

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bruno Hrastić

MAX-STABILNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, studeni, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Osnovni pojmovi i teoremi	3
1.1 Slučajni procesi	3
1.2 De Haanov teorem	5
1.3 Parametarske familije	9
1.4 Bivarijatne distribucije	14
2 Brown-Resnickovi procesi	19
2.1 Brown-Resnick stacionarnost	19
2.2 Miješani <i>moving maxima</i> proces	22
2.3 Brown-Resnick slučajno polje	22
3 Simulacijski algoritmi	25
3.1 Simulacija spektralnom mjerom	25
3.2 Simulacija ekstremalnim funkcijama	28
3.3 Uvjetna simulacija	30
Bibliografija	33

Uvod

Max-stabilni procesi su se pokazali korisnima u modeliranju prostornih ekstrema. U primjenama se najčešće javljaju u geostatistici (meteorologija, hidrologija) zbog potrebe za opisivanjem ekstremnih temperatura, poplava, olujnih vjetrova itd.

Nakon ponavljanja nekih pojmova iz srodnih matematičkih područja u ovom ćemo radu prikazati osnovna svojstva max-stabilnih procesa. Pri tom izdvajam de Haanov teorem i dekompoziciju kao temeljni rezultat. U prvom poglavlju će se nalaziti i pregled parametarskih familija max-stabilnih procesa. Cijelo drugo poglavlje je posvećeno pomnijem razmatranju jedne takve familije takozvanih Brown-Resnickovih procesa. Cilj kojem vode svi teorijski rezultati su simulacije max-stabilnih procesa što je tema posljednjeg poglavlja. Ovdje ću izdvojiti tri različita algoritma za simulaciju. Prvi od njih koristi spektralnu mjeru, drugi ekstremalne funkcije (koje će također biti objašnjene), dok treći govori o uvjetnoj simulaciji.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i teoremi

1.1 Slučajni procesi

Prisjetimo se da je slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ familija slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pri čemu je t element parametarskog skupa ili skupa indeksa $T \subset \mathbb{R}$. Prisjetimo se također da je trajektorija slučajnog procesa $\{X_t, t \in T\}$ funkcija koja za fiksirani $\omega \in \Omega$ svakom elementu $t \in T$ pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$.

U nastavku ćemo promatrati dva posebna tipa slučajnih procesa, Poissonov proces i Wienerov proces. Poissonov proces tipično koristimo kao model za broj nekih događaja u nekom vremenskom intervalu, ali počnimo od formalne definicije.

Uvedimo slučajnu varijablu koja broji koliko se točaka pojavljuje u nekom poluotvorenom intervalu ili zatvorenom skupu, nazovimo je N . Jednodimenzionalni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ je točkovni proces na \mathbb{R} takav da

1. Za svaki poluotvoreni interval $(a, b]$ slučajna varijabla $N(a, b]$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\lambda(b - a)$.
2. Ako su $(a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n]$ disjunktni poluotvoreni intervali tada su slučajne varijable $N(a_1, b_1], \dots, N(a_n, b_n]$ nezavisne.

Možemo promatrati i slučaj kad intenzitet λ nije konstanta već funkcija jedne varijable. To bi u realizaciji Poissonovog procesa značilo da bi se točke nejednoliko raspršile, primjerice okupljale bi se oko nekog područja. Očekivani broj točaka na nekom intervalu $(a, b]$ je tada $\int_a^b \lambda(t) dt$. Ovakav Poissonov proces zovemo nehomogen Poissonov proces, a λ zovemo funkcija intenziteta.

Slično kao i za jednodimenzionalni slučaj, možemo definirati dvodimenzionalni nehomogeni Poissonov proces s funkcijom intenziteta $\lambda(u), u \in \mathbb{R}^2$. To je točkovni proces na \mathbb{R}^2 takav da

1. Za svaki zatvoren skup B , slučajna varijabla $N(B)$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\int_B \lambda(u)du$.
2. Ako su B_1, \dots, B_n disjunktni zatvoreni skupovi, tada su $N(B_1), \dots, N(B_n)$ nezavisne slučajne varijable.

U nastavku ćemo koristiti notaciju oblika $\lambda(u)du$ za intenzitet. U slučaju kad je λ konstanta interpretiramo je kao očekivani broj točaka po zatvorenom skupu.

Preostaje nam definirati Poissonov proces na još općenitijem prostoru, na lokalno kompaktnom metričkom prostoru S . Prisjetimo se da za prostor S kažemo da je lokalno kompaktno u x ako postoji kompaktni potprostor C od S koji sadrži neku okolinu od x . Ako je S lokalno kompaktno u svakoj svojoj točki, za S kažemo da je lokalno kompaktno. Neka je Λ mjera na S koja je konačna na svakom kompaktnom skupu. Poissonov proces na S s mjerom intenziteta Λ je točkovni proces na S takav da

1. Za svaki kompaktni skup $B \subset S$, $N(B)$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\Lambda(B)$.
2. Ako su B_1, \dots, B_n disjunktni kompaktni skupovi, tada su $N(B_1), \dots, N(B_n)$ nezavisne.

Kasnije će se kod simulacija prirodno pojaviti potreba za korištenjem Brownovog gibanja i to baš kod Brown-Resnickovih procesa koji će biti definirani kao jedna od parametarskih familija.

Definicija 1.1.1. Standardno Brownovo gibanje je slučajni proces $\{W(t) : t \geq 0\}$ koji ima svojstva:

1. $W(0) = 0$
2. prirasti $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ su nezavisni
3. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, $0 \leq s < t$
4. gotovo sve trajektorije od $\{W(t) : t \geq 0\}$ su neprekidne funkcije

Općenito Brownovo gibanje se može zadati s 3 parametra: točka kretanja, drift i volatilitnost. Neka je $\{W(t) : t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje.

1. $\{x_0 + W(t) : t \geq 0\}$ je Brownovo gibanje koje kreće u točki $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. $\{\mu t + W(t) : t \geq 0\}$ je Brownovo gibanje s driftom $\mu \in \mathbb{R}$.
3. $\{\sigma W(t) : t \geq 0\}$ je Brownovo gibanje čija je volatilitnost dana sa $\sigma > 0$.

Dvije važne posljedice koje direktno slijede iz definicije Brownovog gibanja su:

1. Brownovo gibanje je gaussovski proces.
2. Brownovo gibanje ima stacionarne priraste.

Prisjetimo se što znači da je slučajni proces gaussovski. Slučajni proces je gaussovski ako i samo ako za svaki konačni skup indeksa $t_1, \dots, t_k \in T$ vrijedi da je $X_{t_1, \dots, t_k} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ multivarijatna gaussovska (normalna) slučajna varijabla.

Budući da se $W(t_i)$ može prikazati kao linearna kombinacija nezavisnih prirasta, koji su normalno distribuirani, tada je i njihova zajednička razdioba također normalna. Stacionarnost prirasta slijedi direktno iz treće točke definicije, dakle vrijedi $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s}$.

1.2 De Haanov teorem

Radi usporedbe krenimo s definicijom stabilne funkcije distribucije, premda nam ona sama konkretno neće trebati.

Definicija 1.2.1. Funkcija distribucije F je stabilna ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da ako su X_1, \dots, X_n nezavisne i jednako distribuirane takve da $F_{X_i} = F$, onda postoje $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $F_{\frac{S_n - b_n}{a_n}} = F$ (S_n je parcijalna suma, to jest $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$).

Prirodno je očekivati da će max-stabilni procesi biti povezani sa stabilnim funkcijama distribucije pa im je i definicija veoma slična. Razlika je u tome što ne promatramo parcijalne sume već maksimume.

Definicija 1.2.2. Neka je Z_1, Z_2, \dots niz nezavisnih kopija slučajnog procesa $\{Z(x) : x \in X\}$. Ako za svaki $n \geq 1$ postoje normalizacijske funkcije $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takve da

$$\frac{\max_{i=1, \dots, n} Z_i - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} Z$$

tada je proces $\{Z(x) : x \in X\}$ max-stabilan.

Gornji maksimum je definiran po komponentama.

Način kako možemo doći do jednog max-stabilnog procesa opisan je sljedećim dovoljnim uvjetom.

Teorem 1.2.1 (de Haan, 1984). *Neka je Y_1, Y_2, \dots niz nezavisnih kopija slučajnog procesa $\{Y(x) : x \in X\}$ sa neprekidnom trajektorijom. Ako postoje neprekidne funkcije c_n i $d_n \in \mathbb{R}$ takve da je granični proces $\{Z(x) : x \in X\}$ definiran sa*

$$\frac{\max_{i=1,\dots,n} Y_i(x) - d_n}{c_n} \longrightarrow Z(x), \quad x \in X, n \longrightarrow \infty$$

nedegeneriran, tada je proces $\{Z(x) : x \in X\}$ max-stabilan.

Pri tom napominjem da konvergencija slučajnih procesa $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ k slučajnom procesu Q implicira da konačno dimenzionalne razdiobe od Q_n konvergiraju prema konačno dimenzionalnim razdiobama od Q za $n \rightarrow \infty$. Precizna definicija konvergencije slučajnih procesa može se naći u [6].

Da bismo uveli definiciju jednostavnog max-stabilnog procesa trebat će nam familija neprekidnih vjerojatnosnih distribucija poznata pod imenom *generalized extreme value distribution* (GEV) ili *opća razdioba ekstremnih vrijednosti*.

Definicija 1.2.3. Opća razdioba ekstremnih vrijednosti (GEV) je familija neprekidnih vjerojatnosnih distribucija razvijenih unutar teorije ekstremnih vrijednosti. Kumulativna funkcija distribucije GEV (s parametrima $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \xi \in \mathbb{R}$) je dana s

$$F(\mu, \sigma; \xi) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}), & \text{ako } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})), & \text{ako } \xi = 0. \end{cases}$$

Familija se dijeli na 3 tipa razdioba

1. Gumbelova razdioba ($\xi = 0$)
2. Fréchetova razdioba ($\xi > 0$)
3. Weibull razdioba ($\xi < 0$).

$P(Z(x) \leq z) = \exp(-1/z)$ pripada Fréchetovom tipu, a to možemo vidjeti uzmemo li parametre $\mu = 0, \sigma = 1, \xi = 1$.

Definicija 1.2.4. Max-stabilan proces čije su marginalne distribucije Fréchetovog tipa, to jest $P(Z(x) \leq z) = \exp(-1/z)$ za sve $x \in X$ i $z > 0$ se naziva jednostavan max-stabilan proces.

Sljedeći teorem predstavlja de Haanovu dekompoziciju koja će omogućiti klasifikaciju i parametrizaciju max-stabilnih procesa pa samim time ima veoma važnu ulogu za analizu max-stabilnih procesa.

Teorem 1.2.2 (de Haan, 1984, Penrose, 1992). Svaki nedegeneriran jednostavan max-stabilan proces $\{Z(x) : x \in X\}$ definiran na kompaktnom skupu $X \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, sa neprekidnom trajektorijom, zadovoljava

$$Z(x) \stackrel{d}{=} \max_{i \geq 1} \xi_i f_i(x), \quad x \in X$$

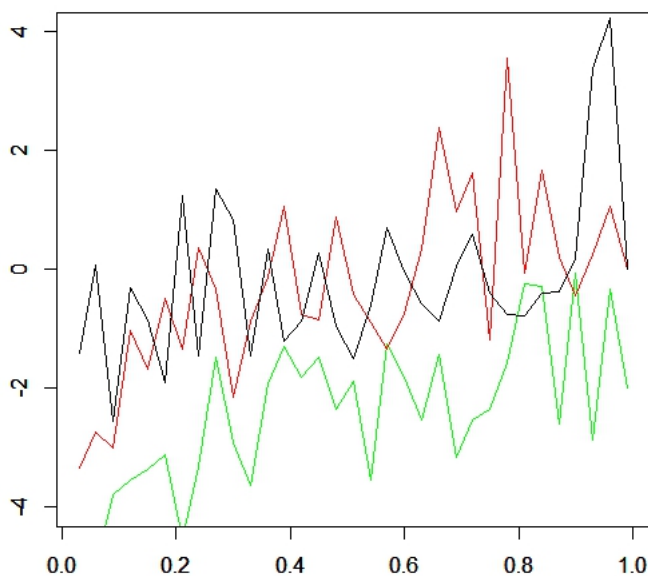
gdje su $\{(\xi_i, f_i) : i \geq 1\}$ točke Poissonovog procesa na $(0, \infty) \times C$ sa intenzitetom $\xi^{-2} d\xi \nu(df)$ za neku lokalno konačnu mjeru ν definiranu na prostoru C nenegativnih neprekidnih funkcija na X takvih da

$$\int f(x) \nu(df) = 1, \quad x \in X.$$

Primjetimo da je prostor $(0, \infty) \times C$ lokalno kompaktan metrički prostor pa je na njemu Poissonov proces definiran.

U prethodnom teoremu bit će nam zanimljivo promatrati slučaj kad za ν uzmemo vjerojatnosnu mjeru. Tada se prethodna reprezentacija max-stabilnog procesa Z svodi na $Z \stackrel{d}{=} \max_{i \geq 1} \xi_i Y_i$, gdje su $\{\xi_i, i \geq 1\}$ točke jednodimenzionalnog Poissonovog procesa na $(0, \infty)$, a Y_1, Y_2, \dots su nezavisne kopije nenegativnog slučajnog procesa $\{Y(x) : x \in X\}$ koji ima neprekidnu trajektoriju i za kojeg vrijedi $\mathbb{E}\{Y(x)\} = 1$ za svaki $x \in X$.

Promotrimo sada primjer max-stabilnog procesa na $X = [0, 1]$, nazovimo ga Z . Neka je kao ranije C prostor neprekidnih, nenegativnih (slučajnih) funkcija na X te neka je Φ Poissonov proces na $(0, \infty) \times C$. Radi jednostavnosti uzmimo da je $\Phi = \{\phi_i = \xi_i Y_i : i \in \{1, 2, 3\}\}$. Na sljedećoj slici, koja prikazuje primjer triju slučajnih funkcija, ϕ_i -ovi su označeni različitim bojama, neka je ϕ_1 označena crvenom bojom, ϕ_2 zelenom bojom i ϕ_3 crnom bojom. Pogledajmo primjerice vrijednost svih triju ϕ_i u 0.8. Vidimo da u toj točki najveću vrijednost ima crvena funkcija, to jest ϕ_1 . Prema tome po prethodnom teoremu znamo da je $Z(0.8) = \phi_1(0.8)$. Ako bi na isti način pogledali sve točke iz $[0, 1]$ dobili bi sve vrijednosti od Z . Primjetimo da zelena funkcija ni u jednoj točki nema najveću vrijednost od svih triju. Drugim riječima, ni za jedan $x \in [0, 1]$ ne vrijedi $Z(x) = \phi_2(x)$. To će nam svojstvo biti korisno kod simulacije max-stabilnih procesa u trećem poglavlju, a za funkciju ϕ_2 ćemo reći da je pod-ekstremalna. Ako postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $Z(x) = \phi_i(x)$ tada ćemo ϕ_i zvati ekstremalnom funkcijom. Konkretno u primjeru na slici ϕ_1 i ϕ_3 su ekstremalne funkcije. Također možemo Poissonov proces Φ razdvojiti na dva nezavisna slučajna procesa, jedan koji se sastoji od ekstremalnih funkcija, nazovimo ga Φ^+ , i jedan koji se sastoji od pod-ekstremalnih funkcija, nazovimo ga Φ^- .



Neka je K kompaktan podskup od X , te neka je na ovom primjeru $K = [0, 0.5]$. Ako postoji $x \in [0, 0.5]$ takav da je $\phi_i(x) = Z(x)$ tada ϕ_i zovemo K -ekstremalnom funkcijom. Ako pak ne postoji $x \in [0, 0.5]$ takav da je $\phi_i(x) = Z(x)$ tada ϕ_i zovemo K -pod-ekstremalnom. Kao i ranije zaključujemo da su ϕ_1 i ϕ_3 K -ekstremalne, a ϕ_2 je K -pod-ekstremalna funkcija. Poissonov proces Φ možemo podijeliti na dva procesa od kojih se jedan sastoji od K -ekstremalnih funkcija, nazovimo ga Φ_K^+ , a drugi od K -pod-ekstremalnih funkcija, nazovimo ga Φ_K^- . Možemo promatrati i slučaj kad je $K = \{x_0\}$, što je također kompaktan skup. Neka je primjerice $x_0 = 0.8$. Tada se $\Phi_{\{x_0\}}^+$ gotovo sigurno sastoji samo od jedne ekstremalne funkcije koju označavamo sa $\phi_{\{x_0\}}^+$. U našem primjeru je $\phi_{\{0.8\}}^+ = \phi_1$.

Neka je u nastavku $\Phi = \{\phi_i = \xi_i f_i : i \geq 1\}$ Poissonov točkovni proces na $(0, \infty) \times C$ s intenzitetom $\Lambda(B) = \int_C \int_0^\infty 1_{\{\xi f \in A\}} \xi^{-2} d\xi \nu(df)$, $A \subset C$ Borelov, a C je kao i ranije prostor nenegativnih, neprekidnih funkcija na X . Sljedeće tri propozicije će nam biti korisne u trećem poglavlju kod simulacije ekstremalnim funkcijama. Njihovi dokazi se nalaze u [4].

Propozicija 1.2.3. *Slučajne varijable $Z(x_0)$ i $\phi_{x_0}^+/Z(x_0)$ su nezavisne. Nadalje, $Z(x_0)$ ima distribuciju Fréchetovog tipa ($P(Z(x_0) \leq z) = \exp(-1/z)$) i distribucija od $\phi_{x_0}^+/Z(x_0)$ je*

$$\mathbb{P}_{x_0}(A) = \mathbb{P}(\phi_{x_0}^+/Z(x_0) \in A) = \int_C 1_{\{f/f(x_0) \in A\}} f(x_0) \nu(df), \quad A \in C \text{ Borelov.}$$

Propozicija 1.2.4. *Ograničeni točkovni proces $\Phi \cap \{f \in C, f(x_0) > 0\}$ je Poissonov točkovni proces s intenzitetom*

$$\int_A 1_{\{f(x_0) > 0\}} \mu(df) = \int_C \int_0^\infty 1_{\{\xi f \in A\}} \xi^{-2} d\xi \mathbb{P}_{x_0}(df), \quad A \in C \text{ Borelov.}$$

Definicija 1.2.5. Neka su f_1 i f_2 funkcije u X , tada $f_1 <_K f_2$ znači $f_1(x) < f_2(x)$, za svaki $x \in K$.

Propozicija 1.2.5 (Dombry, Éyi-Minko ,2012, Lema 3.2). *Uvjetna distribucija od Φ_K^- s obzirom na Φ_K^+ je jednaka distribuciji Poissonovog točkovnog procesa na C s intenzitetom $1_{\{f <_K Z\}} \mu(df)$.*

1.3 Parametarske familije

U ovom poglavlju ću navesti 5 parametarskih familija max-stabilnih procesa. Prvi i najjednostavniji je Smithov proces ili gaussovski proces ekstremnih vrijednosti. On je rijetko korišten u primjenama zbog toga što nije dovoljno fleksibilan, primjer toga je vidljiv u potpoglavlju bivarijantnih distribucija gdje dvodimenzionalan Smithov proces ima glatke rubove i pravilne oblike nalik na krugove.

Smithov proces (Smith, 1990)

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \xi_i \varphi(x - U_i; 0, \Sigma), \quad x \in X$$

gdje su $\{(\xi_i, U_i) : i \geq 1\}$ točke Poissonovog procesa na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ s mjerom intenziteta $\xi^{-2} d\xi du$, a $\varphi(-; 0, \Sigma)$ označava d -dimenzionalnu gaussovsku gustoću s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom Σ .

Propozicija 1.3.1. *Smithov proces je jednostavan max-stabilni proces.*

Dokaz. Da bi max-stabilni proces bio jednostavan, po definiciji 1.2.4 on mora imati marginalnu distribuciju Fréchetovog tipa, to jest $\mathbb{P}(Z(x) \leq z) = \exp(-1/z)$ za sve $x \in X$ i $z > 0$. Definirajmo skup E na sljedeći način:

$$E = \{(\xi, U) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^d : \xi \varphi(x - U, 0, \Sigma) > z\}.$$

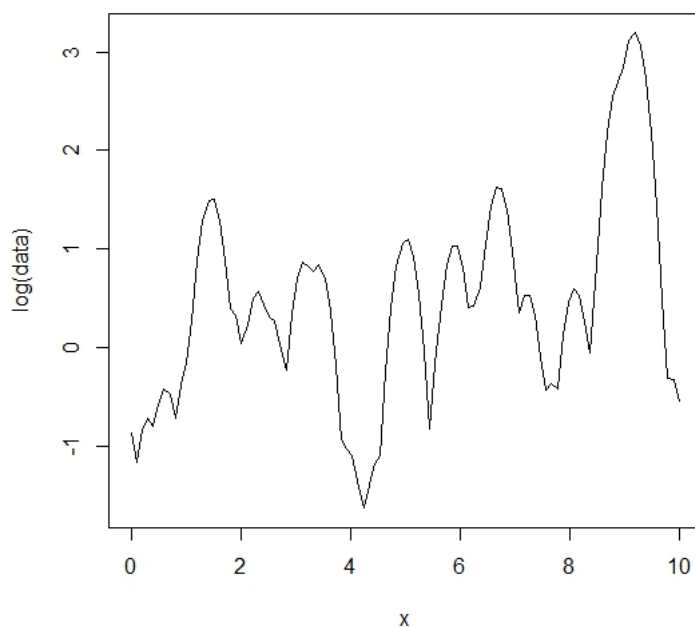
Neka je $x \in \mathbb{R}^d$ i $z > 0$. Tada je

$$\mathbb{P}[Z(x) \leq z] = \mathbb{P}[E \text{ je prazan skup }].$$

Sada iz propozicije 1.2.4 slijedi jednakost

$$\begin{aligned} &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} \int_{z/\varphi(x-U,0,\Sigma)}^{\infty} \xi^{-2} d\xi \nu(dy) \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\mathbb{R}^d} z^{-1} \varphi(x-U,0,\Sigma) \nu(dy) \right] = \exp \left(-\frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

Što znači da proces Z ima Fréchetovu marginalnu distribuciju. □



Slika 1.1: Jednodimenzionalni Smithov proces s varijancom 0.05.

Za prikaz nekih od nadolazećih procesa koristit ćemo jednu specifičnu kovarijacijsku funkciju, takozvanu Whittle-Maternovu kovarijacijsku funkciju. Whittle-Maternova kovarijanca između dvije točke udaljene za d je dana s

$$C_{\nu,\rho}(d) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho} \right)^\nu K_\nu \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho} \right),$$

gdje su ν i ρ parametri, Γ gamma funkcija, a K_ν prilagođena Besselova funkcija drugoga tipa reda ν .

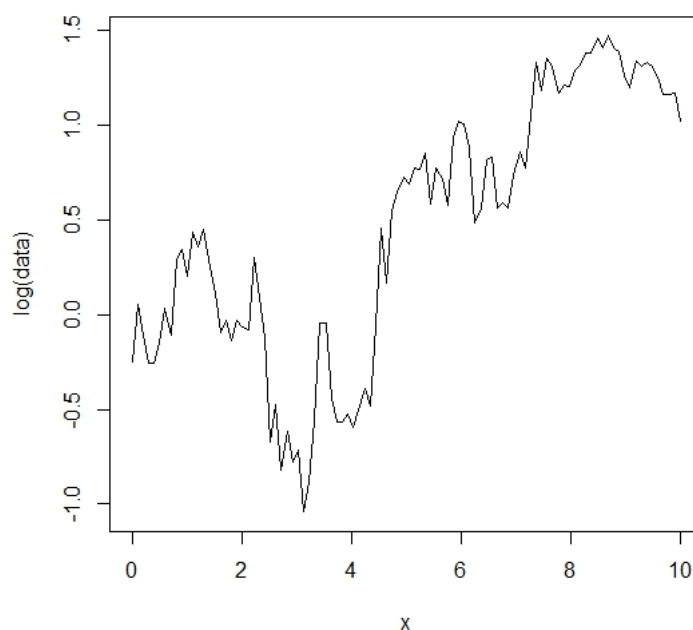
Jedan od razloga zašto uzimamo baš tu kovarijacijsku funkciju jest to što su trajektorije gaussovskog procesa s Whittle-Maternovom kovarijancom $\nu - 1$ puta diferencijabilne.

Schlatherov proces (Schlather, 2002)

$$Z(x) = \sqrt{2\pi} \max_{i \geq 1} \max\{0, W_i(x)\}, \quad x \in X$$

gdje su $\{W_i(x) : x \in X\}$ nezavisne kopije stacionarnog gaussovskog procesa s kovarijacijskom funkcijom C .

Schlatherov proces je također jednostavan max-stabilan proces i dokaz je sasvim analogan dokazu iz Smithovog procesa.



Slika 1.2: Jednodimenzionalni Schlatherov proces s Whittle-Maternovom kovarijacijskom funkcijom čiji su parametri $\rho = 2.8, \nu = 1$.

Sljedeći proces je najstariji od svih, međutim nije intenzivnije korišten sve do 2009. godine jer se pokazao kompliciranim za rad.

Brown-Resnick proces (Brown i Resnick, 1977)

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \xi_i \exp\{W_i(x) - \gamma(x)\}, \quad x \in X$$

gdje su $\{W_i(x) : x \in X\}$ nezavisne kopije gaussovskog procesa s očekivanjem 0, sa stacionarnim prirastima i semivariogramom $\gamma(h) = \text{Var}\{W(x+h) - W(x)\}/2$.

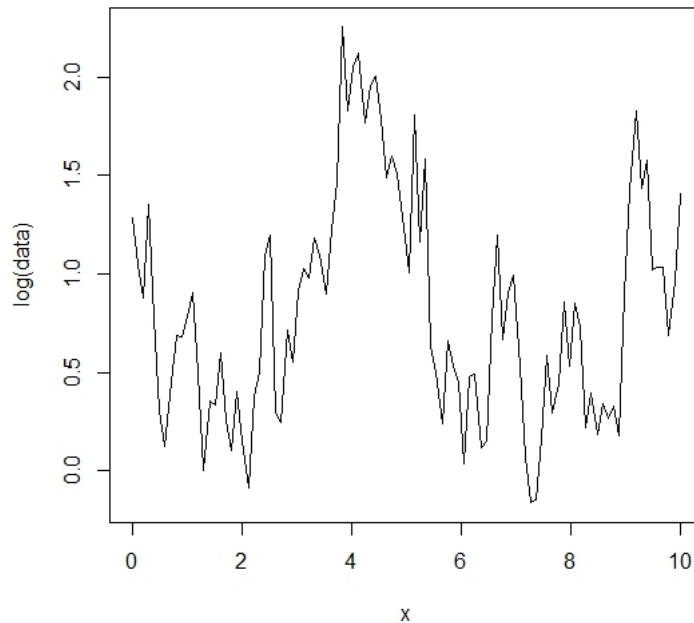
Semivariogram je funkcija uz pomoć koje promatramo prostornu zavisnost slučajnih procesa čija je definicija dana u nastavku.

Definicija 1.3.1. Variogram je funkcija koja opisuje varijancu razlike vrijednosti dviju točaka uzduž realizacije polja:

$$2\gamma(x, y) = \text{Var}(Z(x) - Z(y)) = \mathbb{E}[(Z(x) - \mu(x)) - (Z(y) - \mu(y))]^2].$$

Funkcija $2\gamma(x, y)$ se naziva variogram dok se funkcija $\gamma(x, y)$ naziva semivariogram. Ako je proces stacionaran, variogram možemo reprezentirati kao funkciju jedne varijable $\gamma_s(h) = \gamma(0, 0 + h)$.

Zanimljivo je primjetiti da je Smithov proces zapravo Brown-Resnickov proces gdje je $W = x^T \Sigma^{-1} X$, $X \sim N(0, \Sigma)$.



Slika 1.3: Jednodimenzionalni Brown-Resnickov proces s dosegom 3 i glatkoćom 0.7.

Ekstremalni t proces je ustvari spona koja veže Brown-Resnickove i Schlatherove procese. Iako je proces poznat već duže vrijeme, njegova spektralna karakterizacija je ustanovljena tek 2013. godine.

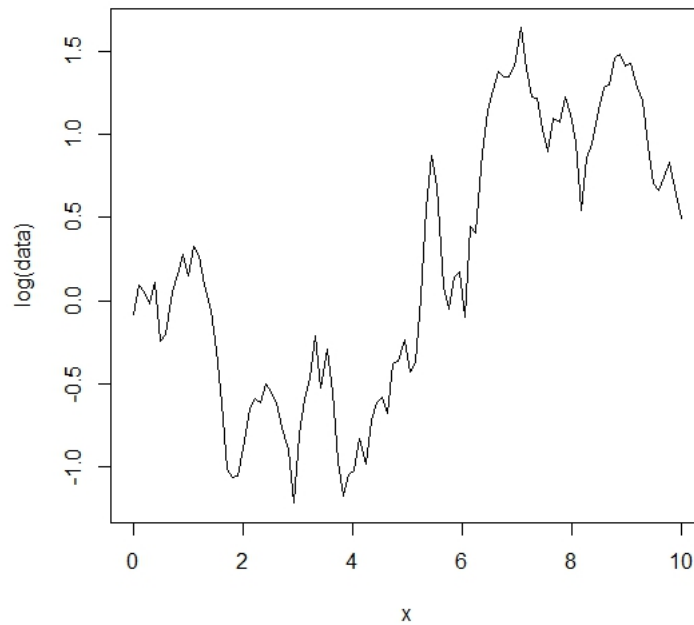
Ekstremalni t proces (Opitz, 2013, spektralna karakterizacija procesa)

$$Z(x) = c_\nu \max_{i \geq 1} \xi_i \max\{0, W_i(x)\}^\nu, \quad x \in X$$

gdje je $\nu \geq 1$, $\{W_i(x) : x \in X\}$ su nezavisne kopije stacionarnog gaussovskog procesa s kovarijacijskom funkcijom C i

$$c_\nu = \sqrt{\pi} 2^{(-\nu-2)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-1}$$

gdje je Γ Gamma funkcija.



Slika 1.4: Jednodimenzionalni ekstremalni t proces s Whittle-Maternovom kovarijacijskom funkcijom čiji su parametri $\rho = 3$, $\nu = 0.7$.

Najnovija i posljednja familija procesa koju ovdje navodim je takozvani Tukeyev proces koji je ime dobio prema Tukeyevoj g - h distribuciji na temelju čega je i nastala ideja o spektralnoj reprezentaciji procesa.

Tukeyev proces (Xu, Genton, 2016)

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \{\xi_i W(x)\}$$

gdje je

$$W(x) = \exp\left\{\frac{a}{2}\varepsilon^2(x) + b\varepsilon(x) + \frac{1}{2}\log(1-a) - \frac{b^2}{2(1-a)}\right\}, \quad a < 1, b \geq 0,$$

dok je ε stacionarni gaussovski proces.

1.4 Bivarijatne distribucije

Želimo uz pomoć de Haanovog teorema opisati k -dimenzionalnu distribuciju od $\{Z(x) : x \in X\}$. Neka su $z = (z_1, \dots, z_k) \in (0, \infty)^k$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in X^k$. Iz de Haanove dekompozicije možemo primijetiti:

$$\mathbb{P}\{Z(x) \leq z\} = \mathbb{P}\{\text{ni za jedan par } (\xi, Y) \in \Phi \text{ ne vrijedi } \xi Y(x_j) > z_j \text{ za neki } j \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Koristeći propoziciju 1.2.4 traženu vjerojatnost možemo zapisati kao

$$= \exp \left[- \int_0^\infty \mathbb{P} \left\{ \xi > \min_{j=1, \dots, k} \frac{z_j}{Y(x_j)} \right\} \xi^{-2} d\xi \right].$$

Kad bi izraz u eksponentu promatrali kao očekivanje dolazimo do definicije takozvane eksponentne funkcije:

$$V_x(z_1, \dots, z_k) = \mathbb{E} \left[\max_{j=1, \dots, k} \left\{ \frac{Y(x_j)}{z_j} \right\} \right].$$

Konačno, početnu vjerojatnost zapisujemo kao

$$\mathbb{P}\{Z(x) \leq z\} = \exp\{-V_x(z_1, \dots, z_k)\}.$$

Svrha eksponentne funkcije je opisati ekstremalnu zavisnost, međutim ona nije jedina s takvim ciljem, također možemo promatrati i njoj bliski ekstremalni koeficijent:

$$\theta_k(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{E} \left[\max_{j=1, \dots, k} \{Y(x_j)\} \right] \in [1, k].$$

Iz njihovih definicija veza se očituje iz jednakosti

$$\theta_k(x_1, \dots, x_k) = V_{x_1, \dots, x_k}(1, \dots, 1).$$

Ako je vrijednost od θ jednaka 1 radi se o potpunoj zavisnosti, dok vrijednost $\theta = k$ znači potpunu nezavisnost. Također definiramo i funkciju ekstremalnog koeficijenta:

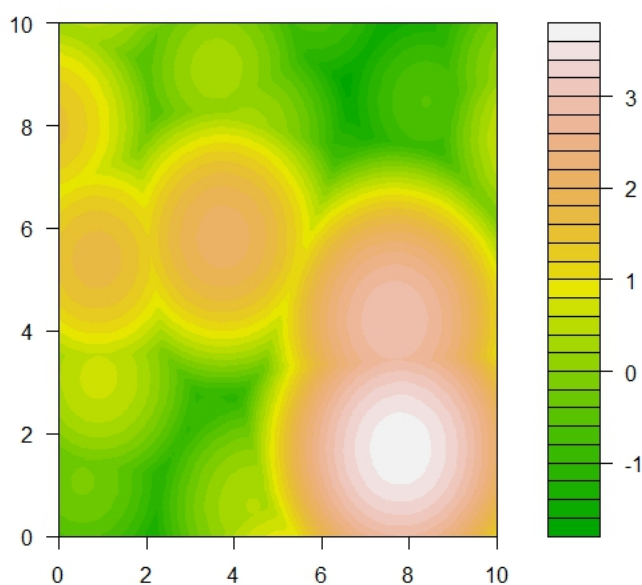
$$\theta : h \longrightarrow \mathbb{E}[\max\{Z(x), Z(x+h)\}].$$

Dakle, kad bi promatrali $-\log \mathbb{P}\{Z(x) \leq z_1, Z(x+h) \leq z_2\}$ ustvari bi se radilo o eksponentnoj funkciji $V_{x, x+h}(z_1, z_2)$. U nastavku ću navesti primjere bivarijatnih distribucija prethodno navedenih parametarskih familija i to u smislu njihovih eksponentnih funkcija.

Smith

$$V_{x,x+h}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} \Phi \left\{ \frac{\alpha(h)}{2} + \frac{1}{\alpha(h)} \log \frac{z_2}{z_1} \right\} + \frac{1}{z_2} \Phi \left\{ \frac{\alpha(h)}{2} + \frac{1}{\alpha(h)} \log \frac{z_1}{z_2} \right\},$$

gdje je $\alpha^2(h) = h^T \Sigma^{-1} h$.

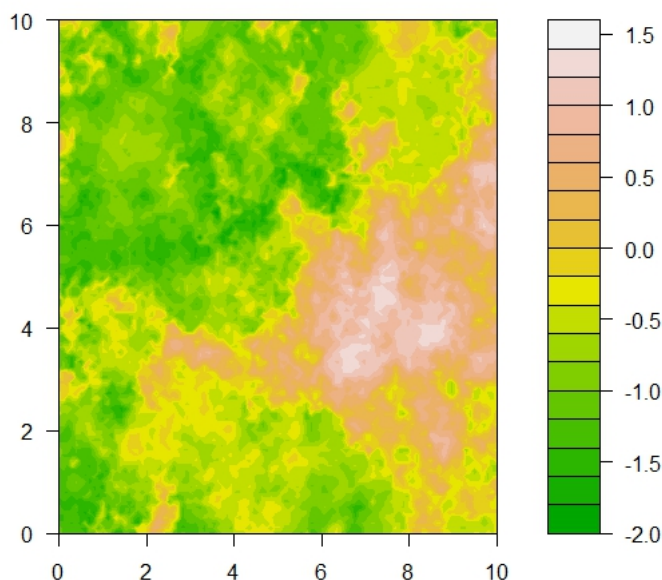


Slika 1.5: Dvodimenzionalni Smithov proces s kovarijacijskom matricom $\Sigma_{11} = 1.5$, $\Sigma_{12} = 0$, $\Sigma_{22} = 1.5$

Schlather

$$V_{x,x+h}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{2\{1 + C(h)z_1z_2\}}{(z_1 + z_2)^2}} \right\},$$

gdje je C kovarijacijska funkcija od $\{W(x) : x \in X\}$.



Slika 1.6: Dvodimenzionalni Schlatherov proces s Whittle-Maternovom kovarijacijskom funkcijom čiji su parametri $\rho = 2.8$, $\nu = 1$, $\Sigma_{11} = 1.5$, $\Sigma_{12} = 0$, $\Sigma_{22} = 1.5$

Brown-Resnick

$$V_{x,x+h}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\gamma(h)}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2\gamma(h)}} \log \frac{z_2}{z_1} \right\} + \frac{1}{z_2} \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\gamma(h)}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2\gamma(h)}} \log \frac{z_1}{z_2} \right\},$$

gdje je γ semivariogram od $\{W(x) : x \in X\}$.

Ekstremalni t

$$V_{x,x+h}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} T_{\nu+1} \left\{ \frac{1}{b} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{1/\nu} - \frac{C(h)}{b} \right\} + \frac{1}{z_2} T_{\nu+1} \left\{ \frac{1}{b} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{1/\nu} - \frac{C(h)}{b} \right\},$$

gdje je C kovarijacijska funkcija od $\{W(x) : x \in X\}$ i $b^2 = 1 - C(h)^2/(\nu + 1)$.

Tukey

$$V_{x,x+h}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} \left[1 - G_{\Theta} \left\{ \log \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right\} \right] + \frac{1}{z_2} \left[1 - G_{\Theta} \left\{ \log \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \right\} \right],$$

gdje je

$$G_{\Theta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \Phi \left(\frac{y - t^2}{\sqrt{2}|t|} \right) dt,$$

ρ je korelacijski koeficijent između $\varepsilon(x_1)$ i $\varepsilon(x_2)$, vektor parametara je $\Theta = (a, b, \Psi^T)^T$, f_X je funkcija gustoće od $X \sim N(\mu_1(a, b, \rho), \varphi^2(a, \rho))$, $\varphi^2(a, \rho) = a^2(1 - \rho^2)/[2(1 - a)]$, $\mu_1(a, b, \rho) = b(1 - a)^{-1}[(1 - \rho)(2 - a + \rho a)/2]^{1/2}$.

Poglavlje 2

Brown-Resnickovi procesi

2.1 Brown-Resnick stacionarnost

Od svih parametarskih familija max-stabilnih procesa vjerojatno su najintragantniji Brown-Resnickovi procesi. Stoga je i ovo poglavlje posvećeno njihovim svojstvima. Prvi teorem opisuje konstrukciju Brown-Resnickovog procesa η s variogramom γ . Njegov dokaz se može naći u [8].

Teorem 2.1.1. *Neka su $W_i, i \in \mathbb{N}$ nezavisne kopije standardnog Brownovog gibanja $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$ i, nezavisno o W_i , neka je $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{U_i}$ Poissonov točkovni proces na \mathbb{R} s intenzitetom $e^{-y} dy$. Tada je proces*

$$\eta(t) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (U_i + W_i(t) - |t|/2)$$

stacionaran max-stabilni proces sa standardnim Gumbelovim marginalnim razdiobama.

Dokaz prethodne tvrdnje da je riječ o procesu sa standardnim Gumbelovim marginalnim razdiobama proizlazi kao posljedica sljedećeg teorema čiji dokaz se može naći u [7].

Teorem 2.1.2. *Neka je $X = (X(t))_t$ stohastički proces te neka je sa \mathcal{L} označena njegova multivarijatna funkcija distribucije. Neka je za Poissonov proces N definiran njegov maksimum po točkama i označimo ga s $M(t)$. Neka je $b(t)$ definiran s*

$$b(t) = \int e^r d\mathcal{L}(X(t))(r).$$

Ako je $b(t) \in (0, \infty)$ tada vrijedi

$$\mathbb{P}\{M(t) \leq x\} = \exp(-\exp(-x + \log(b(t)))).$$

Nadalje, za $(X(t))_{t \geq 0} = (W(t) - t/2)_{t \geq 0}$, gdje je $(W(t))_{t \geq 0}$ Brownovo gibanje, vrijedi da je

$$\mathbb{P}\{M(t) \leq x\} = \exp(-\exp(-x))$$

(što je upravo standardna Gumbelova razdioba).

Stacionarnost je poželjno svojstvo koje se nalazi kao uvjet u mnogim teoremima iz područja vremenskih nizova, a jedan poseban tip stacionarnosti je uveden u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.1.1. Stohastički proces $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ koji zadovoljava $\mathbb{E}e^{\xi(t)} < \infty$, za svaki $t \in \mathbb{R}^d$ je Brown-Resnick stacionaran ako je proces

$$\eta(t) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (U_i + \xi_i(t))$$

stacionaran, gdje je $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{U_i}$ Poissonov točkovni proces s intenzitetom $e^{-y}dy$ nezavisan o $\xi_i, i \in \mathbb{N}$, gdje su ξ_i nezavisne kopije slučajnog procesa $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^d\}$.

Kriterij kojim u teoriji možemo provjeriti svojstvo Brown-Resnick stacionarnosti proizlazi iz ekvivalencije dane u propoziciji, čiji se dokaz nalazi u [10], no prije toga definicija Laplaceove transformacije.

Definicija 2.1.2. Neka je s kompleksni broj oblika $s = \sigma + i\omega, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Laplaceova transformacija funkcije $h(t), t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ je funkcija $H(s)$ definirana s:

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

Laplaceova transformacija mjere μ na $[0, \infty)$ je funkcija φ definirana s:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t).$$

Propozicija 2.1.3. Slučajni proces $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ koji zadovoljava $\mathbb{E}e^{\xi(t)} < \infty$, za svaki $t \in \mathbb{R}^d$ je Brown-Resnick stacionaran ako i samo ako za Laplaceovu transformaciju mjere $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ vrijedi

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{t_1+h, \dots, t_n+h}(u_1, \dots, u_n)$$

za sve $h, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$, za sve $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ tako da je $\sum_{i=1}^n u_i = 1$.

Posljedično možemo primjetiti da Brown-Resnick stacionarnost sa sobom donosi i neka algebarski lijepa svojstva:

Korolar 1. Neka su $\{\xi'(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ i $\{\xi''(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ dva nezavisna procesa koja imaju svojstvo Brown-Resnick stacionarnosti. Tada je proces $\xi' + \xi''$ Brown-Resnick stacionaran. Također vrijedi da je proces $\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}\}$ definiran sa $\xi(t_1, t_2) = \xi_1(t_1) + \xi_2(t_2)$ Brown-Resnick stacionaran.

Pronaći konkretan primjer jednog Brown-Resnick stacionarnog procesa nije suviše teško, može ga se konstruirati iz gaussovskog procesa.

Teorem 2.1.4. Neka je $\{W(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ gaussovski proces sa stacionarnim prirastima i variancom $\sigma^2(t)$. Tada je proces $\xi(t) = W(t) - \sigma^2(t)/2$ Brown-Resnick stacionaran.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(W(t)) = 0$. Iz definicije variograma $\gamma(t) = \mathbb{E}(W(t) - W(0))^2$ slijedi

$$\text{Cov}(W(t), W(s)) = \sigma^2(t)/2 + \sigma^2(s)/2 - \gamma(t-s)/2.$$

Primjenimo Propoziciju 2.1.3. na $\xi(t)$ ($\mathbb{E}e^{\xi(t)} = 1$). Trebamo dokazati da vrijedi jednakost iz Propozicije. Distribucija $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ slučajnog vektora $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ je multivarijatna gaussovska distribucija čije očekivanje $(\mu_i)_{i=1, \dots, n}$ i kovarijacijska matrica $(\sigma_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ su dani sa

$$\mu_i = -\sigma^2(t_i)/2$$

$$\sigma_{ij} = \sigma^2(t_i)/2 + \sigma^2(t_j)/2 + \gamma(t_i - t_j)/2.$$

Laplaceova transformacija $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}$ je dana sa

$$\phi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \mu_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} u_i u_j\right)$$

Neka je $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ zadovoljava $\sum_{i=1}^n u_i = 1$. Supstitucijom $u_1 = 1 - \sum_{i=2}^n u_i$ dobivamo

$$\phi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(L + \frac{1}{2}Q\right)$$

gdje su $L = L_{t_1, \dots, t_n}(u_2, \dots, u_n)$ i $Q = Q_{t_1, \dots, t_n}(u_2, \dots, u_n)$ linearni i kvadratični dio, preciznije

$$L = \sum_{i=2}^n (\mu_i - \mu_1 + \sigma_{1i} - \sigma_{11})u_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \gamma(t_i - t_1)u_i$$

$$Q = \sum_{i,j=2}^n (\sigma_{ij} - \sigma_{1i} - \sigma_{1j} + \sigma_{11})u_i u_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \gamma(t_i - t_1) + \gamma(t_j - t_1) - \gamma(t_j - t_i)u_i u_j$$

Dakle, ni L ni Q se ne mijenjaju ako zamjenimo t_1, \dots, t_n s $t_1 + h, \dots, t_n + h$, prema tome ξ je Brown-Resnick stacionaran. □

2.2 Miješani *moving maxima* proces

Jedna od uloga takozvanih miješanih *moving maxima* procesa je u uvjetnom uzorkovanju max-stabilnih procesa, pa u ovom potpoglavlju predstavljamo definiciju takvih procesa i jedan teorem koji ih direktno veže s Brown-Resnickovim procesima.

Definicija 2.2.1. Neka su $B_i, i = 1, 2, \dots$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije B . Pretpostavimo da je $\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} e^{B(t)} dt < \infty$. Neka je $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(t_i, y_i)}$ Poissonov točkovni proces na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ s intenzitetom $e^{-y} dt dy$ (dt označava Lebesgueovu mjeru na \mathbb{R}^d) i neka su $F_i, i \in \mathbb{N}$ nezavisne kopije od F . Proces oblika

$$\eta(t) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (B_i(t - t_i) + y_i) \quad , t \in \mathbb{R}^d$$

se naziva miješani *moving maxima* proces.

Uvjet s pomoću kojeg možemo promatrati Brown-Resnickov proces kao *moving maxima* proces opisan je u sljedećem teoremu, čiji se dokaz nalazi u [10].

Teorem 2.2.1. Neka je $W(t), t \in \mathbb{R}^d$ neprekidni gaussovski proces sa stacionarnim prirastima i varijancom $\sigma^2(t)$. Pretpostavimo da je

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} (W(t) - \sigma^2(t)/2) = -\infty \quad g.s.$$

Tada Brown-Resnickov proces $\eta(t) = \bigvee_{i=1}^{\infty} (U_i + W_i(t) - \sigma^2(t)/2)$ ima reprezentaciju kao miješani *moving maxima* proces.

2.3 Brown-Resnick slučajno polje

Opći model Brown-Resnickovih procesa se naziva Brown-Resnick slučajno polje, i oblika je

$$\eta(t) = \sup_{i \geq 1} (V_i + W_i(t) - \sigma^2(t)/2), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

gdje je $\sigma^2(t) = \text{Var}(W_1(t)), t \in \mathbb{R}^d$ niz nezavisnih jednako distribuiranih centriranih gaussovskih procesa sa stacionarnim prirastima na \mathbb{R}^d i (V_i) su točke Poissonovog procesa na \mathbb{R} s mjerom intenziteta $e^{-x} dx$.

Pri tom su W_i su nezavisna, jednako distribuirana, centrirana gaussovska slučajna polja sa stacionarnim prirastima, varijancom σ^2 i variogramom γ .

Neka su u nastavku Z_i nezavisna, jednako distribuirana gaussovska polja sa stacionarnim prirastima, očekivanjem $-\gamma$, varijancom 2γ , variogramom γ i iščezavaju u ishodištu. Prema tome procesi Z_i ovise jedino o γ .

Algoritam za simulaciju Brown-Resnickovih procesa bit će opravdan teoremom koji govori o novoj reprezentaciji slučajnog polja koje je postignuto promjenom mjere.

Teorem 2.3.1. *Pretpostavimo da je dana proizvoljna vjerojatnosna mjera μ na \mathbb{R}^d . Neka je*

$$\xi(t) = \sup_{i \geq 1} \left(V_i + Z_i(t - T_i) - \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(Z_i(s - T_i)) \mu(ds) \right) \right), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

gdje su $((T_i, V_i))_{i \geq 1}$ točke Poissonovog procesa na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ s mjerom intenziteta $\mu(dt) \times e^{-v} dv$. Tada slučajna polja $(\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ i $(\xi(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ imaju jednaku distribuciju.

Prije samog dokaza teorema navodim dvije pomoćne leme bez dokaza (dokaz leme 1 se nalazi u [2] kao posljedica teorema 2).

Lema 1. *Neka su (X_i) nezavisne, jednako distribuirane kopije slučajnog polja X na \mathbb{R}^d i (V_i) točke Poissonovog procesa na \mathbb{R} s mjerom intenziteta $e^{-x} dx$. Ako je*

$$\xi(t) = \sup_{i \geq 1} (V_i + X_i(t)), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

tada za $y_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n$ vrijedi:

$$P(\xi(t_1) \leq y_1, \dots, \xi(t_n) \leq y_n) = \exp(-\mathbb{E} \exp(\max_{j=1, \dots, n} (X(t_j) - y_j))).$$

Lema 2. *Neka je $t \in \mathbb{R}^d$ fiksni. Za izmjerivi funkcional R na $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}}$ koji je invarijantan na translacije, vrijedi:*

$$\mathbb{E} e^{W(t) - \sigma^2(t)/2} R(W - \sigma^2/2) = \mathbb{E} R(\theta_t Z),$$

gdje je θ_t definiran s $(\theta_t Z)(s) = Z(s - t)$.

Dokaz teorema 2.3.1. Neka su $t_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n$ i $y_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ proizvoljni. Za $X_i = W_i - \sigma^2/2$ iz Leme 1 slijedi:

$$\mathbb{P}(\eta(t_1) \leq y_1, \dots, \eta(t_n) \leq y_n) = \exp(-\mathbb{E} \exp(\max_{j=1, \dots, n} (W(t_j) - \sigma^2(t_j)/2 - y_j))).$$

Uzmimo proizvoljnu mjeru μ na \mathbb{R}^d . Definiramo funkcional F kao:

$$F(X) = \frac{\max_{j=1, \dots, n} \exp(x(t_j) - y_j)}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(x(s)) \mu(ds)}.$$

Tada iz Leme 2 proizlazi:

$$\mathbb{E} \exp(\max_{j=1, \dots, n} (W(t_j) - \sigma^2(t_j)/2 - y_j))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left[\exp(W(t) - \sigma^2(t)/2) \frac{\exp(\max_{j=1, \dots, n}(W(t_j) - \sigma^2(t_j)/2 - y_j))}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(W(s) - \sigma^2(s)/2) \mu(ds)} \right] \mu(dt) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left[\frac{\exp(\max_{j=1, \dots, n}(Z(t_j - t) - y_j))}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(Z(s - t)) \mu(ds)} \right] \mu(dt) \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{\exp(\max_{j=1, \dots, n}(Z(t_j) - T) - y_j)}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(Z(s - T)) \mu(ds)} \right].
\end{aligned}$$

Za

$$X_i(t) = Z_i(t - T_i) - \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(Z_i(s - T_i)) \mu(ds) \right)$$

iz Leme 1 slijedi

$$\mathbb{P}(\eta(t_1) \leq y_1, \dots, \eta(t_n) \leq y_n) = \mathbb{P}(\xi(t_1) \leq y_1, \dots, \xi(t_n) \leq y_n)$$

što je tvrdnja teorema. □

Napomena 1. Ako je $\sigma^2/2 = \gamma$ tada $(W_i(t - T_i))$ ima jednaku distribuciju kao i $(W_i(t) - W_i(T_i))$. Također vrijedi da polje

$$\sup_{i \geq 1} \left(V_i + W_i(t) - \gamma(t - T_i) - \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(W_i(s) - \gamma(s - T_i)) \mu(ds) \right) \right), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

ima jednaku distribuciju kao i $(\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$

Kao direktne posljedice teorema javljaju se 3 sljedeća korolara koji donose jednostavne, ali značajne činjenice.

Korolar 2. Polje η je stacionarno.

Dokaz. Neka je μ Diracova točkovna mjera za proizvoljni $t^* \in \mathbb{R}^d$. Iz teorema 2.3.1 slijedi da slučajno polje $(\sup_{i \geq 1} (V_i + Z_i(t - t^*)))_{t \in \mathbb{R}^d}$ ima jednaku distribuciju kao i $(\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ što znači da distribucija ne ovisi o t^* . □

Korolar 3. Jednodimenzionalne marginalne razdiobe od $(\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ imaju Gumbelovu distribuciju.

Dokaz. Neka je μ Diracova točkovna mjera za proizvoljni $t \in \mathbb{R}^d$. Iz teorema 2.3.1 slijedi da $\eta(t)$ ima jednaku distribuciju kao i $\sup_{i \geq 1} V_i$, za svaki $t \in \mathbb{R}^d$. □

Korolar 4. Distribucija od $(\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ ovisi samo o variogramu γ .

Dokaz. Budući da su procesi Z_i u potpunosti određeni s γ slijedi da i $(\xi(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ ovisi jedino o γ . Tvrdnja sada slijedi direktno iz teorema 2.3.1. □

Poglavlje 3

Simulacijski algoritmi

3.1 Simulacija spektralnom mjerom

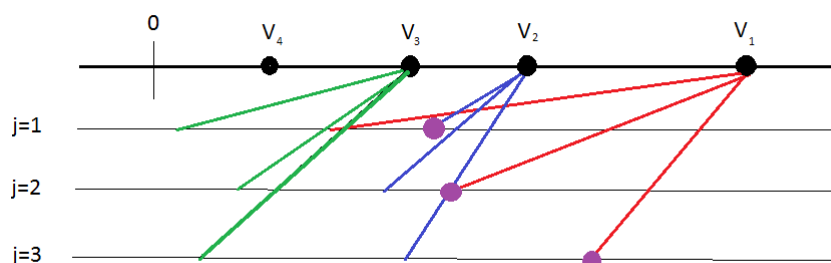
Prvi algoritam koji ću predstaviti će biti Dieker-Mikosch algoritam za egzaktnu simulaciju Brown-Resnickovog procesa na skupu točaka $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$. Sama simulacija posljedica je rezultata iz poglavlja o Brown-Resnick slučajnom polju gdje smo naveli razliku W_i i Z_i . Pretpostavimo da je $\sigma^2/2 = \gamma$. Koristeći tvrdnju iz napomene 1 prelazimo na reprezentaciju polja uz pomoć W_i , a ne Z_i . Uzmimo da je μ uniformna na $\{t_1, \dots, t_n\}$ radi jednostavnosti. Tada iz teorema 2.3.1 slijedi da vektor $(N(t_1), \dots, N(t_n))$, $j = 1, \dots, n$, zadan sa

$$N(t_j) = \sup_{i \geq 1} \left(V_i + W_i(t_j) - \gamma(t_j - T_i) - \log \left(n^{-1} \sum_{l=1}^n \exp(W_i(t_l) - \gamma(t_l - T_i)) \right) \right)$$

ima istu distribuciju kao i $(\eta(t_1), \dots, \eta(t_n))$, gdje su $((V_i, T_i))$ točke Poissonovog procesa na $\mathbb{R} \times \{t_1, \dots, t_n\}$ s mjerom intenziteta $e^{-x} dx \times (n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{t_i}(dy))$. Definirat ćemo točke klastera C_i iz prethodne reprezentacije kao $N(t_j) = \sup_{i \geq 1} C_i(t_j)$. Dakle, klasteri su zadani s

$$C_i(t_j) = (V_i + \log n) + W_i(t_j) - \gamma(t_j - T_i) - \log \left(\sum_{l=1}^n \exp(W_i(t_l) - \gamma(t_l - T_i)) \right).$$

Sada generiramo parove $(V_i + \log n, C_{i,j})$, gdje za svaki i stvorimo n točaka klastera koje su sve manje od $V_i + \log n$. U konačnici uzimamo supremume za svaki j zasebno, dakle svaki j možemo smatrati kao zasebnu razinu i na toj razini gledamo koja je najveća vrijednost od svih $C_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$ za fiksni j . Algoritam staje zbog toga jer će, zbog konačnosti skupa indeksa i zbog toga jer je niz V_i padajući, za neki i vrijednost $V_i + \log n$ biti manja od minimuma svih vrijednosti supremuma klastera po svakoj razini.



Slika 3.1: Prva zadaća algoritma je kreirati točke klastera za V_1 što je na slici označeno crvenom bojom. Za V_2 je odmah nakon generiranja točaka V_1 sigurno da neće sudjelovati u supremumu na razini $j = 3$ jer se točke klastera uvijek generiraju lijevo od same točke V kojoj pripadaju. Kao rezultat uzimamo točke koje su najdalje desno (supremumi) na svakoj razini što je na slici označeno ljubičastim točkama.

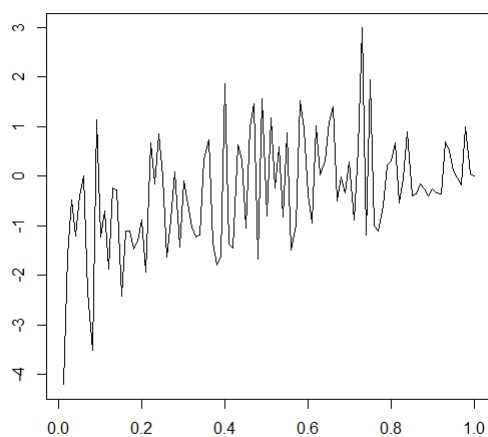
U [3] dan je pseudo-kod za simulaciju Brown-Resnick procesa i na temelju tog pseudo-koda slijedi kod u R-u:

```

1 generate_cluster<-function(n,V){
2 t1<-floor(n*runif(1))
3 t <- 0:t1
4 #variogram gamma=(sigma^2)/2,
5 #za gamma(t)=abs(t)/2 je sigma^2(t)=abs(t)
6 sig2 <- abs(t)
7 W <- rnorm(n = length(t) - 1, sd = sqrt(sig2))
8 W <- c(0, cumsum(W))
9 res<-V+W-log(sum(exp(W)))
10 return(res)}
11
12 ms<-function(n){
13 supremum<-numeric(n)
14 for(i in 1:n){
15     supremum[i]<-(-Inf)}
16 expminusV<-(-log(runif(1)))/n
17 C<-generate_cluster(n,-log(expminusV))
18 while(min(max(supremum,C))<(-log(expminusV))){
19     supremum<-max(supremum,C)
20     expminusV<-expminusV - log(runif(1))/n
21     C<-generate_cluster(n,-log(expminusV))}
22 supremum<-max(supremum,C)
23 return(supremum)}

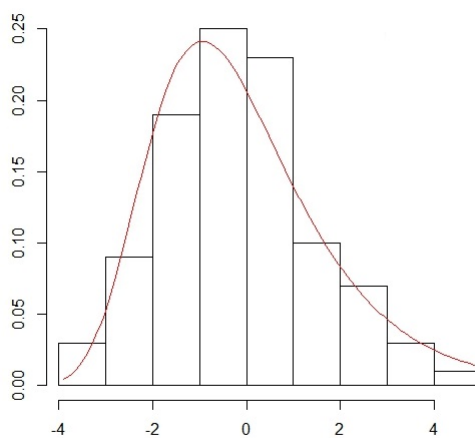
```

Rezultat tog koda su Brown-Resnick procesi, a primjer procesa koji je dobiven upotrebom koda prikazan je na sljedećoj slici.

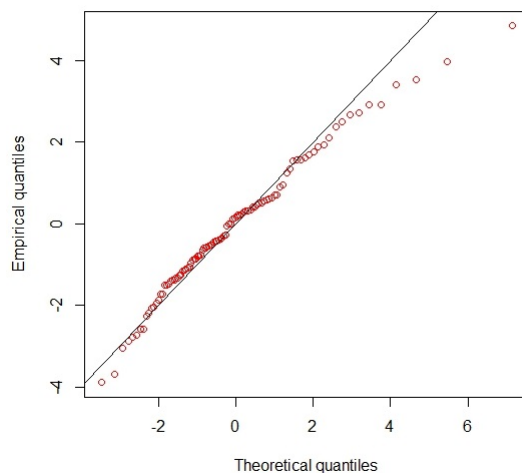


Slika 3.2: Primjer simuliranog Brown-Resnickovog procesa.

Prema prijašnjim teoretskim saznanjima ovdje je riječ o procesu sa Gumbelovim marginalnim razdiobama, što provjeravamo histogramom i qq-plotom.



Slika 3.3: Histogram zajedno s fittanom Gumbelovom funkcijom gustoće, čiji su parametri $\mu = -0.93$ i $\beta = 1.52$.



Slika 3.4: qq-plot prikazuje podatke dobivene prethodnom simulacijom koji su suprotstavljani Gumbelovoj distribuciji.

3.2 Simulacija ekstremalnim funkcijama

Prisjetimo se definicije ekstremalne funkcije budući da će ona biti ključna u ovom poglavlju. Za proces ϕ , funkcija $\varphi_i \in \phi$ je ekstremalna ako postoji $x \in X$ takav da je $\varphi_i(x) = \max_{j \geq 1} \varphi_j(x)$. Prije samog algoritma potreban je i sljedeći teorem.

Teorem 3.2.1. *Distribucija od $(\phi_{x_n}^+)_{1 \leq n \leq N}$ je dana njenom početnom i uvjetnom distribucijom. Ekstremalna funkcija $\phi_{x_1}^+$ ima jednaku distribuciju kao i $F_1 Y_1$ gdje je F_1 jedinična Fréchetova slučajna varijabla, a Y_1 nezavisni slučajni proces s distribucijom*

$$\mathbb{P}_{x_1}(A) = \mathbb{P}(\phi_{x_1}^+ / Z(x_1) \in A) = \int_C \mathbf{1}_{\{f/f(x_1) \in A\}} f(x_1) \nu(df), \quad A \in \mathcal{C} \text{ Borelov.}$$

Za $1 \leq n \leq N - 1$ uvjetna distribucija od $\phi_{x_{n+1}}^+$ u odnosu na $(\phi_{x_i}^+)_{1 \leq i \leq n}$ je jednaka distribuciji od:

$$\tilde{\phi}_{x_{n+1}}^+ = \begin{cases} \operatorname{argmax}_{\phi \in \tilde{\Phi}_{n+1}} \phi(x_{n+1}), & \text{ako } \tilde{\Phi}_{n+1} \neq \emptyset \\ \operatorname{argmax}_{\phi \in \Phi_n^+(x_{n+1})} \phi(x_{n+1}), & \text{ako } \tilde{\Phi}_{n+1} = \emptyset \end{cases}$$

gdje je $\tilde{\Phi}_{n+1}$ Poissonov točkovni proces s intenzitetom

$$\mathbf{1}_{\{f(x_i) < Z_n(x_i), 1 \leq i \leq n\}} \mathbf{1}_{\{f(x_{n+1}) > Z_n(x_{n+1})\}} \mu(df)$$

$$Z_n(x) = \max_{\phi \in \Phi_n^+} \phi(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \phi_{x_i}^+(x), \quad x \in X.$$

Dokaz. Distribucija od $\phi_{x_1}^+$ je dana u Propoziciji 1.2.3. Nadalje se dokazuje rezultat za uvjetnu distribuciju. Iz definicije ekstremalnih funkcija slijedi $Z(x_i) = \phi_{x_i}^+(x_i)$ što pak znači da je $Z(x_i) = Z_n(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Iz Propozicije 1.2.5 slijedi da je uvjetna distribucija od Φ_n^- u odnosu na Φ_n^+ jednaka distribuciji Poissonovog točkavnog procesa s intenzitetom

$$1_{\{f(x_i) < Z(x_i), 1 \leq i \leq n\}} \mu(df) = 1_{\{f(x_i) < Z_n(x_i), 1 \leq i \leq n\}} \mu(df).$$

Sada promatramo restrikciju $\tilde{\Phi}_{n+1} = \Phi_n^- \cap \{f \in C, f(x_{n+1}) > Z_n(x_{n+1})\}$. Taj restringiran proces je i dalje Poissonov točkavni proces zbog prethodne jednakosti mjera i to intenziteta $1_{\{f(x_i) < Z_n(x_i), 1 \leq i \leq n\}} 1_{\{f(x_{n+1}) > Z_n(x_{n+1})\}} \mu(df)$. Nadalje, razlikuju se 2 slučaja, ako je $\tilde{\Phi}_{n+1} = \emptyset$ tada ne postoji funkcija u $\tilde{\Phi}_{n+1}$ koja je veća od Z_n u x_{n+1} pa je stoga $Z(x_{n+1}) = Z_n(x_{n+1})$ i $\phi_{x_{n+1}}^+ = \operatorname{argmax}_{\phi \in \Phi_n^+} \phi(x_{n+1})$, a ako $\tilde{\Phi}_{n+1}$ nije prazan tada postoji neka funkcija u $\tilde{\Phi}_{n+1}$ koja je veća od Z_n u x_{n+1} pa je $Z(x_{n+1}) > Z_n(x_{n+1})$ i $\phi_{x_{n+1}}^+ = \operatorname{argmax}_{\phi \in \tilde{\Phi}_{n+1}} \phi(x_{n+1})$. \square

Kako iz propozicije 1.2.4 slijedi da možemo simulirati $\tilde{\phi}_{x_{n+1}}$ koristeći distribuciju $P_{x_{n+1}}$ predstavljam algoritam koji daje egzaktnu simulaciju max-stabilnog procesa Z na točkama $x = (x_1, \dots, x_N)$:

1. Simuliraj $\xi^{-1} \sim \operatorname{Exp}(1)$ i $Y \sim P_{x_1}$
2. $Z(x)$ postavi na $\xi Y(x)$
3. Radi for petlju za $n = 2, \dots, N$
4. Simuliraj $\xi^{-1} \sim \operatorname{Exp}(1)$
5. Tako dugo dok je $\xi > Z(x_n)$ radi
6. Simuliraj $Y \sim P_{x_n}$
7. Ako je $\xi Y(x_i) < Z(x_i)$ za sve $i = 1, \dots, n-1$ onda promjeni $Z(x)$ na maksimum po komponentama od $\{Z(x), \xi Y(x)\}$
8. Simuliraj $E \sim \operatorname{Exp}(1)$ i stavi $\xi^{-1} + E$ umjesto ξ
9. Vрати Z .

Prirodno se javlja pitanje koji je od ovih algoritama brži i samim time kojeg izabrati u kojoj situaciji. Kod algoritma simulacije ekstremalnim funkcijama potrebne su dvije konkretne simulacije, slučajne varijable s eksponencijalnom distribucijom i slučajnog vektora

zadanog s $\mathbb{P}_{x_1}, \dots, \mathbb{P}_{x_N}$. S gledišta algoritamske složenosti simulacija jedne varijable je zanemariva u odnosu na simulaciju slučajnog vektora. U propoziciji 4. iz [4] je pokazano da je složenost algoritma simulacije ekstremalnim funkcijama reda $O(n)$, dok je složenost algoritma simulacije spektralnom mjerom (doduše generalizirane verzije algoritma) dana s $n\mathbb{E}(\max_{i=1}^N Z(X_i)^{-1})$. Iz toga zaključujemo da je algoritam simulacije ekstremalnim funkcijama efikasniji u smislu očekivanog broja operacija koje se trebaju izvršiti pa uvijek preferiramo algoritam simulacije ekstremalnim funkcijama.

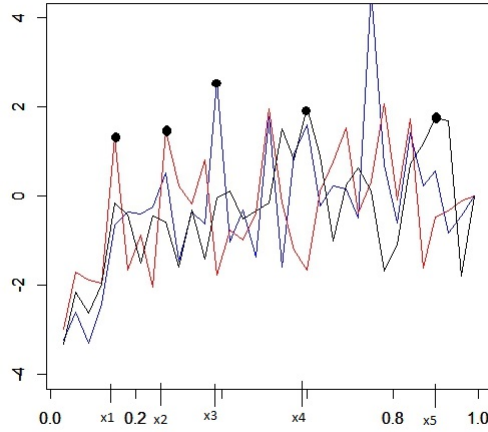
Postoji i jednostavnija varijanta ovog algoritma, međutim ona zahtjeva još jedan dodatan uvjet, $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} W(x) \leq C$. Brown-Resnickov proces i ekstremalni t proces ga ne zadovoljavaju, međutim Tukeyev max-stabilni proces ima svojstvo uniformne ograničenosti odozgo za $a < 0$ i to sa $C = \exp\left\{\frac{1}{2} \log(1-a) - \frac{b^2}{2a(1-a)}\right\}$. Dakle sljedeći algoritam daje egzaktnu simulaciju Tukey max-stabilnog procesa za $a < 0$ i približno točne uzorke za $0 < a < 1$.

1. Stavi $Z(x) = 0$ za sve $x \in X, E = 0, i = 1$
2. Simuliraj $\xi \sim \text{Exp}(1)$ i slučajnu realizaciju od $\{W_i(x), x \in X\}$
3. Tako dugo dok je $\inf_{x \in X} Z(x) \leq C/E$ radi
4. Promjeni E na $E + \xi_i$
5. Promjeni $Z(x)$ na maksimum po komponentama od $\{Z(x), W_i(x)/E\}$
6. Vрати Z .

3.3 Uvjetna simulacija

U geostatistici i sličnim područjima znanosti se nameće potreba za uvjetnim simulacijama. Za sada se to u raznim softverima postiže s Gaussovima modelima (npr. modeliranje topografije, Mandelbrot, 1982), dok upotreba max-stabilnih procesa još uvijek nije zaživjela. U nastavku ću objasniti ideju kako koristiti max-stabilne procese.

Neka je dano područje od interesa $X \subset \mathbb{R}^d$ i znamo vrijednosti procesa u k točaka. Zanima nas $Z(\cdot)$ uz uvjet da znamo da je $Z(x_1) = z_1, \dots, Z(x_k) = z_k, x_1, \dots, x_k \in X$. Za nastavak će biti potrebno uvesti još jedan pojam, scenarij pogađanja (engl. hitting scenario). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je skup točaka za koje imamo unaprijed definirane vrijednosti procesa konačan. Gotovo sigurno vrijedi da je svakoj od tih točaka pridružena jedna ekstremalna funkcija (vjerojatnost da dvije slučajne funkcije imaju jednaku vrijednost u jednoj točki je 0). Međutim može se dogoditi da je jedna ekstremalna funkcija doprinijela funkciji $Z(x)$ za 2 ili više vrijednosti od x . Naprimjer, neka postoje 3 ekstremalne funkcije i 5 točaka uvjeta x_1, \dots, x_5 .



Iz slike možemo vidjeti da je crvena ekstremalna funkcija "zaslužna" za x_1, x_2 , plava za x_3 , a crna za x_4, x_5 . Taj podatak možemo promatrati kao particiju i konciznije zapisati kao $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$. Svaku takvu particiju nazivamo scenarij pogađanja, a skup svih mogućih particija skupa $\{x_1, \dots, x_k\}$ označavamo s \mathcal{P}_k .

Za sljedeći rezultat koji nam omogućuje uvjetnu simulaciju max-stabilnih procesa bit će potrebna regularnost točkovnih procesa.

Definicija 3.3.1. Za funkcije f i g vrijedi da je $f(n) = o(g(n))$ za $n \rightarrow \infty$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konstanta N tako da je $|f(n)| \leq \varepsilon|g(n)|$, za svaki $n \geq N$.

Definicija 3.3.2. Točkovni proces Φ sa stacionarnim prirastima je regularan ako za $\delta > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{\Phi(t, t + \delta] > 1\} = o(\delta).$$

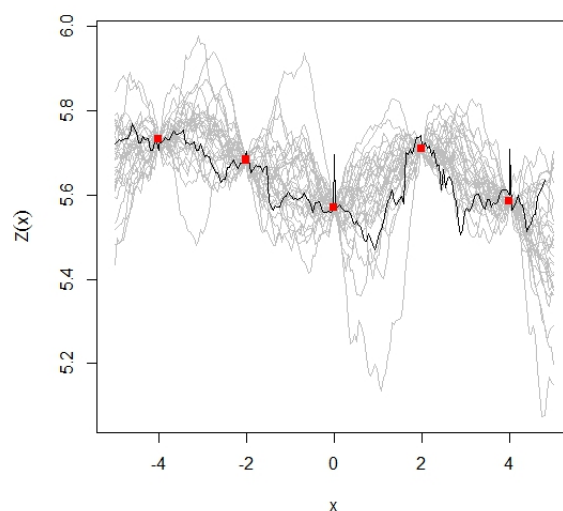
Pretpostavimo da je točkovni proces Φ regularan i neka je $(x, s) \in X^{k+m}$. Za $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \mathcal{P}_k$, $j = 1, \dots, l$ definiramo $I_j = \{i : x_i \in \tau_j\}$, $x_{\tau_j} = (x_i)_{i \in I_j}$, $z_{\tau_j} = (z_i)_{i \in I_j}$, $x_{\tau_j^c} = (x_i)_{i \notin I_j}$, $z_{\tau_j^c} = (z_i)_{i \notin I_j}$.

1. Nacrtamo slučajnu particiju $\theta \in \mathcal{P}_k$ s distribucijom $\pi_x(z, \tau) = \mathbb{P}\{\theta = \tau | Z(x) = z\}$.
2. Uz dano $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, nacrtamo l nezavisnih slučajnih vektora $\varphi_1^+(s), \dots, \varphi_l^+(s)$ iz distribucije $\mathbb{P}\{\varphi_j^+(s) \in dv | Z(x) = z, \theta = \tau\}$.
Također definiramo slučajni vektor $Z^+(s) = \max_{j=1, \dots, l} \varphi_j^+(s)$.

3. Nezavisno nacrtamo Poissonov točkovni proces $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ na $(0, \infty)$ s intenzitetom $\xi^{-2} d\xi$ i $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ nezavisne kopije od Y .

Također definiramo slučajni vektor $Z^-(s) = \max_{i \geq 1} \xi_i Y_i(s) 1_{\{\xi_i Y_i(x) < z\}}$.

Tada slučajni vektor $\tilde{Z}(s) = \max\{Z^+(s), Z^-(s)\}$ slijedi distribuciju od $Z(s)$ i to s uvjetom $Z(x) = z$.



Slika 3.5: Prikaz uvjetne simulacije korištenjem naredbe `condrmaxstab` iz paketa `SpatialExtremes` u R-u. Crnom bojom je nacrtani simulirani max-stabilni proces na kojem su u točkama $-4, -2, 0, 2, 4$ uzete njegove vrijednosti koje čine uvjete po kojima će biti simulirani svi ostali max-stabilni procesi naznačeni sivom bojom.

Bibliografija

- [1] A Baddeley, I Bárány i R Schneider, *Spatial point processes and their applications*, Springer Verlag **1892** (2007), 1.
- [2] L De Haan, *A spectral representation for max-stable processes*, The annals of probability (1984), 1194–1204.
- [3] AB Dieker i T Mikosch, *Exact simulation of Brown-Resnick random fields at a finite number of locations*, Extremes **18** (2015), br. 2, 301–314.
- [4] C Dombry, S Engelke i M Oesting, *Exact simulation of max-stable processes*, Biometrika **103** (2016), br. 2, 303–317.
- [5] C Dombry, Fr Éyi-Minko i M Ribatet, *Conditional simulation of max-stable processes*, Biometrika **100** (2012), br. 1, 111–124.
- [6] R Durrett, *Probability: theory and examples*, Cambridge university press, 2010.
- [7] M Falk, J Hüsler i R Reiss, *Laws of small numbers: extremes and rare events*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] A Ferreira i L de Haan, *Extreme value theory. An introduction*, 2006.
- [9] Z Kabluchko, *Spectral representations of sum-and max-stable processes*, Extremes **12** (2009), br. 4, 401–424.
- [10] Z Kabluchko, M Schlather i L De Haan, *Stationary max-stable fields associated to negative definite functions*, The Annals of Probability (2009), 2042–2065.
- [11] M Ribatet, C Dombry i M Oesting, *Spatial Extremes and Max-Stable Processes*, Extreme Value Modeling and Risk Analysis: Methods and Applications (2016), 179.
- [12] G Xu i M Genton, *Tukey max-stable processes for spatial extremes*, Spatial Statistics **18** (2016), 431–443.

Sažetak

Cilj ovog rada bio je prikazati osnovna teorijska svojstva max-stabilnih procesa. Osim fundamentalnog de Haanovog teorema uveden je i pojam ekstremalnih funkcija. Predstavljene su i neke poznatije parametarske familije (u jednodimenzionalnom i dvodimenzionalnom okruženju): Smithov, Schlatherov, Brown-Resnickov, ekstremalni t i Tukeyev proces. Od tih procesa izabrali smo Brown-Resnickov proces za detaljnije proučavanje zbog nekih njegovih zanimljivih svojstava. Uvedeni su pojmovi Brown-Resnick stacionarnosti te Brown-Resnick slučajnog polja. Osim toga objašnjena je veza s variogramom, miješanim moving maxima procesima, a i dokazan je teorem koji omogućuje prvi algoritam simulacije. Uz taj algoritam objašnjena su još dva, simulacija spektralnom mjerom koji se pokazao najefikasnijim i uvjetna simulacija koji se može koristiti u primjenama.

Summary

The aim of this thesis was to present basic theoretical properties of max-stable processes. Apart from the fundamental de Haan theorem we also introduced the term extremal functions. Also featured are some of the more familiar parametric families (in one-dimensional and two-dimensional environment): Smith, Schlather, Brown-Resnick, Extremal-t and Tukey process. From these processes we chose Brown-Resnick's process for a more detailed study because of his interesting features. The terms Brown-Resnick stationarity and Brown-Resnick random field were also introduced. In addition, we explained the relation with the variogram and mixed moving maxima processes. We proved a theorem which enables the first simulation algorithm. Along this algorithm, two more simulation algorithms were demonstrated. One that used spectral measure, which proved to be the most efficient one, and conditional simulation that can be used in applications.

Životopis

Rođen sam 12. lipnja 1993. u Varaždinu. Završio sam Osnovnu školu Martijanec i Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno-matematički smjer. Zatim sam 2012. upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2015. godine upisujem smjer Matematičke statistike.