Poissonov proces i Meckeova formula

Čutura, Andrija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Andrija Čutura

POISSONOV PROCES I MECKEOVA FORMULA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Bojan Basrak

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

”Bog mi je svjetlost i spasenje,
koga da se bojim?
On je štit života moga,
pred kime da strepim?”
(Ps 27,1)

Posebno hvala mojoj obitelji na podršci i trpljenju svih mojih hirova tijekom pisanja ovog rada i hvala mojim prijateljima što su me uvijek razveseljavali točno kad je trebalo.

Najveća hvala mom mentoru prof. Bojanu Basraku na strpljivosti, na svim proslijeđenim natječajima za posao i na beskrajno korisnim i mudrim savjetima.

Sadržaj

Uvod

Tijekom povijesti često se javljala potreba modeliranja slučajnih pojava u nekom prostoru. Na primjer, mjesta prometnih nesreća, mjesta potresa i slično. Upravo su točkovni procesi matematički model kojima opisujemo slučajan razmještaj točaka u nekom prostoru. Posebna vrsta točkovnih procesa su Poissonovi procesi i cilj ovog rada je definirati i opisati Poissonove procese.
Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju definiramo dvije osnovne stvari u proučavanju Poissonovih procesa: Poissonovu distribuciju i točkovne procese. Poissonova distribucija je jedna od osnovnih vjerojatnosnih distribucija i koristi se u prikazivanju distribucije vrlo rijetkih slučajnih događaja. Ona proizlazi kao limes binomno distribuiranih slučajnih varijabli pa je prikazana ta veza binomne i Poissonove distribucije. Točkovne procese definiramo kao brojeću mjeru definiranu na slučajnom rasporedu točaka u nekom prostoru. Ta mjera podskupu prostora pridružuje broj slučajnih točaka koji upada u taj podskup. Uz definiciju, uvedeni su i mjera intenziteta i Laplaceov funkcional kao osnovne karakteristike točkovnih procesa i njihove distribucije.
Drugo poglavlje donosi definiciju Poissonovih procesa. To su točkovni procesi koji zadovoljavaju da broj točaka u danom podskupu ima Poissonovu distribuciju te da je potpuno nezavisan, odnosno da je broj točaka u dva disjunktna podskupa nezavisan. Uz definiciju, prikazan je i specifičan oblik Laplaceova funkcionala za Poissonove procese. Nadalje, u poglavlju se dokazuje sama egzistencija tih procesa koja proizlazi iz binomnih procesa kao što i Poissonova distribucija proizlazi iz binomne distribucije.
Jednu od osnovnih karakterizacija Poissonovih procesa daje Meckeova formula i ona je prikazana u trećem poglavlju. Pomoću te jednakosti mogu se računati očekivanja integrala i suma u odnosu na Poissonov proces. Dokaz jednakosti se provodi u nekoliko koraka: prvo za slučaj kada je prostor jednočlan skup, zatim za slučaj jednostruke integracije i konačno za slučaj višestruke integracije.
U posljednjem poglavlju uvodimo stacionarne točkovne procese te Palmovu distribuciju točkovnih procesa. Stacionarni točkovni proces intuitivno zamišljamo kao proces koji izgleda statistički jednako neovisno o točki prostora iz kojega se promatra proces. Za takve procese je definirana Palmova distribucija koja opisuje ponašanje točkovnog procesa kada ga se promatra iz proizvoljno odabrane točke procesa koju postavimo kao ishodište. Nada-

lje, u poglavlju se dokazuje varijanta Meckeove formule za stacionarne točkovne procese u obliku Mecke-Slivnyakova teorema. Na kraju rada dajemo formulu inverzije, odnosno vezu između stacionarne i Palmove distribucije koja je izvedena pomoću Voronoijeva mozaika.

Poglavlje 1

Poissonova distribucija i točkovni procesi

Poissonova distribucija je jedna od osnovnih distribucija u teoriji vjerojatnosti. U ovom poglavlju definirat ćemo Poissonovu distribuciju, prikazati kako Poissonova distribucija proizlazi iz binomne distribucije te navesti neka osnovna svojstva te distribucije.

Nakon definiranja Poissonove distribucije, uvest ćemo točkovne procese. Točkovne procese najčešće promatramo kao skup slučajno raspoređenih točaka u nekom prostoru. Na temelju slučajnog rasporeda točaka možemo definirati brojeću mjeru te točkovne procese promatrati kao brojeću mjeru. Tu ideju razrađujemo u drugoj točki ovog poglavlja.

1.1 Poissonova distribucija

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima *binomnu distribuciju* $\mathrm{Bi}(b, p)$ s parametrima $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ i $p \in [0, 1]$ ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{Bi}(n, p; k) := \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n, \tag{1.1}$$

gdje koristimo koristimo konvenciju $0^0 := 1$. U slučaju kada je $n = 1$ govorimo o *Bernulli-jevoj distribuciji* s parametrom p. Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable s Bernoullijevom distribucijom s istim parametrom p, onda njihova suma ima binomnu distribuciju, odnosno vrijedi

$$X_1 + ... + X_n \overset{d}{=} X, \tag{1.2}$$

gdje X ima $\mathrm{Bi}(n, p)$ distribuciju i gdje $\overset{d}{=}$ označava jednakost po distribuciji. Očekivanje i varijanca slučajne varijable X su dani sa

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad Var[X] = np(1 - p). \tag{1.3}$$

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima *Poissonovu distribuciju* $\mathrm{Po}(\gamma)$ s parametrom $\gamma \geq 0$ ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{Po}(\gamma; k) := \frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

U slučaju $\gamma = 0$ imamo $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Moguće je i $\gamma = \infty$. Tada je $\mathbb{P}(X = \infty) = 1$ pa je $\mathrm{Po}(\infty, k)$=0 za sve $k \in \mathbb{N}_0$.

Poissonova distribucija proizlazi kao limes binomne distribucije i to je tvrdnja narednog teorema.

Teorem 1.1.1. (Poissonov teorem)

Neka je $X_n \sim \mathrm{B}(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \gamma$ gdje je γ fiksan broj takdav da je $0 < \gamma < \infty$. Tada za svako $k = 0, 1, 2, ...$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma}.$$

Dokaz teorema može se naći u [5], Teorem 5.4. Neka je X i dalje slučajna varijabla s Poissonovom distibucijom s konačnim parametrom γ. Tada je očekivanje te slučajne varijable dano sa

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma} = \gamma e^{-\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} = \gamma.$$

Varijancu slučajne varijable računamo na sličan način. Prvo računamo

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma} = \gamma^2 e^{-\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma^j}{j!} = \gamma^2,$$

a zatim iz linearnosti očekivanja i izračunatog $\mathbb{E}[X]$ dobivamo $\mathbb{E}[X^2] = \gamma^2 + \gamma$. Sada je varijanca

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \gamma^2 + \gamma - \gamma^2 = \gamma.$$

Funkcija izvodnica vjerojatnosti od X, odnosno od $\mathrm{Po}(\gamma)$, je dana sa

$$\mathbb{E}[s^X] = e^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!}s^k = e^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma s)^k}{k!} = e^{\gamma(s-1)}, \quad s \in [0, 1].$$

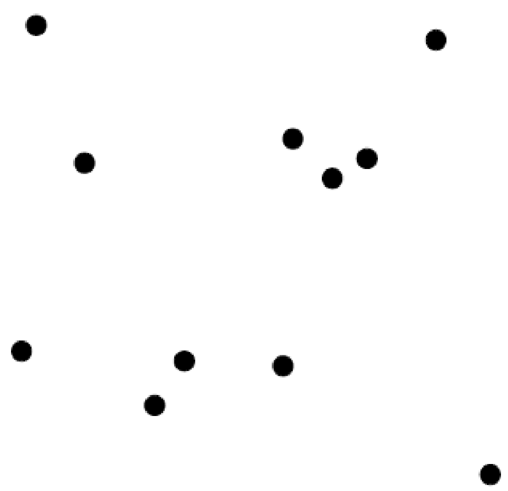
Iz prethodne jednakosti slijedi da je *Laplaceova transofmacija* od X, odnosno od $\mathrm{Po}(\gamma)$, dana sa

$$\mathbb{E}[e^{-tX}] = \exp[-\gamma(1 - e^{-t})], \quad t \geq 0 \tag{1.5}$$

1.2 Točkovni procesi

1.2.1. Definicija točkovnih procesa

Točkovni proces intuitivno možemo promatrati kao skup Z koji sadrži najviše prebrojiv broj slučajnih točaka iz nekog prostora $\mathbb{X}$. Na primjer, najlakše nam je zamisliti točkovni proces kao slučajan skup točaka u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$. Na slici 1.1 vidimo primjer jednog takvog rasporeda.



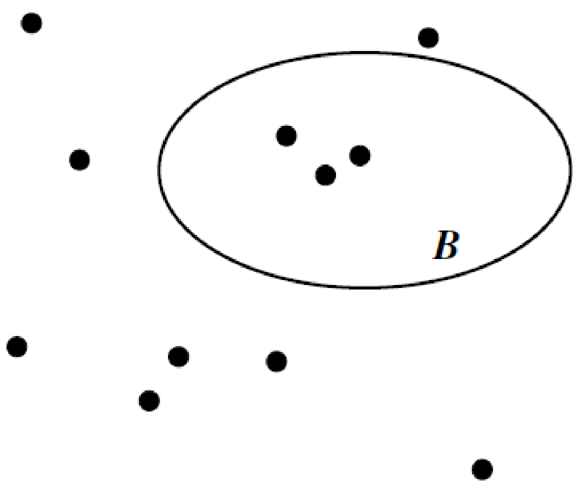
Slika 1.1: Primjer slučajnog rasporeda točaka $Z(\omega)$ u $\mathbb{R}^2$ prostoru

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Zanemarujući zasad pitanje izmjerivosti, Z možemo zamisliti kao preslikavanje $\omega \mapsto Z(\omega)$, $\omega \in \Omega$. To je preslikavanje iz Ω u skup svih prebrojivih podskupova od $\mathbb{X}$. Prirodno Z možemo poistovijetiti s familijom preslikavanja

$$\omega \mapsto \eta(\omega, B) := \mathrm{card}(Z(\omega) \cap B), \quad \text{za izmjerivi } B \subset \mathbb{X}.$$

Dakle, η je preslikavanje koje podskupu B od $\mathbb{X}$ pridružuje broj slučajnih točaka od $Z(\omega)$ koje se nalaze u B. Za fiksni $\omega \in \Omega$ preslikavanje $\eta(\omega, \cdot)$ je brojeća mjera na $Z(\omega)$. Ovaj koncept se pokazao kao temeljni koncept u definiranju točkovnog procesa kao slučajne brojeće mjere. Na slici 1.2 vidimo ilustraciju te ideje.

Kako bismo formalizirali početnu ideju, neka je $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ izmjeriv prostor i definirajmo potrebne skupove mjera. Neka $\mathbf{N}_{<\infty}(\mathbb{X}) \equiv \mathbf{N}_{<\infty}$ označava prostor svih konačnih mjera μ na $\mathbb{X}$, odnosno mjera za koje vrijedi $\mu(B) \in \mathbb{N}_0$ za sve B iz $\mathscr{X}$. Nadalje, označimo sa $\mathbf{N}(\mathbb{X}) \equiv \mathbf{N}$ prostor mjera koje se mogu napisati kao najviše prebrojive sume mjera iz skupa



Slika 1.2: Primjer točkovnog procesa kao brojeće mjere. Za podskup B i $Z(\omega)$ bi ovdje vrijedilo $\eta(\omega, B) = 3$.

$\mathbf{N}_{<\infty}$. Trivijalni primjer elementa iz $\mathbf{N}$ je mjera jednaka nuli na cijelom $\mathscr{X}$. Drugi primjer je Diracova mjera δ_x koncentrirana u točki $x \in \mathbb{X}$. Ona se definira sa

$$\delta_x(B) := \mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \\ 1, & x \notin B, \end{cases}$$

za proizvoljni podskup B od $\mathbb{X}$. Pomoću Diracove mjere možemo definirati nove mjere. Ako je $(x_k)_{k=1}^n$, $n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, konačan ili beskonačan niz elemenata iz $\mathbb{X}$, onda možemo definirati mjeru na sljedeći način

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}. \tag{1.6}$$

Tada je $\mu \in \mathbf{N}$ i vrijedi

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_B(x_n), \quad B \in \mathscr{X}.$$

Štoviše, za bilo koju izmjerivu funkciju $f : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ vrijedi

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{1.7}$$

Ukoliko je $n = 0$ u jednadžbi (1.6), onda je μ nul-mjera. Nadalje, točke $\{x_k : k = 1, 2...n\}$ ne moraju nužno biti sve različite. Za svaku od njih definiramo kratnost na sljedeći način:

kratnost od x_i je broj card$\{j \leq n : x_j = x_i\}, i = 1, 2...n$. Također, dobro je napomenuti da bez dodatnih pretpostavki na prostor $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ ne možemo svaku mjeru $\mu \in \mathbf{N}$ zapisati u obliku jednakosti (1.6). Međutim, za izvođenje većeg dijela teorije dovoljna je pretpostavka da je $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ izmjeriv prostor.

Za mjeru ν definiranu na $\mathbb{X}$ kažemo da je *s-konačna* ako se ν može prikazati kao najviše prebrojiva suma konačnih mjera. Očigledno je da su svi elementi iz $\mathbf{N}$ s-konačne mjere. Nadalje, za mjeru ν na $\mathbb{X}$ kažemo da je *σ-konačna* ako i samo ako postoji niz podskupova $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{X}$ takvih da vrijedi: $\bigcup_m B_m = \mathbb{X}$ te $\nu(B_m) < \infty$, za sve $m \in \mathbb{N}$. Svaka σ-konačna mjera je očigledno i s-konačna mjera. Kao protuprimjer da ne vrijedi obrat, uočimo da ako su sve točke x_n u jednadžbi (1.6) iste, onda tako definirana mjera μ nije σ-konačna. Za razliku od σ-konačnih mjera, prebrojiva suma s-konačnih mjera je opet s-konačna mjera. To slijedi iz činjenice da je prebrojiva suma najviše prebrojivih suma, opet prebrojiva suma. Primjer mjere s vrijednostima u $\overline{\mathbb{N}}_0 := \overline{\mathbb{N}} \cup 0$ koja nije s-konačna je brojeća mjera na $\mathbb{R}$. Označimo sada s $\mathscr{N}(\mathbb{X}) \equiv \mathscr{N}$ σ-algebru generiranu podskupovima od $\mathbf{N}$ koji sadrže sve skupove

$$\{\mu \in \mathbf{N} : \mu(B) = k\}, B \in \mathscr{X}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Dakle, $\mathscr{N}$ je najmanja σ-algebra na $\mathbf{N}$ takvo da je preslikavanje $\mu \mapsto \mu(B)$ izmjerivo za sve $B \in \mathscr{X}$.

Sada možemo dati formalnu definiciju točkovnih procesa:

Definicija 1.2.1. *Točkovni proces* na $\mathbb{X}$ je slučajni element η iz $(\mathbf{N}, \mathscr{N})$ takav da je preslikavanje $\eta : \Omega \to \mathbf{N}$ izmjerivo.

Ako je η točkovni proces na $\mathbb{X}$ i $B \in \mathscr{X}$, onda sa $\eta(B)$ označavamo preslikavanje: $\omega \mapsto \eta(\omega, B) := \eta(\omega)(B)$. Iz definicije od η i σ-algebre $\mathscr{N}$ slijedi da se radi o slučajnim varijablama s vrijednostima u $\overline{\mathbb{N}}_0$ takvim da

$$\{\eta(B) = k\} \equiv \{\omega \in \Omega : \eta(\omega, B) = k\} \in \mathscr{F}, b \in \mathscr{X}, k \in \overline{\mathbb{N}}_0. \tag{1.8}$$

Vrijedi i obrnuto: ako za preslikavanje $\eta : \Omega \to \mathbf{N}$ vrijedi (1.8), onda je to preslikavanje točkovni proces. U skladu s početnom idejom, $\eta(B)$ nazivamo *broj točaka* od η u B.

Definicija 1.2.2. Točkovni proces η na $\mathbb{X}$ nazivamo *pravi točkovni proces* ako postoji niz slučajnih elemenata $X_1, X_2...$ u $\mathscr{X}$ i slučajna varijabla κ s vrijednostima u $\overline{\mathbb{N}}_0$ tako da gotovo sigurno vrijedi jednakost:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\kappa} \delta_{X_k}. \tag{1.9}$$

U slučaju da je $\kappa = 0$, onda η interpretiramo kao nul-mjeru na $\mathbb{X}$.

Motivacija za uvođenje pravih točkovnih procesa je upravo ideja opisana na početku. Njih lakše interpretiramo kao prebrojiv skup slučajnih točaka iz $\mathbb{X}$ uz mogućnost da se točke ponavljaju, nego kao mjere s cjelobrojnim vrijednostima. Za kraj, napomenimo još da je klasa pravih točkovnih procesa jako velika, ali da svaki točkovni proces nije pravi točkovni proces. Na primjer, uzmimo $\mathbb{X} = [0, 1]$ i na njemu definiranu σ-algebru

$$\mathcal{X} := \{A \subset [0, 1] : A \text{ prebrojiv ili } A^c \text{ prebrojiv}\}.$$

Sada na $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ možemo definirati mjeru μ sa

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ prebrojiv} \\ 1, & A^c \text{ prebrojiv.} \end{cases}$$

Ova mjera zadovoljava $\mu(\mathbb{X}) = 1$ i $\mu(B) \in \{0, 1\}$, za sve $B \in \mathcal{X}$, ali se ne može zapisati u obliku $\mu = \delta_x$ za neki $x \in \mathbb{X}$. Pomoću ovako definirane mjere možemo dobiti točkovni proces koji nije pravi točkovni proces.

1.2.2. Campbellova formula

Na početku ove točke definiramo mjeru intenziteta točkovnog procesa.

Definicija 1.2.3. *Mjera intenziteta* slučajnog procesa η definiranog na prostoru $\mathbb{X}$ je mjera λ definirana sa

$$\lambda(B) := \mathbb{E}[\eta(B)], \quad B \in \mathcal{X} \tag{1.10}$$

Dakle, mjera intenziteta zapravo opisuje očekivani broj točaka procesa u nekom podskupu B od $\mathbb{X}$.

Označimo sada sa $\mathbb{R}(\mathbb{X})$ skup svih izmjerivih funkcija $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ te s $\mathbb{R}_+(\mathbb{X})$ sve funkcije iz $\mathbb{R}(\mathbb{X})$ koje poprimaju nenegativne vrijednosti. Ako je η točkovni proces, onda sa $\eta(u) \equiv \int u \, d\eta$ označavamo preslikavanje $\omega \mapsto \int u(x) \, \eta(\omega, dx)$. Sada možemo iskazati Campbellovu formulu:

Propozicija 1.2.4. (Campbellova formula)
Neka je η točkovni proces na izmjerivom prostoru $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ s mjerom intenziteta λ te neka je $u \in \mathbb{R}(\mathbb{X})$. Tada je $\int u(x) \, \eta(dx)$ slučajna varijabla. Također, vrijedi sljedeća formula

$$\mathbb{E}\left[\int u(x) \, \eta(dx)\right] = \int u(x) \, \lambda(dx), \tag{1.11}$$

za bilo koju funkciju u takvu da je $u \geq 0$ ili $\int |u(x)| \, \lambda(dx) < \infty$.

Dokaz ove propozicije može se naći u [4], Proposition 2.7. Za kraj ove točke, napomenimo još da Campbellova formula vrijedi za sve izmjerive funkcije iz prostora $\overline{\mathbb{R}}_+(\mathbb{X})$, to jest iz prostora svih izmjerivih funkcija iz $\mathbb{X}$ u $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$.

1.2.3. Distribucija točkovnih procesa

Distribuciju točkovnog procesa η definiranog na $\mathbb{X}$ promatramo kao vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}_\eta$ koja je definirana na izmjerivom prostoru $(\mathbf{N}, \mathscr{N})$ na sljedeći način: $A \mapsto \mathbb{P}(\eta \in A)$. Ukoliko je η' neki drugi točkovni proces na istom prostoru i s istom distribucijom, onda pišemo $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$.

Sada ćemo definirati jaki alat za analizu točkovnih procesa. Pritom koristimo konvenciju $e^{-\infty} := 0$.

Definicija 1.2.5. *Laplaceov* (ili *karakteristični*) *funkcional* točkovnog proces η na $\mathbb{X}$ je preslikavanje $L_\eta : \mathbb{R}_+(\mathbb{X}) \to [0, 1]$ definirano sa

$$L_\eta(u) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int u(x)\, \eta(dx)\right)\right].$$

Uz Laplaceov funkcional u analizi točkovnih procesa bit će nam važna i sljedeća propozicija o karakterizaciji jednakosti distribucija točkovnih procesa.

Propozicija 1.2.6. *Za točkovne procese η i η' na $\mathbb{X}$ iduće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$,

2. $(\eta(B_1), ..., \eta(B_m)) \stackrel{d}{=} (\eta'(B_1), ..., \eta'(B_m))$ *za svaki* $m \in \mathbb{N}$ *i za u parovima disjunktne* $B_1, B_2, ..., B_m \in \mathscr{X}$,

3. $L_\eta(u) = L_{\eta'}(u)$ *za sve* $u \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X})$,

4. *Za sve* $u \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X})$ *vrijedi jednakost slučajnih varijabli* $\eta(u) \stackrel{d}{=} \eta'(u)$ *na* $\overline{\mathbb{R}}$.

Posebno, Laplaceov funkcional točkovnog proces određuje distribuciju tog procesa.

Dokaz ove propozicije može se naći u [4], Proposition 2.10.

Poglavlje 2

Poissonovi procesi

U ovoj točki uvodimo Poissonove procese. To je posebna vrsta točkovnih procesa u kojima slučajan broj točaka koji upada u dani skup ima Poissonovu distibuciju. Takvi procesi se mogu definirati na općenitim s-konačnim izmjerivim prostorima pa ćemo dokazati njihovu egzistenciju. Kao i za ostale točkovne procese, distribucija Poissonovih procesa je karakterizirana Laplaceovim funkcionalom koji ima specifičan oblik.

2.1 Definicija Poissonovih procesa

Neka je sad $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ proizvoljan, ali fiksan izmjerivi prostor. Na početku ove točke odmah definiramo Poissonov proces.

Definicija 2.1.1. Neka je λ s-konačna mjera na $\mathbb{X}$. *Poissonov proces* s mjerom intenziteta λ je točkovni proces η na $\mathbb{X}$ koji zadovoljava sljedeća dva svojstva:

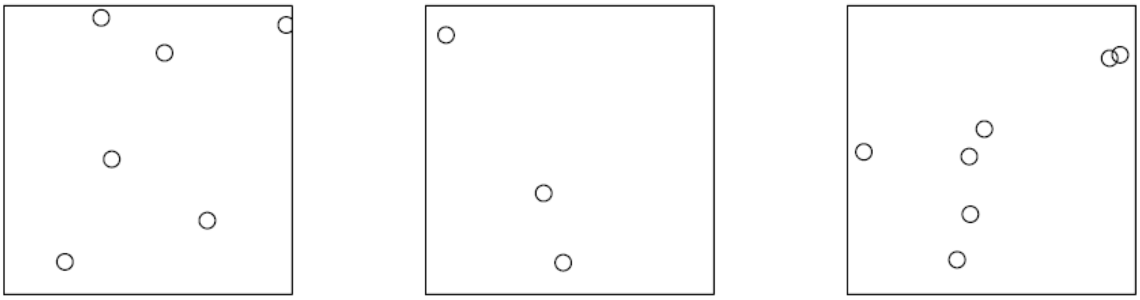
1. Za proizvoljni $B \in \mathscr{X}$, $\eta(B)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda(B)$.

2. Za međusobno disjunktne skupove $B_1, ..., B_m \in \mathscr{X}$ slučajne varijable $\eta(B_1), ..., \eta(B_m)$ su nezavisne.

Prema svojstvu 1. iz Definicije 2.1.1 ovi procesi se i nazivaju Poissonovi procesi. Općenito, točkovne procese sa svojstvom 2. nazivamo *potpuno nezavisni*. Ponekad se kaže i da η ima *nezavisne priraste* ili da je η *potpuno slučajan*.

Prema Definiciji 1.2.3 slijedi da ako je η Poissonov proces s mjerom intenziteta λ, onda je $\mathbb{E}[\eta(B)] = \lambda(B)$. Posebno, ako je $\lambda = 0$ nul-mjera, onda je $\mathbb{P}(\eta(\mathbb{X}) = 0) = 1$. Na slici 2.1 su prikazane realizacije konkretnog Poissonovog procesa.

Još navedimo da za svaku s-konačnu mjeru λ postoji do na distribuciju najviše jedan Poissonov proces kojem je λ mjera intenziteta. O tome govori naredna propozicija koja direktno slijedi iz Propozicije 1.2.6 .



Slika 2.1: Tri primjera realizacije Poissonovog procesa s intenzitetom 5 na jediničnom kvadratu

Propozicija 2.1.2. *Neka su η i η' dva Poissonova procesa na $\mathbb{X}$ s istom s-konačnom mjerom intenziteta. Tada $\eta \stackrel{d}{=} \eta'$.*

Prije nego što u idućoj točki pokažemo egzistenciju Poissonovih procesa navedimo karakterizaciju Poissonovih procesa preko Laplaceovog funkcionala. To je vrlo koristan alat za analizu Poissonovih procesa i u teoriji i u primjenama.

Teorem 2.1.3. (Laplaceov funkcional Poissonovih procesa)
Neka je λ s-konačna mjera na $\mathbb{X}$ i neka je η točkovni proces na $\mathbb{X}$. Proces η je Poissonov proces s mjerom intenziteta λ ako i samo ako

$$L_\eta(u) = \exp\left[-\int (1 - e^{-u(x)})\,\lambda(dx)\right], \qquad u \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X}). \tag{2.1}$$

Dokaz. Za početak pretpostavimo da je η Poissonov proces s mjerom intenziteta λ. Definirajmo funkciju $u := c_1\mathbf{1}_{B_1} + ... + c_m\mathbf{1}_{B_m}$, gdje je $m \in \mathbb{N}$, a $c_1, ..., c_m$ pozitivni realni brojevi i $B_1, ..., B_m \in \mathcal{X}$ međusobno disjunktni. Tada

$$\mathbb{E}[\exp[-\eta(u)]] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{m} c_i\eta(B_i)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m}\exp[-c_i\eta(B_i)]\right].$$

Zbog potpune nezavisnosti Poissonovih procesa, slučajne varijable $\eta(B_1), ..., \eta(B_m)$ su nezavisne pa pomoću Laplaceove transformacije Poissonove distibucije, odnosno jednakosti (1.5), slijedi:

$$L_\eta(u) = \prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left[\exp[-c_i\eta(B_i)]\right] = \prod_{i=1}^{m}\exp\left[-\lambda(B_i)(1 - e^{-c_i})\right] =$$

$$= \exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\lambda(B_i)(1-e^{-c_i})\right] = \exp\left[-\sum_{i=1}^{m}\int_{B_i}(1-e^{-u})\,d\lambda\right].$$

Za $x \notin B_1 \cup \cdots \cup B_m$ vrijedi $1 - e^{-u(x)} = 0$ pa je zadnji izraz u jednakosti jednak desnoj strani (2.1). Općenito, za $u \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X})$ postoji niz jednostavnih funkcija u_n takvih da $u_n \uparrow u$, $n \to \infty$. Tada prema teoremu o monotonoj konvergenciji $\eta(u_n) \uparrow \eta(u)$, $n \to \infty$, a zatim prema teoremu o dominiranoj konvergenciji za očekivanje lijeva strana jednakosti

$$\mathbb{E}[\exp[-\eta(u_n)]] = \exp\left[-\int (1-e^{-u_n(x)})\,\lambda(dx)\right]$$

konvergira prema $L_\eta(u)$. Desna strana zadnje jednakosti konvergira prema desnoj strani (2.1) prema teoremu o monotonoj konvergenciji (primijenjen na integral u odnosu na λ).

Pretpostavimo sada da vrijedi (2.1). Neka je η' Poissonov proces s mjerom intenziteta λ. U idućoj točki ćemo pokazati teorem o egzistenciji (v. Teorem 2.2.4) prema kojem takav proces postoji. Prema prethodnim argumentima vrijedi: $L_{\eta'}(u) = L_\eta(u)$, za sve $u \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X})$. Sada prema Propoziciji 1.2.6 slijedi $\eta \overset{d}{=} \eta'$. Dakle, η je Poissonov proces s mjerom intenziteta λ. $\square$

2.2 Egzistencija Poissonovih procesa

Kako bismo eksplicitno konstruirali postojanje Poissonovih procesa, moramo za početak navesti teorem o superpoziciji nezavisnih Poissonovih procesa.

Teorem 2.2.1. (Teorem o superpoziciji)

Neka je $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih Poissonovih procesa na $\mathbb{X}$ s mjerama intenziteta λ_i. Tada je

$$\eta := \sum_{k=1}^{\infty}\eta_i \tag{2.2}$$

Poissonov proces s mjerom intenziteta $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$.

Dokaz. Prebrojiva suma najviše prebrojivih suma elemenata iz $\mathbf{N}_{<\infty}$ je opet prebrojiva suma elemenata iz $\mathbf{N}_{<\infty}$ pa prema definiciji točkovnih procesa lako vidimo da je η točkovni proces.

Za $n \in \mathbb{N}$ i $B \in \mathscr{X}$ vrijedi da $\xi_n(B) := \sum_{i=1}^{n}\eta_i(B)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(B)$. Zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastući niz događaja $\xi_n(B)$ konvergira prema $\eta(B)$. Zbog neprekidnosti $Po(\gamma; j)$ u γ za $j \in \mathbb{N}_0$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$\mathbb{P}(\eta(B) \le k) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n(B) \le k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\mathrm{Po}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(B); j\right) = \sum_{j=0}^{k}\mathrm{Po}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(B); j\right).$$

Dakle, $\eta(B)$ ima Poissonovu $\text{Po}(\lambda(B))$ distribuciju.

Neka su $B_1, ..., B_m \in \mathscr{X}$ u parovima disjunktni. Familija $\{\eta_i(B_j), 1 \leq j \leq m, i \in \mathbb{N}\}$ je familija nezavisnih slučajnih varijabli pa su slučajne varijable $\sum_i \eta_i(B_1), ..., \sum_i \eta_i(B_m)$ nezavisne. Dakle, η je potpuno nezavisan. □

Kao što je Poissonova vjerojatnosna distribucija vezana uz binomnu vjerojatnosnu distribuciju (v. Teorem 1.1.1), tako su i Poissonovi procesi vezani uz binomne procese pa ćemo sada definirati binomne procese.

Neka je $\mathbb{Q}$ vjerojatnosna mjera na $\mathbb{X}$ i neka su $X_1, ..., X_m$ nezavisne slučajne varijable na $\mathbb{X}$ s distribucijom $\mathbb{Q}$. Tada je

$$\zeta := \delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_m}$$

točkovni proces na $\mathbb{X}$. Kako je

$$\mathbb{P}(\zeta(B) = k) = \binom{m}{k}\mathbb{Q}(B)^k(1 - \mathbb{Q}(B))^{m-k}, k = 0, ..., m,$$

proces ζ nazivamo *binomni proces s duljinom uzorka m i uzoračkom distribucijom* $\mathbb{Q}$. Tu ideju sada generaliziramo u idućoj definiciji:

Definicija 2.2.2. Neka su $\mathbb{V}$, odnosno $\mathbb{Q}$ vjerojatnosne mjere na $\mathbb{N}_0$, odnosno $\mathbb{X}$. Nadalje, neka su $X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne vrijable na $\mathbb{X}$ s distribucijom $\mathbb{Q}$ i neka je κ slučajna varijabla s distribucijom $\mathbb{V}$ nezavisna od (X_n). Tada proces

$$\eta := \sum_{k=1}^{\kappa} \delta_{X_k} \tag{2.3}$$

nazivamo *miješani binomni proces s distribucijom miješanja* $\mathbb{V}$ *i uzoračkom distribucijom* $\mathbb{Q}$.

Nakon što smo uveli mješovite binomne procese, možemo krenuti s dokazivanjem egzistencije Poissonovih procesa. Naredna propozicija se pokazala ključnom u tome.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $\mathbb{Q}$ vjerojatnosna mjera na $\mathbb{X}$ i neka je $\gamma \geq 0$. Pretpostavimo da je η mješoviti binomni proces s distribucijom miješanja* $\text{Po}(\gamma)$ *i uzoračkom distribucijom $\mathbb{Q}$. Tada je η Poissonov proces s mjerom intenziteta $\gamma\mathbb{Q}$.*

Dokaz ove propozicije može se naći u [4], Proposition 3.5. Sada možemo iskazati i dokazati ključni teorem o egzistenciji Poissonovih procesa:

Teorem 2.2.4. (Teorem o egzistenciji)

Neka je λ s-konačna mjera na $\mathbb{X}$. Tada postoji Poissonov proces na $\mathbb{X}$ s mjerom intenziteta λ.

Dokaz. Tvrdnja je trivijalno ispunjena ako je $\lambda(\mathbb{X}) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $0 < \lambda(\mathbb{X}) < \infty$. Neka su na prikladnom vjerojatnosnom prostoru $\kappa, X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne varijable takve da κ poprima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$ i ima Poissonovu $Po(\lambda(\mathbb{X}))$ distribuciju, a svaka X_i poprima vrijednosti u $\mathbb{X}$ i ima distribuciju danu sa $\lambda(\cdot)/\lambda(\mathbb{X})$. Prikladan vjerojatnosni prostor je, na primjer, produktni prostor. Neka je η mješoviti binomni proces dan sa (2.3). Sada prema prethodnoj Propoziciji 2.2.3 slijedi da je η Poissonov proces s mjerom intenziteta λ.

Preostaje nam pokazati tvrdnju kada je $\lambda(\mathbb{X}) = \infty$. Tada postoji niz mjera $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ definiranih na $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ takvih da je $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ strogo pozitivna i konačna mjera. Na prikladnom (produktnom) vjerojatnosnom prostoru neka je $\eta_i, i \in \mathbb{N}$ niz nezavisnih Poissonovih procesa pri čemu η_i ima mjeru intenziteta λ_i, za sve $i \in \mathbb{N}$. Takav niz postoji prema prethodnom koraku u dokazu. Stavimo $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$. Prema teoremu o superpoziciji (v. Teorem 2.2.1) η je Poissonov proces s mjerom intenziteta λ. □

Naredni korolar prethodnog teorema pokazuje da je na proizvoljnom izmjerivom prostoru $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ svaki Poissonov proces pravi točkovni proces do na ekvivalentnost distribucije.

Korolar 2.2.5. *Neka je λ s-konačna mjera na $\mathbb{X}$. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ i na njemu definirane slučajne varijable $X_1, X_2 ...$ te slučajna varijabla κ u $\overline{\mathbb{N}}_0$ takvi da je*

$$\eta := \sum_{k=1}^{\kappa} \delta_{X_k} \tag{2.4}$$

Poissonov proces s mjerom intenziteta λ.

Posljedica prethodnog korolara je da pri provjeravanju tvrdnji vezane uz distribuciju Poissonovih procesa bez smanjenja općenitosti možemo uključiti pretpostavku da je proces pravi točkovni proces. Dokaz korolara može se naći u [4], Corollary 3.7.

Za kraj navedimo još propoziciju koja je obrat Propozicije 2.2.3.

Propozicija 2.2.6. *Neka je η Poissonov proces na $\mathbb{X}$ s mjerom intenziteta λ koja zadovoljava $0 < \lambda(\mathbb{X}) < \infty$. Tada je η mješoviti binomni proces s mješovitom distribucijom $\mathrm{Po}(\lambda(\mathbb{X}))$ i uzoračkom distribucijom $\mathbb{Q} := \lambda(\mathbb{X})^{-1}\lambda$. Nadalje, uvjetna distribucija $\mathbb{P}(\eta \in \cdot \mid \eta(\mathbb{X}) = m), m \in \mathbb{N}$, odgovara distribuciji binomnog procesa s duljinom uzorka m i uzoračkom distribucijom $\mathbb{Q}$.*

Dokaz propozicije može se naći u [4], Proposition 3.8.

Poglavlje 3

Meckeova jednakost

Meckeova jednakost daje jednu od osnovnih karakterizacija Poissonovih procesa. Pomoću te jednakosti mogu se računati očekivanja integrala, odnosno suma, u odnosu na Poissonov proces. Pri tome integrand može biti ovisan i o točkovnom procesu i o točkama prostora u kojem se proces promatra. U prvoj točki poglavlja ćemo pokazati Meckeovu jednakost za s-konačne mjere, a u drugoj ćemo Mecekovu jednakost proširiti na faktorijalne mjere.

3.1 Meckeova jednakost

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ proizvoljni izmjerivi prostor. Za početak ćemo pokazati specijalan slučaj Meckeove jednakosti kada je $\mathbb{X}$ jednočlani skup.

Propozicija 3.1.1. *Slučajna varijabla X s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom γ ako i samo ako za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \gamma\, \mathbb{E}[f(X+1)]. \tag{3.1}$$

Dokaz. Za početak pretpostavimo da je X slučajna varijabla s Poissonovom Po(γ) distribucijom i neka je $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ proizvoljna funkcija. Tada jednostavnim računom dobivamo

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} kf(k)\frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} kf(k)\frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma} = \gamma \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\gamma} =$$

$$= \gamma \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)\frac{\gamma^k}{k!}e^{-\gamma} = \gamma\, \mathbb{E}[f(X+1)].$$

Time smo pokazali da vrijedi (3.1).

Sada pokažimo i obrnuti smjer. Dakle, (3.1) vrijedi za svaku funkciju $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$. Posebno, za proizvoljni $k \in \mathbb{N}$, (3.1) vrijedi za karakterističnu funkciju $f := \mathbf{1}_{\{k\}}$. Iz svojstva očekivanja (3.1) postaje

$$k\,\mathbb{P}(X = k) = \gamma\,\mathbb{P}(X = k - 1).$$

Koristeći tu rekurzivnu jednakost dolazimo do izraza

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\gamma^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0).$$

Jedina distribucija koja zadovoljava ovakvu jednakost je upravo Poissonova što daje tvrdnju. Time je dokaz gotov. □

Sada konačno možemo iskazati i dokazati Meckeovu formulu.

Teorem 3.1.2. (Meckeova formula)
Neka je λ s-konačna mjera na $\mathbb{X}$ i η točkovni proces na $\mathbb{X}$. Tada je η Poissonov proces s mjerom intenziteta λ ako i samo ako za svaku funkciju $f \in \mathbb{R}_+(\mathbb{X} \times \boldsymbol{N})$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,\eta)\,\eta(dx)\right] = \int \mathbb{E}[f(x,\eta+\delta_x)]\,\lambda(dx). \tag{3.2}$$

Dokaz. Za početak uočimo da je dodavanje točke x brojećoj mjeri μ izmjerivo preslikavanje. Dakle, preslikavanje $(x,\mu) \mapsto \mu + \delta_x$ iz $\mathbb{X} \times \mathbf{N}$ u $\mathbf{N}$ je izmjerivo. Isto tako, preslikavanje $(x,\mu) \mapsto \mu(B) + \mathbf{1}_B(x)$ je izmjerivo za sve $B \in \mathcal{X}$.

Nužnost Meckeove jednakosti u karakterizaciji Poissonovih procesa će biti poseban slučaj multivarijantne verzije Meckeove jednakosti koju ćemo dokazati u idućoj točki (v. Teorem 3.2.3).

Pretpostavimo sada da vrijedi (3.2). Neka su $B_1, ..., B_m$ međusobno disjunktni elementi iz $\mathcal{X}$ takvi da je $\lambda(B_i) < \infty$, za sve i. Za $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$ takve da je $k_1 \geq 1$ definiramo funkciju

$$f(x,\mu) = \mathbf{1}_{B_1}(x)\prod_{i=1}^m \mathbf{1}\{\mu(B_i) = k_i\}, \qquad (x,\mu) \in \mathbb{X} \times \mathbf{N}.$$

Tada je

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,\eta)\eta(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\eta(B_1)\prod_{i=1}^m \mathbf{1}\{\eta(B_i) = k_i\}\right] = k_1\mathbb{P}(\cap_{i=1}^m\{\eta(B_i) = k_i\})$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz činjenice da izraz unutar očekivanja nije 0 samo kada je $\eta(B_1) = k_1$.

S druge strane, za $x \in \mathbb{X}$ imamo

$$\mathbb{E}[f(x,\eta+\delta_x)] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{B_1}(x)\prod_{i=1}^m \mathbf{1}\{(\eta+\delta_x)(B_i) = k_i\}\right] =$$

$$= \mathbf{1}_{B_1}(x)\mathbb{P}(\{\eta(B_1) = k_1 - 1, \eta(B_2) = k_2, ..., \eta(B_m) = k_m\})$$

pri čemu ponovno zadnja jednakost vrijedi jer izraz unutar očekivanja nije 0 kada vrijedi $x \in B_1$ i tada se ne nalazi ni u jednom drugom jer su skupovi međusobno disjunktni.

Sada iz (3.2) dobivamo sljedeću jednakost

$$k_1\mathbb{P}(\cap_{i=1}^m\{\eta(B_i) = k_i\}) = \lambda(B_1)\mathbb{P}(\{\eta(B_1) = k_1 - 1\} \cap \cap_{i=2}^m\{\eta(B_i) = k_i\}).$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(\cap_{i=2}^m\{\eta(B_i) = k_i\}) > 0$ i pokazuje se da je $\eta(B_1)$ nezavisno od događaja $\cap_{i=2}^m\{\eta(B_i) = k_i\}$. Naime, ako označimo

$$\pi_k = \mathbb{P}(\eta(B_1) = k \mid \cap_{i=2}^m\{\eta(B_i) = k_i\}), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

onda iz prethodnih računa slijedi

$$\pi_k = \lambda(B_1)\pi_{k-1}/k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Jedina vjerojatnosna distribucija koja zadovoljava ovu rekurzivnu jednakost je dana sa $\pi_k = \mathrm{Po}(\lambda(B_1); k)$, nezavisno o $k_1, ..., k_m$. Dakle, slučajna varijabla $\eta(B_1)$ ima Poissonovu $\mathrm{Po}(\lambda(B_1))$ distribuciju i nezavisna je od događaja $\cap_{i=2}^m\{\eta(B_i) = k_i\}$. Indukcijom po m slijedi da su slučajne varijable $\eta(B_1), ..., \eta(B_m)$ nezavisne.

Za proizvoljni $B \in \mathcal{X}$ računom kao gore za $m = 1$ dobivamo da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k\,\mathbb{P}(\eta(B) = k) = \lambda(B)\mathbb{P}(\eta(B) = k - 1).$$

Pritom koristimo standardnu konvenciju da vrijedi $\infty \cdot 0 = 0$. Ukoliko stavimo da je $\lambda(B) = \infty$, dobivamo da je $\mathbb{P}(\eta(B) = k - 1) = 0$ i konačno da je $\mathbb{P}(\eta(B) = \infty) = 1$.

Dakle, η zadovoljava definicijska svojstva Poissonovih procesa pa zaključujemo da je η Poissonov proces. □

3.2 Faktorijalne mjere i multivarijantna Meckeova jednakost

Jednakost (3.2) možemo generalizirati na slučajeve koji uključuju višestruku integraciju. Za početak, neka je $m \in \mathbb{N}$ i promotrimo prostor $(\mathbb{X}^m, \mathcal{X}^m)$ pri čemu je $\mathbb{X}^m$ Kartezijev produkt od $\mathbb{X}$ m puta sa samim sobom, a $\mathcal{X}^m$ Kartezijev produkt od $\mathcal{X}$ m puta sa samim sobom. Neka je $\mu \in \mathbf{N}$ dana s

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \delta_{x_j} \tag{3.3}$$

za neki $k \in \overline{\mathbb{N}_0}$ i neke $x_1, x_2 ... \in \mathbb{X}$ koje nisu nužno različite. Sada definiramo mjeru $\mu^{(m)} \in \mathbf{N}(\mathbb{X}^m)$ na sljedeći način

$$\mu^{(m)}(C) = \sum_{i_1,...,i_m \leq k}^{\neq} \mathbf{1}\{(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in C\}, \quad C \in \mathscr{X}^m, \tag{3.4}$$

pri čemu $\neq$ označava sumiranje po svim m-torkama kojima su sve komponente u parovima različite i pri čemu koristimo konvenciju da praznu sumu definiramo kao nulu. Drugim riječima, to znači da vrijedi

$$\mu^{(m)} = \sum_{i_1,...,i_m \leq k}^{\neq} \delta_{(x_{i_1},...,x_{i_m})}. \tag{3.5}$$

Korisno je u jednakosti (3.4) promatrati skup C kao poseban Kartezijev produkt oblika $B_1 \times ... \times B_m$ gdje su $B_1, ..., B_m$ proizvoljni podskupovi od $\mathbb{X}$. Ukoliko su ti skupovi u parovima disjunktni, onda se desna strana jednakosti (3.2) faktorizira i dobivamo

$$\mu^{(m)}(B_1 \times ... \times B_m) = \prod_{j=1}^{m} \mu(B_j). \tag{3.6}$$

S druge strane, ukoliko je $B_j = B$ za sve $j \in \{1, ...m\}$, onda dobivamo

$$\mu^{(m)}(B^m) = \mu(B)^m. \tag{3.7}$$

Mjeru $\mu^{(m)}$ nazivamo *m-ta faktorijalna mjera* od μ.

Faktorijalne mjere zadovoljavaju korisnu rekurziju iskazanu u narednoj lemi:

Lema 3.2.1. *Neka je $\mu \in \mathbf{N}$ dana s* (3.3) *i definirajmo $\mu^{(1)} := \mu$. Tada za sve $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\begin{aligned}\mu^{(m+1)} = \int \Bigg[\int & \mathbf{1}\{(x_1, ..., x_{m+1}) \in \cdot\}\mu(dx_{m+1}) - \\ & - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\{(x_1, ..., x_{m+1}, x_j) \in \cdot\} \Bigg] \mu^{(m)}(d(x_1, ...x_m)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dokaz leme može se naći u [4], Lemma 4.2. Već smo napomenuli u Poglavlju 2. da u općenitom prostoru $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ ne vrijedi da svaku mjeru $\mu \in \mathbf{N}$ možemo zapisati u obliku (3.3). Međutim, rekurzivna jednadžba (3.8) daje rekurzivnu definiciju faktorijalne mjere i za mjere $\mu \in \mathbf{N}$ koje se ne mogu zapisati kao suma Diracovih mjera. Tu ideju možemo zapisati u obliku iduće propozicije:

Propozicija 3.2.2. *Za proizvoljnu mjeru $\mu \in \mathbf{N}$ postoji jedinstveni niz $\mu^{(m)} \in \mathbf{N}(\mathbb{X}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, takav da je $\mu^{(1)} := 1$ i da zadovoljava rekurziju* (3.8). *Preslikavanje $\mu \mapsto \mu^{(m)}$ je izmjerivo.*

Dokaz propozicije može se naći u [4], Proposition A.16. Neka je sada η točkovni proces na $\mathbb{X}$ i neka je $m \in \mathbb{N}$ prizvoljan. Prema Propoziciji 3.2.2 $\eta^{(m)}$ je točkovni proces na $\mathbb{X}^m$. Ako je η pravi točkovni proces, odnosno možemo ga zapisati u obliku (1.9), onda je

$$\eta^{(m)} = \sum_{i_1,...,i_m \in \{1,...\kappa\}}^{\neq} \delta_{(X_{i_1},...,X_{i_m})}. \tag{3.9}$$

Sada možemo iskazati i dokazati multivarijantnu verziju Meckeove jednakosti (3.2).

Teorem 3.2.3. (Multivarijantna Meckeova jednakost) *Neka je η Poissonov proces na $\mathbb{X}$ sa s-konačnom mjerom intenziteta λ i neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada za proizvoljnu $f \in \overline{\mathbb{R}}_+(\mathbb{X}^m \times \boldsymbol{N})$ vrijedi sljedeća jednakost*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int f(x_1,...,x_m,\eta)\, \eta^{(m)}(d(x_1,...,x_m))\right] \\ = \int \mathbb{E}[f(x_1,...,x_m,\eta+\delta_{x_1}+...+\delta_{x_m})]\, \lambda^m(d(x_1,...,x_m)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Formula vrijedi za funkcije $f \in \overline{\mathbb{R}}_+(\mathbb{X}^m \times \boldsymbol{N})$ koje zadovoljavaju

$$\int \mathbb{E}[|f(x_1,...,x_m,\eta+\delta_{x_1}+...+\delta_{x_m})|]\, \lambda^m(d(x_1,...,x_m)) < \infty. \tag{3.11}$$

Dokaz. Prema Propoziciji 3.2.2 preslikavanje $\mu \mapsto \mu^{(m)}$ je izmjerivo pa jednakost (3.10) uključuje samo distribuciju od η. Prema Korolaru 2.2.5 možemo pretpostaviti da je η pravi točkovni proces i da ga možemo zapisati u obliku (1.9).

Za početak pretpostavimo da je $\lambda(\mathbb{X}) < \infty$. Tada mjeru λ možemo zapisati u obliku $\lambda = \gamma\mathbb{Q}$ pri čemu je $\gamma \geq 0$, a $\mathbb{Q}$ je neka vjerojatnosna mjera na $\mathbb{X}$. Prema Propoziciji 2.2.3 možemo pretpostaviti da je η miješani binomni proces kao u Definiciji 2.2.2, gdje κ ima Poissonovu Po(γ) distribuciju. Neka je sada $f \in \overline{\mathbb{R}}_+(\mathbb{X}^m \times \mathbf{N})$ proizvoljna funkcija. Iz (3.9) i (1.7) lijeva strana jednakosti (3.10) postaje:

$$\begin{aligned} e^{-\gamma}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k!}\mathbb{E}\left[\sum_{i_1,...,i_m\in\{1,...,k\}}^{\neq} f(X_{i_1},...,X_{i_m},\delta_{X_1}+...+\delta_{X_k})\right] = \\ = e^{-\gamma}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k!}\sum_{i_1,...,i_m\in\{1,...,k\}}^{\neq} \mathbb{E}\left[f(X_{i_1},...,X_{i_m},\delta_{X_1}+...+\delta_{X_k})\right]. \end{aligned}$$

Prvo smo iskoristili nezavisnost slučajne varijable κ i varijabli (X_n), a zatim smo mogli zamijeniti redoslijed integrala i sume jer je $f \geq 0$. Označimo sada sa $\mathbf{y} = (y_1,...,y_m)$ proizvoljan element iz $\mathbb{X}^m$. Kako je X_i nezavisna s distribucijom $\mathbb{Q}$, gornja jednakost postaje

$$\begin{aligned} &e^{-\gamma} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma^k (k)_m}{k!} \mathbb{E}\left[\int f(\mathbf{y}, \sum_{i=1}^{k-m} \delta_{X_i} + \sum_{j=1}^{m} \delta_{y_j}) \mathbb{Q}^m(d\mathbf{y}) \right] = \\ &= e^{-\gamma} \gamma^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma^{k-m}}{(k-m)!} \int \mathbb{E}\left[f(\mathbf{y}, \sum_{i=1}^{k-m} \delta_{X_i} + \sum_{j=1}^{m} \delta_{y_j}) \right] \mathbb{Q}^m(d\mathbf{y}) = \\ &= \int \mathbb{E}[f(y_1, ..., y_m, \eta + \delta_{y_1} + ... + \delta_{y_m})] \lambda^m (d(y_1, ..., y_m)). \end{aligned}$$

U računu smo ponovno iskoristili miješanu binomnu distribuciju. Ovime smo dokazali (3.10) za konačne λ.

Sada pretpostavimo da je $\lambda(\mathbb{X}) = \infty$. Kao u dokazu Teorema o egzistenciji (v. Teorem 2.2.4) možemo pretpostaviti da je $\eta = \sum_i \eta_i$, gdje su η_i nezavisni pravi Poissonovi procesi s mjerama intenziteta λ_i za koje vrijedi $\lambda_i(\mathbb{X}) < \infty$. Zbog nezavisnosti procesa η_i slijedi da su procesi

$$\xi_i := \sum_{j \le i} \eta_j, \quad \chi_i := \sum_{j \ge i+1} \eta_j,$$

nezavisni za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz (3.9) imamo da $\xi_i^{(m)} \uparrow \eta^{(m)}$ kako $i \to \infty$. Koristeći teorem o monotonoj konvergenciji vidimo da je lijeva strana u (3.10) dana sa

$$\begin{aligned} &\lim_{i \to \infty} \mathbb{E}\left[\int f(x_1, ..., x_m, \xi_i + \chi_i) \xi_i^{(m)} (d(x_1, ..., x_m)) \right] = \\ &= \lim_{i \to \infty} \mathbb{E}\left[\int f_i(x_1, ..., x_m, \xi_i) \xi_i^{(m)} (d(x_1, ..., x_m)) \right], \end{aligned}$$

gdje je $f_i(x_1, ..., x_m, \mu) := \mathbb{E}[f(x_1, ..., x_m, \mu + \chi_i)]$, $(x_1, ..., x_m, \mu) \in \mathbb{X}^m \times \mathbf{N}$. Ako stavimo $\lambda_i' := \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$, možemo primijeniti prethodni rezultat i iskoristiti Fubinijev teorem pa zadnja jednakost postaje

$$\begin{aligned} &\lim_{i \to \infty} \int \mathbb{E}\left[f_i(x_1, ..., x_m, \xi_i + \delta_{x_1} + ... + \delta_{x_m}) \right] (\lambda_i')^{(m)} (d(x_1, ..., x_m)) = \\ &= \lim_{i \to \infty} \int \mathbb{E}\left[f(x_1, ..., x_m, \eta + \delta_{x_1} + ... + \delta_{x_m}) \right] (\lambda_i')^{(m)} (d(x_1, ..., x_m)). \end{aligned}$$

Prema teoremu o monotonoj konvergenciji ovo je upravo desna strana u (3.10). Za funkcije f koje poprimaju i negativne vrijednosti, ali zadovoljavaju uvjet integrabilnosti (3.11), dokaz se provodi rastavljajući funkciju na pozitivni i negativni dio. □

Poglavlje 4

Palmova distribucija

Za točkovni proces η na $\mathbb{R}^d$ kažemo da je stacionaran ako izgleda statistički jednako neovisno o točki prostora $\mathbb{R}^d$ iz kojega se proces promatra. Za stacionarne procese možemo promatrati Palmovu distribuciju procesa. Palmova distribucija opisuje ponašanje točkovnog procesa kada ga se promatra iz proizvoljno odabrane točke procesa koju postavimo kao ishodište. Palmovu distribuciju ćemo uvesti preko profinjenog Campbellovog teorema. Nadalje, pomoću Palmove distribucije možemo napraviti još jednu karakterizaciju stacionarnih Poissonovih procesa u obliku stacionarne varijante Meckeova teorema (v. Teorem 3.1.2). Na kraju poglavlja uvest ćemo Voronoijev mozaik i Voronoijeve ćelije kako bismo povezali Palmovu distribuciju i stacionarnu distribuciju procesa.

4.1 Stacionarnost

Na početku ove točke fiksirajmo $d \in \mathbb{N}$ i neka je η točkovni proces na euklidskom prostoru $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$. U cijelom poglavlju ćemo koristiti oznaku $(\mathbf{N}, \mathscr{N}) := (\mathbf{N}(\mathbb{R}^d), \mathscr{N}(\mathbb{R}^d))$ pri čemu te skupove definiramo kao i u drugom poglavlju.

Formalma definicija stacionarnosti temelji se na familiji *pomaka*. Neka je $y \in \mathbb{R}^d$ proizvoljan. Za preslikavanje $\theta_y : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ kažemo da je *pomak* ako je definirano sa

$$\theta_y\mu(B) := \mu(B + y), \quad \mu \in \mathbf{N}, B \in \mathscr{B}^d, \tag{4.1}$$

gdje je $B+y := \{x+y : x \in B\}$, a $\mathscr{B}^d := \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^d$. Također, pišemo $B - y := B + (-y)$. Jednakost (4.1) je ekvivalentna zapisu

$$\int g(x)\,(\theta_y\mu)(dx) = \int g(x - y)\,\mu(dx), \quad \mu \in \mathbf{N}, g \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d). \tag{4.2}$$

Napomenimo da je θ_0 identiteta na $\mathbf{N}$ te da vrijedi *svojstvo protoka* $\theta_y \circ \theta_x = \theta_{x+y}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^d$. Za proizvoljni fiksni $y \in \mathbb{R}^d$ preslikavanje θ_y je izmjerivo. Sada možemo definirati stacionarnost točkovnog procesa.

Definicija 4.1.1. Za točkovni proces η na $\mathbb{R}^d$ kažemo da je *stacionaran* ako je $\theta_x \eta \stackrel{d}{=} \eta$ za sve $x \in \mathbb{R}^d$.

Označimo sada sa λ_d Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^d$. Naredna propozicija nam daje korisno svojstvo mjere intenziteta stacionarnog procesa.

Propozicija 4.1.2. *Neka je η stacionarni proces na $\mathbb{R}^d$ takav da vrijedi da je*

$$\gamma := \mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)] \tag{4.3}$$

konačno. Tada je mjera intenziteta od η jednaka $\gamma\lambda_d$.

Dokaz propozicije se može naći u [4], Proposition 8.2. Broj γ definiran sa (4.3) nazivamo *intenzitet* procesa η. Za stacionarne Poissonove procese vrijedi da intenzitet određuje distribuciju. To je tvrdnja naredne propozicije.

Propozicija 4.1.3. *Neka je η Poissonov proces na $\mathbb{R}^d$ takav da je γ definiran sa* (4.3) *konačan. Tada vrijedi da je η stacionaran ako i samo ako je mjera intenziteta λ od η jednaka $\gamma\lambda_d$.*

Dokaz propozicije se može naći u [4], Proposition 8.3.

4.2 Definicija i osnovna svojstva Palmove distribucije

Kako bismo mogli definirati Palmovu distribuciju točkovnog procesa, moramo prvo definirati lokalno konačne točkovne procese i jednostavne točkovne procese na općenitom metričkom prostoru $\mathbb{X}$.

Definicija 4.2.1. Neka je $\mathbb{X}$ metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{X}_b$ sustav svih ograničenih izmjerivih podskupova od $\mathbb{X}$. Za mjeru ν definiranu na $\mathbb{X}$ kažemo da je *lokalno konačna* ako je $\nu(B) < \infty$ za sve $B \in \mathcal{X}_b$. Skup svih lokalno konačnih mjera iz $\mathbf{N}(\mathbb{X})$ označavamo sa $\mathbf{N}_l(\mathbb{X})$ te označimo i $\mathcal{N}_l(\mathbb{X}) := \{A \cap \mathbf{N}_l : A \in \mathcal{N}(\mathbb{X})\}$.

Za točkovni proces η na metričkom procesu $\mathbb{X}$ kažemo da je *lokalno konačan* ako vrijedi $\mathbb{P}(\eta(B) < \infty) = 1$ za sve ograničene $B \in \mathcal{X}$.

Definicija 4.2.2. Neka je $\mathbb{X}$ metrički prostor. Za mjeru $\mu \in \mathbf{N}(\mathbb{X})$ kažemo da je *jednostavna* ako je $\eta\{x\} < 1$ za sve $x \in \mathbb{X}$. Skup svih jednostavnih mjera iz $\mathbf{N}(\mathbb{X})$ označavamo sa $\mathbf{N}_s(\mathbb{X})$.

Za točkovni proces η kažemo da je *jednostavan* ako vrijedi $\mathbb{P}(\eta \in \mathbf{N}_s(\mathbb{X})) = 1$.

Još napomenimo da skup svih jednostavnih i lokalno konačnih mjera iz $\mathbf{N}(\mathbb{X})$ označavamo sa $\mathbf{N}_{ls}(\mathbb{X}) = \mathbf{N}_l(\mathbb{X}) \cap \mathbf{N}_s(\mathbb{X})$.

U nastavku poglavlja promatramo lokalno konačan točkovni proces η ne $\mathbb{R}^d$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\eta(\omega) \in \mathbf{N}_l$ za svaki $\omega \in \Omega$. Ako je dodatno η stacionaran proces, distribucija od η se ne mijenja pri pomicanju ishodišta. Kažemo da je $\mathbb{P}_\eta = \mathbb{P}(\eta \in \cdot)$ *stacionarna distribucija* točkovnog procesa η.

Sada možemo iskazati profinjeni Campbellov teorem (usp. Propozicija 1.2.4) u kojem uvodimo distribuciju koja opisuje proces η kada ga promatramo iz tipične točke od η.

Teorem 4.2.3. (Profinjeni Campbellov teorem)

Neka je η stacionaran točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ s pozitivnim konačnim intenzitetom γ. Tada postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^0_\eta$ na $\mathbf{N}_l$ takva da

$$\mathbb{E}\left[\int f(x, \theta_x \eta)\, \eta(dx)\right] = \gamma \iint f(x, \mu)\, \mathbb{P}^0_\eta(d\mu) dx, \quad f \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_l). \tag{4.4}$$

Dokaz teorema se može naći u [4], Theorem 9.1. Prije same definicije Palmove distribucije, navedimo još rezultat o izmjerivosti.

Lema 4.2.4. *Preslikavanje $(x, \mu) \mapsto \theta_x \mu$ iz $\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_l$ u $\mathbf{N}_l$ je izmjerivo.*

Dokaz leme se može naći u [4], Lemma 9.2. Sada možemo navesti definiciju same Palmove distribucije.

Definicija 4.2.5. Ukoliko vrijede pretpostavke iz Teorema 4.2.2, mjeru $\mathbb{P}^0_\eta$ nazivamo *Palmova distribucija* točkovnog procesa η.

Ponekad se koristi ekvivalentna forma profinjenog Campbellovog teorema:

$$\mathbb{E}\left[\int f(x, \eta)\, \eta(dx)\right] = \gamma \iint f(x, \theta_{-x}\mu)\, \mathbb{P}^0_\eta(d\mu) dx, \quad f \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_l). \tag{4.5}$$

Ovaj oblik se jednostavno dobijemo ako primijenimo (4.4) na funkciju $\widetilde{f} \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_l)$ koja je definirana sa $\widetilde{f}(x, \mu) := f(x, \theta_{-x}\mu)$.

4.3 Mecke-Slivnyakov teorem

Naredni rezultat je stacionarna verzija Meckeove jednakosti (v. Teorem 3.1.2).

Teorem 4.3.1. (Mecke-Slivnyakov teorem)

Neka je η stacionaran proces na $\mathbb{R}^d$ s pozitivnim i konačnim intenzitetom. Tada je η Poissonov proces ako i samo ako vrijedi

$$\mathbb{P}^0_\eta = \mathbb{P}(\eta + \delta_0 \in \cdot). \tag{4.6}$$

Dokaz. Označimo s γ intenzitet od η. Pretpostavimo prvo da je η Poissonov proces. Za proizvoljni $A \in \mathcal{N}_l$ iz Meckeove jednakosti (3.2) slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x)\mathbf{1}_A(\theta_x\eta)\,\eta(dx)\right] &= \gamma\mathbb{E}\left[\int \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x)\mathbf{1}_A(\theta_x(\eta+\delta_x))\,dx\right]\\ &= \gamma\int \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x)\mathbb{P}(\eta+\delta_0\in A)\,dx = \gamma\mathbb{P}(\eta+\delta_0\in A),\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili Fubinijev teorem i stacionarnost za drugu jednakost. S druge strane, iz profinjenog Campbellova teorema (v. Teorem 4.2.3) slijedi:

$$\mathbb{E}\left[\int \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x)\mathbf{1}_A(\theta_x\eta)\,\eta(dx)\right] = \gamma\iint \mathbf{1}_{[0,1]^d}(x)\mathbf{1}_A(\mu)\,\mathbb{P}_\eta^0(d\mu)dx = \gamma\mathbb{P}_\eta^0(A)\lambda_d([0,1]^d).$$

Kako je $\lambda_d([0,1]^d) = 1$, iz prethodnih računa slijedi (4.6).

Obrnuto, pretpostavimo da vrijedi (4.6). Neka je $f \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_l)$ proizvoljna funkcija i iz (4.5) slijedi

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,\eta)\,\eta(dx)\right] = \gamma\int \mathbb{E}[f(x,\theta_{-x}(\mu+\delta_0))]\,dx.$$

Zbog stacionarnosti slijedi da Meckeova jednakost (3.2) vrijedi kada stavimo $\lambda = \gamma\lambda_d$. Iz Teorema 3.1.2 slijedi da je η Poissonov proces. □

4.4 Voronoijev mozaik i formula inverzije

U ovoj točki pretpostavljamo da je η stacionarni točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ s konačnim intenzitetom γ. Također, pretpostavimo da je $\mathbb{P}(\eta(\mathbb{R}^d) = 0) = 0$ i posebno da je $\gamma > 0$. Promotrit ćemo neke osnovne veze između stacionarne distribucije i Palmove distribucije procesa η. Jednostavnosti radi pretpostavimo da je $\eta(\omega)$ jednostavna lokalno konačna brojeća mjera za sve $\omega \in \Omega$, odnosno $\eta(\omega) \in \mathbf{N}_{ls}(\mathbb{X})$, za sve $\omega \in \Omega$. Na kraju, označimo s η^0 *Palmovu varijantu* od η. To je točkovni proces definiran na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ koji ima distribuciju $\mathbb{P}_\eta^0$.

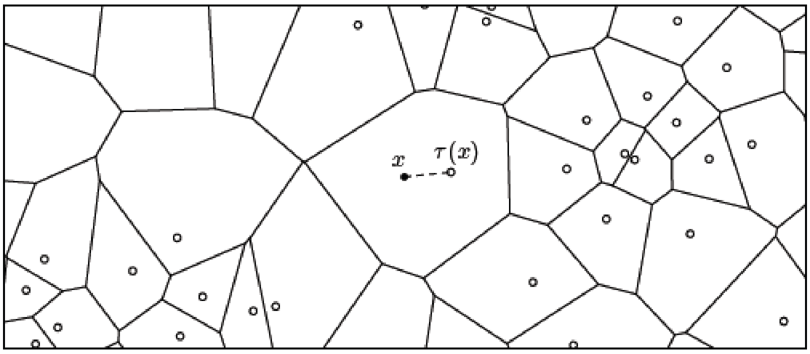
Sada ćemo prestaviti geometrijsku ideju *Voronoijeva mozaika*. Za mjeru $\mu \in \mathbf{N}_{ls}(\mathbb{X})$ za koju vrijedi $\mu(\mathbb{R}^d) > 0$ i za $x \in \mathbb{R}^d$ označimo sa $\tau(x,\mu) \in \mu$ točku iz μ za koju je euklidska udaljenost od x najmanja. Ako postoji više takvih točaka, uzimamo onu leksikografski najmanju. U specijalnom slučaju kada je $\mu(\mathbb{R}^d) = 0$ stavljamo da je $\tau(x,\mu) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}^d$. Preslikavanje $\tau : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_{ls} \to \mathbb{R}^d$ je kovarijantno na translacije, odnosno vrijedi

$$\tau(x-y,\theta_x\mu) = \tau(x,\mu) - y, \quad x,y \in \mathbb{R}^d, \mu \in \mathbf{N}_{ls}. \tag{4.7}$$

Za $x \in \mu \in \mathbf{N}_{ls}$ definiramo *Voronoijevu ćeliju* od x u odnosu na μ sa

$$C(x, \mu) = \{y \in \mathbb{R}^d : \tau(y, \mu) = x\}. \tag{4.8}$$

Ako je $\mu(\mathbb{R}^d) \neq 0$, onda su ćelije u parovima disjunktne i pokrivaju cijeli $\mathbb{R}^d$, odnosno ćelije čine particiju cijelog $\mathbb{R}^d$. Naredna slika 4.1 slikovno prikazuje tu činjenicu.



Slika 4.1: Primjer Voronoijeva mozaika na temelju rasporeda točaka u $\mathbb{R}^2$ prostoru

U nastavku koristimo oznaku

$$C_0 := C(0, \eta^0).$$

Ovaj slučajni skup se naziva *tipična ćelija* Voronoijeva mozaika. Također, točku od η najbližu ishodištu označavamo sa

$$X := \tau(0, \eta) \tag{4.9}$$

pri čemu je $X := 0$ ako je $\eta(\mathbb{R}^d) = 0$.

Teorem 4.4.1. *Za sve $h \in \mathbb{R}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}_{ls})$ vrijedi sljedeća jednakost*

$$\mathbb{E}[h(X, \eta)] = \gamma\, \mathbb{E}\left[\int_{C_0} h(-x, \theta_x \eta^0)\, dx\right]. \tag{4.10}$$

Dokaz teorema se može naći u [4], Theorem 9.6. Neka je sada $f \in \mathbb{R}_+(\mathbf{N}_{ls})$. Ako u formuli (4.10) stavimo $h(x, \mu) := f(\mu)$ dobivamo *formulu inverzije*

$$\mathbb{E}[f(\eta)] = \gamma\, \mathbb{E}\left[\int_{C_0} f(\theta_x \eta^0)\, dx\right], \tag{4.11}$$

u kojoj smo dobili stacionarnu distribuciju prikazanu u terminima Palmove distribucije. Ako stavimo $f \equiv 1$ dobivamo intuitivno očiglednu formulu

$$\mathbb{E}[\lambda_d(C_0)] = \gamma^{-1}. \tag{4.12}$$

Ako uzmemo $g \in \mathbb{R}_+(\mathbf{N}_{ls})$ i stavimo $h(x, \mu) := g(\theta_x \mu)$ iz (4.10) dobivamo

$$\gamma\, \mathbb{E}[\lambda_d(C_0) g(\eta^0)] = \mathbb{E}[g(\theta_X \eta)], \tag{4.13}$$

što nam pokazuje da je distribucija od $\theta_X \eta$ apsolutno neprekidna u odnosu na Palmovu distribuciju. Također, iz formule (4.13) vidimo da je stacionarna distribucija verzija Palmove distribucije s volumnim odstupanjem (do na pomak).

Sada definiramo (stacionarnu) *nul-ćeliju* od η sa

$$V_0 := C(X, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x, \eta) = \tau(0, \eta)\}.$$

U posebnom slučaju kada je $\eta(\mathbb{R}^d) = 0$, definiramo $\tau(x, \eta) := x$ za sve $x \in \mathbb{R}^d$ pa je $V_0 = \{0\}$. Sljedeći rezultat daje način kako se Palmova distribucija može izvesti iz stacionarne distribucije pomoću volumnog prilagođavanja i pomicanja X u 0.

Propozicija 4.4.2. *Za sve $f \in \mathbb{R}_+(\mathbf{N}_{ls})$ vrijedi da je*

$$\gamma\, \mathbb{E}[f(\eta^0)] = \mathbb{E}[\lambda_d(V_0)^{-1} f(\theta_x \eta)]. \tag{4.14}$$

Dokaz propozicije se može naći u [4], Proposition 9.7. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i definirajmo $f(\mu) := \lambda_d(C(0, \mu))^{\alpha+1}$. Sada iz (4.14) dobivamo

$$\gamma\, \mathbb{E}[\lambda_d(C_0)^{\alpha+1}] = \mathbb{E}[\lambda_d(V_0)^{\alpha}]. \tag{4.15}$$

Posebno, slijedi i

$$\mathbb{E}[\lambda_d(V_0)^{-1}] = \gamma. \tag{4.16}$$

Iz Jensenove nejednakosti imamo $\mathbb{E}[\lambda_d(V_0)^{-1}] \geq \mathbb{E}[\lambda_d(V_0)]^{-1}$. Sada iz (4.16) i (4.12) dobivamo

$$\mathbb{E}[\lambda_d(C_0)] \leq \mathbb{E}[\lambda_d(V_0)]. \tag{4.17}$$

Dakle, očekivana veličina tipične ćelije koju vežemo uz Palmovu distribuciju je manja ili jednaka od očekivane veličine stacionarne nul-ćelije.

Bibliografija

[1] A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, *Stochastic Geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[2] R. G. Bartle, *The elements of integration*, Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[3] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika, Predavanja (skripta)*, dostupno na http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf

[4] G. Last, M. Penrose, *Lectures on the Poisson Process*, dostupno na http://www.math.kit.edu/stoch/~last/seite/lectures_on_the_poisson_process/media/lastpenrose2017.pdf

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi (skripta)*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp17-predavanja.html

Sažetak

U ovom radu cilj je bio prikazati Poissonove točkovne procese. Na početku su definirane Poissonova vjerojatnosna distribucija i točkovni procesi općenito. Točkovne procese definiramo kao brojeću mjeru definiranu na slučajnom rasporedu točaka u nekom prostoru koja podskupu prostora pridružuje broj točaka koji upada u taj podskup. Osim definicije samog procesa, uvedeni su pojmovi mjere intenziteta i Laplaceova funkcionala. Navedene su i osnovne tvrdnje o točkovnim procesima i njihovoj distribuciji. U drugom poglavlju povezujemo Poissonovu distribuciju i točkovne procese u obliku Poissonovih procesa. Poissonov proces je točkovni proces kod kojeg slučajan broj točaka koji upada u dani skup ima Poissonovu distribuciju. Nakon same definicije, izveden je specifičan oblik Laplaceova funkcionala tog procesa te je dokazana egzistencija takvih procesa. Jedna od osnovnih karakterizacija Poissonovih procesa je dana u obliku Meckeove formule. Dokaz formule se provodi u nekoliko koraka i to je prikazano u trećem poglavlju. Posljednje poglavlje uvodi stacionarne točkovne procese te Palmovu distribuciju točkovnih procesa. Nakon same definicije stacionarnosti i Palmove distribucije, dokazan je Mecke-Slivnyakov teorem. To je varijanta Meckeove formule za stacionarne točkovne procese. Na kraju samog rada uvedeni su Voronoijev mozaik i formula inverzije pomoću kojih povezujemo stacionarnu distribuciju i Palmovu distribuciju točkovnih procesa.

Summary

In this thesis, the aim was to present Poisson point processes. At first, we define the Poisson distribution and point processes in general. A point process is defined as a counting measure defined on a random set of points in some space which maps number of random points in subset of space to that subset. Besides the definition, we introduce the intensity measure and the Laplace functional of a point process. Also, some basic claims about point processes and their distribution are given in this section. In the second chapter we bring together the Poisson distribution and point processes in the form of the Poisson processes. A Poisson process is a point process for which the number of points in a given set has a Poisson distribution. After the definition, we derive the special form of the Laplace functional of a Poisson process and we prove the existence of these processes. One of the basic characterization of a Poisson process is the Mecke equation. Proof takes a few steps and these steps are given in the third chapter. Last chapter introduce the stationary point processes and the Palm distribution of a point processes. We prove the Mecke-Slivnyak theorem. That is the version of the Mecke equation for stationary point processes. In the end we introduce Voronoi tessellations and the inversion formula by which we derive connection between stationary distribution and the Palm distribution of the point processes.

Životopis

Rođen sam 21. rujna 1993. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Brestje u Sesvetama, upisao sam V. gimnaziju u Zagrebu. Maturirao sam 2012. godine, nakon čega sam upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Tijekom zadnje godine studija, radio sam na zamjeni u Ženskoj općoj gimnaziji Družbe sestara milosrdnica s pravom javnosti i u Srednjoj školi Jelkovec kao profesor Matematike i Algoritama i programiranja.