SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Helena Kmetić

FUNKCIJE VJEROVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U mnogim situacijama, klasična teorija vjerojatnosti, koja počiva na Kolmogorovljevim aksiomima, nalazi primjenu i korisna je. Aksiome možemo opravdati na razne načine, na primjer preko frekvencijske interpretacije vjerojatnosti. U frekvencijskoj interpretaciji kroz ponovljene eksperimente koristimo relativne frekvencije kao motivaciju za aksiome. Međutim, nisu uvijek Kolmogorovljevi aksiomi rješenje i jedini pristup koji biramo u neznanju. Posebno u slučajevima kada neznanje interpretiramo kroz objektivno spoznavanje, tj. kroz znanje o činjenicama koje smo iskustveno stekli. Na takav slučaj možemo često naići u pravnoj praksi. Mnogo je slučajeva u kojima je klasičan pristup problematičan.

Uočeno je da klasična teorija vjerojatnosti ne razlikuje nedostatak uvjerenja i nevjericu. U ovom slučaju, nevjerica je vezana uz dokaze koji upućuju na negaciju pretpostavke, dok je nedostatak uvjerenja vezan uz nedostatak bilo kakvih dokaza. U sudskim procesima ovo postaje važan slučaj. Doista, ukoliko je oslobađajući dokaz u nekom sudskom slučaju odbačen, to utječe na manje vjerovanje u nevinost osumnjičenika, ali ne daje nikakvu indikaciju za krivnjom. Još jedan važan slučaj koji onemogućuje modeliranje klasičnim pristupom jest neznanje na razini individua kada imamo samo informaciju o cijeloj grupi. U sljedećem primjeru preuzetom iz [2] dat ćemo detaljniji opis ove situacije.

Primjer 0.0.1 (Problem zločina na otoku)**.** *Pretpostavimo da se dogodio zločin na otoku. To nas navodi na zaključak da je stanovnik otoka i počinitelj zločina. U nedostatku bilo kakve dodatne informacije, klasični pristup bio bi uniformno svakom stanovniku dodijeliti vjerojatnost da je on počinitelj. Međutim, to se ne poklapa s našim stvarnim znanjem o pojedincima. Mi zasigurno znamo da je počinitelj neki stanovnik otoka, ali nemamo nikakvo znanje o pojedincima zasebno. Stoga je nerazumno pridružiti pojedincima bilo kakvo vjerovanje o počinjenju zločina. Jedino što u tom slučaju možemo jest pridružiti vjerovanje težine* 1 *cijeloj populaciji otoka što razlikuje stanovnike otoka od svih individualaca koji se ne nalaze u toj populaciji. Naravno, pridruživanje stupnja vjerovanja* 1 *cijeloj populaciji, te stupnja vjerovanja* 0 *svakom članu posebno, nemoguće je u klasičnoj teoriji vjerojatnosti.*

Ovom primjeru ćemo se vratiti kasnije. Ono što ćemo vidjeti jest da rezultati naše teorije i klasične aksiomatske teorije, koja se oslanja na pridruživanje uniformnih vjerojatnosti u neznanju, vode različitim ishodima. Uniformno dodijeljena vjerojatnost nije ona koja predstavlja naše stvarno neznanje. Taj slučaj želimo zamijeniti stvarnim vjerojatnostima koje su u skladu s našim iskustvom i spoznajama.

Prethodni primjer navodi nas na zaključak da klasična aditivnost, $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ za sve događaje A, B takve da je $A \cap B = \emptyset$, nije pogodna kada vjerojatnost interpretiramo na temelju iskustva i spoznaja kao što je često slučaj u sudstvu. U takvim situacijama potrebno je modelirati nesigurnost na razini znanja koje smo stekli i ne postoji razlog zašto bi klasični pristup adekvatno opisivao naše znanje.

U sedamdesetim godinama prošlog stoljeća postojao je pokušaj Shafera [5] da razvije teoriju vjerojatnosti koja će biti izvan okvira klasične, aksiomatske teorije vjerojatnosti. On je uveo osnovne koncepte funkcija vjerovanja, koje su generalizacija vjerojatnosnih mjera. Funkcije vjerovanja nisu nužno aditivne i omogućuju nam fleksibilnost koju primjeri iz stvarnog života, poput gore spomenutog, zahtijevaju. U ovom radu obradit ćemo osnovne koncepte funkcija vjerovanja te uvesti račun funkcija vjerovanja. Teorija koju ćemo uvesti je temeljena na razini općeg znanja pojedinca ili znanja okoline. Stoga je ideja uvesti teoriju koja će omogućiti da stvarni događaji budu modelirani na temelju spoznaja, a ne na pretpostavkama.

S tehničkog gledišta, funkcije vjerovanja su generalizacija klasične teorije vjerojatnosti na način da je svaka vjerojatnosna mjera ujedno i funkcija vjerovanja. Stoga, ako je s obzirom na prirodu slučaja adekvatno koristiti klasičnu teoriju, funkcije vjerovanja to omogućuju, i mi ne gubimo ništa uvođenjem nove teorije. U cjelinama koje slijede pretpostavit ćemo da je skup mogućih ishoda konačan.

Ovaj rad organiziran je na sljedeći način. U Poglavlju 1 dat ćemo kratak pregled intuitivne pozadine donošenja odluka u nesigurnosti te u skladu s tim uvesti osnovne koncepte teorije funkcija vjerovanja – osnovna pridruživanja vjerovanja i njima pripadne funkcije vjerovanja.

U Poglavlju 2 pokazat ćemo svojstva spomenutih osnovnih pridruživanja vjerovanja i funkcija vjerovanja. Iskazat ćemo i dokazati teorem za karakterizaciju funkcija vjerovanja te dati primjere nekih funkcija vjerovanja. Na kraju poglavlja reći ćemo što je to slučaj totalnog neznanja.

U Poglavlju 3 uvest ćemo pojmove uvjetnog osnovnog pridruživanja vjerovanja i uvjetne funkcije vjerovanja te kroz primjere pokazati što se događa uvjetovanjem funkcija vjerovanja. Zatim ćemo izložiti intuitivne zahtjeve za nezavisnost te konačno definirati nezavisnost dva fenomena. Na kraju ćemo vidjeti što je to Dempsterovo pravilo kombiniranja funkcija vjerovanja i zašto je ono ponekad nezadovoljavajuće i doživljava kritike.

U Poglavlju 4 ćemo kroz primjer slučaja zločina u sudstvu i primjer igre u kockarnici prikazati kako primjenjujemo osnovne koncepte funkcija vjerovanja i dati usporedbu s primjenom klasične teorije vjerojatnosti. Na kraju ćemo uvesti pojam očekivanja u terminima teorije funkcija vjerovanja te spomenuti moguću nadogradnju te teorije.

Poglavlje 1

Model donošenja odluka u nesigurnosti

1.1 Intuitivna pozadina teorije donošenja odluka

U ovom poglavlju dat ćemo uvod u vjerojatnosne i statističke modele kod donošenja odluka u slučaju nesigurnosti. S obzirom da intuicija, interpretacija i motivacija nisu vrlo jednostavne, korstit ćemo neformalne termine uz vrlo malo matematičke semantike.

Zamislimo sistem SIST, pri čemu nam nije bitno koje je tehničke, ekološke, medicinske ili druge prirode. Općenito, takav sistem možemo opisati kao *crnu kutiju* pri čemu subjekt (korisnik) na ulaz u taj sistem može staviti ulazne vrijednosti ili podatke tako da, s obzirom na te vrijednosti, dobijemo izlazne vrijednosti (odgovor, reakciju, ...). Na primjer, uzmemo li pacijenta kao medicinski sistem, kao ulazne vrijednosti možemo imati medicinske tretmane ili lijekove, dok kao izlaz dobivamo različite reakcije organizma ili općenito zdravstveno stanje pacijenta. Iscrpan skup ulaznih vrijednosti koje su subjektu na raspolaganju označimo sa D, pri čemu elemente tog skupa nazivamo odluke i označavamo ih sa d_i. Drugim riječima, subjekt donosi odluku koja ulazi u sistem SIST s ciljem da utječe na njega u pozitivnom smislu, unaprijedi ga ili poboljša, odnosno optimizira odgovor sistema na izlazu. U najtrivijalnijim slučajevima, izlaz iz sistema je potpuno određen nekom odlukom na ulazu u sistem. Kako bismo pokrili općenitiji slučaj, pretpostavimo da odgovor sistema može biti različit za dvije iste ulazne vrijednosti te objasnimo tu situaciju s činjenicom da se sistem u trenutku donošenja odluke može nalaziti u različitim stanjima koja utječu na navedeni ishod. Iz tog razloga definirajmo sa S skup svih mogućih stanja u kojima se sistem SIST može nalaziti te dodatno pretpostavimo sljedeće:

(i) sistem se može nalaziti isključivo u jednom stanju iz skupa S,

(ii) izlaz iz sistema u potpunosti je određen parom (d, s), pri čemu je d odluka donesena od strane subjekta, a s je stanje u kojem se sistem nalazio u trenutku kada je odluka donesena.

Želimo li dati formalni opis izlaza iz sistema, možemo se ograničiti na slučaj gdje su izlazne vrijednosti numeričke (npr. profit). Izlazne vrijednosti će uvijek ovisiti o svojstvima i opisu samog sistema. Formalno možemo reći da postoji realna funkcija λ koja svakoj odluci $d \in D$ i svakom stanju sistema $s \in S$ pridružuje realnu vrijednost $\lambda(d, s)$.

1.2 Funkcije vjerovanja

Neka je S konačan prostor. Klasičan pristup prilikom donošenja odluka u neznanju je da svakom elementu iz $s \in S$ pridružimo nenegativnu vrijednost $p(s)$ na način da te vrijednosti u sumi daju 1, odnosno, postoji zakon razdiobe

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ p(s_1) & p(s_2) & \dots & p(s_n) \end{pmatrix}$$

takav da vrijedi $\sum_{s \in S} p(s) = 1$. Kada bismo htjeli primjeniti sličnu metodu prilikom određivanja krivca iz primjera navedenog u prethodnom poglavlju, rekli bismo da je vjerojatnost da počinitelj pripada podkupu A od S jednaka

$$\sum_{s \in A} p(s).$$

Težina $p(s)$ predstavlja stupanj vjerovanja, odnosno sigurnosti u neki od ishoda s, dok $\mathsf{P}(A)$ daje stupanj vjerovanja ili sigurnosti u ishod $s \in A$, za dani skup $A \subseteq S$. U klasičnoj teoriji vjerojatnosti [4] podskup A od S zovemo događaj, dok P označava vjerojatnost ostvarenja tog događaja. U nastavku ćemo definirati osnovno pridruživanje vjerovanja i funkciju vjerovanja. Vidjet ćemo da je razlika između vjerojatnosnih mjera i osnovnog pridruživanja vjerovanja u tome da potonje pridružuje težine podskupovima od S dok u klasičnoj teoriji vjerojatnosti težine pridružujemo jednočlanim podskupovima.

Definicija 1.2.1. *Neka je S konačan skup. Preslikavanje $m\colon \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ zovemo* osnovno pridruživanje vjerovanja *ukoliko zadovoljava sljedeća tri uvjeta:*

(m1) $m(\emptyset) = 0$,

(m2) $m(A) \geq 0$, *za svaki* $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$,

(m3) $\sum_{C \subseteq S} m(C) = 1$.

Sada vidimo da je m zapravo preslikavanje $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$. Kako smo već rekli, $p(s)$ interpretiramo kao vjerojatnost da će se kao ishod pojaviti $s \in S$, dok $m(C)$ interpretiramo kao vjerojatnost da će ishod slučajne varijable biti u skupu $C \subseteq S$. Preciznije, $m(C)$ reprezentira naše znanje o skupu C, ali ne i činjenice ili naša znanja o pojedinim elementima tog skupa. Možda nam se čini da ne postoji značajna razlika između osnovnih pridruživanja vjerovanja i vjerojatnosnih mjera P na izmjerivom prostoru, no to nije točno. Najvažnija razlika između vjerojatnosne mjere P i osnovnog pridruživanja vjerovanja m jest da masa podskupa C od S nije direktno povezana s masama jednočlanih podskupova, odnosno elemenata od S. Na primjer, ukoliko nemamo apsolutno nikakva znanja o elementima skupa S osim da ishod može biti iz tog skupa, tada možemo definirati $m(S) = 1$ i $m(A) = 0$, za svaki $A \subset S$. Dakle, ako želimo pridružiti vjerojatnost skupu sastvaljenom od unije elemenata a i b, ali ne i pojedinim elementima, tada definiramo $m(\{a\} \cup \{b\}) = c$ i $m(\{a\}) = m(\{b\}) = 0$. Naravno, moguće je pridružiti vrijednosti funkcije m pojedinim elementima skupa S i u tom slučaju nalazimo se, obzirom na svojstvo (*m3*) iz Definicije 1.2.1, u klasičnoj teoriji vjerojatnosti, u kojoj, bez obzira na naše eksperimentalno ili iskustveno znanje, svakom elementu skupa nastojimo pridružiti vjerojatnost da će se pojaviti kao ishod, odnosno da jest uzrok nekog događaja. U teoriji funkcija vjerovanja m možemo gledati kao analogon od p u klasičnoj teoriji vjerojatnosti. Željeli bismo definirati analogon vjerojatnosnoj mjeri P i to će biti upravo *funkcija vjerovanja*. Kako bismo pridružili stupanj vjerovanja skupu $A \subseteq S$, uzimat ćemo u obzir sve $C \subseteq A$, što su događaji koji impliciraju pojavljivanje događaja A. Dakle, stupanj vjerovanja koji pridružujemo skupu A jest suma masa svih podskupova od A. To možemo interpretirati na sljedeći način: prilikom svjedočenja u sudstvu, kažemo da je vjerovanje u dokaz A jednako sumi vjerovanja dokazima koji impliciraju A.

Definicija 1.2.2. *Neka je S konačan skup i neka je dano osnovno pridruživanje vjerovanja $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$. Njemu pripadna* funkcija vjerovanja *jest $Bel\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ definirana sa*

$$Bel(A) = \sum_{C \subseteq A} m(C)$$

za svaki $A \subseteq S$.

Dakle, funkcija vjerovanja od A jest stupanj vjerovanja u A, što je jednako ukupnom vjerovanju u dokaze koji impliciraju pojavljivanje od A.

Skup S na jednoj strani i njegovi jednočlani podskupovi na drugoj strani su dva ekstremna stanja znanja koja respektivno reprezentiraju totalno neznanje (kada ne znamo ništa više od toga da se ishod nalazi u skupu S) i potpuno znanje (kada točno znamo koji element od S jest ishod). Prazan skup reprezentira postojanje kontradikcije i stoga ima vjerovanje 0.

Primjer 1.2.3 (Vjerojatnosne mjere)**.** *Svaka vjerojatnosna mjera jest funkcija vjerovanja. Zaista, neka je $\mathsf{P} : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ vjerojatnosna mjera i definirajmo $m(\{s\}) = \mathsf{P}(\{s\})$, za sve $s \in S$, te $m(C) = 0$ za sve C takve da je $|C| > 1$. Tada imamo:*

$$Bel(A) = \sum_{a \in A} m(\{a\}) = \sum_{a \in A} \mathsf{P}(\{s\}) = \mathsf{P}(A)$$

za sve $A \subseteq S$.

Ukoliko je $m(C) > 0$ *za neke* C *za koje je* $|C| > 1$, *tada* Bel *nije vjerojatnosna mjera jer nije aditivna. Naime, za neprazne i disjunktne skupove* $A, B \subseteq S$ *takve da je* $A \cup B = C$ *vrijedi:*

$$Bel(A \cup B) > Bel(A) + Bel(B).$$

Dakle, funkcije vjerovanja općenito nisu aditivne.

Pretpostavimo slučaj suđenja u kojem osumnjičenoj osobi želimo dodijeliti određenu vjerojatnost da je nevina, odnosno kriva. Tada je skup svih mogućih ishoda suđenja jednak $S = \{nevin, kriv\}$. Ukoliko je jedino znanje koje u tom trenutku imamo dokaz težine p da je osumnjičenik nevin, tada slijedi $m(\{nevin\}) = p$, $m(\{kriv\}) = 0$ i

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{C \subseteq S} m(C) \\ &= m(\{nevin\}) + m(\{kriv\}) + m(\{nevin, kriv\}) \\ &= p + 0 + m(S), \end{aligned}$$

iz čega dobivamo $m(S) = 1 - p$. Uočimo da je vjerojatnost da je osumnjičeni krivac u ovom slučaju jednaka 0, a ne 1 manje vjerojatnost da je osumnjičeni nevin. Pripadna funkcija vjerovanja Bel poprima sljedeće vrijednosti: $Bel(\{kriv\}) = m(\{kriv\}) = 0$, $Bel(\{nevin\}) = m(\{nevin\}) = p$ i

$$\begin{aligned} Bel(S) &= m(\{nevin\}) + m(\{kriv\}) + m(S) \\ &= p + 0 + (1 - p) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Poglavlje 2

Karakterizacija i svojstva funkcija vjerovanja

2.1 Svojstva osnovnih pridruživanja vjerovanja i funkcija vjerovanja

Neka su m_1, m_2 osnovna pridruživanja vjerovanja takva da vrijedi $m_1 = m_2$, to jest da vrijedi $m_1(A) = m_2(A)$, za svaki $A \subseteq S$. Tada iz definicije 1.2.2 slijedi da je $Bel_{m_1} = Bel_{m_2}$, gdje Bel_m označava fukciju vjerovanja određenu osnovnim pridruživanjem vjerovanja m. S druge strane, neka su m_1, m_2 osnovna pridruživanja vjerovanja takva da je $m_1 \neq m_2$, odnosno takve da postoji $A \subseteq S, A \neq \emptyset$ za koji vrijedi $m_1(A) \neq m_2(A)$ i $m_1(B) = m_2(B)$, za svaki $B \subseteq S$, $|B| < |A|$. Tada je

$$Bel_{m_1}(A) = \sum_{B \subseteq A} m_1(B) = \sum_{B \subset A} m_1(B) + m_1(A) \neq \sum_{B \subset A} m_2(B) + m_2(A) = \sum_{B \subseteq A} m_2(B) = Bel_{m_2}(A).$$

Vidjeli smo već da funkcije vjerovanja općenito nisu aditivne. Važno svojstvo funkcija vjerovanja jest superaditivnost. Pretpostavimo da je S konačan skup i da je $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ skup podskupova od S koji su svi u parovima disjunktni, tj. da za bilo koje $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, vrijedi $T_i \cap T_j = \emptyset$. Tada je

$$Bel\left(\bigcup_{T \subseteq S} T\right) \geq \sum_{T \subseteq S} Bel(T).$$

Naime, nejednakost dolazi iz činjenice da je skup svih podskupova unije veći ili jednak skupu podskupova od k međusobno disjunktnih skupova i da se potonji nalazi u skupu podskupova unije, dok obratno ne vrijedi. Korištenjem ove interpretacije i definicije funkcije vjerovanja dobivamo superaditivnost. Superaditivnost možemo vidjeti i u Primjeru 1.2.3.

U nastavku ćemo razmotriti nekoliko rezultata iz [5] koji će nas voditi dvama važnim teoremima za karakterizaciju funkcija vjerovanja.

Lema 2.1.1. *Neka je A konačan skup. Tada vrijedi:*

$$\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|} = \begin{cases} 1 & \textit{ako je } A = \emptyset, \\ 0 & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|} &= (-1)^{|\emptyset|} + \sum_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}(-1)^{|\{a_i\}|} + \sum_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}}(-1)^{\left|\{a_i,a_j\}\right|} + \ldots + (-1)^{|A|} \\ &= 1 + (-1)\binom{n}{1} + (-1)^2\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Ovdje je $\binom{n}{k}$ broj k-članih podskupova n-članog skupa. Iz binomnog teorema znamo da je

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k,$$

iz čega slijedi da je gornja suma jednaka 0. Naime, za $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ vrijedi

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

U slučaju kada je $A = \emptyset$, kardinalnost svakog skupa $B \subseteq A$ jednaka je 0 i tada vrijedi

$$\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|} = \sum_{B\subseteq A}(-1)^0 = 1.$$

□

Lema 2.1.2. *Neka je A konačan skup i neka je $B \subseteq A$. Tada vrijedi*

$$\sum_{\substack{C \\ B\subseteq C\subseteq A}}(-1)^{|C|} = \begin{cases} (-1)^{|A|} & \textit{ako je } A = B, \\ 0 & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{C \\ B\subseteq C\subseteq A}} (-1)^{|C|} &= \sum_{D\subseteq (A\setminus B)} (-1)^{|B\cup D|} \\
&= \text{za } D \subseteq (A \setminus B) \text{ je } B \cap D = \emptyset \\
&= (-1)^{|B|} \sum_{D\subseteq (A\setminus B)} (-1)^{|D|} \\
&= \begin{cases} (-1)^{|B|} & \text{ako je } A = B, \\ (-1)^{|B|} \sum_{D\subseteq (A\setminus B)} (-1)^{|B|} & \text{inače.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Tvrdnja slijedi primjenom Leme 2.1.1.

□

Lema 2.1.3. *Neka je S konačan skup i neka su f i g preslikavanja definirana na skupu svih podskupova od S, tj. na $\mathcal{P}(S)$, s vrijednostima u skupu realnih brojeva. Tada je*

$$f(A) = \sum_{B\subseteq A} g(B) \tag{2.1}$$

za sve $A \subseteq S$, ako i samo ako vrijedi

$$g(A) = \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A\setminus B|} f(B) \tag{2.2}$$

za sve $A \subseteq S$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (2.1) za sve $A \subseteq S$. Tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A\setminus B|} f(B) &= (-1)^{|A|} \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|B|} f(B) \\
&= (-1)^{|A|} \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|B|} \sum_{C\subseteq B} g(C) \\
&= (-1)^{|A|} \sum_{C\subseteq A} g(C) \sum_{\substack{B \\ C\subseteq B\subseteq A}} (-1)^{|B|} \\
&= (-1)^{|A|} g(A) (-1)^{|A|} \\
&= g(A).
\end{aligned}$$

Pritom smo, u pretposljednjoj jednakosti, koristili Lemu 2.1.2 za $C = A$.

Obratno, pretpostavimo da (2.2) vrijedi za sve $A \subseteq S$. Tada primjenom Leme 2.1.2 dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{B\subseteq A} g(B) &= \sum_{B\subseteq A}\sum_{C\subseteq B}(-1)^{|B\setminus C|} f(C) \\
&= \sum_{C\subseteq A}(-1)^{|C|} f(C) \sum_{\substack{B \\ C\subseteq B\subseteq A}} (-1)^{|B|} \\
&= (-1)^{|A|} f(A)\,(-1)^{|A|} \\
&= f(A).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.4. *Neka je S konačan skup te neka su f i g preslikavanja definirana na $\mathcal{P}(S)$ s vrijednostima u skupu realnih brojeva. Tada*

$$f(A) = \sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|+1} g(B) \tag{2.3}$$

vrijedi za sve $A \subseteq S$, ako i samo ako vrijedi

$$g(A) = \sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|+1} f(B) \tag{2.4}$$

za sve $A \subseteq B$.

Dokaz. Neka je zadovoljena jednakost (2.3) za sve $A \subseteq S$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|+1} f(B) &= \sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|+1}\sum_{D\subseteq B}(-1)^{|D|+1} g(D) \\
&= \sum_{D\subseteq A}(-1)^{|D|}(-1)\, g(D) \sum_{\substack{B \\ D\subseteq B\subseteq A}} (-1)^{|B|}(-1) \\
&= (-1)^{|A|} g(A)\,(-1)^{|A|} \\
&= g(A).
\end{aligned}$$

Pretposljednja jednakost slijedi stavljanjem $D = B$ i primjenom Leme 2.1.2. Obrat slijedi analogno, zamjenom uloga funkcija f i g i primjenom Leme 2.1.2. □

Lema 2.1.5. *Neka je S konačan skup i neka su f i g preslikavanja definirana na $\mathcal{P}(S)$ s vrijednostima u skupu realnih brojeva. Tada*

$$f(A) = \sum_{B\subseteq A^c}(-1)^{|B|} g(B) \tag{2.5}$$

vrijedi za sve $A \subseteq S$*, ako i samo ako vrijedi*

$$g(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} f(B^c) \tag{2.6}$$

za sve $A \subseteq S$.

Dokaz. Neka je h preslikavanje na $\mathcal{P}(S)$ definirano sa $h(A) = -f(A^c)$ za sve $A \subseteq S$. Pretpostavimo da za sve $A \subseteq S$ vrijedi $f(A) = \sum_{B \subseteq A^c} (-1)^{|B|} g(B)$. Tada je

$$\begin{aligned} h(A) = -f(A^c) &= -\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} g(B) \\ &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} g(B). \end{aligned}$$

Primjenom Leme 2.1.4 vrijedi da je

$$\begin{aligned} g(A) &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} h(B) \\ &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} (-1) f(B^c) \\ &= \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} f(B^c), \qquad \text{za svaki } A \subseteq S. \end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $A \subseteq S$ vrijedi jednakost (2.6) i da je $h(A) = -f(A^c)$. Tada je

$$g(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} f(B^c) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} h(B)$$

za sve $A \subseteq S$. Koristeći Lemu 2.1.4 slijedi:

$$h(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} g(B),$$

što je po pretpostavci jednako $-f(A^c)$ i iz čega direktno slijedi tvrdnja:

$$f(A) = (-1) \sum_{B \subseteq A^c} (-1)^{|B|} (-1) g(B) = \sum_{B \subseteq A^c} (-1)^{|B|} g(B).$$

□

Sada smo spremni iskazati i dokazati dva važna rezultata o karakterizaciji funkcija vjerovanja.

Teorem 2.1.6. *Neka je S konačan skup. Preslikavanje $Bel : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ je funkcija vjerovanja ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(B1) $Bel(\emptyset) = 0$,

(B2) $Bel(S) = 1$,

(B3) za svaki $n \in \mathbb{N}$ i kolekciju $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupova od S vrijedi

$$Bel(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Dokaz. Neka je $Bel : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ funkcija vjerovanja. Definicija 1.2.2 i definicija njoj pripadnog pridruživanja vjerovanja m direktno povlače svojstva (B1) i (B2):

$$Bel(\emptyset) = \sum_{C \subseteq \emptyset} m(C) = m(\emptyset) = 0$$

i

$$Bel(S) = \sum_{C \subseteq S} m(C) = 1.$$

Da bismo pokazali svojstvo (B3), uzmimo $n \in \mathbb{N}$ i skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, i neka je $I(B) = \{i : 1 \leq i \leq n,\ B \subseteq A_i\}$ za svaki $B \subseteq S$. Tada slijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \sum_{B \subseteq (\cap_{i \in I} A_i)} m(B) \\
&= \sum_{\substack{B \subseteq S \\ I(B) \neq \emptyset}} m(B) \sum_{\substack{I \subseteq I(B) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \\
&= \sum_{\substack{B \subseteq S \\ I(B) \neq \emptyset}} m(B) \left((-1) \sum_{\substack{I \subseteq I(B) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|}\right) \\
&= \sum_{\substack{B \subseteq S \\ I(B) \neq \emptyset}} m(B) \left((-1) \sum_{I \subseteq I(B)} (-1)^{|I|} + (-1)^{|\emptyset|}\right) \\
&= \sum_{\substack{B \subseteq S \\ I(B) \neq \emptyset}} m(B) \left(1 - \sum_{I \subseteq I(B)} (-1)^{|I|}\right).
\end{aligned}$$

Lema 2.1.1 povlači da je gornji izraz jednak:

$$\sum_{\substack{B\subseteq S\\ I(B)\neq\emptyset}} m(B) = \sum_{\substack{B\subseteq S,\\ B\subseteq A_i\\ \text{za barem jedan } i}} m(B) \leq \sum_{\substack{B\subseteq S,\\ B\subseteq \cup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} A_i}} m(B) = Bel(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n).$$

Obratno, neka je dana funkcija $Bel : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ koja zadovoljava svojstva (B1), (B2) i (B3) i definirajmo funkciju $m : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ sa

$$m(A) = \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A\setminus B|}\, Bel(B) \quad \text{za svaki } A \subseteq S. \tag{2.7}$$

Kako su preslikavanja m i Bel definirana na istom skupu, iz (2.7) i Leme 2.1.3 slijedi

$$Bel(A) = \sum_{B\subseteq A} m(B), \text{ za svaki } A \subseteq S. \tag{2.8}$$

Da bismo pokazali kako je ovako definirano preslikavanje Bel funkcija vjerovanja, potrebno je pokazati da je preslikavanje m definirano sa (2.7) osnovno pridruživanje vjerovanja, odnosno da zadovoljava sva tri uvjeta iz Definicije 1.2.1. Svojstvo (B1) povlači

$$m(\emptyset) = \sum_{B\subseteq\emptyset} (-1)^{|\emptyset\setminus B|} Bel(B) = Bel(\emptyset) = 0,$$

dok svojstvo (B2) povlači

$$\sum_{A\subseteq S} m(A) = Bel(S) = 1.$$

Kako bismo pokazali da je $m(A) \geq 0$ za sve $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$, pretpostavimo da je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačan skup različitih elemenata. Stavimo da je $A_i = A \setminus \{a_i\}$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dakle, $A_i \subset A$, za svaki i. Koristeći prethodno definirane skupove A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, bilo koji skup $B \subseteq A$ možemo prikazati kao presjek odgovarajućih skupova A_i, točnije, ukoliko je $A \setminus B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, tada je $B = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}
m(A) &= \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A\setminus B|}\, Bel(B)\\
&= (-1)^{|A\setminus A|}\, Bel(A) + \sum_{B\subset A} (-1)^{|A\setminus B|}\, Bel(B)\\
&= Bel(A) + \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)\,(-1)^{|I|+1}\, Bel\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big),
\end{aligned}$$

gdje I kao podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$, $I \neq \emptyset$, reprezentira kardinalnost skupova $A \setminus B$ za $B \subset A$, dok je $\bigcap_{i \in I} A_i$ uz navedene uvjete zapravo skup B.

Svojstvo (B3) povlači da je $m(A) \geq 0$, za svaki $A \subseteq S$. Dakle, m je osnovno pridruživanje vjerovanja, pa je stoga i Bel definirana sa $Bel(A) = \sum_{C \subseteq A} m(C)$, funkcija vjerovanja. □

Napomena 2.1.7. *Da bismo pokazali kako je svojstvo* $(B3)$ *prethodnog teorema jače od superaditivnosti, pogledajmo sljedeći primjer za* $n = 2$. *Neka je* $S = \{a, b, c\}$ *i stavimo da je* $f(S) = f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = 1$, $f(\{b\}) = \frac{1}{2}$ *i* $f(C) = 0$ *za sve ostale skupove* C, *podskupove od* S. *Očito, za bilo koju kombinaciju disjunktnih podskupova od* S *vrijedi superaditivnost od* f. *Međutim, svojstvo* $(B3)$ *nije zadovoljeno:*

$$1 = f(S) \ngeq f(\{a, b\}) + f(\{b, c\}) - f(\{b\}) = \frac{3}{2}.$$

Teorem 2.1.6 možemo gledati kao alternativnu definiciju funkcije vjerovanja, koja nije izvedena pomoću osnovnog pridruživanja vjerovanja. Korištenjem tog teorema direktno možemo provjeriti je li neko preslikavanje $f : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ funkcija vjerovanja ili nije. Sljedeći rezultat omogućuje nam da izvedemo pripadno osnovno pridruživanje vjerovanja dane funkcije vjerovanja.

Teorem 2.1.8. *Neka je* $Bel\colon \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ *funkcija vjerovanja dana osnovnim pridruživanjem vjerovanja* $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$. *Tada je*

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} Bel(B)$$

za sve $A \subseteq S$.

Dokaz. Kako je po definiciji $Bel(A) = \sum_{C \subseteq A} m(C)$, $\forall A \subseteq S$ i kako su obje funkcije Bel i m definirane na $\mathcal{P}(S)$, Lema 2.1.3 povlači da je

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} Bel(B)$$

za sve $A \subseteq S$. □

2.2 Neki specifični slučajevi funkcija vjerovanja

U ovom odjeljku obradit ćemo neke specijalne slučajeve funkcija vjerovanja i njima pripadnih osnovnih pridruživanja vjerovanja osmišljenih u knjizi [3]. Stoga pretpostavimo da je S konačan skup i neka je $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ osnovno pridruživanje vjerovanja.

Skup $A \subseteq S$ zovemo *žarišni* element preslikavanja m ukoliko je $m(A) > 0$. Osnovno pridruživanje vjerovanja m_S zovemo *prazno* pridruživanje ukoliko je $m_S(S) = 1$ i $m_S(A) = 0$ za svaki $A \subset S$. U tom slučaju pripadna funkcija vjerovanja jednaka je $Bel_{m_S}(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} 0 = 0$, za svaki $A \subset S$ dok je $Bel_{m_s}(S) = 1$ pa takvu funkciju vjerovanja zovemo *prazna* funkcija vjerovanja na S. Kažemo da je osnovno pridruživanje vjerovanja *singularno* u $A \subseteq S$ i pišemo ga m_A ukoliko je $m_A(A) = 1$ i $m_A(B) = 0$ za svaki $B \subseteq S$, $B \neq A$. Stoga je prazno pridruživanje vjerovanja m_s singularno u S. *Apsolutno nedosljedno* osnovno pridruživanje vjerovanja jest preslikavanje $m_\emptyset$ singularno u praznom skupu $\emptyset$. U tom slučaju vrijedi $m_\emptyset(A) = 0$, za svaki $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$. Kažemo da je osnovno pridruživanje vjerovanja m *djelomično nedosljedno* ukoliko je $0 < m(\emptyset) < 1$, i *apsolutno dosljedno* u slučaju kada je $m(\emptyset) = 0$. Primjetimo da apsolutno i djelomično nedosljedna osnovna pridruživanja vjerovanja ne zadovoljavaju svojstvo $(m1)$ iz Definicije 1.2.1, ali ih svejedno uključujemo u teoriju koju razmatramo.

Neka je $\epsilon \in [0, 1]$ proizvoljan realan broj. Osnovno pridruživanje vjerovanja $m_{A,\epsilon}$ na $\mathcal{P}(S)$ zovemo *ϵ-kvazisingularno u* $A \subseteq S$ ukoliko vrijedi $m_{A,\epsilon}(A) = 1 - \epsilon$, $m_{A,\epsilon}(S) = \epsilon$ i $m_{A,\epsilon}(B) = 0$, za svaki $B \subset S, B \neq A$. Lako se vidi da je $m_A = m_{A,0}$ i $m_S = m_{A,1}$. Ukoliko je m osnovno pridruživanje vjerovanja takvo da su svi jednočlani podskupovi od S žarišni elementi, tj. da za svaki $a \in S$ vrijedi $m(\{a\}) > 0$, i $m(A) = 0$ za sve $A \subseteq S$ takve da je $|A| \neq 1$, tada je inducirana funkcija vjerovanja Bel_m vjerojatnosna mjera:

(i) $Bel_m(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$,

(ii) $Bel_m(S) = \sum_{B \subseteq S} m(B) = \sum_i m(\{a_i\}) = 1$,

(iii) za međusobno disjunktne skupove $E_i \subseteq S$, $i \in I$ vrijedi

$$Bel_m\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{B \subseteq (\cup_{i \in I} E_i)} m(B) = \sum_{i \in I} \sum_{B \subseteq E_i} m(B) = \sum_{i \in I} Bel_m(E_i).$$

Specijalno, za sve $A, B \subseteq S$ takve da je $A \cap B = \emptyset$ vrijedi da je

$$\begin{aligned} Bel_m(A \cup B) &= \sum_{C \subseteq (A \cup B)} m(C) = \sum_{s \in (A \cup B)} m(\{s\}) \\ &= \sum_{s \in A} m(\{s\}) + \sum_{s \in B} m(\{s\}) \\ &= Bel_m(A) + Bel_m(B). \end{aligned}$$

Neka je S konačan skup. Tada definiramo *nužnu mjeru* na S kao preslikavanje $N : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ za koje vrijedi:

(i) $N(\emptyset) = 0$,

(ii) $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$ za sve $A, B \subseteq S$.

Kažemo da je nužna mjera *normalizirana* ako je $N(S) = 1$. Za žarišne elemente osnovnog pridruživanja vjerovanja m kažemo da su *ugniježdeni* ukoliko za sve $A, B \subseteq S$ takve da je $m(A) > 0$ i $m(B) > 0$ vrijedi $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$.

2.3 Funkcije vjerovanja i slučaj totalnog neznanja

U ovom odjeljku spomenut ćemo jednu od najvažnijih razlika između teorije funkcija vjerovanja i klasične teorije vjerojatnosti, točnije, razliku između funkcija vjerovanja i vjerojatnosnih mjera u slučaju totalnog neznanja.

Bayesovski pristup kod donošenja odluka u neznanju zahtijeva iskustveno poznavanje određenih događaja na skupu S te vjerojatnost njihovog pojavljivanja, koju također stječemo kroz iskustvo. Ukoliko nam je ta distribucija nepoznata, a skup S je konačan skup stanja, Bayesovski pristup često uključuje sljedeći pristup: nedostatak znanja o pojedinim događajima iz skupa S zanemarujemo i svakom od mogućih događaja uniformno dodjeljujemo vjerojatnst. Dakle, u neznanju primjenjujemo metodu pridruživanja vjerojatnosti na način da svakom $s \in S$ dodijelimo jednaku vjerojatnost $1/|S|$.

U slučaju funkcija vjerovanja, uniformna distribucija na konačnom skupu S može biti definirana pomoću osnovnog pridruživanja vjerovanja m_{eq} na S na način da je $m_{eq}(\{s\}) = 1/|S|$ za svaki jednočnani skup $\{s\} \subseteq S$ i posljedično, $m_{eq}(A) = 0$ za svaki $A \subseteq S$, $|A| \neq 1$. Međutim, u slučaju totalnog neznanja bolje je definirati prazno osnovno pridruživanje vjerovanja m_S sa $m_S(S) = 1$ i $m_S(A) = 0$ za sve $A \subset S$. Ovako definirano osnovno pridruživanje vjerovanja odgovara slučaju kada nemamo nikakvih argumenata, čak niti onih stohastičke prirode, u slučaju hipoteze da određeni događaj pripada odgovarajućem podskupu od S. Jedina činjenica koju u tom slučaju uzimamo kao sigurnu, jest da skup S zaista predstavlja iscrpan skup svih mogućih stanja u kojima se neki sistem može nalaziti. S druge strane, osnovno pridruživanje vjerovanja m_{eq} opisuje situaciju kada su težine koje pridružujemo pojedinačnim elementima skupa S jednake za vrijednosti $s \in S$, ili se ne razlikuju međusobno značajno. Iz povijesnih razloga klasična teorija vjerojatnosti funkcionira na način da se u neznanju svim elementima nekog skupa uniformo dodijeli stupanj vjerovanja. Vjerojatnosni modeli temeljeni su na igrama i okladama te procjeni da je vjerojatnost, npr. pojavljivanja glave kod bacanja simetričnog novčića, jednaka $1/2$ što je također jednako vjerojatnosti pojavljivanja pisma. Naime, ti rezultati proizašli su iz eksperimentalnih metoda koje su pokazale da se u približno polovini slučajeva kao ishod pojavila glava. Slučaj dijeljenja novčića prilikom bacanja na način da obje strane padnu istovremeno, ili slučaj nestanka novčića prilikom bacanja, izbjegnuti su s obzirom na eksperimentalno prihvaćene mogućnosti prilikom samog bacanja novčića. U teoriji funkcija vjerovanja slučaj nestanka novčića možemo definirati na način da stavimo $m(\emptyset) > 0$.

Poglavlje 3

Uvjetovanje, nezavisnost i kombiniranje funkcija vjerovanja

3.1 Uvjetne funkcije vjerovanja

Sada kada smo uveli definiciju i osnovna svojstva funkcija vjerovanja, možemo proučiti kako se funkcije vjerovanja mijenjaju kada raspolažemo dodatnim informacijama vezanim uz slučaj koji promatramo.Vratimo li se na Primjer 0.0.1, pitamo se kako modelirati slučaj zločina kada raspolažemo dodatnom informacijom o spolu krivca. U ovom odjeljku objasnit ćemo kako se funkcije vjerovanja mijenjaju uz dodatne informacije ili pod određenim hipotezama te ćemo za razumijevanje uvjetovanja koristiti osnovne koncepte uvedene u [1].

Pravilo koje predlažemo je sljedeće. Pretpostavimo da je dano osnovno pridruživanje vjerovanja m i njemu pripadna funkcija vjerovanja Bel. Željeli bismo postojeća znanja uvjetovati s obzirom na dodatni događaj ili znanje H.

Definicija 3.1.1. *Neka su A i B događaji na skupu mogućih ishoda S. Kažemo da je A konzistentan s B ukoliko je $A \cap B \neq \emptyset$. U suprotnom kažemo da su A i B nekonzistentni.*

U slučaju kada su A i H konzistentni težina dokaza $m(A)$ postaje težina dokaza za $A \cap H$. Kada su A i H nekonzistentni, tada nova težina dokaza za A postaje nula. Nadalje, želimo skalirati težine tako da u sumi daju 1. To je moguće ukoliko postoji dokaz pozitivne težine koji je konzistentan s H. To nas navodi na sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.2. *Neka je $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ osnovno pridruživanje vjerovanja i neka je Bel njemu pripadna funkcija vjerovanja. Za $H \subseteq S$ takav da je $Bel(H^c) \neq 1$ definiramo uvjetno osnovno pridruživanje vjerovanja $m_H\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ sa*

$$m_H(A) := \frac{\sum_{B\cap H=A} m(B)}{1 - \sum_{B\cap H=\emptyset} m(B)} \tag{3.1}$$

za $A \neq \emptyset$ i još stavljamo $m_H(\emptyset) = 0$.

Pripada uvjetna funkcija vjerovanja Bel_H proizlazi iz osnovnog pridruživanja vjerovanja m_H na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Bel_H(A) &= \sum_{B \subseteq A} m_H(B) \\ &= \frac{\sum_{\emptyset \neq C \cap H \subseteq A} m(C)}{1 - \sum_{C \cap H = \emptyset} m(C)} \\ &= \frac{\sum_{C \subseteq A \cup H^c} m(C) - \sum_{C \subseteq H^c} m(C)}{1 - \sum_{C \subseteq H^c} m(C)} \\ &= \frac{Bel(A \cup H^c) - Bel(H^c)}{1 - Bel(H^c)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

za sve A i H takve da je $Bel(H^c) \neq 1$. Interpretiranje $m(A)$ kao stupanj znanja o A prirodno vodi ka vjerojatnosnoj mjeri P na familiji podskupova partitivnog skupa od S. Naime, za $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ pišemo:

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A).$$

Vjerovanje u A je sada vjerojatnost skupova koji impliciraju pojavljivanje A, tj.

$$Bel(A) = \mathsf{P}(\{C \in \mathcal{P}(S) : C \subseteq A\}).$$

S obzirom na upravo uvedeno shvaćanje m i Bel, jednakosti (3.1) i (3.2) možemo pisati ovako:

$$\begin{aligned} m_H(A) &= \frac{\sum_{C \cap H = A} m(C)}{\sum_{C \cap H \neq \emptyset} m(C)} \\ &= \frac{\mathsf{P}(\{C \subseteq S : C \cap H = A\})}{\mathsf{P}(\{C \subseteq S : C \cap H \neq \emptyset\})} \\ &= \mathsf{P}(\{C \subseteq S : C \cap H = A\} \mid \{C \subseteq S : C \cap H \neq \emptyset\}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} Bel_H(A) &= \sum_{B \subseteq A} m_H(B) \\ &= \sum_{B \subseteq A} \mathsf{P}(\{C \subseteq S : C \cap H = B\} \mid \{C \subseteq S : C \cap H \neq \emptyset\}) \\ &= \mathsf{P}(\{C \subseteq S : C \cap H \subseteq A\} \mid \{C \subseteq S : C \cap H \neq \emptyset\}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Primjer 3.1.3. *U specijalnom slučaju kada je $Bel = \mathsf{P}$ vjerojatnosna mjera, odnosno kada svakom elementu skupa mogućih ishoda S pridružujemo težinu veću od nula, uvjetna funkcija vjerovanja jednaka je uvjetnoj vjerojatnosti u klasičnoj teoriji:*

$$Bel_H(A) = \frac{\sum_{s \in A \cap H} m(s)}{\sum_{s \in H} m(s)} = \frac{\mathsf{P}(A \cap H)}{\mathsf{P}(H)} = \mathsf{P}(A|H),$$

za sve $A \subseteq S$ i H takve da je $1 - Bel(H^c) = Bel(H) = \mathsf{P}(H) > 0$.

Primjer 3.1.4. *Pretpostavimo da imamo sudski slučaj u kojem je osumnjičena obitelj, dvoje roditelja i njihova kći, o kojem znamo da postoji mnogo dokaza koji upućuju na to da su roditelji počinitelji zločina te malo dokaza koji upućuju na to da je počinitelj njihova kći. O roditeljima ponaosob ne znamo ništa. Dakle, za skup $S = \{otac, majka, kći\}$, pripadno osnovno pridruživanje vjerovanja može biti jednako $m(\{otac, majka\}) = \frac{9}{10}$ i $m(\{kći\}) = \frac{1}{10}$. Uz hipotezu H da je počinitelj žena, tj. $H = \{majka, kći\}$, dokazi protiv roditelja postaju dokaz protiv majke. Zaista,*

$$m_H(\{otac, majka\}) = \frac{\sum_{B \cap H = \{otac, majka\}} m(B)}{1 - \sum_{B \cap H = \emptyset} m(B)} = 0,$$

$$m_H(\{majka\}) = \frac{\sum_{B \cap H = \{majka\}} m(B)}{1 - \sum_{B \cap H = \emptyset} m(B)} = m(\{otac, majka\}) = \frac{9}{10},$$

dok dokazi protiv kćeri imaju istu težinu:

$$m_H(\{kći\}) = \frac{\sum_{B \cap H = \{kći\}} m(B)}{1 - \sum_{B \cap H = \emptyset} m(B)} = m(\{kći\}) = \frac{1}{10}.$$

Promatrajući osnovna pridruživanja vjerovanja koja uglavnom u našoj teoriji nisu definirana samo na jednočlanim podskupovima zbog prirode slučajeva koje promatramo, javlja se ideja da s obzirom na znanje koje imamo uz određeni fenomen, osnovnom pridruživanju vjerovanja koje u tom slučaju definiramo pridružimo familiju svih mogućih vjerojatnosnih mjera $\mathcal{P}_{Bel}$ koje distribuiraju masu $m(C)$ preko elemenata od C, za one $C \subseteq S$ za koje je $m(C) > 0$. U slučaju kada je $m(S) = 1$, pripadni skup $\mathcal{P}_{Bel}$ sastoji se od svih vjerojatnosnih mjera na S, međutim u slučaju kada je $S = \{0, 1\}$ i $m(\{0\}) = 1 - m(\{0, 1\}) = \frac{1}{3}$, $\mathcal{P}_{Bel}$ sastoji se od svih vjerojatnosnih mjera koje pridružuju skupu $\{0\}$ vjerojatnost barem $1/3$. $\mathcal{P}_{Bel}$ možemo interpretirati kao familiju svih mogućih vjerojatnosnih mjera od kojih je jedna ona *prava* koja je u pozadini fenomena koji promatramo i najtočnije ga opisuje, ali nam je u stvarnosti nepoznata i želimo je istraživanjem otkriti.

Primjer 3.1.5. *Familija vjerojatnosnih mjera koju dobivamo distribuiranjem težina na skup $\{majka, otac\}$ preko skupova $\{majka\}$ i $\{otac\}$ je*

$$\mathcal{P}_{Bel} = \left\{ \mathsf{P}_c \colon 0 \leq c \leq \frac{9}{10} \right\},$$

gdje je vjerojatnosna mjera $\mathsf{P}_c : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ *dana sa*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_c(\{otac\}) &= c, \\ \mathsf{P}_c(\{majka\}) &= \frac{9}{10} - c, \\ \mathsf{P}_c(\{k\acute{c}i\}) &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Iako uvedeni pojmovi vezani uz uvjetovanje generaliziraju klasične uvjetne vjerojatnosti, postoje značajne razlike između uvjetovanja u teoriji funkcija vjerovanja i u klasičnoj teoriji. To nam pokazuje i sljedeći primjer iz [1].

Primjer 3.1.6. *Neka je* $S = \{0,1\}^2 = \{0,1\} \times \{0,1\}$, *čiji su elementi uređeni parovi* (x, y), $x, y \in \{0,1\}$. *Dakle* $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ *i na njemu je definirano sljedeće osnovno pridruživanje vjerovanja m:*

$$m(\{(0,0),(0,1)\}) = \frac{1}{2} \quad i \quad m(\{(1,0),(1,1)\}) = \frac{1}{2}.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} Bel(x = y) &= Bel(\{(0,0),(1,1)\}) \\ &= \sum_{C \subseteq \{(0,0),(1,1)\}} m(C) \\ &= m(\{(0,0)\}) + m(\{(1,1)\}) + m(\{(0,0),(1,1)\}) = 0, \end{aligned}$$

no uvjetujemo li događaj $\{x = y\}$ *na ishod od y, tada dobivamo*

$$\begin{aligned} Bel_{y=0}(x = y) &= Bel_{y=0}(\{(0,0),(1,1)\}) \\ &= \frac{\sum_{\emptyset \neq C \cap \{y=0\} \subseteq \{x=y\}} m(C)}{1 - \sum_{C \cap \{y=0\} = \emptyset} m(C)} \\ &= m(\{(0,0),(0,1)\}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

i analogno $Bel_{y=1}(x = y) = m(\{(1,0),(1,1)\}) = \frac{1}{2}$.

Primjer 3.1.6 neobičan je pošto uz pozitivna uvjetna vjerovanja istovremeno vrijedi i $Bel(x = y) = 0$. Promotrimo sljedeću jednakost vezanu uz uvjetnu vjerojatnost u klasičnoj teoriji:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap B^c) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A|B^c)\mathsf{P}(B^c)$$

za A, B takve da je $0 < \mathsf{P}(B) < 1$. Ova jednakost, uz činjenicu da je $\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(B^c) = 1$, daje intuitivan rezultat da za proizvoljan $\alpha \in [0,1]$ i $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^c) = \alpha$ vrijedi i

$\mathsf{P}(A) = \alpha(\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(B^c)) = \alpha$. Međutim, analogno rezoniranje ne vrijedi i u teoriji funkcija vjerovanja što možemo vidjeti iz prethodnog primjera. Naime, za $Bel_B(A) = Bel_{B^c}(A) = \alpha$, općenito ne vrijedi $Bel(A) = \alpha$. Objasnimo detaljnije zašto je tako u teoriji funkcija vjerovanja.

Slučaj $Bel_{y=0}(x = y) = Bel_{y=1}(x = y) = \frac{1}{2}$ nije kontroverzan i možemo ga interpretirati na način da uz poznavanje ishoda od y neizvjesnost ishoda od x postaje jednaka neizvjesnosti bacanja simetričnog novčića. Međutim, neobično je da istovremeno vrijedi $Bel(x = y) = 0$. Vrijednost 0 dolazi od činjenice da uz pretpostavke iz Primjera 3.1.6 mi zapravo ništa ne znamo o ishodu samog y. U nekom primjeru može se pojaviti pravilo da x uvijek poprima suprotnu vrijednost od y, ali baš zato što iz pretpostavke našeg primjera ne znamo ništa više o odnosu od x i y, odnosno $m(x = y) = m(\{(0, 0), (1, 1)\})$ nije definirano, stavljamo da je vjerovanje u ishod $\{x = y\}$ jednako 0. Dakle, bez obzira što imamo znanje o specifičnijem slučaju, na temelju toga ne možemo ništa pretpostaviti o općenitijem događaju ukoliko to naša znanja i spoznaje ne dozvoljavaju i razumno je da u takvoj situaciji pridružimo vjerovanje 0. Kada bismo u istom primjeru uvjetovali ishodom od x, zbog specifičnosti situacije ne bismo mogli ništa više reći o ishodu od y jer je

$$Bel_{x=0}(x = y) = Bel_{x=1}(x = y) = 0$$

i u tom slučaju ništa ne bi bilo paradoksalno jer je i $Bel(x = y) = 0$. Važno je imati na umu da se u ovoj teoriji vežemo uz osnovna vjerovanja m koja reflektiraju naše stvarno znanje, a ne pretpostavke te da će čitatelju koji je blizak s klasičnom teorijom vjerojatnosti neki rezultati na prvi pogled biti besmisleni. Primjer 3.1.6 specijalan je slučaj sljedeće leme.

Lema 3.1.7. *Neka skupovi $B_1, B_2, \ldots B_n \subseteq S$ čine particiju skupa S, tj. neka za sve i, j takve da je $i \neq j$ vrijedi $B_i \cap B_j = \emptyset$ i neka je $\cup_{i=1}^n B_i = S$. Pretpostavimo da je $Bel(B_i) > 0$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ i da za svaki C za koji je $m(C) > 0$ postoji neki indeks i za koji je $C \subseteq B_i$. Tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} Bel(B_i) = 1 \quad i \quad Bel(A) = \sum_{i=1}^{n} Bel(B_i)\, Bel_{B_i}(A)$$

za sve $A \subseteq S$.

Dokaz. Obzirom da za svaki $C \subseteq S$ za koji je $m(C) > 0$ postoji neki B_i iz particije takav da je $C \subseteq B_i$, vrijedi

$$1 = Bel(S) = \sum_{C \subseteq S} m(C) = \sum_{i} \sum_{C \subseteq B_i} m(C) = \sum_{i=1}^{n} Bel(B_i).$$

Sasvim analogno, za bilo koji skup indeksa $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ imamo

$$Bel\Big(\cup_{i \in I} B_i\Big) = \sum_{i \in I} Bel(B_i)$$

pa je posebno

$$Bel(B_i^c) = Bel\Big(\cup_{j\neq i} B_j\Big) = \sum_{j\neq i} Bel(B_j) = 1 - Bel(B_i).$$

Još općenitije, za $A \subseteq S$ vrijedi

$$Bel(A) = \sum_{C\subseteq A} m(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{C\subseteq A\cap B_i} m(C) = \sum_{i=1}^{n} Bel(A\cap B_i)$$

te posljedično

$$Bel(A) = Bel(A\cap B_i) + Bel(A\cap B_i^c).$$

Druga tvrdnja sada slijedi iz jednakosti (3.2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Bel(B_i)\, Bel_{B_i}(A) &= \sum_{i=1}^{n} Bel(B_i)\,\frac{Bel(A\cup B_i^c) - Bel(B_i^c)}{1 - Bel(B_i^c)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(Bel(A)\cup B_i^c) - Bel(B_i^c)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(Bel(A\cap B_i) + Bel(B_i^c) - Bel(B_i^c)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Bel(A\cap B_i) \\
&= Bel(A).
\end{aligned}$$

□

Napomena 3.1.8. *Uočimo da u Primjeru 3.1.6 za* $B_1 = \{y = 0\}$, $B_2 = \{y = 1\}$ *uvjet Leme* 3.1.7 *nije zadovoljen jer je* $Bel(B_1) = Bel(B_2) = 0$, *ali za* $A = \{x = y\}$ *drugi dio leme vrijedi:*

$$Bel(x = y) = Bel_{y=0}(x = y)\, Bel(y = 0) + Bel_{y=1}(x = y)\, Bel(y = 1) = 0.$$

Za $A = \{x = 0\}$ *vrijedilo bi*

$$Bel(x = 0) \neq Bel_{y=0}(x = 0)\, Bel(y = 0) + Bel_{y=1}(x = 0)\, Bel(y = 1)$$

jer je $Bel(x = 0) = m(\{(0,0),(0,1)\}) = \frac{1}{2}$.

3.2 Nezavisnost funkcija vjerovanja

Sada kada smo uveli uvjetne funkcije vjerovanja, definirat ćemo nezavisnost i dati osnovne rezultate iz [1]. U ovom odjeljku uzimat ćemo u obzir sljedećih nekoliko pretpostavki. Neka su S_1 i S_2 prostori mogućih ishoda dvaju različitih fenomena koje želimo opisati kao nezavisne. Pratiti ćemo oba fenomena istovremeno. Stavimo da je $S = S_1 \times S_2$ Kartezijev produkt spomenutih prostora S_1 i S_2 i neka su $X \colon S \to S_1$ i $Y \colon S \to S_2$ projekcije na koordinate prostora S. Neka su na S dani osnovno pridruživanje vjerovanja $m \colon \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ i njemu pripadna funkcija vjerovanja *Bel*. Želimo da se nezavisnost dvaju fenomena reflektira kroz m i *Bel* i da bude konzistentna s našom intuitivnom idejom nezavisnosti. Uvest ćemo 3 osnovna zahtjeva za nezavisnost obrađena u [1], usporediti ih te dati važan rezultat o njihovim odnosima.

U prvom pristupu uzimamo u obzir uvjetna vjerovanja i zahtijevamo da vrijedi

$$Bel_{Y \in B}(X \in A) = Bel(X \in A)$$

i

$$Bel_{X \in A}(Y \in B) = Bel(Y \in B),$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ za koje je uvjetna funkcija vjerovanja definirana. U drugom pristupu želimo generalizirati klasičnu nezavisnost te zahtijevamo da vrijedi

$$Bel(X \in A;\ Y \in B) = Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B),$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$. Slično kao u drugom pristupu, umjesto funkcije vjerovanja *Bel* možemo promatrati osnovno pridruživanje vjerovanja m te zahtijevati da $m(X \in A;\ Y \in B)$ zadovoljava određeni uvijet. Stoga najprije definirajmo *marginalne funkcije vjerovanja* Bel_1 i Bel_2 sa

$$\begin{aligned} Bel_1(A) &:= Bel(X \in A) \quad \text{i} \\ Bel_2(B) &:= Bel(Y \in B), \end{aligned}$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$. Po definiciji, Bel_1 i Bel_2 također su funkcije vjerovanja. Stavimo da su m_1 i m_2 marginalna osnovna pridruživanja vjerovanja od Bel_1 i Bel_2 respektivno. Kako je

$$\begin{aligned} Bel_1(A) &= \sum_{B \subseteq A \times S_2} m(B) \\ &= \sum_{\substack{B \subseteq S \\ X(B) \subseteq A}} m(B) \\ &= \sum_{B \subseteq A} \sum_{\substack{C \subseteq S \\ X(C) = B}} m(C), \end{aligned}$$

iz definicije funkcije vjerovanja zaključujemo da je

$$m_1(A) = \sum_{\substack{C \subseteq S \\ X(C)=A}} m(C)$$

za sve $A \subseteq S_1$, i analogno

$$m_2(B) = \sum_{\substack{C \subseteq S \\ Y(C)=B}} m(C)$$

za sve $B \subseteq S_2$. Dakle, naš treći zahtjev za nezavisnost je

$$m(X \in A;\ Y \in B) = m_1(A)\, m_2(B)$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$. Uočimo da općenito $m_1(A)$ nije isto kao i $m(X \in A)$ jer skup $\{X \in A\}$ ne mora biti jedini skup s pozitivnim osnovnim vjerovanjem koji možemo projicirati na skup A. Na primjer, za $S_1 = \{1, 2\}$ i $S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ definirajmo osnovno pridruživanje vjerovanja sa $m(\{(1, 0), (1, 2), (1, 3)\}) = 1/2$ i $m(\{(1, 0), (1, 1)\}) = 1/2$. Za $A = \{1\}$ vrijedi

$$m(X \in A) = m(\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}) = 0 \quad \text{i} \quad m_1(A) = \sum_{\substack{C \subseteq S_1 \times S_2 \\ X(C)=A}} m(C) = 1/2 + 1/2 = 1.$$

U iduća dva primjera pokazat ćemo odnos triju navedenih pristupa kod definicije nezavisnosti te ćemo vidjeti da su zahtjevi prve i druge definicije slabiji od trećeg zahtjeva.

Primjer 3.2.1. *Pretpostavimo da je $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ te da je $S = S_1 \times S_2$ prostor mogućih ishoda na kojem je definirano opće pridruživanje vjerovanja m na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} m(\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}) &= \frac{1}{4}, \\ m(\{(0, 0)\}) &= \frac{1}{2}, \\ m(\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} Bel_{Y=1}(X = 0) &= \frac{\sum_{\emptyset \neq C \cap \{Y=1\} \subseteq \{X=0\}} m(C)}{1 - \sum_{C \cap \{Y=1\} = \emptyset} m(C)} = \frac{m(\{(0, 0)\})}{1 - m(\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\})} = \frac{1}{2}, \\ Bel_{Y=0}(X = 0) &= \frac{\sum_{\emptyset \neq C \cap \{Y=0\} \subseteq \{X=0\}} m(C)}{1 - \sum_{C \cap \{Y=0\} = \emptyset} m(C)} = m(\{(0, 0)\}) = \frac{1}{2}, \\ Bel(X = 0) &= \sum_{C \subseteq \{(0,0),(0,1)\}} m(C) = m(\{(0, 0)\}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sličnim raspisivanjem dobivamo da je

$$Bel(X = 1) = Bel_{Y=1}(X = 1) = Bel_{Y=0}(X = 1) = 0$$

dok je istovremeno

$$\frac{1}{2} = m(\{(0,0)\}) = m(X = 0;\ Y = 0) \neq m_1(0)\, m_2(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Iz primjera vidimo da je prvi zahtjev nezavisnosti s početka odjeljka zadovoljen, dok treći zahtjev ne vrijedi.

Primjer 3.2.2. *Neka su $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ te neka je m osnovno pridruživanje vjerovanja na $S = S_1 \times S_2$ definirano sa:*

$$m(\{(0,0), (1,1)\}) = 1.$$

Tada se raspisivanjem lako vidi da je

$$Bel(X \in A;\ Y \in B) = Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B),$$

za sve $A \subseteq \{(0, 1)\}$ i sve $B \subseteq \{(0, 1)\}$. Međutim, ne vrijedi i

$$m(X \in A;\ Y \in B) = m_1(A)\, m_2(B)$$

jer je za $A = \{0, 1\}$ i $B = \{0, 1\}$

$$m(\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}) = 0,$$
$$m(\{(0,0), (1,1)\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 1.$$

Kao što u primjerima vidimo, zahtjevi prvog i drugog pristupa nisu jednaki zahtjevu trećeg pristupa zbog skupova $C \subseteq S$ koji nisu *pravokutni*, odnosno za koje je $C \neq X(C) \times Y(C)$. Uzmimo $C \subseteq S = S_1 \times S_2$ takav da je $m(C) > 0$. Skup $X(C) \subseteq S_1$ daje ishode prvog fenomena s kojim je C konzistentan. Ukoliko dobijemo dodatnu informaciju o drugom fenomenu koji pratimo, odnosno ukoliko uvjetujemo sa $\{Y = y\}$, za neki $y \in Y(C)$, dokaz za događaj C postat će dokaz za $C \cap \{Y = y\}$. S obzirom da želimo modelirati nezavisnost, sasvim je razumno zahtjevati da uvjetovanje sa $\{Y = y\}$ ne mijenja vjerovanje u ishod prvog fenomena. Dakle, matematički zapisano, želimo da u nezavisnosti vrijedi

$$X(C \cap \{Y = y\}) = X(C), \quad \text{za sve } y \in Y(C).$$

To možemo jasno vidjeti i iz Primjera 3.2.1 gdje za skup $C = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ uvjetovanjem s $\{Y = 1\}$ i $\{Y = 0\}$ slijedi $X(C \cap \{Y = 1\}) = X((0,1)) = \{0\}$, $X(C \cap \{Y = 0\}) = \{(0,0), (1,0)\} = \{0, 1\}$, dok je $X(C) = \{0, 1\}$.

Definicija 3.2.3. *Kažemo da je m* koncentrirano na pravokutnicima *ako je $m(C) = 0$ za sve skupove $C \subseteq S$ koji nisu oblika $C = X(C) \times Y(C)$.*

U sljedećem teoremu dokazanom u [1] vidjet ćemo da ograničenje iz definicije 3.2.3 dodano zahtjevima iz prva dva pristupa nezavisnosti omogućava da oni postanu ekvivalentni s trećim zahtjevom.

Teorem 3.2.4. *Neka je $S = S_1 \times S_2$ skup mogućih ishoda dvaju fenomena praćenih istovremeno, te neka su $X: S \to S_1$ i $Y: S \to S_2$ projekcije na koordinate S_1 i S_2 respektivno. Pretpostavimo da su definirani osnovno pridruživanje vjerovanja $m: \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ i njemu pripadna funkcija vjerovanja Bel. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) m je koncentrirano na pravokutnicima i

$$Bel_{Y\in B}(X \in A) = Bel(X \in A) \tag{3.5}$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ za koje je $Bel(Y \in B^c) \neq 1$,

(ii) m je koncentrirano na pravokutnicima i

$$Bel(X \in A;\ Y \in B) = Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) \tag{3.6}$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$,

(iii) vrijedi

$$m(X \in A;\ Y \in B) = m_1(A)\, m_2(B) \tag{3.7}$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$.

Dokaz. Pokažimo da $(i) \implies (ii)$, stoga pretpostavimo da vrijedi (i). Najprije uočimo da ako za sve $C \subseteq A \cup B$ takve da je $m(C) > 0$ mora biti $C \subseteq A$ ili $C \subseteq B$, tada za funkciju vjerovanja Bel vrijedi

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B). \tag{3.8}$$

Iz pretpostavke da je m koncentrirano na pravokutnike, za sve $C \subseteq \{X \in A \text{ ili } Y \in B\}$ za koje je $m(C) > 0$ mora biti $C \subseteq \{X \in A\}$ ili $C \subseteq \{Y \in B\}$ pa korištenjem (3.8) slijedi

$$Bel(X \in A \text{ ili } Y \in B) = Bel(X \in A) + Bel(Y \in B) - Bel(X \in A;\ Y \in B) \tag{3.9}$$

za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$. Neka su sada $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ takav da je $Bel(Y \in B) \neq 1$ proizvoljni. Koristeći pretpostavku (3.5) iz (i), definiciju uvjetne funkcije vjerovanja i jednakost (3.9), slijedi

$$\begin{aligned}
Bel(X \in A) &= Bel_{Y \in B^c}(X \in A) \\
&= \frac{Bel(\{X \in A\} \cup \{Y \in B\}) - Bel(Y \in B)}{1 - Bel(Y \in B)} \\
&= \frac{Bel(X \in A) - Bel(X \in A;\, Y \in B)}{1 - Bel(Y \in B)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

iz čega dobivamo da je $Bel(X \in A;\, Y \in B) = Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B)$. Zbog proizvoljnosti od A i B, tvrdnja vrijedi za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ sa svojstvom $Bel(Y \in B) = 1$, pa tvrdnja iz (ii) vrijedi.

Da bismo pokazali $(ii) \implies (iii)$, pretpostavimo da je zadovoljen uvjet (ii). Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$, gdje je $n = |A| + |B|$ za $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ i $|\cdot|$ je kardinalitet skupa.

Za $|A| + |B| = n = 0$ i $A \subseteq S_1$, $B \subseteq S_2$ trivijalno slijedi da je $m(X \in A;\, Y \in B) = m(\emptyset) = 0 = m_1(A)\, m_2(B)$. Pretpostavimo sada da za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ takve da je $|A| + |B| < n$ vrijedi $m(X \in A;\, Y \in B) = m_1(A)\, m_2(B)$. Sada za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ takve da je $|A| + |B| = n$ i zbog tvrdnje (ii) vrijedi:

$$\begin{aligned}
m(X \in A;\, Y \in B) &= Bel(X \in A;\, Y \in B) - \sum_{\substack{A' \subseteq A,\, B' \subseteq B, \\ |A'| + |B'| < n}} m(X \in A';\, Y \in B') \\
&= Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) - \sum_{\substack{A' \subseteq A,\, B' \subseteq B, \\ |A'| + |B'| < n}} m(X \in A';\, Y \in B') \\
&= Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) - \sum_{\substack{A' \subseteq A,\, B' \subseteq B, \\ |A'| + |B'| < n}} m_1(A')\, m_2(B') \\
&= Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) - \\
&\quad - \left[\sum_{A' = A, B' \subsetneq B} m_1(A')\, m_2(B') + \sum_{A' \subsetneq A, B' \subseteq B} m_1(A')\, m_2(B') \right] \\
&= Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) - [m_1(A)\, (Bel(Y \in B) - m_2(B)) + \\
&\quad + Bel(Y \in B)(Bel(X \in A) - m_1(A))] \\
&= Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) + m_1(A)\, m_2(B) - Bel(X \in A)\, Bel(Y \in B) \\
&= m_1(A)\, m_2(B).
\end{aligned}$$

Dakle, indukcijom smo pokazali da vrijedi (iii).

Preostaje nam dokazati $(iii) \implies (i)$, pa pretpostavimo da je zadovoljeno (iii). Kako su m_1 i m_2 osnovna pridruživanja vjerovanja na S_1 i S_2 respektivno, pretpostavka povlači da je

$$\sum_{\substack{A\subseteq S_1,\\ B\subseteq S_2}} m(X\in A;\ Y\in B) = \sum_{A\subseteq S_1} m_1(A) \sum_{B\subseteq S_2} m_2(B) = 1.$$

Iz ove jednakosti slijedi da je $m(C) = 0$ ukoliko je $C \neq X(C)\times Y(C)$ za neke $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$. Dakle, m je koncentrirano na pravokutnike. Uzmimo sada $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ takav da je $Bel(Y \in B^{c}) \neq 1$. Imamo

$$\begin{aligned}
Bel_{Y\in B}(X\in A) &= \frac{\sum_{A'\subseteq A, B'\subseteq B} m(X\in A';\ Y\in B')}{1-\sum_{A'\subseteq S_1, B'\subseteq B^{c}} m(X\in A';\ Y\in B')}\\
&= \frac{\sum_{A'\subseteq A} m_1(A') \sum_{B'\subseteq B} m_2(B')}{1-\sum_{A'\subseteq S_1} m_1(A') \sum_{B'\subseteq B^{c}} m_2(B')}\\
&= \frac{\sum_{A'\subseteq A} m_1(A') \sum_{B'\subseteq B} m_2(B')}{1-\sum_{B'\subseteq B^{c}} m_2(B)}\\
&= \frac{\sum_{A'\subseteq A} m_1(A') \sum_{B'\subseteq B} m_2(B')}{\sum_{B'\subseteq B} m_2(B')}\\
&= \sum_{A'\subseteq A} m_1(A') = Bel(X\in A).
\end{aligned}$$

□

Radi svega navedenog odlučujemo se usvojiti treći pristup kao definiciju nezavisnosti.

Definicija 3.2.5. *Projekcije X i Y su* nezavisne *ako za sve $A \subseteq S_1$ i $B \subseteq S_2$ vrijedi $m(X \in A;\ Y \in B) = m_1(A)\, m_2(B)$.*

Naša definicija nezavisnosti generalizira klasičnu definiciju. Naime, u klasičnoj teoriji m je definirano na jednočlanim podskupovima koji su svakako pravokutnici, odnosno, vjerojatnosne mjere su koncentrirane na pravokutnicima te su stoga sva tri zahtjeva za nezavisnost zadovoljena i jednaka. Sada kada smo uveli definiciju nezavisnosti, možemo se vratiti na primjer 3.1.6.

Primjer 3.2.6. *Kao što smo već vidjeli, osnovno pridruživanje vjerovanja u primjeru* 3.1.6 *definirano je na način da reprezentira bacanje simetričnog novčića, odnosno daje vjerojatnost ishoda sljedećeg bacanja s obzirom na posljednji ishod bacanja. U tom primjeru jasno je, kroz definiciju osnovnog pridruživanja vjerovanja m, definirana informacija o ishodu od X, međutim o ishodu od Y iz definicije m ne možemo ništa dodatno saznati. Doista, marginalna funkcija vjerovanja od X pridružuje težinu $1/2$ svakom od ishoda, dok marginalna funkcija vjerovanja od Y reprezentira potpuno neznanje, odnosno $Bel(Y = 1) = Bel(Y = 0) = 0$. Također, lako se vidi da su ishodi X i Y, odnosno ishodi bacanja novčića nezavisni jer je m koncentrirano na pravokutnicima zadovoljen je uvjet* (3.6) *iz Teorema* 3.2.4.

3.3 Kombiniranje osnovnih pridruživanja vjerovanja

U ovom odjeljku pitamo se što se događa kada se naše vjerovanje u ishod nekog fenomena promijeni, odnosno kada s obzirom na dinamičku prirodu fenomena ili novi izvor informacija i dokaza utvrdimo da se vjerovanje u ishod tog fenomena promijenilo. Na primjer, može se desiti da imamo vjerovanje u ishod nekog fenomena dobiveno od dva različita subjekta koji svojim iskustvom i okruženjem u kojem se nalaze imaju različite spoznaje o samom fenomenu. U takvoj situaciji koristimo kombinaciju osnovnih pridruživanja vjerovanja nastala na temelju njihovih spoznaja, odnosno kombinaciju funkcija vjerovanja. Kombiniranje funkcija vjerovanja uvedeno je u klasičnoj literaturi [3] i [5] gdje se kao glavna formula koristi takozvano *Dempsterovo pravilo kombiniranja*. Posljednjih godina to pravilo doživjelo je kritike te se u radovima poput [1] i [2] ono odbacuje i uvodi alternativni račun, poput onog iz prethodnih odjeljaka ovog rada. U ovom odjeljku definirat ćemo Dempsterovo pravilo kombiniranja iz [3] te pokazati zašto je ono ponekad nezadovoljavajuće.

Definirajmo najprije Dempsterovo pravilo kombiniranja iz [3]. Neka su m_1 i m_2 osnovna pravila pridruživanja definirana na $\mathcal{P}(S)$ i neka su Bel_1 i Bel_2 njima pripadne funkcije vjerovanja. Dempsterovo pravilo kombiniranja kaže da, ukoliko su m_1 i m_2 osnovna pridruživanja vjerovanja, tada je Dempsterov produkt osnovnih pridruživanja vjerovanja, $m_1 \oplus m_2$ definiran na $\mathcal{P}(S)$, jednak

$$(m_1 \oplus m_2)(A) = \frac{\sum_{B,\,C\subseteq S,\,B\cap C=A} m_1(B)\,m_2(C)}{1-\sum_{B,\,C\subseteq S,\,B\cap C=\emptyset} m_1(B)\,m_2(C)} \tag{3.11}$$

i njemu pripadni Dempsterov produkt funkcija vjerovanja Bel_1 i Bel_2, u oznaci $Bel_1 \oplus Bel_2$ definiran na $\mathcal{P}(S)$, jednak je

$$(Bel_1 \oplus Bel_2)(A) = \frac{\sum_{B,\,C\subseteq S,\,\emptyset\neq B\cap C\subseteq A} m_1(B)\,m_2(C)}{1-\sum_{B,\,C\subseteq S,\,B\cap C=\emptyset} m_1(B)\,m_2(C)}, \text{ za svaki } A \subseteq S. \tag{3.12}$$

Ukoliko su m_1 i m_2 vjerovanja temeljena na nezavisnim činjenicama, tada (3.11) zadovoljava uvjete Definicije 1.2.1. U sljedećem primjeru uvedenom u [1] pokazat ćemo zašto kombinacija osnovnih pridruživanja vjerovanja m_1 i m_2 u 3.11 nije u skladu s teorijom funkcija vjerovanja predstavljenom u prethodnim odjeljcima.

Primjer 3.3.1. *Neka je zadan skup mogućih ishoda* $S^2 = \{0,1\}\times\{0,1\}$. *Neka je definirano osnovno pridruživanje vjerovanja* m *na* $\mathcal{P}(S^2)$ *sa* $m(\{(0,0),(0,1)\}) = \frac{1}{2}$ *i* $m(\{(1,0),(1,1)\}) = \frac{1}{2}$ *te neka su* m_1 *i* m_2 *osnovna pridruživanja vjerovanja nezavisnih ishoda bacanja simetričnog novčića, tj. neka vrijedi*

$$m(X \in A;\ Y \in B) = m_1(A)\,m_2(B), \quad \text{za sve } A,\ B \subseteq S.$$

Neka je $H = \{(s, s) \colon s \in S\} \subseteq S^2$. Za skup $A = \{0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} m_H(\{(s,s) \colon s \in A\}) &= \frac{\sum_{C \cap H = \{(0,0)\}} m(C)}{1 - \sum_{C \cap H = \emptyset} m(C)} \\ &= \frac{\sum_{C_1, C_2 \mid C_1 \cap C_2 = \{0\}} m_1(C_1)\, m_2(C_2)}{1 - \sum_{C_1, C_2 \mid C_1 \cap C_2 = \emptyset} m_1(C_1)\, m_2(C_2)} \\ &= (m_1 \oplus m_2)(A) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Neobično u ovom primjeru je da m_1 i m_2 opisuju nezavisne fenomene dok $m_1 \oplus m_2$ zapravo opisuje naše vjerovanje uvjetno na činjenicu da su ishodi ta dva fenomena jednaki. Naime, razlog zbog kojeg odbacujemo Dempsterovo pravilo kombiniranja osnovnih pridruživanja vjerovanja, a samim time i pravilo kombiniranja pripadnih funkcija vjerovanja, jest da ukoliko se dokazi odnose na jedan fenomen, tada su ti dokazi zavisni jer ovise o ishodu tog fenomena. Dakle, odbacujemo izjednačavanje nezavisnosti dokaza vezanih uz jedan fenomen i dokaza koji su vezani uz nezavisne fenomene. Sljedeći primjer također uveden u [1] pokazuje besmislenost Dempsterovog pravila kombiniranja.

Primjer 3.3.2. *Pretpostavimo da bacamo novčić i stavimo da je $S = \{p, g\}$ skup mogućih ishoda tog eksperimenta gdje p označava da je ishod pismo, dok g označava da je ishod glava. Sva prethodna bacanja tog istog novčića od strane subjekta A pokazala su da je vjerovanje u ishod bacanja jednako*

$$m_A(\{p\}) = \frac{2}{5} \text{ i } m_A(\{g\}) = \frac{3}{5},$$

dok i povijesni ishodi bacanja subjekta B pokazuju da je vjerovanje u ishod bacanja tog novčića jednako vjerovanju subjekta A, tj. $m_A = m_B$, gdje sa m_A i m_B označavamo vjerovanje subjekata A i B respektivno. Primjenom Dempsterovog pravila odlučivanja dobivamo

$$(m_A \oplus m_B)(\{g\}) = \frac{m_A(\{g\})\, m_B(\{g\})}{m_A(\{g\})\, m_B(\{g\}) + m_A(\{p\})\, m_B(\{p\})} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{9}{13},$$

$$(m_A \oplus m_B)(\{p\}) = \frac{m_A(\{p\})\, m_B(\{p\})}{m_A(\{p\})\, m_B(\{p\}) + m_A(\{g\})\, m_B(\{g\})} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{13}.$$

Ono što rezultat Dempsterove kombinacije istih vjerovanja u ishod eksperimenta pokazuje jest da novčić češće pada na stranu glave nego što to pokazuju pojedinačna vjerovanja subjekata A i B. Logično je da u ovakvoj situaciji dvaju identičnih vjerovanja, njihova kombinacija bude veća ili jednaka pojedinačnim vjerovanjima, ali je neobično da u slučaju kombinacije dvaju istih vjerovanja u ishod p, koja bi po svoj logici trebala dati dojam čvršćeg vjerovanja u taj ishod, kombinacija vjerovanja m_A i m_B zapravo oslabi naše ukupno vjerovanje jer je $\frac{4}{13} < \frac{2}{5}$.

Iz navedenih primjera i razloga odbacujemo Dempsterovo pravilo kombiniranja i kao alternativu uopće zaobilazimo kombiniranje vjerovanja. Naime, u sljedećem poglavlju i primjerima vidjet ćemo da uvedena teorija funkcija vjerovanja sasvim smisleno i dobro funkcionira bez definiranja kombinacije dvaju osnovnih pridruživanja vjerovanja, odnosno dviju funkcija vjerovanja.

Poglavlje 4

Primjene funkcija vjerovanja i daljnja nadogradnja teorije

4.1 Primjene funkcija vjerovanja

U ovom odjeljku dat ćemo dva primjera koja ilustriraju odnos Bayesovskog pristupa u klasičnoj teoriji vjerojatnosti i pristupa teorije funkcija vjerovanja te vidjeti odnos rezultata rezoniranja u dva različita pristupa. U teoriji funkcija vjerovanja ne postoji eksplicitna formula koja bi bila analogon Bayesovoj formuli, međutim način razmišljanja kroz uvjetne vjerojatnosti, odnosno uvjetna vjerovanja je sličan te stoga ima smisla uspoređivati rezultate. Prvi primjer koji navodimo obrađen je u [1] i vezan je uz sudski slučaj. S obzirom da ćemo u opisivanju pristupa u klasičnoj teoriji vjerojatnosti koristiti Bayesovu formulu, podsjetimo se najprije što Bayesov teorem govori. Neka su A i B događaji na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ takvi da je $\mathsf{P}(A) > 0$ i $\mathsf{P}(B) > 0$. Tada vrijedi:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}, \tag{4.1}$$

gdje su $\mathsf{P}(A|B)$ i $\mathsf{P}(B|A)$ uvjetne vjerojatnosti. Formulu (4.1) nazivamo Bayesova formula. S obzirom da ćemo ga koristiti, spomenimo i prošireni oblik navedene Bayesove formule:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B|A^c)\,\mathsf{P}(A^c)}$$

za događaje A, B kao gore.

Primjer 4.1.1 (Funkcije vjerovanja u sudskom slučaju)**.** *Pretpostavimo da u sudskom slučaju određenog zločina postoji dvoje osumnjičenih, nazovimo ih A i B. Neka su E i G dva događaja koja ćemo promatrati:*

$$E = \{ \textit{ osumnjičeni subjekt A ima neku karakteristiku počinitelja zločina } \},$$
$$G = \{ \textit{ A je počinitelj promatranog zločina } \}.$$

Događaj E interpretiramo kao dokaz (eng. evidence) koji se naknadno pojavio u postupku. Dodatno, u populaciji koju promatramo, eksperimentalno je pokazano da je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba ima spomenutu karakteristiku jednaka p. Zanima nas klasični, Bayesovski pristup određivanja $\mathsf{P}(G|E)$ *u odnosu na pristup teorije funkcija vjerovanja.*

Opišimo sada kako bismo postupali u Primjeru 4.1.1 na dva spomenuta načina. Krenimo najprije s klasičnim, Bayesovskim načinom u kojem koristimo Bayesovu formulu (4.1). Dakle, za izračun uvjetne vjerojatnosti $\mathsf{P}(G|E)$ potrebno bi bilo eksperimentalno, odnosno povijesno znati vjerojatnosti $\mathsf{P}(G)$ i $\mathsf{P}(G^c)$. Iako nemamo stvarne vjerojatnosti događaja G i G^c, svejedno postupamo na način da svakom od njih, bez obzira na neznanje, uniformno pridodamo vjerojatnosti $\mathsf{P}(G) = \mathsf{P}(G^c) = \frac{1}{2}$. Sljedeće vjerojatnosti znamo iz opisa problema i poznate vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(E|G) &= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenik A i zločinac imaju karakteristiku}\} \,|\, \{\text{A je počinitelj zločina}\}) \\
&= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenik A ima karakteristiku}\} \,|\, \{\text{A je počinitelj zločina}\}) \\
&= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenik A ima karakteristiku}\}) \\
&= p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(E|G^c) &= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenik A i zločinac imaju karakteristiku}\} \,|\, \{\text{B je počinitelj zločina}\}) \\
&= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenici A i B imaju karakteristiku}\} \,|\, \{\text{B je počinitelj zločina}\}) \\
&= \mathsf{P}(\{\text{Osumnjičenici A i B imaju karakteristiku}\}) \\
&= p^2.
\end{aligned}$$

Dakle, iz proširene Bayesove formule slijedi:

$$\mathsf{P}(G|E) = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p^2} = \frac{1}{1+p}.$$

Da bismo vidjeli postupak u teoriji funkcija vjerovanja definirajmo osnovna pridruživanja vjerovanja s obzirom na pretpostavke i znanja koja imamo na temelju Primjera 4.1.1. Ono što je zasigurno jasno je da na temelju spomenutog primjera nemamo znanja o krivnji subjekta A. Stoga je i naše vjerovanje u ishod da A jest, odnosno nije krivac jednako 0, tj. $Bel(G) = Bel(G^c) = 0$. Osnovno vjerovanje u ishod da A, odnosno B nema karakteristiku počinitelja zločina jednako je $1 - p$ na temelju zadane vjerojatnosti komplementa tog događaja, dok je osnovno vjerovanje da A i B imaju karakteristiku počinitelja zločina jednako p^2. Treće što znamo je osnovno vjerovanje koje pridružujemo događaju da A ima karakteristiku, a B nema i ono je jednako $p(1-p)$. To nas vodi rezultatu

$$Bel_E(G) = \frac{p(1-p)}{p^2 + p(1-p)} = 1 - p$$

što nije jednako rezultatu klasičnog pristupa.

Pogledajmo sada drugi primjer, također osmišljen u [1], koji ilustrira primjenu teorije funkcija vjerovanja u jednoj od igara u kockarnici i uspoređuje pristup razmišljanja i odlučivanja s klasičnom teorijom vjerojatnosti.

Primjer 4.1.2. *Pretpostavimo da se nalazimo u kockarnici gdje igramo sljedeću igru. Postoje dva krupjea koji nezavisno bacaju novčić. Najprije svaki od njih jednom baci novčić, te nakon bacanja s vjerojatnošću p mogu promijeniti ishod sljedećeg bacanja, neovisno jedan o drugom. Nama kao igraču, način na koji krupjei odlučuju hoće li promjeniti ishod sljedećeg bacanja ili ne, nije poznat. Nakon oba bacanja, i prije nego uopće saznamo ishod njihovih bacanja, krupjei nam daju informaciju o tome jesu li njihovi ishodi identični ili nisu. Ta dodatna informacija, ukoliko je pozitivna, smanjuje skup mogućih ishoda njihovih bacanja na samo dva moguća ishoda na koja se u tom trenutku možemo kladiti.*

Pretpostavimo u toj situaciji da je S_1 skup mogućih ishoda prvog fenomena, tj. bacanja prvog krupjea te da je S_2 skup ishoda bacanja drugog krupjea, koje smatramo drugim fenomenom. Pretpostavka je da su ta dva fenomena nezavisna. Također, pretpostavimo da su vjerovanja pridružena bacanju prvog krupjea jednaka $m_1(\{p\}) = m_1(\{g\}) = \frac{1}{2}(1-p)$ i $m_1(\{p, g\}) = p$ te da su vjerovanja u ishod bacanja drugog krupjea identično definirana, odnosno $m_2 = m_1$ za sve podskupove od $\{p, g\}$. Pogledajmo najprije kako bismo postupili u opisanom slučaju u okvirima teorije funkcija vjerovanja. S obzirom da su dva bacanja novčića nezavisna, koristeći Definiciju 3.2.5, za sve kombinacije podskupova od $\{p, g\}$ na temelju danih osnovnih pridruživanja vjerovanja m_1 i m_2, možemo definirati osnovno pridruživanje vjerovanja m na $\mathcal{P}(S)$, gdje je $S = S_1 \times S_2$. Imamo:

$$m(\{(p,p)\}) = m(\{(p,g)\}) = m(\{(g,p)\}) = m(\{(g,g)\}) = \left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^2 = \frac{1}{4}(1-p)^2,$$

$$m(\{(p,p),(p,g)\}) = m(\{(g,p),(g,g)\}) = m(\{(p,g),(g,g)\}) = m(\{(p,p),(g,p)\}) = \frac{1}{2}(1-p)p,$$

$$m(\{(p,p),(p,g),(g,p),(g,g)\}) = p^2.$$

Pogledajmo sada kako bismo postupili u odlučivanju u slučaju da krupjei potvrde da su ishodi njihovih bacanja jednaki. Naime, sada se nalazimo u situaciji uvjetnih funkcija vjerovanja te uvjetujemo na skup identičnih ishoda bacanja, odnosno na skup

$$H = \{(p,p),(g,g)\}.$$

Izračunajmo sada uvjetnu vjerojatnost ishoda (g, g) u opisanoj situaciji kada znamo da se događaj H ostvario. Iz (3.2) slijedi:

$$
\begin{aligned}
Bel_H(\{(g,g)\}) &= \frac{\sum_{\emptyset \neq C \cap H \subseteq (g,g)} m(C)}{1 - \sum_{C \cap H = \emptyset} m(C)} \\
&= \frac{m(\{(g,g)\}) + m(\{(g,p),(g,g)\}) + m(\{(p,g),(g,g)\})}{1 - (m(\{(p,g)\}) + m(\{(g,p)\}))} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(1-p)^2 + (1-p)p}{1 - \frac{1}{2}(1-p)^2}.
\end{aligned}
$$

Zbog simetričnosti osnovnog pridruživanja vjerovanja m, analogno vrijedi

$$Bel_H(\{(h,h)\}) = \frac{\frac{1}{4}(1-p)^2 + (1-p)p}{1 - \frac{1}{2}(1-p)^2}.$$

Uočimo da se za vrijednost $p = 0$ u jednakostima iznad dobiva

$$Bel_H(\{(g,g)\}) = Bel_H(\{(p,p)\}) = \frac{1}{2}$$

te se nalazimo u situaciji klasičnog bacanja simetričnog novčića, dok za $p = 1$ ove vrijednosti iznose 0, što znači da na temelju spoznaja ne možemo ništa reći ishodu bacanja.

Pogledajmo kako se rezoniranje u klasičnoj teoriji razlikuje od spomenutog u teoriji funkcija vjerovanja. S obzirom da to nismo precizirali, najprije je potrebno pretpostaviti i definirati po kojoj vjerojatnosnoj mjeri svaki od krupjea donosi odluku o promjeni ishoda idućeg bacanja novčića. Stavimo da su p_1 i p_2 vjerojatnosti da je ishod prvog, odnosno drugog bacanja jednak g. Definirajmo vjerojatnosnu mjeru $\mathsf{P}\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ sa $\mathsf{P}(\{(g,g)\}) = p_1p_2$, $\mathsf{P}(\{(p,p)\}) = (1-p_1)(1-p_2)$, $\mathsf{P}(\{(p,g)\}) = (1-p_1)p_2$ i $\mathsf{P}(\{(g,p)\}) = p_1(1-p_2)$. Sada korištenjem definicije uvjetne vjerojatnosti imamo:

$$\mathsf{P}(\{(g,g)\}|H) = \frac{\mathsf{P}(\{(g,g)\} \cap H)}{\mathsf{P}(H)} = \frac{\mathsf{P}(\{(g,g)\})}{\mathsf{P}(\{(p,p)\}) + \mathsf{P}(\{(g,g)\})} = \frac{p_1p_2}{p_1p_2 + (1-p_1)(1-p_2)}.$$

Možemo vidjeti da je proces razmišljanja u spomenutim teorijama različit te da teorija funkcija vjerovanja u ovom slučaju ne zahtijeva da stvaramo pretpostavke o načinu donošenja odluka subjekata. Međutim, ukoliko u ovoj igri često sudjelujemo i s vremenom spoznamo način na koji krupjei donose odluke o promjeni ishoda bacanja novčića, tada je nepotrebno donositi pretpostavke o vjerojatnosnoj mjeri te je stoga sasvim razumno koristiti klasičnu teoriju vjerojatnosti.

4.2 Očekivanje u teoriji funkcija vjerovanja

U posljednjem odjeljku uvest ćemo pojam očekivanja iz [1] u okviru teorije funkcija vjerovanja.

Neka je zadano preslikavanje $X\colon S \to \mathbb{R}$, neka je $m\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ osnovno pridruživanje vjerovanja i neka je Bel njemu pripadna funkcija vjerovanja.

Definicija 4.2.1. *Očekivanje od X s obzirom na osnovno pridruživanje m definiramo sa*

$$\mathsf{E}_m(X) := \sum_{C \subseteq S} m(C)\, min_{s \in C} X(s). \tag{4.2}$$

U slučaju kada je osnovno pridruživanje vjerovanja definirano na jednočlanim podskupovima od S, odnosno kada je $Bel = \mathsf{P}$ vjerojatnosna mjera, definicija očekivanja u skladu je s definicijom iz klasične teorije vjerojatnosti:

$$\mathsf{E}_m(X) = \sum_{s \in S} m(\{s\})\, X(s) = \sum_{s \in S} p_s\, X(s) = \mathsf{E}(X).$$

Postavlja se pitanje postoje li analogoni klasičnih rezultata, poput slabog zakona velikih brojeva, u teoriji funkcija vjerovanja. Odgovor je potvrdan, međutim taj dio nećemo obrađivati u ovom radu. Čitatelju se preporučuje da pogleda članak [1], u kojem je iskazan i dokazan slabi zakon velikih brojeva u terminima funkcija vjerovanja.

Bibliografija

[1] T. Kerkvliet i R. W. J. Meester, *Quantifying knowledge with a new calculus for belief functions – a generalization of probability theory*, (2015), `https://arxiv.org/abs/1512.01249`.

[2] ______, *Assessing forensic evidence by computing belief functions*, Law, Probability and Risk 15, Issue 2, 127–153, 2016.

[3] I. Kramosil, *Probabilistic Analysis od Belief Functions*, Springer, 2001.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1992.

[5] G. Shafer, *A mathematical theory of evidence*, Princeton University Press, 1976.

Sažetak

U ovom radu proučavamo teoriju funkcija vjerovanja, koja se smatra generalizacijom klasične Kolmogorovljeve teorije vjerojatnosti, teoriju koja se temelji na našim stvarnim znanjima i spoznajama, a ne na pretpostavkama. Definiramo osnovna pridruživanja vjerovanja i njima pripadne funkcije vjerovanja te proučavamo njihova svojstva. Dajemo važan rezultat za karakterizaciju funkcija vjerovanja te također uvodimo pojam uvjetnih funkcija vjerovanja i pojam nezavisnosti. Kroz primjere smo nastojali čitatelju približiti način promišljanja i donošenja odluka u neznanju koristeći rezultate teorije funkcija vjerovanja.

Summary

In this work we have introduced the theory of belief functions which is a generalization of Kolmogorov's probability theory, the theory which is based on knowledge of facts rather than assumptions. We defined basic belief assignments and the corresponding belief functions and studied their basic properties. We gave an important result on characterization of belief functions. We also defined conditional basic belief assignments and introduced the concept of independence. Through examples, we showed the way of thinking and making decisions under uncertainty in terms of belief functions.

Životopis

Rođena sam 12. svibnja 1992. u Zaboku. Svoje školovanje započinjem u Osnovnoj školi Sveti Križ Začretje. 2007. godine upisala sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku, a 2011. godine Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Akademski naziv sveučilišne prvostupnice stječem 2015. godine, nakon čega upisujem Diplomski studij Matematičke statistike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, kojeg završavam ovim radom.