti portfelja kojima je početno ulaganje jednako 0, $V_{0-} = 0$, definiciju NA^w možemo i ovako zapisati:

$$R_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}.$$

Prethodna matematička jednakost nam zapravo govori da ako ne postoji mogućnost stroge arbitraže onda jedini portfelj čije se krajnje vrijednosti nalaze u skupu $\mathbb{R}^d_+$ je portfelj kojemu su sve krajnje vrijednosti jednake 0. Označimo sa $\hat{R}^0_T = \phi_T R^0_T$ skup mogućih vrijednosti u fizičkim jedinicama, tada definiciju NA^w možemo ekvivalentno pisati i kao

$$\hat{R}^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) = \{0\}.$$

Prije nego što nastavimo uvedimo još neke oznaka. Definiramo sa $A^0_T := R^0_T - L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$, tada je A^0_T skup slučajnih zahtjeva koje možemo hedgirati.

Označimo sa $\mathcal{M}^T_0(\hat{K}^* \backslash \{0\})$ skup martingala $Z = (Z_t)_{t \leq T}$ takvih da je $Z_t \in L^0(\hat{K}^*_t \backslash \{0\})$ za svaki t. U literaturi se elementi skupa $\mathcal{M}(\hat{K}^* \backslash \{0\})$ ponekad nazivaju sistemima konzistentne cijene. U modelima sa konačnim brojem stanja svijeta, postojanje tog skupa ekvivalentno je nepostojanju stroge mogućnosti arbitraže. Slijedi teorem u kojem ćemo dokazati ekvivalentnost prethodno iskazanih uvjeta.

Teorem 3.1.3. *Pretpostavimo da je skup stanja svijeta Ω konačan, tada su sljedeći uvjeti ekvivalentni:*
(a) $R^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) = \{0\}$ (NA^w)
(b) $A^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) = \{0\}$
(c) $\mathcal{M}^T_0(\hat{K}^* \backslash \{0\}) \neq \emptyset$.

Dokaz. Uvjeti (a) i (b) su očito ekvivalentni. Iz definicije skupa A^0_T vidimo da je skup R^0_T njegov podskup. Pretpostavimo da je zadovoljen uvjet (b) budući da vrijedi $R^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) \subseteq A^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+) = \{0\}$ onda odmah slijedi da vrijedi i uvjet (a). Sada pretpostavljamo da vrijedi uvjet (a) te pretpostavimo da ne vrijedi uvjet (b) to jest da postoji $x \in A^0_T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+)$ koji je različit od nule. Po definiciji presjeka vrijedi $x \in A^0_T$ i $x \in L^0(\mathbb{R}^d_+)$, a po definiciji skupa A^0_T, x možemo rastaviti na dva dijela pa pišemo:

$$x = a - b, \quad a \in R^0_T,\ b \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T).$$

Sada imamo $a = x + b$ što povlači da je $a \in L^0(\mathbb{R}^d_+)$, što je kontradikcija s pretpostavkom da vrijedi uvjet (a). Time smo pokazali ekvivalentnost ova dva uvjeta.

Provjerimo ekvivalentnost uvjeta (a) i (c). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da svi elementarni događaji skupa $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ imaju strogo pozitivne vjerojatnosti. Tada se prostor d-dimenzionalnih slučajnih varijabli može opisati euklidskim prostorom dimenzija dxN sa skalarnim produktom definiranim sa $(\xi, \eta) := \mathbb{E}\,[\xi\eta]$.

Primjetimo, ako je slučajni konus $G = konus\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, generiran sa $\mathcal{F}_t$-izmjerivim slučajnim varijablama sa vrijednostima u $\mathbb{R}^d$, onda je $L^0(G, \mathcal{F}_t)$ poliedarski konus generiran sa slučajnim varijablama $\xi_i I_{\Gamma_j}$ gdje su Γ_j elementi sigma algebre $\mathcal{F}_t$. Iz toga slijedi da su $\hat{R}^0_T$ i $L^0(\mathbb{R}^d_+)$ poliedarski konusi, budući da su oni sume poliedarskih konusa.

Sada uz pomoć Leme 1.3.8 vidimo da će uvjet (a) biti zadovoljen ako i samo ako postoji d-dimenzionalna slučajna varijabla η u presjeku skupa $(-\hat{R}_T^{0*})$ sa interiorom skupa $(L^0(\mathbb{R}_+^d))^* = L^0(\mathbb{R}_+^d)$. Primjetimo da je $-\hat{R}_T^{0*}$ polarni konus pa po njegovoj definiciji imamo:

$$-\hat{R}_T^{0*} = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{E}[\xi\eta] \leq 0, \ \forall \xi \in \hat{R}_T^0\}$$

Budući da se η nalazi u presjeku imamo da vrijedi $\mathbb{E}\ [\xi\eta] \leq 0$ za sve $\xi \in \hat{R}_T^0$ i sve komponente od η strogo su pozitivne.

Definiramo martingal $Z_t = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{F}_t]$ te želimo pokazati da on pripada prostoru $\mathcal{M}_0^T(\hat{K}^*\backslash\{0\})$. Uzmimo neki $\zeta \in L^0(\hat{K}_t, \mathcal{F}_t) \subseteq -\hat{R}_T^0 + L^0(\mathbb{R}_+^d)$, tada vrijedi

$$\mathbb{E}[Z_t\zeta] = \mathbb{E}[\eta\zeta] \geq 0.$$

Prisjetimo se definicije skupa $\hat{K}_t^*$:

$$\hat{K}_t^* = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{E}[\xi\eta] \geq 0, \ \forall \eta \in \hat{K}_t\}.$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi da je $Z_t \in L^0(\hat{K}_t^*, \mathcal{F}_t)$ pa zbog toga skup $\mathcal{M}_0^T(\hat{K}^*\backslash\{0\})$ nije prazan.

□

Napomena 3.1.4. *U prethodnom dokazu koristili smo da je suma poliedarskih konusa poliedarski konus. Primjetimo da ta činjenica slijedi odmah iz Teorema 1.3.4. Budući da su oba konusa poliedarska to znači da su njihovi skupovi generatora konačni, a unija dvaju konačna skupa je opet konačni skup što povlači da je generator sume poliedarskih konusa opet konačan skup pa je po teoremu to poliedarski konus.*

Bitno je spomenuti da se NA^w uvjet može formulirati na mnogo različitih načina. Na primjer slijedeću propoziciju mogli smo formulirati i tako da zamijenimo R_T^0 sa $\hat{R}_T^0$ i K_T sa $\hat{K}_T$.

Propozicija 3.1.5. *Sljedeći su uvjeti ekvivalentni:*
(a) $R_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(\partial K_T, \mathcal{F}_T)$
(b) $R_T^0 \cap L^0(\mathbb{R}_+^d, \mathcal{F}_T) = \{0\}$.

Dokaz. Prvo pokazujemo da vrijedi implikacija (a)⇒ (b). Prvo ćemo se prisjetiti definicije skupa K_t :

$$K_T := \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \ \exists a \in \mathcal{M}_+^d \ \middle| \ x^i + \sum_{j=1}^{d} [a^{ji} - (1 + \lambda_T^{ij}) a^{ij}] \geq 0, \quad i \leq d \right\}$$

Iz definicije odmah vidimo da vrijedi $\mathbb{R}^d_+ \subseteq K_T$ iz čega dobivamo i sljedeći odnos $L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$. Pretpostavimo sada da vrijedi uvjet (a), tada imamo:

$$R_0^T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T) = R_0^T \cap L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T) \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(\partial K_T, \mathcal{F}_T) \cap L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T) = \{0\}.$$

Ovdje zadnja jednakost slijedi zbog toga što je $\mathbb{R}^d_+ \cap \partial K_T = \{0\}$.

Da bi dokazali implikaciju (b) $\Rightarrow$ (a) prvo primjetimo da ako je $V_T^B \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$, gdje je $B \in \mathcal{B}$, onda postoji $B' \in \mathcal{B}$ takav da je $V_T^{B'} \in L^0(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{F}_T)$ i da je $V_T^{B'}(\omega) \neq 0$ na skupu $V_T^B(\omega) \notin \partial K_T(\omega)$. Za konstrukciju takvog B' dovoljno je modificirati samo ΔB_T iz jednakosti (1.2) na način da se uz zadnji transfer obave i likvidacije negativnih pozicija. Konstruirali smo portfelj s pozitivnom krajnjom vrijednosti koji se ne nalazi u ∂K_T. Time smo pokazali da ako ne vrijedi (a) da onda ne vrijedi niti (b), to jest da vrijedi implikacija (b) $\Rightarrow$ (a).

$\square$

3.2 Jaki uvjet za nepostojanje arbitraže

Nakon što smo se upoznali sa slabim uvjetom za nepostojanje arbitraže uvodimo i jaki uvjet. Pretpostavimo da je u nekom trenutku t, investitorov portfelj na prodaji. Moguće kupce ne zanimaju realni transakcijski troškovi za likvidaciju negativnih pozicija, tada sumiranjem svih pozicija oni mogu doći do strogo pozitivne vrijednosti. Pa sa njihovog stajališta investitor ima mogućnost arbitraže. Zbog ovakvih mogućnosti razmišljamo o modifikaciji našeg slabog uvjeta NA^w koji će biti prihvatljiviji sa stajališta investitora.

Definicija 3.2.1. *Strategiju $B \in \mathcal{B}$ zovemo slabom mogućnosti arbitraže u trenutku $t \leq T$ ako je $V_t^B \in K_t$, ali $P(V_t^B \notin K_t^0) > 0$, gdje je $K_t^0 := K_t \cap (-K_t)$.*

Drugim riječima strategija B je slaba mogućnost arbitraže u trenutku t, ako se prateći tu strategiju portfelj V_t^B nalazi u solventnom konusu. Što znači da imamo portfelj koji u tom trenutku, s plaćanjem transakcijskih troškova, možemo prebaciti u portfelj bez kratkih pozicija. Ali vjerojatnost da se naš portfelj u trenutku t ne nalazi u linearnom prostoru K_t^0, koji se sastoji od pozicija koje se mogu nulirati bez plaćanja transakcijskih troškova, je veća od nule. Dakle postoji mogućnost da se naš portfelj u trenutku t ne nalazi u prostoru K_t^0, što znači da postoje pozicije koje se ne mogu nulirati bez plaćanja transakcijskih troškova.

Definicija 3.2.2. *Za portfelj kažemo da zadavoljava jaki uvjet za nepostojanje arbitraže u trenutku t, ako u tom trenutku nema slabe mogućnosti arbitraže. Ovaj uvjet označavamo sa NA_t^s, kada je taj uvjet zadovoljen za svaki $t = 1, \ldots, T$ pišemo da vrijedi NA^s.*

Matematički jaki uvjet za nepostojanje arbitraže u trenutku t, NA_t^s, možemo ovako zapisati:

$$R_t^0 \cap L^0(K_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(K_t^0, \mathcal{F}_t).$$

Drugim riječima želimo da su svi elementi, koji se nalaze u presjeku krajnjih vrijednosti i vrijednosti iz solventnog konusa, podskup skupa K_t^0. Ekvivalentno u terminima fizičkih količina

$$\hat{R}_t^0 \cap L^0(\hat{K}_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(\hat{K}_t^0, \mathcal{F}_t).$$

Sada slijedi teorem koji nam govori o ekvivalentnim formulacijama jakog uvjeta za nepostojanje arbitraže.

Teorem 3.2.3. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(a) $R_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$ (NA_T^s)
(b) $A_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$
(c) postoji $Z^{(T)} \in \mathcal{M}_0^T(\hat{K}^* \backslash \{0\})$ *td.* $Z_T^{(T)} \in L^1(ri\hat{K}_T^*, \mathcal{F}_T)$

Dokaz. Ekvivalentnost uvjeta (a) i (b) je očita i dokazujemo ju kao i u dokazu Teorema 3.1.3. Pretpostavimo da vrijedi uvjet (b), korištenjem činjenice da je $R_T^0 \subseteq A_T^0$ slijedi: $R_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq A_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$. Time smo pokazali da (b) povlači (a).

Sada pokazujemo da (a) implicira (b), pretpostavimo suprotno to jest da vrijedi uvjet (a), ali da uvjet (b) nije zadovoljen. U tom slučaju vrijedi:

$$\exists x \in A_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \text{ i } x \notin L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T).$$

Budući da se x nalazi u skupu A_T^0 možemo ga raspisati kao $x = a - b$, $a \in R_T^0$, $b \in L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$. Iz čega slijedi da možemo pisati $a = x + b$, sada po definiciji skupa $K_T^0 = K_T \cap (-K_T)$ i budući da je $x \in L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$ imamo da je i a kao suma također u $L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$, time smo našli element koji se nalazi u presjeku $R_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T)$, ali po pretpostavci nije u skupu $L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$. Što je kontradikcija, to jest vrijedi implikacija (a) $\Longrightarrow$ (b).

Ostaje pokazati ekvivalenciju između uvjeta (a) i (c) dokaz slijedi analogno kao dokaz Teorema 3.1.3 s time da sada u dokazu koristimo Teorem 1.3.12. Koristit ćemo se istim Euklidskim prostorom definiranim u dokazu Teorema 3.1.3. Primjetimo na početku da iz uvjeta (a) po Teoremu 1.3.12 dobivamo sljedeću relaciju ekvivalencije:

$$R_T^0 \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T) \Longleftrightarrow (-{R_T^0}^*) \cap L^0(riK_T^*, \mathcal{F}_T) \neq \emptyset.$$

Budući da je uvjet (c) izražen u jedinicama količine, a uvjet (a) možemo zapisati ekvivalentno na taj način, gornja ekvivalencija je istovjetna sljedećoj koja nam više odgovara:

$$\hat{R}_T^0 \cap L^0(\hat{K}_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(\hat{K}_T^0, \mathcal{F}_T) \Longleftrightarrow (-{\hat{R}_T^0}{}^*) \cap L^0(ri\hat{K}_T^*, \mathcal{F}_T) \neq \emptyset.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi uvjet (a), to znači da $\exists \eta \in (-{\hat{R}_T^0}{}^*) \cap L^0(ri\hat{K}_T^*, \mathcal{F}_T)$. Prisjetimo se sada definicija tih dvaju skupova:

$$-\hat{R}_T^{0*} = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{E}[\xi\eta] \leq 0, \ \forall \xi \in \hat{R}_T^0\} \text{ i}$$

$$riK_T^* = \{\omega \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{E}[\omega x] > 0,\ x \in K_T\}.$$

Budući da $\eta \in (-\hat{R}_T^{0*})$ imamo da vrijedi:

$$\mathbb{E}[\xi\eta] \leq 0,\ \forall \xi \in \hat{R}_T^0.$$

Definirajmo sada martingal $Z^{(T)} = (Z_t^{(T)})_{t\leq T}$ sa $Z_t^{(T)} = \mathbb{E}[\eta \mid \mathcal{F}_t]$, tada je $Z_T^{(T)} = \mathbb{E}[\eta \mid \mathcal{F}_T]$. Htjeli bismo pokazati da se taj martingal nalazi u $\mathcal{M}_0^T(\hat{K}^*\backslash\{0\})$. Neka je $\zeta \in L^0(\hat{K}_T, \mathcal{F}_T) \subseteq -\hat{R}_T^0 + L^0(\mathbb{R}_+^d)$, tada imamo:

$$\mathbb{E}[Z_T^T\zeta] = \mathbb{E}[\eta\zeta] \geq 0.$$

Koristeći prethodnu nejednakost i definiciju skupa $\hat{K}_T^* = \{\eta \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{E}[\eta\zeta] \geq 0,\ \forall\zeta \in \hat{K}_T\}$, imamo da je $Z_T^{(T)} \in L^0(\hat{K}_T^*\backslash\{0\})$, dakle skup $\mathcal{M}_0^T(\hat{K}^*\backslash\{0\})$ je neprazan jer sadrži martingal $Z^{(T)}$.

□

Kao direktnu posljedicu prethodnog teorema navodimo sljedeći korolar.

Korolar 3.2.4. *Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*
(a) $R_t^0 \cap L^0(K_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(K_t^0, \mathcal{F}_t)$ *za svako t, tj. vrijedi* NA^s
(b) $A_t^0 \cap L^0(K_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(K_t^0, \mathcal{F}_t)$ *za sve t*
(c) za svako $t \leq T$ *postoji proces* $Z^{(t)} \in \mathcal{M}_0^t(\hat{K}^*\backslash\{0\})$, *td.* $Z_t^{(t)} \in L^1(ri\hat{K}_t^*, \mathcal{F}_t)$

Primjetimo da NA_T^s ne implicira da vrijedi NA_t^s za $t < T$, to jest slabe mogućnosti arbitraže mogu nestati već sljedeći dan.

Primjer 3.2.5. *Sada dajemo jednostavan primjer modela te ćemo pokazati kako transakcijski troškovi utječu na različite mogućnosti arbitraže. Pretpostavljamo da se nalazimo u jednoperiodnom modelu sa dvije imovine. Zadani su nam vektori cijena u početnom trenutku* $(S_0^1, S_0^2) = (1,1)$ *i u sljedećem trenutku* $(S_1^1, S_1^2) = (1,2)$. *Također imamo zadanu matricu transakcijskih troškova*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pogledajmo sada koji su generatori konusa K^*, *prisjetimo se definicije tog konusa*

$$K^* = \{\omega \in \mathbb{R}_+^d, \quad (1+\lambda_t^{ij})\omega^i - \omega^j \geq 0,\ 1 \leq i,j \leq d\}.$$

U našem primjeru definiciju od K^* *zapisujemo ovako:*

$$K^* = \{\omega \in \mathbb{R}_+^2, \quad (1+\lambda_t^{ij})\omega^i - \omega^j \geq 0,\ 1 \leq i,j \leq 2\}.$$

Sada uvrštavanjem transakcijskih troškova prvo za $i = 1$ *i* $j = 2$ *potom za* $j = 1$ *i* $i = 2$ *dobivamo da su generatori skupa* K^* *vektori* $(1, 1+\lambda)$ *i* $(1,1)$. *Nas zanimaju koja su* *ograničenja na matricu transakcijskih troškova kako bi bili zadovoljeni uvjeti nepostojanja arbitraže. Da bi došli do toga prvo nas zanima je li moguće povećati vrijednost portfelja u trenutku* $T = 1$*, to ne možemo jer ne znamo cijene za sljedeće razdoblje jer je model u kojem se nalazimo jednoperiodni. Dalje gledamo strategije za trenutak* $t = 0$*, budući da će se povećati cijena druge imovine, jedina strategija u kojoj može doći do arbitraže je da prodajemo prvu imovinu u zamjenu za drugu. Dakle transferi za takvu strategiju su* $\Delta L_0^{12} = 1$ *i* $\Delta L_0^{21} = 0$*. Ovim transferima, koristeći se formulom (1.2) dobivamo strategiju* $\Delta B_0 = (-(1+\lambda), 1)$*, a u sljedećem trenutku ne poduzimamo akcije pa je naša strategija* $\Delta B_1 = (0, 0)$*. Kako bismo mogli odrediti zadovoljava li naša strategija uvjete nepostojanja arbitraže potrebno je odrediti krajnju vrijednost koju dobivamo prateći je. U početnom trenutku imamo negativnu poziciju na prvoj imovini* $-(1+\lambda)$*, i jednu jedinicu druge imovine, nakon toga ne provodimo transfere pa je očito da je vrijednost ovakvog portfelja po imovinama* $V_1^B = (-(1+\lambda), 2)$*, to jest vrijednost je* $1 - \lambda$*. Sada jasno možemo čitati uvjete, u slučaju da je* $\lambda \in [0, 1\rangle$*, vrijednost portfelja je strogo pozitivna to jest* $V_1^B \in intK$ *što znači da je* B *stroga mogućnost arbitraže. Ako je* $\lambda = 1$ *model zadovoljava* NA_1^w *uvjet, ali je* B *i dalje slaba mogućnost arbitraže. Naposlijetku u slučaju da je* $\lambda > 1$*, naša strategija* B *zadovoljava i* NA_1^s *uvjet.*

Poglavlje 4

Različite varijante modela

U ovom ćemo poglavlju razmotriti neke od mogućih varijanti osnovnog modela. Radi se o drugačijim parametrizacijama ili pristupima modelu, no sve te varijante modela mogu se gledati u okviru našeg osnovnog modela. Za modele iz ovog poglavlja dajemo jednadžbe za evoluciju portfelja i jednostavan primjer na kojem ćemo pokazati kako postaviti model i koristiti dane jednakosti.

4.1 Alternativna parametrizacija

Prvi od drugačijih pristupa modelu razlikuje se u načinu definiranja matrice transakcijskih troškova. U literaturi je moguće naći različite načine kako ih definirati. Prisjetimo se da smo kao matricu transakcijskih troškova definirali matricu $\Lambda_t = (\lambda_t^{ij})$, to jest kada želimo kupiti jednu jedinicu i-te imovine moramo prodati $1 + \lambda_t^{ij}$ jedinica j-te imovine. Dakle promatrali smo koliko košta jedna jedinica i-te imovine ako ju mijenjamo sa j-tom imovinom. Isto tako možemo gledati koliko jedinica i-te imovine možemo kupiti za točno jednu vrijednosnu jedinicu j-te imovine. Prisjetimo se jednadžbe (2.2) kojom smo opisali naše akcije na tržištu:

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}.$$

Definiramo novi proces $\Delta \tilde{L}_t^{ij} := (1 + \lambda_t^{ij}) \Delta L_t^{ij}$. Iz ove se definicije lako vidi da vrijedi $\Delta L_t^{ij} = \frac{1}{(1+\lambda_t^{ij})} \Delta \tilde{L}_t^{ij}$. Sada uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (2.2) dobivamo:

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{(1 + \lambda_t^{ji})} \Delta \tilde{L}_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} (1 + \lambda_t^{ij}) \frac{1}{(1 + \lambda_t^{ij})} \Delta \tilde{L}_t^{ij}.$$

Sređivanjem ovako dobivenog izraza dobivamo:

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+\lambda_t^{ji})} \Delta \tilde{L}_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} \Delta \tilde{L}_t^{ij}.$$

Sada uvedimo još matricu $\mu_t = (\mu_t^{ij})$, gdje je $\mu_t^{ij} = \frac{1}{(1+\lambda_t^{ji})}$. Matricu μ_t možemo definirati kao matricu transakcijskih troškova u trenutku t. Sada prethodna jednakost ima jednostavan zapis

$$\Delta B_t^i = \sum_{j=1}^{d} \mu_t^{ij} \Delta \tilde{L}_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} \Delta \tilde{L}_t^{ij}.$$

Primjetimo da se vrijednosti elemenata matrice μ_t nalaze u intervalu $[0, 1]$. Kao i originalnom modelu ΔB_t^i predstavlja promjenu vrijednosti imovine i.

Povijesno gledajući, teorija modela sa transakcijskim troškovima se u početku promatrala na tržištu dionica sa očitim *numérairom*, gotovinom ili sredstvima na tekućem računu u banci. U modelima gdje je *numéraire* bila imovina s kojom se trgovalo, za *numéraire* se obično uzimala neka nerizična imovina. Za opisivanje takvih modela koristimo se kombinacijom obiju prethodno definiranih transakcijskih troškova. Pogledajmo jednostavan primjer za model sa dvije imovine.

Primjer 4.1.1. *Pretpostavljamo da se nalazimo u modelu tržišta s transakcijskim troškovima, gdje je numéraire imovina s kojom trgujemo. Naš portfelj sastoji se od dvije imovine, jedna nerizična, a druga rizična. Prvu nerizičnu imovinu čini gotovina i ona je ujedno numéraire. Želimo izvesti jednakosti koje bi dobro opisivale dinamiku promjene vrijednosti portfelja. U ovom modelu očito je da možemo provoditi samo dvije akcije, kupovanje ili prodavanje rizične imovine. Sukladno s time uvodimo dvije $\mathcal{F}_t$ izmjerive slučajne varijable. Slučajnom varijablom $\Delta L_t \geq 0$ opisujemo koliku vrijednost želimo uložiti u dionice, to jest koju vrijednost dionica kupujemo, a sa slučajnom varijablom $\Delta M_t \geq 0$ opisujemo koju vrijednost dionica prodajemo. Sada koristeći se jednakostima za evoluciju portfelja iz prethodnog poglavlja možemo lako zapisati promjenu vrijednosti druge imovine. Naime, kao i u prošlom poglavlju na promjenu utječu promjene cijene i akcije investitora. Dakle vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\Delta V_t^2 = \hat{V}_{t-1}^2 \Delta S_t^2 + \Delta L_t - \Delta M_t. \tag{4.1}$$

Ovdje smo promjenu vrijednosti izračunali kao umnožak starih količina sa vektorom promjene cijena i na taj umnožak smo dodali vrijednost novih dionica koje kupujemo, ΔL_t, a oduzeli smo vrijednost dionica koje prodajemo ΔM_t. Ako se prisjetimo veze između vrijednosti imovine i fizičke količine pojedine imovine i uz pomoć jednakosti (2.5), jednakost (4.1) možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\Delta V_t^2 = V_{t-1}^2 \Delta Y_t^2 + \Delta L_t - \Delta M_t.$$

Ostaje nam za zapisati jednakost po kojoj se odvija dinamika promjene vrijednosti nerizične imovine. Budući da je prva imovina numéraire, na nju ne utječu promjene cijena pa tog člana nema. U slučaju kada kupujemo dionicu, cijenu i transakcijski trošak financiramo iz gotovine pa se ona smanjuje za član $(1 + \lambda_t)\Delta L_t$*. Kada prodajemo dionicu, tu transkaciju financiramo iz vrijednosti dionice pa za* ΔM_t *vrijednost dionice dobivamo manju količinu imovine, tu smo vrijednost objasnili alternativnom parametrizacijom pa ćemo u konačnici zabilježiti pozitivnu promjenu gotovine za član* $(1 - \mu_t)\Delta M_t$*. Iz čega slijedi da je dinamika promjene vrijednosti prve imovine dana sa:*

$$\Delta V_t^1 = (1 - \mu_t)\Delta M_t - (1 + \lambda_t)\Delta L_t.$$

Ovime smo zadali jednakosti koje opisuju dinamiku ovog jednostavnog modela.

4.2 Model tržišta dionica

U modelu tržišta dionica opet imamo d financijskih imovina, od kojih je jedna imovina novac, a ostalih $d - 1$ su različite dionice. Pretpostavljamo da sve transakcije prolaze kroz novac, sukladno s tim jedine moguće akcije investitora su da kupi ili proda neku dionicu. Slično kao u prethodnom primjeru gdje smo akcije investitora opisali sa dvije $\mathcal{F}_t$ izmjerive slučajne varijable, u ovom modelu akcije možemo opisati sa $\mathcal{F}_t$ izmjerivim slučajnim vektorima $\Delta L_t = (\Delta L_t^2, \dots \Delta L_t^d)$ i $\Delta M_t = (\Delta M_t^2, \dots \Delta M_t^d)$. Sa slučajnim vektorom ΔL_t opisujemo proces kupovanja dionica, a vektorom ΔM_t proces prodaje dionica.

U slučaju da kupujemo neku dionicu vrijednost novca smanjuje se za iznos vrijednosti dionice i za transakcijski trošak kojeg označavamo sa λ_t. Ako prodajemo neku dionicu, vrijednost novca se poveća za vrijednost prodane dionice umanjenu za transakcijski trošak prodaje, iznos koji dobivamo odgovara $\mu_t * \Delta M_t$. Ovdje smo sa ΔM_t označili vrijednost dionice koju prodajemo, a sa μ_t transakcijski trošak definiran kao i u prošlom primjeru $\mu_t = \frac{1}{1+\lambda_t}$.

Dinamiku promjene vrijednosti portfelja od d-imovina opisujemo sljedećim sustavom jednadžbi:

$$\Delta V_t^1 = \sum_{j=2}^{d} \mu_t^j \Delta M_t^j - \sum_{j=2}^{d} (1 + \lambda_t^j)\Delta L_t^j,$$

$$\Delta V_t^i = V_{t-1}^i \Delta Y_t^i + \Delta L_t^i - \Delta M_t^i, \quad i = 2, \dots, d.$$

Prije nego što opišemo kako izgleda solventni konus za ovaj model, dajemo jednostavan primjer za model tržišta dionica.

Primjer 4.2.1. *Nalazimo se u modelu tržišta dionica s 4 financijska instrumenta, pri čemu je prvi instrument novac, a ostala 3 su neke dionice. Model ima dva vremenska trenutka.*

U trenutku $t = 0$ poznate su nam cijene financijskih instrumenata i one su zadane sljedećim vektorom $S_0 = (1, 10, 5, 20)$, također znamo kako izgleda naš portfelj $V_0 = (-100, 50, 10, 40)$ te je ukupna vrijednost portfelja $V(0) = 0$. Portfelj možemo zadati i u jedinicama količine tada pišemo $\hat{V}_0 = (-100, 5, 2, 2)$.

U vremenskom trenutku $t = 1$ znamo nove cijene $S_1 = (1, 11, 7, 20)$ i vektor transakcijskih troškova $\lambda_t = (0, 0.02, 0.1, 0.07)$. Pretpostavimo sada da želimo kupiti jednu jedinicu financijskog instrumenta s indeksom 3. Matematičkim jezikom ovo zapisujemo na sljedeći način:

$$\Delta L_1 = (0, 0, 7, 0), \quad \Delta M_1 = (0, 0, 0, 0)$$

Budući da u trenutku $t = 1$ ne prodajemo niti jednu imovinu vektor M_1 jednak je nulvektoru. Vidimo da jedino provodimo akciju nad trećom financijskom imovinom, a da se povećala cijena druge imovine pa očekujemo promjenu vrijednosti novca, druge i treće imovine. Računamo:

$$\Delta V_1^1 = -(1 + 0.1) \cdot 7 = -7.7$$
$$\Delta V_1^2 = 50 \cdot \frac{11 - 10}{10} = 5$$
$$\Delta V_1^3 = 10 \cdot \frac{7 - 5}{5} + 7 = 11.$$

Sada lako izračunamo vrijednosti uložene u pojedine imovine $V_1 = (-107.7, 55, 21, 40)$ i ukupnu vrijednost portfelja $V(1) = 8.3$

U vremenskom trenutku $t = 2$ su nove cijene $S_2 = (1, 11, 7, 25)$, a transakcijski troškovi su zadani sa $\lambda_2 = (0, 0.05, 0.1, 0.2)$. Pretpostavljamo da želimo prodati dvije jedinice četvrte imovine, vrijednost tih dionica je 50. Ovu transakciju zapisujemo na sljedeći način:

$$\Delta L_t = (0, 0, 0, 0), \quad \Delta M_t = (0, 0, 0, 50).$$

Sada računamo promjenu vrijednosti uloženih u pojedine imovine, imamo da vrijedi:

$$\Delta V_2^1 = \frac{1}{1 + 0.2} \cdot 50 = 42.74$$

$$\Delta V_2^4 = 40 \cdot \frac{5}{20} - 50 = -40$$

. Vrijednost portfelj po imovinama u trenutku $t = 2$ je $V_2 = (-64.96, 55, 21, 0)$, a ukupna vrijednost portfelja $V(2) = 11.04$.

Pogledajmo dalje kako bi izgledao konus M_t u prostoru $\mathbb{R}^d$ za ovaj model. Prisjetimo se da smo ovim konusom opisali promjenu vrijednosti portfelja uzrokovanu akcijama investitora. Imajući to na umu i iz prethodnih jednadžbi vidimo da su generatori konusa M_t vektori $-(1 + \lambda_t^j)e_1 + e_j$ i $\mu_t^j e_1 - e_j, \quad j = 2, \dots, d$.

Solventni konus K_t je generiran s tim skupom i uvećan za vektor e_1, iz toga slijedi:

$$K_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x^1 + \sum_{j=2}^{d} \mu_t^j x^j I_{\{x^j>0\}} - \sum_{j=2}^{d} (1 + \lambda_t^j) x^j I_{\{x^j<0\}} \geq 0 \right\}.$$

Intuitivno je opis solventnog konusa jasan, to je skup svih portfelja koji se u nekom trenutku, plaćanjem troškova transakcija, mogu pretvoriti u portfelj koji ima pozitivnu vrijednost i nema short pozicija. Upravo to smo opisali ovom jednakošću, x^1 predstavlja trenutačno stanje novca u portfelju, a sa x^j opisujemo vrijednost ostalih financijskih imovina u portfelju. U slučaju da je $x^j > 0$ to znači da posjedujemo vrijednost x^j j-te financijske imovine i njihovom prodajom ostvarujemo novac u vrijednosti $\mu_t^j x^j$, a ako je $x^j < 0$ to znači da se nalazimo u short poziciji i da je potrebno kupiti j-te financijske imovine u vrijednosti x_j što će nas koštati $(1 + \lambda_t^j)x^j$ i to nam smanjuje vrijednost portfelja. S ovako opisanim akcijama dolazimo do portfelja koji nema short pozicija, a ako je vrijednost pozitivna onda se takav portfelj nalazi u solventnom konusu.

4.3 Model u kojem transakcijski troškovi prolaze kroz novac

Kao i u prethodnim modelima imamo d financijskih imovina. Transakcijski trošak prodaje j-te imovine kako bismo financirali kupovinu i-te imovine u trenutku t definiramo sa γ_t^{ji}, pri čemu je $\gamma_t^{ij} \in [0, 1]$ i vrijedi $\gamma_t^{ii} = 0$. Kao i u osnovnom modelu akcije investitora opisujemo slučajnim varijablama $\Delta L_t^{ij}, i, j = 1, \ldots, d$. Prisjetimo se da ΔL_t^{ij} označava povećanje vrijednosti j-te imovine financirano prodajom i-te imovine.

Razlika ovog modela od našeg osnovnog modela nalazi se u načinu financiranja transakcijskih troškova. Pretpostavimo da želimo prodati i-tu imovinu i tom prodajom financirati kupovinu j-te imovine, u osnovnom modelu financijske troškove bismo financirali tako što bismo prodali veću vrijednost i-te imovine od vrijednosti koju želimo investirati u j-tu imovinu te bismo tom razlikom financirali transakcijske troškove. U ovom modelu, kao što njegovo ime govori, transakcijske troškove financiramo novcem, dakle vrijednost i-te imovine koju prodajemo upravo je jednaka onoj vrijednosti koliko j-te imovine želimo kupiti, a transakcijski trošak tih akcija direktno se naplaćuje iz prve imovine, to jest novca ili bankovnog računa.

Dinamiku ovakvog modela sada možemo zapisati pomoću sljedećih jednakosti:

$$\Delta V_t^1 = \sum_{j=2}^{d} (\Delta L_t^{j1} - \Delta L_t^{1j}) - \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_t^{ij} \Delta L_t^{ij},$$

$$\Delta V_t^i = \hat{V}_{t-1}^i \Delta S_t^i + \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ji} - \sum_{j=1}^{d} \Delta L_t^{ij}. \quad i = 2, \ldots, d.$$

Slijedi jednostavan primjer u kojem ćemo definirati dane nepoznanice i izračunati promjenu vrijenosti portfelja.

Primjer 4.3.1. *Pretpostavimo da imamo 3 financijske imovine A, B i C, financijska imovina A zapravo označava novac. Financijske imovine B i C predstavljaju dionice ili neki drugi financijski instrument. Model u ovom primjeru biti će jednoperiodni. U trenutku* 0 *znamo vrijednosti financijskih imovina, one su zadane vektorom cijena*

$$S_0 = (S_0^A, S_0^B, S_0^C) = (1, 5, 25).$$

Pretpostavimo da u trenutku 0*, imamo portfelj V_0 koji sadrži ove financijske imovine, portfelj ima* 4 *jedinice imovine B i* 2 *jedinice imovine C te je u short poziciji u novcu (imovini A) za iznos* -70*. Količinu pojedine financijske imovine u portfelju zapisujemo u obliku vektora* $\hat{V}_0 = (-70, 4, 2)$*. Portfelj možemo ekvivalentno zadati sa vrijednostima uloženim u pojedinu imovinu, tada dobivamo* $V_0 = (-70, 20, 50)$*. Ukupna vrijednost ovog portfelja u trenutku* 0 *je* $V(0) = 0$*.*

U sljedećem vremenskom trenutku $t = 1$*, prvo saznajemo nove cijene* $S_1 = (1, 7, 21)$*. Znamo i matricu transakcijskih troškova* $\gamma_1 = (\gamma_1^{ij})$*:*

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0 & 0.015 \\ 0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da smo odlučili provesti sljedeće transakcije:

- *Prodati financijsku imovinu C u vrijednosti 10 u zamjenu za financijsku imovinu B*
- *Prodati financijsku imovinu C u vrijednosti 5 u zamjenu za financijsku imovinu A.*

Ove akcije kraće zapisujemo u matricu ΔL_t*, vrijedi:*

$$\Delta L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada koristimo jednakosti koje opisuju dinamiku ovog modela kako bi izračunali promjenu vrijednosti portfelja. Prvo ćemo izračunati promjenu vrijednosti za financijske imovine B i C.

$$\Delta V_1^B = 4 * 2 + 10 = 18$$

$$\Delta V_1^C = 2 * (-4) - 10 - 5 = -23$$

Na promjene vrijednosti uloženih u ove imovine utjecale su naše akcije te njihova promjena cijene. Preostaje još za izračunati promjenu vrijednosti novca, na promjenu vrijednosti novca utječu i transakcijski troškovi.

$$\Delta V_1^A = 5 - 0.01 * 5 - 0.02 * 10 = 4.75$$

Vrlo se lako vidi ukupna promjena vrijednosti portfelja -0.25*, te vrijednost pojednih imovina u portfelju u trenutku* $t = 1$ *računamo kao* $V_1 = V_0 + \Delta V_1 = (-65.25, 38, 27)$.

4.4 Modeliranje u količinskim jedinicama

Na samom početku, prilikom definiranja osnovnog modela uveli smo dva vektora, vektor količina i vektor vrijednosti te smo osnovni model utemeljili promatranjem vektora vrijednosti. Pretpostavimo sada da se nalazimo u tržištu u kojem nam kotacije nisu dane u terminima nekog *numéraira* već nam je zadana matrica $\Pi = (\pi^{ij})$, u kojoj element $\pi^{ij} > 0$ označava koliko je potrebno jedinica i-te imovine da bi se kupila jedna jedinica j-te imovine. Na dijagonali matrice Π nalaze se jedinice, to jest $\pi^{ii} = 1$. Elementi matrice Π ovise o vremenskom trenutku t i o stanju svijeta ω pa bi stoga pravilniji zapis bio $\Pi_t(\omega)$. Takav model tržišta susrećemo u vremenima visoke inflacije kada novac nije dobar instrument za obavljanje transakcija. Bez smanjenja općenitosti u ovom modelu pretpostavljamo da je direktna zamjena bolja od dvije uzastopne zamjene, matematički to zapisujemo:

$$\pi^{ij} \leq \pi^{ik}\pi^{kj} \quad \forall i, j, k = 1, \ldots, d; \ i \neq j \neq k$$

Ovakvom pretpostavkom ne gubimo na općenitosti jer će iskusni investitor ulagati po promijenjenoj matrici $\tilde{\Pi}$ u kojoj je

$$\tilde{\pi}^{ij} = min\ \{\pi^{ii_1}\pi^{i_1 i_2} \ldots \pi^{i_n j}\}.$$

Matricom $\tilde{\Pi}$ upravo se postiže svojstvo da je direktna zamjena povoljnija od dvije ili više uzastopnih.

Gledajući po vremenskim trenutcima, matrice $\Pi_t(\omega)$ čine adaptirani proces koji možemo označiti sa $\Pi = (\Pi_t)$, koji se u literaturi često naziva bid-ask proces.

Naš osnovni model sa cjenovnim kotacijama S_t i matricom troškova Λ_t možemo na vrlo jednostavan način formulirati u okviru modela jedinica količine i matrice Π. Da bismo to napravili potrebno je definirati elemente matrice Π u vremenskom trenutku t. Iz osnovnog modela znamo da ako želimo zamijeniti i-tu imovinu za j-tu onda novcem koji dobijemo prodajom i-te imovine moramo financirati i transakcijske troškove. Sukladno tome u trenutku t, definiramo koeficijente π_t^{ij} kao

$$\pi_t^{ij} := (1 + \lambda_t^{ij})S_t^j / S_t^i.$$

Isti postupak možemo napraviti i u obrnutom smjeru, to jest iz ovog modela možemo lako doći do osnovnog modela, da bismo to učinili potrebno je uvesti neku vrstu novca i pomoću njega generirati proces cijena S, tada je pomoću toga lako izvesti matricu transakcijskih troškova Λ. Uzmimo proizvoljni cjenovni proces $S_t \in L^0(\hat{K}_t^* \backslash \{0\}, \mathcal{F}_t)$, primjetimo da su komponente ovog procesa strogo pozitivne, tada kao transakcijski trošak definiramo

$$\lambda_t^{ij} := \pi_t^{ij} S_t^i / S_t^j - 1.$$

Pogledajmo ove definicije na vrlo jednostavnom primjeru.

Primjer 4.4.1. *Pretpostavimo da se nalazimo u tržištu sa dvije financijske imovine a i b te znamo da su potrebne dvije jedinice imovine a kako bismo kupili jednu jedinicu imovine b, to jest po oznakama koje smo uveli vrijedi* $\pi^{ab} = 2$.

Kako bi izračunali transakcijski trošak potrebno je uvesti vektor cijena $S = (S^a, S^b)$*, uzmimo proizvoljno* $S^a = 5$ *i* $S^b = 8$*. Sada po prethodnoj definiciji slijedi da je transakcijski trošak zamjene jedinice a za jedinicu b jednak* $\lambda^{ab} = 2 * 5/8 - 1 = 0.25$.

Sada ako se nalazimo u osnovnom modelu gdje su nam zadane cijene $S^a = 5$ *i* $S^b = 8$ *i transakcijski trošak* $\lambda^{ab} = 0.25$ *lako možemo izračunati* π^{ab}*. Po formuli dobivamo* $\pi^{ab} = (1 + 0.25) * 8/5 = 2$.

4.5 Modeli sa cjenovnim rasponom

Na kraju spomenimo još model sa cjenovnim rasponom. To je model koji se koristi na tržištu dionica i on ima dva cjenovna procesa, jedan sa nižim cjenama $\underline{S}$ i jedan sa višim cijenama $\overline{S}$, pri čemu vrijedi $\overline{S}^j > \underline{S}^j > 0 \quad j = 2, \ldots, d$.

Moguće akcije investitora na ovakvom tržištu su da proda ili kupi dionicu po danim cijenama. U ovom su modelu transakcijski troškovi implicitno zadani pomoću dvaju cjenovnih procesa, budući da smo kao transakcijski trošak "platili" razliku između cijene po kojoj kupujemo i po kojoj možemo prodati. Ova se razlika često naziva bid-ask spread. Jedan primjer za ovaj model može se vidjeti na financijskim tržištima s kreatorima tržišta ("*market maker*"). Kreator tržišta je posebni sudionik tržišta koji u istom trenutku potražuje i prodaje sve financijske imovine koje se nalaze na tržištu, pri čemu ih prodaje po jednoj cijeni, a kupuje po drugoj. Kreatori tržišta s razlikom u cijenama pokrivaju svoje troškove i naknade za transakcije.

Na vrlo jednostavan način možemo definirati jedinstveni cjenovni proces iz ova dva i matrice transakcijskih troškova te time ovaj model transformirati u model u kojem su transakcijski troškovi eksplicitno zadani.

Naprimjer definiramo $S_t = \frac{\overline{S}_t^j + \underline{S}_t^j}{2}$ i $\lambda_t^j := \overline{S}_t^j / S_t^j - 1$ i $\mu_t^j := 1 - \underline{S}_t^j / S_t^j$. Ovako definiranim transakcijskim troškovima i jedinstvenoj cijeni dobivamo uravnoteženi model u kojem je jednaki transakcijski trošak prodaje i kupovine financijske imovine.

Slijedi jednostavan primjer koji pokazuje kako se jednostavno ovaj model može pretvoriti u model s jasno definiranim transakcijskim troškovima. Isto tako pokazat ćemo kako se različitim težinama mogu mijenjati odnosi transakcijskih troškova to jest da je veći transakcijski trošak kod kupnje ili prodaje.

Primjer 4.5.1. *Pretpostavimo da imamo dionicu A koju na tržištu u nekom trenutku t, možemo kupiti po cijeni od 105 kuna, a prodati ju možemo po cijeni od 100 kuna. U skladu s oznakama pišemo* $\overline{S}_t^A = 105$ *i* $\underline{S}_t^A = 100$.

Sada želimo izračunati jedinstvenu cijenu i transakcijske troškove koji bi odgovarali toj cijeni. Prvo ćemo uzeti uravnoteženi model pa imamo po prethodno danim formulama $S_t^A = 102.5$, $\lambda_t = \mu_t = 0.02439$. *Sada je lako provjeriti da ako kupujemo dionicu po cijeni* S_t^A *i s transakcijskim troškom* λ_t *da ćemo za tu dionicu platiti* $(1+\lambda_t)102.5 = 104.999 \approx 105$, *a ako tu istu dionicu prodajemo za nju ćemo dobiti* $(1-\mu_t)102.5 = 100$, *što su upravo cijene po kojima kupujemo to jest prodajemo dionicu A.*

Sada ćemo jedinstveni cijenovni proces definirati tako da su veći transakcijski troškovi prilikom prodaje dionice A. Definiramo:

$$S_t^A = \frac{2\overline{S}_t^j + \underline{S}_t^j}{3} = \frac{310}{3} = 103.3.$$

Po istim formulama otprije računamo transakcijske troškove te dobivamo da je $\lambda_t = 0.01646$ *i* $\mu_t = 0.03195$, *vidimo da je transakcijski trošak prodaje* μ_t *veći. Kako bismo kupili jednu dionicu A plaćamo* $1.01646 \cdot 103.3 \approx 105$, *a za prodaju jedne dobivamo* $0.96805 \cdot 103.3 \approx 100$.

Na sličan način možemo definirati cjenovni proces tako da je veći transakcijski trošak kupovanja dionice A od njene prodaje.

Iz prethodnog primjera je jasno da ima mnogo mogućnosti za definiranje jedinstvenog cjenovnog procesa i transakcijskih troškova za ovakav model.

Jedna od zanimljivosti ovog modela jest da je prva formulacija uvjeta o nepostojanju arbitraže bila definirana za model opisan sa dva cjenovna procesa (bid-ask), radi se od Jouini-Kallal teoremu. Taj nam teorem govori da pod određenim pretpostavkama, koje nećemo ovdje nabrajati, ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera $\tilde{P} \sim P$ i $\tilde{P}$ martingal $\tilde{S}$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^{d-1}$ takav da vrijedi:

$$\underline{S}_t^i \leq \tilde{S}_t^i \leq \overline{S}_t^i \quad i = 2, \ldots, d.$$

Primjetimo još ovdje da u slučaju kada je $\underline{S} = \overline{S}$ da se onda tvrdnja ovog teorema poklapa sa tvrdnjom Fundamentalnog teorema o arbitraži (1.4.5).

Bibliografija

[1] D. Jukić, Konveksni skupovi (skripta), 2015.
(dostupno na https://www.mathos.unios.hr/ jukicd/Konv_Skupovi_skripta.pdf)

[2] Y. Kabanov i M. Safarian, Markets with Transaction Costs, Mathematical Theory, Springer, 2009.

[3] Z. Vondraček, Financijsko modeliranje I (skripta), 2008.
(dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ vondra/1fm16-predavanja.html)

[4] Z. Vondraček, Slučajni procesi (skripta), 2010.
(dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ vondra/sp17-predavanja.html)

[5] http://www.opentradingsystem.com/quantNotes/Polyhedral_cones_.html

Sažetak

U ovom radu proučavamo teoriju arbitraže s transakcijskim troškovima. Teorija arbitraže čini vrlo bitan dio financijskog modeliranja. Obično se radi jednostavnosti pretpostavlja da ne postoje transakcijski troškovi to jest modelira se na tržištu bez trenja. To je nerealna pretpostavka te u ovom radu pokazujemo kako transakcijski troškovi utječu na postojanje mogućnosti arbitraže.

Na početku donosimo kratko ponavljanje činjenica iz vjerojatnosti i slučajnih procesa, a poseban naglasak stavljamo na ponavljanje konveksne analize te teorije arbitraže za tržište bez trenja. Nakon toga dajemo financijsko i matematičko okruženje u kojem razvijamo teoriju arbitraže za tržište s transakcijskim troškovima. Definiramo transakcijske troškove kao d-dimenzionalnu matricu s pozitivnim elementima i dajemo relacije po kojima se odvija dinamika evolucije vrijednosti portfelja. Uvodimo pojam solventnog skupa za ovaj model te definiramo slučajan zahtjev i dajemo uvjete kojima opisujemo kada taj slučajni zahtjev možemo hedgirati.

Uvodimo definicije jake i slabe mogućnosti arbitraže za model s transakcijskim troškovima i istovremeno definiramo kada portfelj zadovoljava slabi (NA^w) i jaki (NA^s) uvjet za nepostojanje arbitraže. Također dajemo teoreme koji nam govore o ekvivalentnim uvjetima na portfelj tako da on zadovoljava slabi ili jaki uvjet za nepostojanje arbitraže.

Naposlijetku, pokazujemo različite varijante osnovnog modela koje se razlikuju u alternativnim parametrizacijama ili su transakcijski troškovi drugačije definirani. Za ove modele dajemo relacije s kojima je opisana dinamika evolucije vrijednosti portfelja i na jednostavnom primjeru pokazujemo te relacije.

Summary

In this paper we are analyzing arbitrage theory under transaction costs. Arbitrage theory makes for an important part in financial modeling. Usually because of simplicity it is assumed that there are no transaction costs i.e. modeling is done on frictionless markets. That is an unrealistic assumption and in this paper we show how transaction costs influence existence of arbitrage opportunities.

We start with a short introduction to facts from probability and random processes. We emphasise facts from convex analysis and give a short introduction to arbitrage theory for frictionless markets. After that we are introducing financial and mathematical setting in which we are developing arbitrage theory under transaction costs. We define transaction costs as d-dimensional matrix with positive elements and we give relations that explain portfolio evolution. We introduce the solvency region for this model and define contingent claim and conditions under which the contingent claim is hedgeable.

After that we introduce definitions of strong and weak arbitrage opportunities for models with transaction costs and at the same time define when portfolio has the weak no-arbitrage property (NA^w) and strong no-arbitrage property (NA^s). We also give theorems that show us equivalent conditions on portfolio so that it has the weak or strong no-arbitrage property.

Last, we show different variants of basic model which differ in alternative parametrizations or in definition of transactions costs. For these models we give relations which explain dynamics of portfolio evolution and on a simple example we show those relations.

Životopis

Rođena sam 17. lipnja 1993. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole, upisujem opću gimnaziju u Vrbovcu. Maturirala sam 2012. godine i iste godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu. Preddiplomski studij završavam 2015. godine kada upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike.