Stacionarni gaussovski procesi

Kolarić, Danijela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Danijela Kolarić

STACIONARNI GAUSSOVSKI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Na gaussovske procese možemo gledati kao na dalekosežno poopćenje klasičnih normalnih slučajnih varijabli. Teorija gaussovskih procesa je jedna od najnaprednijih u području vjerojatnosti, a primjenjiva je u statistici, financijama, predikciji i strojnom učenju te raznim drugim tehničkim i akademskim područjima. U radu prikazujemo značaj i važnost kanonske reprezentacije gaussovskih procesa, čiju teoriju je inicijalno dao Levy 1955. i istaknuo njezinu važnu ulogu u teoriji slučajnih procesa. Cilj nam je upoznati čitatelja s osnovnim svojstvima stacionarnih gaussovskih procesa te važnim rezultatima vezanim uz kanonsku reprezentaciju. Glavna literatura koja se u radu koristi je knjiga [7].

Ovaj rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju navodimo osnovne definicije i rezultate koji se direktno ne tiču gaussovskih slučajnih procesa, ali će biti potrebni u proučavanju istih. Poglavlje je podijeljeno u dvije cjeline. U prvoj cjelini dajemo osnovne rezultate iz teorije vjerojatnosti, a u drugoj iz teorije integrala i mjere. Većina rezultata koja se navodi u ovom poglavlju preuzeta je iz knjige [9].

Prvi korak u proučavanju gaussovskih procesa je definicija gaussovskih sistema te njihova osnovna svojstva, čime se bavimo u drugom poglavlju. Od osobite važnosti je normalna distribucija pa dajemo izraz njezine karakteristične funkcije te dokazujemo da ona ima konačne momente svakog reda. Također, promatramo nezavisne gaussovske slučajne varijable i njihova posebna svojstva. Na kraju poglavlja dajemo slične rezultate i za kompleksni slučaj.

Glavni dio rada čine treće i četvrto poglavlje. Koncentriramo se na gaussovske slučajne procese s diskretnim vremenskim parametrom. U trećem poglavlju dajemo definiciju kanonske reprezentacije gaussovskih slučajnih procesa te važne rezultate koji garantiraju egzistenciju i jedinstvenost te reprezentacije. Također promatramo karakterizaciju Markovljevog svojstva za gaussovske slučajne procese. Od bitne važnosti je rezultat koji kaže da je gaussovski slučajni proces Markovljev ako i samo ako je kanonska jezgra određenog oblika.

U četvrtom poglavlju se bavimo stacionarnim gaussovskim procesima. Na početku uvodimo pojam stacionarnosti i slabe stacionarnosti te pokazujemo da kod gaussovskih procesa jedna implicira drugu. U nastavku uvodimo pojmove determinističkog i potpuno nedeterminističkog procesa te Woldov teorem dekompozicije, koji kaže da se svaki slabo stacionarni proces može zapisati kao zbroj dva međusobno ortogonalna stacionarna procesa, od kojih je jedan potpuno nedeterministički, a drugi deterministički. Izneseni dokaz teorema je varijanta dokaza iz [2]. Nadalje, uvodimo pojam autokovarijacijske funkcije procesa, dajemo njezinu spektralnu reprezentaciju, kao i spektralnu reprezentaciju stacionarnog procesa. Odjeljak vezan uz spektralnu reprezentaciju procesa je informativne prirode pa čitatelja upućujemo na knjige [2], [3], [4], [6] i [7], gdje se mogu pronaći i dokazi iskazanih tvrdnji.

Peto i posljednje poglavlje se koncentrira na primjere stacionarnih gaussovskih procesa. Također, uvodimo pojam autokorelacijske funkcije i prikazujemo njezin graf za svaki proces koji navodimo. Najprije proučavamo i simuliramo gaussovski bijeli šum koji je osnovni temelj za ostale primjere gaussovskih procesa. Nastavljamo s $ARMA$ procesima te posebno promatramo MA procese i AR procese. Simuliramo iste i dajemo izraze za autokorelacijsku funkciju te pokazujemo u kojim slučajevima su stacionarni. Dokazi navedenih rezultata u ovom poglavlju mogu se pronaći u [4].

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i potrebni rezultati

1.1 Iz teorije vjerojatnosti

Neprekidne slučajne varijable

Definicija 1.1.1. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je F_X njezina funkcija distribucije. Kažemo da je X* ***apsolutno neprekidna slučajna varijabla*** *ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija f na $\mathbb{R}$, tj. $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, takva da je*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)d\lambda(t), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Kovarijanca kompleksnih slučajnih varijabli

Definicija 1.1.2. *Neka su X i Y kompleksne slučajne varijable. Tada je kovarijanca između X i Y dana sa*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\overline{(Y - \mathbb{E}(Y))}\Big),$$

gdje $\overline{(Y - \mathbb{E}(Y))}$ označava kompleksni konjugat od $Y - \mathbb{E}(Y)$.

Vjerojatnosti na beskonačno dimenzionalnim prostorima

Neka je Λ proizvoljan skup indeksa. Za svako $\lambda \in \Lambda$ stavimo $\mathbb{R}_\lambda = \mathbb{R}$. Sa $\mathbb{R}^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{R}_\lambda$ označimo skup svih realnih funkcija $\omega = (x(\lambda) : \lambda \in \Lambda) = (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ definiranih na skupu Λ. Ako je $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$, tada je $\mathbb{R}^\Lambda = \mathbb{R}^n$, ako je $\Lambda = \mathbb{N}$, tada pišemo $\mathbb{R}^\Lambda = \mathbb{R}^\infty$, a ako je $\Lambda = \mathbb{R}$, tada je $\mathbb{R}^\Lambda$ skup svih realnih funkcija realne varijable.

Uzmimo $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ konačan podskup od Λ i definirajmo projekciju $\pi_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} : \mathbb{R}^\Lambda \to \mathbb{R}^n$ sa

$$\pi_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(\omega) = (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}),\ \omega = (x(\lambda) : \lambda \in \Lambda) \in \mathbb{R}^\Lambda.$$

Definicija 1.1.3. *Za skup $C \in \mathbb{R}^\Lambda$ kažemo da je **Borelov cilindar s bazom B nad koordinatama** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ako postoje neprazan konačni podskup $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ od $\mathbb{R}^\Lambda$ i Borelov skup $B \in \mathcal{B}^n$ takvi da je*

$$C = \pi^{-1}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(B) = \{\omega \in \mathbb{R}^\Lambda : (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}) \in B\}.$$

Sa $\mathcal{F}^\Lambda$ označavamo familiju svih Borelovih cilindara u $\mathbb{R}^\Lambda$. Neka je $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\Lambda = \sigma(\mathcal{F}^\Lambda)$ σ-algebra generirana sa $\mathcal{F}^\Lambda$. $\mathcal{B}$ zovemo *σ-algebra Borelovih skupova u $\mathbb{R}^\Lambda$*, a njezine elemente zovemo *Borelovi skupovi u $\mathbb{R}^\Lambda$*.

Familiju funkcija distribucija $\{F_S\}$ indeksiranu po svim konačnim podskupovima S od Λ zovemo *suglasna familija* ako zadovoljava *uvjete suglasnosti Kolmogorova*:

1. Ako je $(i_1, \ldots, i_n)$ proizvoljna permutacija od $(1, \ldots, n)$, tada je

$$F_{\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

2. Ako je $m < n$, tada je

$$F_{\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_m}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) = F_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty).$$

Teorem 1.1.4. *(Kolmogorov) Neka je $\{F_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\}$ suglasna familija konačno dimenzionalnih funkcija distribucije. Tada postoji vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_\Lambda$ na σ-algebri $\mathcal{B}$ takva da*

$$\mathbb{P}_\Lambda(C) = \mathbb{P}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(B) \tag{1.1}$$

vrijedi za svaki Borelov cilindar C. Osim toga, $\mathbb{P}_\Lambda$ je jednoznačno određena s (1.1).

Dokaz se može pronaći u knjizi N. Sarape [9].

Definicija 1.1.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka je $\Lambda = \mathbb{Z}$ ili $\Lambda = \mathbb{Z}_+$. Familiju $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ slučajnih varijabli na Ω zovemo **slučajni proces** (s diskretnim vremenom).*

Karakteristične funkcije

Definicija 1.1.6. *Neka je F ograničena funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. **Karakteristična funkcija** od F je funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana sa*

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos txdF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin txdF_X(x),\ t \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.1.7. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X.* ***Karakteristična funkcija*** *ϕ_X od X je karakteristična funkcija od F_X.*
Drugim riječima, ***karakteristična funkcija slučajne varijable*** *X je funkcija $\phi_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dana formulom $\phi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}$. Općenitije,* ***karakterističnu funkciju slučajnog vektora*** *$X = (X_1, \dots, X_n)$ definiramo kao funkciju $\phi_X \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ danu formulom $\phi_{X_1,\dots,X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}$, tj. $\phi_X(t) = \mathbb{E}e^{it\cdot X}$ za svaki $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Teorem 1.1.8. *Slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako vrijedi*

$$\phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t_k), \ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz se može pronaći u knjizi N. Sarape [9].

1.2 Iz teorije integrala i mjere

Prostor $L^2(\Omega)$

Definirajmo skup

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ je slučajna varijabla takva da je } \mathbb{E}(X^2) < \infty\}$$

i preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$

sa

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY).$$

Ovako definirano preslikavanje je dobro definirano zbog Cauchy-Schwarzove nejednakosti za matematičko očekivanje

$$\mathbb{E}|XY| \leq |X||Y|,$$

ali nije skalarni produkt jer ne vrijedi pozitivna definitnost, tj. vrijedi

$$\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ g.s.}$$

Stoga promatramo relaciju ekvivalencije

$$X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \text{ g.s.}$$

i odgovarajući kvocijentni skup $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = L^2(\Omega)$.

Teorem 1.2.1. *$L^2(\Omega)$ je unitaran vektorski prostor. Za $X, Y \in L^2(\Omega)$ stavimo*

$$\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}(XY). \tag{1.2}$$

Sa (1.2) *je definiran skalarni produkt na $L^2(\Omega)$.*

Dokaz se može pronaći u knjizi S. Mardešića [8].

$L^2(\Omega)$ je i potpun prostor (dokaz se može pronaći u R. B. Ash [1]). Prema tome, $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor. Norma na tom prostoru definirana je pomoću $\|X\| := \sqrt{\langle X, X\rangle}$.

Ukoliko radimo s kompleksnim slučajnim varijablama sve isto ostaje vrijediti uz skalarni produkt definiran sa

$$\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}(X\overline{Y}).$$

Definicija 1.2.2. *Kažemo da su slučajne varijable $X, Y \in L^2(\Omega)$* ***ortogonalne*** *i pišemo $X \perp Y$ ako je $\langle X, Y\rangle = 0$. Skup $K \subset L^2(\Omega)$ je skup* ***ortogonalnih slučajnih varijabli*** *ako je $X \perp Y$ za proizvoljne $X, Y \in K,\ X \neq Y$. Ako je još $\|X\| = 1$ za svako $X \in K$, tada K zovemo* ***ortonormiran skup*** *u $L^2(\Omega)$.*

Propozicija 1.2.3. *Neka su X i Y slučajne varijable s očekivanjem nula. Tada su X i Y ortogonalne ako i samo ako su nekorelirane.*

Dokaz. Neka su slučajne varijable X i Y ortogonalne. Tada je $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(XY) = 0$. Izračunajmo kovarijancu između X i Y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \big(\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0,\ \mathbb{E}(XY) = 0 \text{ po pretpostavci}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Obratno, neka je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\
&= \big(\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0\big) \\
&= \mathbb{E}(XY) = \langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Definicija 1.2.4. *Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada slučajnu varijablu $g(X)$ zovemo procjena za Y. Procjenu $g^*(X)$ zovemo optimalna procjena u srednjekvadratnom smislu ako je*

$$\mathbb{E}[(Y - g^*(X))^2] = \inf_g \mathbb{E}[(Y - g(X))^2],$$

pri čemu se infimum uzima po nekoj klasi Borelovih funkcija.

Propozicija 1.2.5. *Neka je $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ortonormiran skup u $L^2(\Omega)$ i $X \in L^2(\Omega)$. Optimalna procjena u srednjekvadratnom smislu za slučajnu varijablu X u klasi linearnih procjena $\sum_{i=1}^n a_i Y_i$ je procjena*

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \langle X, Y_i \rangle Y_i. \tag{1.3}$$

Dokaz se može pronaći u knjizi N. Sarape [9].
Geometrijski smisao optimalne linearne procjene $\hat{X}$ je sljedeći. Neka je $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Y_1, \ldots, Y_n)$ linearan potprostor od $L^2(\Omega)$ razapet ortonormiranih skupom $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Tada imamo

$$X = \hat{X} + (X - \hat{X}),$$

pri čemu je prema (1.3) $\hat{X} \in \mathcal{L}$, a $X - \hat{X} \perp \mathcal{L}$ u smislu da je $X - \hat{X} \perp Y$ za svako $Y \in \mathcal{L}$. Varijablu $\hat{X}$ zovemo *ortogonalna projekcija* od X na potprostor $\mathcal{L}$.

Uvjetno očekivanje

Definicija 1.2.6. *Slučajnu varijablu $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ zovemo* ***uvjetno očekivanje od X uz danu σ-algebru*** *$\mathcal{F}$. $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ je jednoznačno određena, do na $\mathcal{F}$-izmjeriv skup vjerojatnosti nula, relacijom*

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P},$$

za sve $B \in \mathcal{F}$.

Gornja definicija se odnosi na uvjetno očekivanje za danu σ-algebru na vjerojatnosnom prostoru na kojem su definirane slučajne varijable. Uvjetno očekivanje možemo konstruirati na sljedeći način.

Neka je $X \in L^1(\Omega)$ i neka je Y proizvoljna slučajna varijabla. Funkcija ψ definirana na $\mathcal{B}$ sa

$$\psi(B) = \int_{\{Y \in B\}} X d\mathbb{P}, \ B \in \mathcal{B},$$

je σ-aditivna, $\psi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, dakle ψ je razlika dviju konačnih mjera. Osim toga, ψ je očigledno apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}_Y$ pa iz Radon-Nikodymova teorema slijedi da postoji Borelova funkcija $y \mapsto \mathbb{E}(X|Y = y)$ definirana za svako $y \in \mathbb{R}$ i jednoznačno određena do na Borelov skup $\mathbb{P}_Y$-mjere nula, relacijom

$$\int_B \mathbb{E}(X|Y = y) d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\{Y \in B\}} X d\mathbb{P}$$

za svako $B \in \mathcal{B}$. Funkciju $\mathbb{E}(X|Y = y)$ zovemo **uvjetno očekivanje od X uz dano** $Y = y$. U sljedećoj propoziciji dajemo neka važna svojstva uvjetnog očekivanja.

Propozicija 1.2.7. *Neka su* $X_1, X_2, X \in L^1(\Omega)$. *Tada vrijedi*

1. *Ako je* $X = c$ *(g.s.) gdje je c konstanta, tada je*

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = c \ (g.s. \ obzirom \ na \ \mathbb{P}_Y).$$

2. $\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2|Y = y) = a_1\mathbb{E}(X_1|Y = y) + a_2\mathbb{E}(X_2|Y = y)$ $(g.s.$ *obzirom na* $\mathbb{P}_Y)$ *za proizvoljne konstante* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

3. *Ako je* $X_1 \leq X_2$ $(g.s.$ *obzirom na* $\mathbb{P}_Y)$, *tada je* $\mathbb{E}(X_1|Y = y) \leq \mathbb{E}(X_2|Y = y)$ $(g.s.$ *obzirom na* $\mathbb{P}_Y)$.

4. $|\mathbb{E}(X|Y = y)| \leq \mathbb{E}(|X||Y = y)$ $(g.s.$ *obzirom na* $\mathbb{P}_Y)$.

5. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X)$ *pri čemu* $\mathbb{E}(X|Y)$ *zapravo znači* $\mathbb{E}(X|\sigma(Y))$.

6. *Ako je g Borelova funkcija takva da je* $g(Y)X \in L^1(\Omega)$, *tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(g(Y)X|Y = y) = g(y)\mathbb{E}(X|Y = y) \ (g.s. \ obzirom \ na \ \mathbb{P}_Y).$$

7. *Ako su X i Y nezavisne, tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}(X) \ (g.s. \ obzirom \ na \ \mathbb{P}_Y).$$

8. *Ako je* $Y = c$ *(g.s.) gdje je c konstanta, tada je* $\mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}(X)$ $(g.s.$ *obzirom na* $\mathbb{P}_Y)$.

9. *Ako je X* $\mathcal{F}$*-izmjeriva, tada je* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ *(g.s.)*

Dokaz se može pronaći u knjizi N. Sarape [9].

Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji

Teorem 1.2.8. *Ako je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor mjere i* $g : X \to [0, \infty)$ μ*-integrabilna funkcija te ako za gotovo svaki* $x \in X$ *vrijedi*

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \ \ i \ \ |f_n(x)| \leq g(x), \quad za \ svaki \ n \in \mathbb{N},$$

tada su f *i* f_n *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ μ*-integrabilne funkcije i*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz se može pronaći u knjizi S. Mardešića [8].

Poglavlje 2

Definicije i osnovna svojstva gaussovskih sistema

2.1 Sistemi gaussovskih slučajnih varijabli

Neka su $m, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Kažemo da je neprekidna slučajna varijabla X *gaussovska slučajna varijabla* s parametrima m i σ^2, u oznaci $X \sim N(m, \sigma^2)$, ako joj je funkcija gustoće dana sa

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R},$$

gdje konstante m i σ^2 predstavljaju redom, očekivanje i varijancu. U slučaju $m = 0$ i $\sigma = 1$ kažemo da X ima *standardnu gaussovsku distribuciju* i označavamo $X \sim N(0, 1)$. Funkcija gustoće standardne gaussovske slučajne varijable dana je sa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Iz tehničkih razloga nam je praktično reći da i slučajna varijabla X koja zadovoljava $X = m$ g.s. (dakle g.s. je jednaka konstanti) ima gaussovsku distribuciju s parametrom $\sigma = 0$ (jer joj je varijanca jednaka 0).

Neka su $\rho, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $-1 < \rho < 1$ i $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Kažemo da je 2-dimenzionalni neprekidni slučajni vektor X *gaussovski* ako mu je funkcija gustoće dana sa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\bigg\{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\bigg[\bigg(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\bigg)^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\\ + \bigg(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\bigg)^2\bigg]\bigg\}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje sa ρ označavamo koeficijent korelacije slučajnih varijabli X_1 i X_2.

Općenitije, neka je $n \in \mathbb{N}$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ i V realna, simetrična, pozitivno definitna matrica reda n. Tada je $\det(V) > 0$ i $V^{-1} = [\sigma_{i,j}]$ je također simetrična i pozitivno definitna matrica reda n. Kažemo da je X *n-dimenzionalni gaussovski slučajni vektor* s parametrima m i V ako mu je funkcija gustoće dana sa

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det(V))^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x-m)V^{-1}(x-m)^{\tau}}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

gdje je m vektor očekivanja i $V = (V_{i,j})$ kovarijacijska matrica od X, a $V_{i,j}$ kovarijance između X_i i X_j. Sada možemo dati općenitu definiciju.

Definicija 2.1.1. *Sistem slučajnih varijabli $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ zovemo* ***gaussovskim*** *ako je svaka konačna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^n a_k X_{\lambda_k}$ za neke $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$, gaussovska slučajna varijabla. Ako je X slučajni proces, zovemo ga* ***gaussovski proces****.*

I u slučaju gausssovskih sistema definirani su moguće beskonačni vektor očekivanja $m = (m_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ i moguće beskonačna kovarijacijska matrica $V = (V_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda)$. Kovarijacijska matrica V je pozitivno definitna u smislu da je za svake $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pozitivno definitna i matrica $V = (V_{\lambda_i,\lambda_j})$ reda n.

Teorem 2.1.2. *Neka je $m = (m_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ bilo koji vektor i neka je $V = (V_{\lambda_i,\lambda_j})$ bilo koja regularna, simetrična, pozitivno definitna matrica. Tada postoji gaussovski sistem $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ s danim vektorom očekivanja m i kovarijacijskom matricom V. Osim toga, distribucija od X je jedinstvena.*

U teoremu 2.1.2, jedinstvenost znači da ako su $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ i $X' = \{X'_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ gaussovski sistemi s istim vektorom očekivanja m i istom kovarijacijskom matricom V, tada su za svake $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distribucije od $(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n})$ i $(X'_{\lambda_1}, X'_{\lambda_2}, \dots, X'_{\lambda_n})$ jednake.

Dokaz. Najprije formiramo potreban gaussovski sistem. Uzmimo za Ω prostor funkcija $\mathbb{R}^\Lambda$ i neka je $\mathcal{B}$ σ-algebra generirana svim cilindrima iz Ω. Sada imamo izmjeriv prostor $(\Omega, \mathcal{B})$. Za cilindar $C = \{\omega = (\omega_\lambda) : (\omega_{\lambda_1}, \omega_{\lambda_2}, \dots, \omega_{\lambda_n}) \in B\}$, gdje je B Borelov skup u $\mathbb{R}^n$, definiramo

$$\mathbb{P}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}(C) = \int_B f(x)dx, \tag{2.3}$$

gdje je $f(x)$ funkcija gustoće definirana kao u (2.2), osim što umjesto m stavljamo samo dio tog vektora $(m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_n})$, a umjesto V uzimamo $(V_{\lambda_i,\lambda_j} : i, j = 1, \dots, n)$. Sada imamo vjerojatnosnu mjeru na σ-algebri generiranoj cilindrima za svaki konačan λ. Kolekcija tako dobivenih mjera svakako zadovoljava uvjet kompatibilnosti. Prema Kolmogorovljevom teoremu postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{B})$. Stavimo $\omega_\lambda = X_\lambda(\omega)$. Sada je $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ gaussovski sistem definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ s vektorom očekivanja m i kovarijacijskom matricom V, iz pretpostavke teorema.

Za drugi dio dokaza samo primijetimo da je svaka konačno dimenzionalna gaussovska distribucija jedinstveno određena vektorom očekivanja i kovarijacijskom matricom. □

2.2 Neka svojstva gaussovske distribucije

Slijede neka važna svojstva karakteristična za gaussovsku distribuciju i gaussovski sistem. Najprije ćemo se koncentrirati na 1-dimenzionalnu gaussovsku distribuciju, tj. na gaussovske slučajne varijable, a zatim na višedimenzionalnu gaussovsku distribuciju.

Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je karakteristična funkcija slučajne varijable X dana sa

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Za proizvoljne $t, x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}.$$

Uvrstimo prethodno u (2.4) pa dobivamo

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} dx, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Zamijenimo sada redoslijed sumiranja i integriranja (zahvaljujući Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji),

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Budući da je

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

parna funkcija za paran k i neparna funkcija za neparan k, vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (-x)^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

$$= ((-1)^k + 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Sada je izraz u (2.6) jednak izrazu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}((-1)^k + 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Uvedemo li u gornji izraz supstituciju $u = \frac{x^2}{2}$, dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{(-1)^k + 1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (2u)^{\frac{k}{2}} e^{-u} (2u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{(-1)^k + 1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{k-1}{2}} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Uočimo da je integral u zadnjem izrazu zapravo gama funkcija s parametrom $\frac{k+1}{2}$. Sada dobivamo

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{(-1)^k + 1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

Budući da za neparne k vrijedi $(-1)^k + 1 = 0$, sumiramo samo po parnim k. Konačno,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{(-1)^{2k} + 1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{2k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2^{k-1} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Za daljnji račun nam treba sljedeća lema.

Lema 2.2.1. *Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Dokaz. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Po definiciji beta funkcije imamo

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)} = \int_0^1 u^{m-1}(1 - u)^{n-1} du.$$

Stavimo sada $m = n = z$. Slijedi

$$B(z, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 u^{z-1}(1 - u)^{z-1} du.$$

Uvedimo supstituciju $u = \frac{1+x}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{1+x}{2}\right)^{z-1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1} dx \\
&= 2^{-1+2-2z} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx = 2^{1-2z}\left(2\int_{0}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx\right).
\end{aligned}$$

Uvedemo li supstituciju $u = x^2$, izraz za $B(m, n)$ možemo zapisati u sljedećem obliku

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = 2\int_0^1 x^{2m-1}(1-x^2)^{n-1} dx.$$

Imamo

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} B(\frac{1}{2}, z) = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})},$$

odakle uz $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ slijedi tvrdnja. □

Sada imamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{2^{k-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1-k} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-k}(it)^{2k}}{(2k)(2k-1)!} \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{(it)^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{(it)^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{t^2}{2}}, \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Moramo još opravdati zamjenu redoslijeda sumiranja i integriranja u (2.6). Za $x, t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(itx)^k}{k!} \right| e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|tx|^k}{k!} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{|tx|} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{|tx| - \frac{x^2}{2}}.$$

Budući da je funkcija $x \mapsto e^{|tx| - \frac{x^2}{2}}$ integrabilna na $\mathbb{R}$, tvrdnja slijedi iz teorema o dominiranoj konvergenciji.

Neka je sada $X \sim N(m, \sigma^2)$. Tada je $\frac{X-m}{\sigma} = Y \sim N(0, 1)$, odnosno $X = \sigma Y + m$. Da bismo izračunali karakterističnu funkciju slučajne varijable X potrebna nam je sljedeća propozicija.

Propozicija 2.2.2. *Ako je X slučajna varijabla i $a, b \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$\phi_{aX+b} = e^{ibt}\phi_X(at),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Iz definicije karakteristične funkcije slijedi

$$\phi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}(e^{it(aX+b)}) = e^{ibt}\mathbb{E}(e^{iatX}) = e^{ibt}\phi_X(at).$$

□

Ako primijenimo gornju propoziciju na slučajnu varijablu X, dobivamo sljedeće

$$\phi_X(t) = \phi_{\sigma Y+m}(t) = e^{imt}\phi_Y(\sigma t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Neka je $\psi(t)$ karakteristična funkcija slučajne varijable X, tj. $1-$dimenzionalne distribucije F. Zapišimo $\log\psi(t)$ u obliku

$$\log\psi(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\gamma_k + o(t^n), \tag{2.7}$$

gdje je γ_k tzv. poluinvarijanta stupnja k i $o(t^n)$ greška, čiji eksplicitni izraz je dan sa

$$\frac{(it)^n}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 x^n(1-y)^{n-1}(e^{itxy}-1)\,dy\,dF(x),$$

sa svojstvom

$$\lim_{t\to 0}\frac{o(t^n)}{t^n} = 0.$$

Karakteristična funkcija gaussovske slučajne varijable $X \sim N(m, \sigma^2)$ je prema dokazanome dana sa

$$\phi(t) = e^{imt-\frac{\sigma^2}{2}t^2}. \tag{2.8}$$

Ako to zapišemo u obliku (2.7), dobivamo

$$\log\phi(t) = imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2.$$

Uočimo da su za gaussovsku slučajnu varijablu polu-invarijante stupnja $k \geq 3$ jednake $\gamma_k = 0$. Dakle, za gaussovsku slučajnu varijablu imamo

$$\gamma_1 = m,\ \ \gamma_2 = \sigma^2,$$

a to su upravo parametri distribucije.

Gaussovska distribucija ima momente svakog reda. Moment $n-$tog reda, $m_n = \mathbb{E}(X^n)$, je dan sa

$$m_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ (2k-1)!!\,\sigma^{2k}, & n = 2k. \end{cases}$$

Neparni momenti su jednaki 0 jer je funkcija $x \mapsto x^{2k-1}e^{-x^2/2}$ neparna funkcija, a integral neparne funkcije na simetričnom intervalu je 0. Pokažimo slučaj za paran k. Najprije za $\alpha \in \mathbb{N}$ izračunajmo sljedeći integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Uvedimo supstituciju $x = \frac{u}{\sqrt{2\alpha}}$. Dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Računamo sljedeći integral parcijalnom integracijom

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{2k-1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} e^{-\alpha x^2} dx = \dots \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}} \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}. \end{aligned}$$

Stavimo sada $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ i pomnožimo integral s $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ da bismo dobili izraz za n-ti moment $(n = 2k)$. Dobivamo sljedeće

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi(2\sigma^2)^{2k+1}} = (2k-1)!!\sigma^{2k}.$$

Osim toga, možemo dati izraz za apsolutni moment n-tog reda, $\mathbb{E}|X|^n$.

$$\mathbb{E}|X|^n = \begin{cases} 2^k \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma^{2k+1} k!, & n = 2k+1 \\ (2k-1)!!\,\sigma^{2k}, & n = 2k. \end{cases}$$

Pokažimo da gornji izraz vrijedi. Za parne n je n-ti apsolutni moment zapravo n-ti moment od X pa nam preostaje pokazati za neparan n $(n = 2k+1)$.

$$\mathbb{E}|X|^{2k+1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Uvedimo supstituciju $y = \frac{x^2}{2\sigma^2}$. Imamo sljedeće

$$\mathbb{E}|X|^{2k+1} = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 2^k \sigma^{2k+2} y^k e^{-y} dy = \frac{2^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{2k+1} \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy.$$

Uočimo da je integral s desne strane zadnje jednakosti zapravo gama funkcija s parametrom $k+1$. Konačno,

$$\mathbb{E}|X|^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k \sigma^{2k+1} \Gamma(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k \sigma^{2k+1} k!.$$

Ako je $\{X, Y\}$ gaussovski sistem takav da X i Y nisu linearno zavisne, tada je uvjetna distribucija $\mathbb{P}(X \leq x|Y)$ također gaussovska. Ovo svojstvo proizlazi iz svojstava funkcije gustoće dvodimenzionalne gaussovske distribucije (2.1). Uvjetna očekivanja $\mathbb{E}(X|Y)$ i $\mathbb{E}(Y|X)$ su linearna u X i Y.

Teorem 2.2.3. *Ako su X i Y nezavisne i imaju konačne varijance, tada njihova kovarijanca postoji i jednaka je nuli. Vrijedi i obrat, tj. ako je $\{X, Y\}$ realni gaussovski sistem takav da je* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$*, tada su X i Y nezavisne.*

Dokaz. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s konačnim varijancama. Tada su konačna i očekivanja, tj. vrijedi $\mathbb{E}(X) < \infty$, $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\
&= \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)] = (linearnost) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = (nezavisnost) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.
\end{aligned}$$

Obratno, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su X i Y centrirane. Po teoremu 1.1.8 slijedi da su slučajne varijable X i Y nezavisne ako i samo ako vrijedi

$$\phi_{(X,Y)}(s, t) = \phi_X(s) \cdot \phi_Y(t), \text{ za svake } s, t \in \mathbb{R}.$$

Označimo s v kovarijancu od X i s w kovarijancu od Y. Tada je

$$U = \begin{pmatrix} v & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(Y, X) & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

kovarijacijska matrica slučajnog vektora (X, Y). Ako stavimo $r = (s, t)$, imamo

$$\begin{aligned}
\phi_{(X,Y)}(s, t) &= \mathbb{E}(e^{ir\cdot(X,Y)}) = e^{-\frac{1}{2}(rUr^\tau)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(vs^2) - \frac{1}{2}(wt^2)} = e^{-\frac{1}{2}(vs^2)} e^{-\frac{1}{2}(wt^2)} \\
&= \phi_X(s)\phi_Y(t).
\end{aligned}$$

Dakle, X i Y su nezavisne. □

Ako su X i Y nezavisne gaussovske slučajne varijable, tada je i njihova suma, $X + Y$ gaussovska slučajna varijabla. Djelomično vrijedi i obrat.

Teorem 2.2.4. *(P. Lévy i H. Cramer)*
Ako su X i Y nezavisne i njihova suma je gaussovska slučajna varijabla, tada su X i Y gaussovske slučajne varijable.

Dokaz se može pronaći u Fellerovoj knjizi [5].

2.3 Kompleksni gaussovski sistemi

U ovom poglavlju dajemo rezultate vezane uz kompleksne gaussovske slučajne varijable. Možemo se zapitati kako bismo uveli kompleksni slučaj kao prirodan nastavak na realan, sa svim dobrim svojstvima koje imaju realne gaussovske slučajne varijable. Ipak, nije dovoljno samo pretpostaviti da i realni i imaginarni dio imaju gaussovsku distribuciju. Krećemo sa slučajnim varijablama.

Neka je Z kompleksna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo s $m \in \mathbb{C}$ očekivanje od Z te sa X i Y redom, realni i imaginarni dio od $Z - m$. Tada Z ima sljedeći oblik

$$Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega) + m. \tag{2.9}$$

Definicija 2.3.1. *Ako su X i Y u* (2.9) *međusobno nezavisne, centrirane (očekivanje im je jednako 0), gaussovske slučajne varijable s istom varijancom, tada Z zovemo **kompleksnom gaussovskom slučajnom varijablom**.*

Sada možemo dati definiciju kompleksnog gaussovskog sistema.

Definicija 2.3.2. *Neka je $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sistem gaussovskih slučajnih varijabli. Ako je linearna kombinacija, s kompleksnim koeficijentima, bilo kojeg konačnog broja elemenata iz Z uvijek kompleksna gaussovska slučajna varijabla, tada Z zovemo **kompleksnim gaussovskim sistemom**. Ako je Λ skup cijelih brojeva ili interval realnih brojeva, tada Z zovemo **kompleksnim gaussovskim procesom**.*

U sljedećoj propoziji dajemo osnovna svojstva kompleknih gaussovskih sistema.

Propozicija 2.3.3. *(i) Ako je $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kompleksni gaussovski sistem, tada je sistem $\{X_\lambda, Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ realnih slučajnih varijabli, izveden iz dekompozicije $Z_\lambda = X_\lambda + iY_\lambda$, realni gaussovski sistem.*

(ii) Ako je $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sistem kompleksnih gaussovskih slučajnih varijabli koje su međusobno nezavisne, tada je Z kompleksni gaussovski sistem.

(iii) Za dani kompleksni gaussovski sistem $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ formiramo novi sistem $\overline{Z} = \{\overline{Z}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, kompleksni konjugat od Z_λ. Tada je $\overline{Z}_\lambda$ također kompleksni gaussovski sistem.

(iv) Podsistem kompleksnog gaussovskog sistema Z je također kompleksni gaussovski sistem.

Dokaz. (i) Neka je $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kompleksni gaussovski sistem. To znači da je konačna linearna kombinacija konačno mnogo proizvoljnih $Z_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Uzmemo li linearnu kombinaciju

$$\sum_{j=1}^{n} c_j Z_{\lambda_j} - i \sum_{k=1}^{n} d_k Z_{\lambda_k},\ c_j, d_k \in \mathbb{R},$$

dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} c_j Z_{\lambda_j} - i \sum_{k=1}^{n} d_k Z_{\lambda_k} = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + i \sum_{j=1}^{n} c_j Y_j - i \sum_{k=1}^{n} d_k X_k + \sum_{k=1}^{n} d_k Y_k.$$

Sada uočimo da je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j + \sum_{k=1}^{n} d_k Y_k$$

realni dio kompleksne gaussovske slučajne varijable.

(ii) Neka je $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sistem kompleksnih gaussovskih slučajnih varijabli koje su međusobno nezavisne. Treba pokazati da je linearna kombinacija konačno mnogo proizvoljnih Z_λ kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Stavimo

$$Z_{\lambda_k} = m_k + X_k + iY_k$$

i uzmimo $c_k = a_k + ib_k,\ a_k, b_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots, n$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} c_k Z_{\lambda_k} &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k)(X_k + iY_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k m_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k X_k + ia_k Y_k + ib_k X_k - b_k Y_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k m_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k - \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k \right) + i \left(\sum_{k=1}^{n} b_k X_k + \sum_{k=1}^{n} a_k Y_k \right) + \sum_{k=1}^{n} c_k m_k
\end{aligned}$$

Iz (i) znamo da je sistem $\{X_\lambda, Y_\lambda\}$ gaussovski. Ako oduzmemo očekivanja s lijeve i s desne strane, zaključujemo da su varijance dviju zagrada jednake. Naime,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(Z_{\lambda_k} - m_k)\right) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(X_k + iY_k + m_k - m_k)\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(X_k + iY_k)\right)\\ &= \mathrm{Var}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k - \sum_{k=1}^{n} b_kY_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} b_kX_k + \sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right)\right].\end{aligned}$$

Osim toga, budući da su Z_λ međusobno nezavisne za svaki $\lambda \in \Lambda$, kovarijanca je jednaka nuli. Dakle, $\sum_{k=1}^{n} c_kZ_{\lambda_k}$ je kompleksna gaussovska slučajna varijabla.

(iii) Neka je $Z = \{Z_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$ sistem kompleksnih gaussovskih slučajnih varijabli koje su međusobno nezavisne. Analogno kao i u (ii) treba pokazati da je linearna kombinacija svaka dva $\overline{Z}_\lambda$ kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Stavimo

$$\overline{Z}_{\lambda_k} = m_k + X_k - iY_k$$

i uzmimo $c_k = a_k + ib_k,\ a_k, b_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k\overline{Z}_{\lambda_k} &= \sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k)(X_k - iY_k) + \sum_{k=1}^{n} c_km_kk\\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_kX_k - ia_kY_k + ib_kX_k + b_kY_k) + \sum_{k=1}^{n} c_km_k\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k + \sum_{k=1}^{n} b_kY_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} b_kX_k - \sum_{k=1}^{n} a_kY_k\right) + \sum_{k=1}^{n} c_km_k.\end{aligned}$$

Iz (i) znamo da je sistem $\{X_\lambda, Y_\lambda\}$ gaussovski. Sada kao u (ii) zaključujemo da je $\sum_{k=1}^{n} c_k\overline{Z}_{\lambda_k}$ kompleksna gaussovska slučajna varijabla.

(iv) Neka je $Z = \{Z_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$ kompleksni gaussovski sistem. Tada je svaka konačna linearna kombinacija

$$\sum_{k=1}^{n} a_kZ_{\lambda_k},\ a_k \in \mathbb{C}$$

kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Uzmemo li $Z' = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$, pri čemu je Λ' neki podskup od Λ, tada je Z' također kompleksni gaussovski sistem jer su sve konačne linearne kombinacije njegovih članova upravo gornjeg oblika, pri čemu λ_k uzimamo samo iz podskupa Λ'.

$\square$

Propozicija 2.3.4. *Neka je $\{Z_1, Z_2\}$ kompleksni gaussovski sistem. Da bi Z_1 i Z_2 bile nezavisne, nužno je i dovoljno da vrijedi* $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = 0$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da su Z_1 i Z_2 centrirane slučajne varijable. Ako su Z_1 i Z_2 nezavisne, tada je njihova kovarijanca

$$\mathbb{E}(Z_1\overline{Z_2}) = \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(\overline{Z_2}) = 0.$$

Obratno, pretpostavimo da kovarijanca od Z_1 i Z_2 iščezava, tj. vrijedi $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = 0$. Zapišimo Z_1 i Z_2 u obliku (2.9) i stavimo $m = 0$. Dakle, imamo

$$Z_j = X_j + iY_j, \ \ j = 1, 2.$$

Prema pretpostavci vrijedi sljedeće

$$\mathbb{E}\{(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2)\} = 0.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(Y_1Y_2) &= 0, \\ \mathbb{E}(Y_1X_2) - \mathbb{E}(X_1Y_2) &= 0. \end{aligned}$$

S druge strane, linearne kombinacije

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 \pm X_2) + i(Y_1 \pm Y_2)$$

i

$$Z_1 \pm iZ_2 = (X_1 \mp Y_2) + i(Y_1 \pm X_2)$$

su također kompleksne gaussovske. Kako su realni i imaginarni dio svake od njih međusobno nezavisni, dobivamo

$$0 = \mathbb{E}[(X_1 \pm X_2)(Y_1 \pm Y_2)] = \big(\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_2Y_2)\big) \pm \big(\mathbb{E}(X_1Y_2) - \mathbb{E}(Y_1X_2)\big)$$

i

$$0 = \mathbb{E}[(X_1 \mp Y_2)(Y_1 \pm X_2)] = \big(\mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_2Y_2)\big) \pm \big(\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(Y_1Y_2)\big).$$

Odavde imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(Y_1Y_2) &= 0, \\ \mathbb{E}(X_1Y_2) + \mathbb{E}(Y_1X_2) &= 0. \end{aligned}$$

Konačno,

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(Y_1Y_2) = \mathbb{E}(X_1Y_2) = \mathbb{E}(Y_1X_2) = 0.$$

Dakle, $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$ je nezavisni sistem pa prema teoremu 2.2.3 slijedi da su slučajni vektori (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) nezavisni, tj. slučajne varijable Z_1 i Z_2 su nezavisne. □

Za kompleksni gaussovski sistem $Z = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ su vektor očekivanja $m = (m_\lambda)$ i pozitivno definitna kovarijacijska matrica $V = (V_{\lambda,\mu})$ dani sa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_\lambda) &= m_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \\ \mathbb{E}[(Z_\lambda - m_\lambda)(\overline{Z}_\mu - \overline{m}_\mu)] &= V_{\lambda,\mu},\ \lambda, \mu \in \Lambda. \end{aligned}$$

Isto vrijedi i u realnom slučaju. Sada stavimo

$$V_{\lambda,\mu} = 2(v_{\lambda,\mu} + iw_{\lambda,\mu}),\ v_{\lambda,\mu}, w_{\lambda,\mu} \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

te neka je $Z_\lambda = X_\lambda + iY_\lambda + m_\lambda$ i $Z_\mu = X_\mu + iY_\mu + m_\mu$ kao prije. Primijetimo da su Z_λ, Z_μ i $Z_\lambda + iZ_\mu$ kompleksne gaussovske varijable. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} v_{\lambda,\mu} &= v_{\mu,\lambda} = \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) = \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu), \\ w_{\lambda,\mu} &= -w_{\mu,\lambda} = \mathbb{E}(Y_\lambda X_\mu) = -\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu). \end{aligned}$$

Dokažimo najprije da vrijedi $v_{\lambda,\mu} = v_{\mu,\lambda}$ i $w_{\lambda,\mu} = -w_{\mu,\lambda}$. Za $\lambda, \mu \in \Lambda$ imamo

$$V_{\lambda,\mu} = \mathbb{E}[(Z_\lambda - m_\lambda)(\overline{Z}_\mu - \overline{m}_\mu)]$$

i

$$V_{\mu,\lambda} = \mathbb{E}[(Z_\mu - m_\mu)(\overline{Z}_\lambda - \overline{m}_\lambda)].$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} V_{\lambda,\mu} &= \mathbb{E}[(X_\lambda + iY_\lambda)(X_\mu - iY_\mu)] = \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) - i\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) + i\mathbb{E}(Y_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu) \\ &= (\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu)) + i(\mathbb{E}(Y_\lambda X_\mu) - \mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu)) = 2(v_{\lambda,\mu} + iw_{\lambda,\mu}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu,\lambda} &= \mathbb{E}[(X_\mu + iY_\mu)(X_\lambda - iY_\lambda)] = \mathbb{E}(X_\mu X_\lambda) - i\mathbb{E}(X_\mu Y_\lambda) + i\mathbb{E}(Y_\mu X_\lambda) + \mathbb{E}(Y_\mu Y_\lambda) \\ &= (\mathbb{E}(X_\mu X_\lambda) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu)) + i(\mathbb{E}(Y_\mu X_\lambda) - \mathbb{E}(X_\mu Y_\lambda)) = 2(v_{\mu,\lambda} + iw_{\mu,\lambda}) \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} 2v_{\lambda,\mu} &= \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu), \\ 2v_{\mu,\lambda} &= \mathbb{E}(X_\mu X_\lambda) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu) \end{aligned}$$

pa je $2v_{\lambda,\mu} = 2v_{\lambda,\mu}$. Analogno,

$$\begin{aligned} 2w_{\lambda,\mu} &= \mathbb{E}(Y_\lambda X_\mu) - \mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu), \\ 2w_{\mu,\lambda} &= \mathbb{E}(Y_\mu X_\lambda) - \mathbb{E}(X_\mu Y_\lambda) \end{aligned}$$

pa je $2w_{\lambda,\mu} = -2w_{\mu,\lambda}$. Stavimo li zbog jednostavnosti $m_\lambda = m_\mu = 0$, možemo uočiti da vrijedi

$$Z_\lambda + Z_\mu = X_\lambda + iY_\lambda + X_\mu + iY_\mu = (X_\lambda + X_\mu) + i(Y_\lambda + Y_\mu)$$

i

$$Z_\lambda + iZ_\mu = X_\lambda + iY_\lambda + iX_\mu - Y_\mu = (X_\lambda - Y_\mu) + i(Y_\lambda + X_\mu).$$

Budući da su $Z_\lambda + Z_\mu$ i $Z_\lambda + iZ_\mu$ kompleksne gaussovske slučajne varijable, realni i imaginarni dijelovi su im nezavisni. Sada imamo

$$\mathbb{E}[(X_\lambda + X_\mu)(Y_\lambda + Y_\mu)] = 0$$

i

$$\mathbb{E}[(X_\lambda - Y_\mu)(Y_\lambda + X_\mu)] = 0.$$

Odavde slijedi

$$\mathbb{E}(X_\mu Y_\lambda) = -\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu)$$

i

$$\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) = \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu).$$

Konačno,

$$v_{\lambda,\mu} = v_{\lambda,\mu} = \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) = \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu),$$
$$w_{\lambda,\mu} = -w_{\mu,\lambda} = \mathbb{E}(X_\mu Y_\lambda) = -\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu).$$

Označimo matrice $v_{\lambda,\mu}$ i $w_{\lambda,\mu}$ s v i w redom,

$$v = (v_{\lambda,\mu}),\ w = (w_{\lambda,\mu}). \tag{2.11}$$

Sada možemo dati pomoćnu lemu koja je potrebna za dokaz najbitnijeg teorema u ovome poglavlju.

Lema 2.3.5. *Neka je $V = (V_{\lambda,\mu})$ kompleksna pozitivno definitna matrica. Uzmimo realne matrice v i w definirane kao u* (2.11) *te definirajmo novu matricu υ s*

$$\upsilon = \begin{bmatrix} v & -w \\ w & v \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Tada je υ također pozitivno definitna.

Dokaz. Neka je

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

i z nije nulvektor, tj. barem jedno od a, b nije jednako nuli. Simetrična realna matrica υ je pozitivno definitna ako je $z^\tau \upsilon z > 0$ za svaki takav z. Računamo

$$\begin{aligned}
z^\tau \upsilon z &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) & -\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) \\ \mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) & \mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + b\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) & -a\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) + b\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= a^2\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + ab\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) - ab\mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) + b^2\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) \\
&= (a^2 + b^2)\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu).
\end{aligned}$$

Tvrdnja propozicije vrijedi jer vektor z nije bio nulvektor i matrica V je po pretpostavci pozitivno definitna pa je i spomenuto očekivanje veće od nule. □

Teorem 2.3.6. *Neka je Λ skup parametara. Za dani vektor $m = (m_\lambda)$ i pozitivno definitnu matricu $V = (V_{\lambda,\mu})$ postoji kompleksni gaussovski sistem $Z = \{Z_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$ kojemu su m vektor očekivanja i V kovarijacijska matrica.*

Dokaz. Formirajmo pozitivno definitnu matricu υ iz dane kovarijacijske matrice V kao u lemi 2.3.5. Tada prema teoremu 2.1.2 formiramo realni gaussovski sistem $\{X_\lambda, Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ s vektorom očekivanja 0 i kovarijacijskom matricom υ, gdje $\{X_\lambda\}$ i $\{Y_\lambda\}$ imaju istu kovarijacijsku matricu υ i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y_\lambda X_\lambda) = -\mathbb{E}(X_\lambda Y_\lambda) = w_{\lambda,\mu}.$$

Definirajmo sada pomoću vektora m

$$Z_\lambda(\omega) = X_\lambda(\omega) + iY_\lambda(\omega) + m_\lambda, \ \lambda \in \Lambda. \tag{2.13}$$

Pokažimo da je $Z_\lambda, \ \lambda \in \Lambda$ kompleksni gaussovski sistem. Trebamo dokazati da je svaka konačna linearna kombinacija $\sum_{k=1}^n a_k Z_\lambda$ kompleksna gaussovska slučajna varijabla.

$$\sum_{k=1}^n a_k Z_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^n a_k (X_{\lambda_k} + iY_{\lambda_k} + m_{\lambda_k}) = \sum_{k=1}^n a_k X_{\lambda_k} + i\sum_{k=1}^n a_k Y_{\lambda_k} + \sum_{k=1}^n a_k m_{\lambda_k},$$

gdje su $a_k \in \mathbb{C}$. Budući da je prema propoziciji 2.3.3 (i) $\{X_\lambda, Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ realni gaussovski sistem, $\sum_{k=1}^n a_k X_{\lambda_k}$ i $\sum_{k=1}^n a_k Y_{\lambda_k}$ su međusobno nezavisne realne gaussovske slučajne varijable. Također, $\sum_{k=1}^n a_k m_{\lambda_k}$ je kompleksni broj pa je $\sum_{k=1}^n a_k Z_{\lambda_k}$ kompleksna gaussovska slučajna varijabla. □

Propozicija 2.3.7. *Neka je dan realni gaussovski proces. Tada možemo formirati kompleksni gaussovski proces s istom kovarijacijskom matricom.*

Dokaz. Neka je $\{X_\lambda\}$ dani gaussovski proces. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X_\lambda) = 0$ za svaki λ. Uzmimo nezavisnu kopiju od $\{X_\lambda\}$ i označimo je s $\{Y_\lambda\}$. Stavimo

$$Z_\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X_\lambda(\omega) + Y_\lambda(\omega)\Big).$$

Uočimo da je $\{Z_\lambda\}$ kompleksni gaussovski proces. Naime, X_λ i Y_λ su međusobno nezavisne gaussovske slučajne varijable s očekivanjem jednakim 0 pa je Z_λ kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Osim toga, Z_λ ima istu kovarijancu kao dani $\{X_\lambda\}$. Izračunajmo kovarijancu između Z_λ i Z_μ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Z_\lambda, Z_\mu) &= \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X_\lambda(\omega) + Y_\lambda(\omega)\Big), \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X_\mu(\omega) + Y_\mu(\omega)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}[(X_\lambda + Y_\lambda)(X_\mu + Y_\mu)]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu + X_\lambda Y_\mu + Y_\lambda X_\mu + Y_\lambda Y_\mu)\Big) = (linearnost) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(X_\lambda Y_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu)\Big) = (nezavisnost) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) + \mathbb{E}(X_\lambda)\mathbb{E}(Y_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda)\mathbb{E}(X_\mu) + \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu)\Big).
\end{aligned}$$

Budući da je $\mathbb{E}(X_\lambda) = \mathbb{E}(Y_\lambda) = 0$ i, kako je Y naprosto kopija od X, $\mathbb{E}(X_\lambda X_\mu) = \mathbb{E}(Y_\lambda Y_\mu)$, slijedi da je posljednji izraz jednak $\mathbb{E}X_\lambda X_\mu$.. □

Definicija 2.3.8. *Kompleksni gaussovski proces definiran kao u dokazu prethodne propozicije zovemo* ***kompleksni oblik*** *od* $\{X_\lambda\}$.

Poglavlje 3

Kanonska reprezentacija gaussovskih procesa

Kažemo da je realni gaussovski sistem $X = \{X_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$

(i) **gaussovski proces s diskretnim vremenskim parametrom** ako je Λ skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ ili skup svih nenegativnih cijelih brojeva $\mathbb{Z}_+$,

(ii) **gaussovski proces s neprekidnim vremenskim parametrom** ako je Λ ili cijeli $\mathbb{R}$ ili interval realnih brojeva.

U slučaju (i) koristimo oznaku X_n, a u slučaju (ii) oznaku $X(t)$, gdje n i t predstavljaju vrijeme. Razlika između gaussovskih procesa s diskretnim vremenskim parametrom i gaussovskih procesa s neprekidnim vremenskim parametrom je velika. U ovom radu ćemo se baviti samo diskretnim slučajem.

3.1 Kanonska reprezentacija gaussovskih procesa s diskretnim parametrom

Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ gaussovski proces s diskretnim parametrom. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki n. S obzirom da X_n imaju očekivanje jednako nuli za svaki n, a varijanca im je konačna, zaključujemo da su slučajne varijable X_n elementi Hilbertovog prostora $L^2(\Omega)$. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije se može primijeniti u svakom Hilbertovom prostoru pa posebno i u $L^2(\Omega)$. Njime se od proizvoljnog niza u tom prostoru dolazi do ortonormiranog niza s istom linearnom ljuskom.

Neka $\mathcal{L} = \mathcal{L}\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ označava vektorski potprostor od $L^2(\Omega)$ razapet skupom $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Dakle, $\mathcal{L}$ je skup svih slučajnih varijabli oblika $\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i,\ a_i \in \mathbb{R}$. Neka je

$(Y_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ niz linearno nezavisnih slučajnih varijabli u $L^2(\Omega)$. Tada postoji ortonormiran niz $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ u $L^2(\Omega)$ takav da ta dva niza razapinju isti potprostor u $L^2(\Omega)$. Niz $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ konstruiramo induktivno. Stavimo

$$\xi_1 = \frac{Y_1}{||Y_1||}.$$

Općenito,

$$\xi_n = \frac{Y_n - \hat{Y}_n}{||Y_n - \hat{Y}_n||},$$

gdje je $\hat{Y}_n$ projekcija od Y_n na $\mathcal{L}\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ pa je prema propoziciji 1.2.5

$$\hat{Y}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle Y_n, \xi_i \rangle \xi_i.$$

Budući da $(Y_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ i $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ razapinju isti potprostor, tj. vrijedi

$$\mathcal{L}\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\} = \mathcal{L}\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$$

i $Y_1, \ldots, Y_n$ su linearno nezavisne, imamo $||Y_n - \hat{Y}_n|| > 0$. Dakle, ξ_n je dobro definiran. Iz konstrukcije slijedi $||\xi_n|| = 1,\ n \in \mathbb{N}$ i $\langle \xi_n, \xi_j \rangle = 0$ za svako $j < n$ pa je niz $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ doista ortonormiran.

Ako je $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ ortonormirani niz u $L^2(\Omega)$, tada za svako X iz zatvarača njegove linearne ljuske i svako $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{Z}_+$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\left\| X - \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i \right\| < \epsilon.$$

Tada iz propozicije 1.2.5 slijedi

$$\left\| X - \sum_{i=1}^{n} \langle X, \xi_i \rangle \xi_i \right\| < \epsilon.$$

Odavde zaključujemo da je za svako $X \in L^2(\Omega)$

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \langle X, \xi_i \rangle \xi_i$$

pri čemu konvergenciju razmatramo u normi prostora $L^2(\Omega)$, tj. u srednjem reda 2.

Primijenimo sada postupak ortogonalizacije na $X_n, \ n = 1, 2, \ldots$, pri čemu je $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ gaussovski proces s diskretnim parametrom kao s početka odjeljka. Dobivamo

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{1,1}\xi_1 \\ X_2 &= a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Općenito vrijedi

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j \tag{3.1}$$

za sve realne $a_{n,j}, \ j \leq n$ i neki ortonormirani niz $\{\xi_n\}$ iz $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije još postiže da je:

$$a_{m,m} > 0 \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Uočimo da je svaki $\xi_j, \ j \leq n$ linearna kombinacija od $X_k, \ k \leq j$. Kako su X_n gaussovske slučajne varijable, tada su i $\xi_n, \ n \in \mathbb{Z}_+$ gausovske, a prema propoziciji 1.2.3 su nekorelirane te su onda i međusobno nezavisne prema teoremu 2.2.3.

Možemo dati izraz za uvjetno očekivanje,

$$\mathbb{E}(X_n | X_1, X_2, \ldots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} a_{n,j}\xi_j, \tag{3.3}$$

koji dobivamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n | X_1, X_2, \ldots, X_k) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j \,\middle|\, a_{1,1}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j \right] \\ &= \text{(prema propoziciji 1.2.7 (2.))} \\ &= a_{n,1}\mathbb{E}\left[\xi_1 \,\middle|\, a_{1,1}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j \right] + \ldots + a_{n,k}\mathbb{E}\left[\xi_k \,\middle|\, a_{1,1}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j \right] \\ &+ a_{n,k+1}\mathbb{E}\left[\xi_{k+1} \,\middle|\, a_{1,1}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j \right] + \ldots + a_{n,n}\mathbb{E}\left[\xi_n \,\middle|\, a_{1,1}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j \right] \\ &= \text{(prema propoziciji 1.2.7 (7.) i (9.))} \\ &= a_{n,1}\xi_1 + \ldots + a_{n,k}\xi_k + a_{n,k+1}\mathbb{E}(\xi_{k+1}) + \ldots + a_{n,n}\mathbb{E}(\xi_n) = \Big(\mathbb{E}(\xi_n) = 0 \text{ za svaki } n\Big) \end{aligned}$$

$$= a_{n,1}\xi_1 + \ldots + a_{n,k}\xi_k = \sum_{j=1}^{k} a_{n,j}\xi_j.$$

Sada možemo definirati kanonsku reprezentaciju gaussovskog procesa.

Definicija 3.1.1. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ gaussovski proces i neka vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki n. Ako postoji dvostruki niz $a_{n,j}$, $j \leq n$, takav da za sistem nezavisnih standardnih gaussovskih slučajnih varijabli $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ procesi X i $Y = \{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, takav da vrijedi*

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j,$$

*imaju istu vjerojatnosnu distribuciju, tada sistem $\{a_{n,j} : j \leq n,\ \xi_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ zovemo **reprezentacija** od X. Ako reprezentacija $\{a_{n,j} : j \leq n,\ \xi_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ zadovoljava uvjete* (3.1), (3.2) *i* (3.3)*, tada je zovemo **kanonska repezentacija** od X. Sistem $\{\xi_n\}$ zovemo **inovacijski proces** od X, a za dvostruki niz $a_{n,j}$ kažemo da je **kanonska jezgra** reprezentacije.*

U nastavku dajemo bitan rezultat ovog poglavlja koji nam garantira egzistenciju i jedinstvenost kanonske reprezentacije.

Teorem 3.1.2. *Gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ uvijek ima kanonsku reprezentaciju i ona je jedinstvena u smislu da ako su $\{a_{n,j},\ \xi_n\}$ i $\{a'_{n,j},\ \xi'_n\}$ dvije kanonske reprezentacije od X, tada je $a_{n,j} = a'_{n,j}$ za svake $n, j \in \mathbb{N}$, $n \geq j$.*

Dokaz. Za dani gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ znamo da su slučajne varijable X_n elementi Hilbertovog prostora $L^2(\Omega)$ i na taj niz možemo primijeniti Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije kao u uvodnom dijelu ovog odjeljka. Dakle, za X_n postoje realni dvostruki niz $a_{n,j}$, $j \leq n$ i ortonormirani niz $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ na $L^2(\Omega)$ takvi da je

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j.$$

Budući da $\{a_{n,j}, \xi_n\}$ zadovoljava uvjete (3.1), (3.2) i (3.3), zaključujemo da je $\{a_{n,j}, \xi_n\}$ kanonska reprezentacija od X.

Preostaje nam dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dvije kanonske reprezentacije $\{a_{n,j},\ \xi_n\}$ i $\{a'_{n,j},\ \xi'_n\}$ od X, tj. da vrijedi

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j$$

i

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} a'_{n,j}\xi'_j.$$

Stavimo sada u (3.3) $k = n - 1$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\xi_j$$

i

$$\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} a'_{n,j}\xi'_j$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}
[X_n - \mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})]^2 &= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\xi_j\right]^2 \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\xi_j + a_{n,n}\xi_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}\xi_j\right]^2 \\
&= a_{n,n}^2\xi_n^2
\end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}
[X_n - \mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})]^2 &= \left[\sum_{j=1}^{n} a'_{n,j}\xi'_j - \sum_{j=1}^{n-1} a'_{n,j}\xi'_j\right]^2 \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1} a'_{n,j}\xi'_j + a'_{n,n}\xi'_n - \sum_{j=1}^{n-1} a'_{n,j}\xi'_j\right]^2 \\
&= a'^2_{n,n}\xi'^2_n.
\end{aligned}$$

Kako $X_n - \mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ ne ovisi o izboru reprezentacije, dobili smo $a_{n,n}^2\xi_n^2 = a'^2_{n,n}\xi'^2_n$. Uzimanjem očekivanja proizlazi $a_{n,n}^2\mathbb{E}\xi_n^2 = a'^2_{n,n}\mathbb{E}\xi'^2_n$, tj. $a_{n,n}^2\|\xi_n\|^2 = a'^2_{n,n}\|\xi'_n\|^2$ pa zbog normiranosti zaključujemo $a_{n,n}^2 = a'^2_{n,n}$. Vađenjem drugog korijena slijedi $a_{n,n} = a'_{n,n}$. Napomenimo da je n bio proizvoljan pa smo zapravo dokazali jedinstvenost (tj. jednakost) dijagonalnih elemenata dvostrukog niza. Pogledajmo kako izgleda kovarijanca između X_m i X_n za $m < n$.

$$\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \mathbb{E}[(X_m - \mathbb{E}(X_m))(X_n - \mathbb{E}(X_n))] = \Big(\text{koristeći } \mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(X_n) = 0\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(X_m X_n) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m} a_{m,j}\xi_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\xi_j\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[(a_{m,1}\xi_1 + \ldots + a_{m,m}\xi_m)(a_{n,1}\xi_1 + \ldots + a_{n,m}\xi_m + a_{n,m+1}\xi_{m+1} + \ldots + a_{n,n}\xi_n)\Big] \\
&= \mathbb{E}(a_{m,1}a_{n,1}\xi_1^2 + a_{m,1}a_{n,2}\xi_1\xi_2 + \ldots + a_{m,1}a_{n,n}\xi_1\xi_n + \ldots \\
&+ a_{m,m}a_{n,m}\xi_m^2 + \ldots + a_{m,m}a_{n,n}\xi_m\xi_n) = \big(\text{linearnost}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}a_{n,j}\mathbb{E}(\xi_j^2) + \sum_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n \\ j\neq k}} a_{m,j}a_{n,k}\mathbb{E}(\xi_j\xi_k) = \big(\text{nezavisnost}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}a_{n,j}\mathbb{E}(\xi_j^2) = \big(\text{koristeći } \mathbb{E}(\xi_j^2) = 1 \text{ jer je } \xi_j^2 \sim \chi^2(1)\big) = \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}a_{n,j}.
\end{aligned}
$$

Analogno, ako uzmemo kanonsku reprezentaciju $\{a'_{n,j},\ \xi'_j\}$, dobivamo

$$
\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \sum_{j=1}^{m} a'_{m,j}a'_{n,j}.
$$

Tvrdnju sada dokazujemo matematičkom indukcijom. Izjednačimo li dvije dobivene sume,

$$
\sum_{j=1}^{m} a_{m,j}a_{n,j} = \sum_{j=1}^{m} a'_{m,j}a'_{n,j},
$$

za $m = 1$ dobivamo

$$
a_{1,1}a_{n,1} = a'_{1,1}a'_{n,1}.
$$

Po prethodno pokazanome znamo da vrijedi

$$
a_{1,1} = a'_{1,1} > 0
$$

pa odavde dijeljenjem slijedi

$$
a_{n,1} = a'_{n,1}
$$

i to za svaki n. Za $m = 2$ imamo

$$
a_{2,1}a_{n,1} + a_{2,2}a_{n,2} = a'_{2,1}a'_{n,1} + a'_{2,2}a'_{n,2},
$$

a znamo da je

$$
a_{2,2} = a'_{2,2} > 0
$$

te iz prethodnog koraka

$$
a_{2,1} = a'_{2,1} \text{ i } a_{n,1} = a'_{n,1}.
$$

Sada zaključujemo da je

$$a_{n,2} = a'_{n,2}$$

za svaki n. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $j \leq n$, tj. da vrijedi

$$a_{j,1}a_{n,1} + \ldots + a_{j,j}a_{n,j} = a'_{j,1}a'_{n,1} + \ldots + a'_{j,j}a'_{n,j}.$$

Sada za $m = j + 1$ imamo

$$a_{j+1,1}a_{n,1} + \ldots + a_{j+1,j}a_{n,j} + a_{j+1,j+1}a_{n,j+1} = a'_{j+1,1}a'_{n,1} + \ldots + a'_{j+1,j}a'_{n,j} + a'_{j+1,j+1}a'_{n,j+1}.$$

Zbog pretpostavke indukcije i jednakosti dijagonalnih elemenata dobivamo

$$a_{n,j+1} = a'_{n,j+1}$$

i to za svaki n. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $j \leq n$ vrijedi

$$a_{n,j} = a'_{n,j}.$$

Time je dokazana jedinstvenost kanonske reprezentacije. □

3.2 Karakterizacija Markovljevog svojstva za gaussovske procese

Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ gaussovski proces i $\{a_{n,j}, \xi_n\}$ kanonska reprezentacija od X dana sa

$$a_{n,j} = ac^{n-j}, \ \ j \leq n.$$

Tada za svaki $n > k$ možemo izračunati uvjetno očekivanje na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_k) &= \sum_{j=1}^{k} ac^{n-j}\xi_j = \sum_{j=1}^{k} ac^{n-k+k-j}\xi_j \\ &= c^{n-k}\sum_{j=1}^{k} ac^{k-j}\xi_j = c^{n-k}X_k,\end{aligned}$$

gdje prva jednakost slijedi iz (3.3) i oblika kanonske reprezentacije od X. Uočimo da X_n možemo zapisati kao sumu dva nezavisna izraza,

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} ac^{n-j}\xi_j = \sum_{j=1}^{k} ac^{n-j}\xi_j + \sum_{j=k+1}^{n} ac^{n-j}\xi_j$$

$$= (\text{prema prethodno pokazanome})$$
$$= c^{n-k}X_k + \sum_{j=k+1}^{n} ac^{n-j}\xi_j.$$

Uzmemo li sada uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(X_n \le x|X_1, X_2, \dots, X_k)$, tj. uvjetno očekivanje

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_n \le x\}}|X_1, X_2, \dots, X_n),$$

dobivamo da za svaki par (n, k), $k \le n$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_n \le x|X_1, X_2, \dots, X_k) = \mathbb{P}(X_n \le x|X_k), \tag{3.4}$$

gdje je $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 3.2.1. *Kažemo da je slučajni proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$* ***Markovljev proces*** *ako za $x \in \mathbb{R}$ i sve n i k takve da je $k < n$ vrijedi* (3.4) *$\mathbb{P}-$g.s. Svojstvo* (3.4) *zovemo* ***Markovljevo svojstvo***.

Uočimo da je gaussovski proces s kanonskom reprezentacijom $a_{n,j} = ac^{n-j}$, $j \le n$ zapravo Markovljev proces.

Stavljamo uvjet da je gaussovski proces X nedegeneriran u smislu da vrijedi

$$\mathbb{E}(X_n|X_k,\ k \le n-1) \ne X_n.$$

U nastavku dajemo teorem koji nam daje nužne i dovoljne uvjete da bi gaussovski proces bio Markovljev.

Teorem 3.2.2. *Gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ je Markovljev proces ako i samo ako kanonska jezgra ima sljedeći oblik:*

$$a_{n,j} = a_n \cdot b_j,\ \ j \le n. \tag{3.5}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je kanonska jezgra reprezentacije gaussovskog procesa X dana sa (3.5). Tada X možemo zapisati u obliku

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j.$$

Primijetimo usput da iz $a_{n,n} \ne 0$ slijedi $a_n \ne 0$ i $b_j \ne 0$ za svake n i j. Za svaki par (n, k), $k \le n$ uvjetno očekivanje je dano sa

$$\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \dots, X_k) = \frac{a_n}{a_k}X_k.$$

Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \dots, X_k) &= (\text{koristeći (3.3)}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_n b_j \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{a_n}{a_k} a_k b_j \xi_j \\
&= \frac{a_n}{a_k} \sum_{j=1}^{k} a_k b_j \xi_j \\
&= (\text{koristeći (3.1)}) \\
&= \frac{a_n}{a_k} X_k.
\end{aligned}$$

Uočimo da X_n možemo zapisati kao sumu dva izraza,

$$\begin{aligned}
X_n &= \sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_n b_j \xi_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_n b_j \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{a_n}{a_k} a_k b_j \xi_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_n b_j \xi_j \\
&= \frac{a_n}{a_k} X_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_n b_j \xi_j.
\end{aligned}$$

Uzmemo li sada uvjetnu vjerojatnost, tj. uvjetno očekivanje, za $x \in \mathbb{R}$ dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \leq x|X_1, X_2, \dots, X_k) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_n \leq x\}}|X_1, X_2, \dots, X_k) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_n \leq x\}}|X_k) = \\
&= \mathbb{P}(X_n \leq x|X_k).
\end{aligned}$$

S obzirom da gaussovski proces X zadovoljava Markovljevo svojstvo slijedi da je X Markovljev proces.

Obratno, neka je X Markovljev proces i $\{a_{n,j}, \xi_n\}$ kanonska reprezentacija od X. Budući da X zadovoljava Markovljevo svojstvo, vrijedi i sljedeće

$$\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, \dots, X_k) = \mathbb{E}(X_n|X_k) \quad \mathbb{P} - \text{g.s.}$$

za svaki par (n, k) gdje je $k \leq n$. Lijeva strana gornjeg izraza je prema (3.3) jednaka

$$\sum_{j=1}^{k} a_{n,j}\xi_j.$$

Obzirom da je $\{X_k, X_n\}$ Gaussovski sistem, imamo $\mathbb{E}(X_n|X_k) = c_{n,k}X_k$ za neku konstantu $c_{n,k}$. Izjednačavanje izraza daje

$$\sum_{j=1}^{k} a_{n,j}\xi_j = c_{n,k}\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\xi_j.$$

Obzirom da su $\xi_1, \ldots, \xi_k$ linearno nezavisni (jer su međusobno ortogonalni), izjednačavanjem koeficijenata dobivamo

$$a_{n,j} = c_{n,k}a_{k,j}.$$

Budući da je k proizvoljan, vrijedi da su retci matrice $(a_{n,j})$ proporcionalni, odakle lako slijedi tvrdnja. □

Koristeći gornji teorem možemo dokazati sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.2.3. *Nedegeneriran gaussovski proces je Markovljev ako i samo ako za kovarijacijsku matricu vrijedi sljedeće*

$$\Gamma_{m,n} = a_m a_n c_n, \ m \geq n, \tag{3.6}$$

pri čemu su $a_n \neq 0$ i (c_n) je rastući niz pozitivnih brojeva.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki n i da je X Markovljev proces. Izračunajmo kovarijancu između X_m i X_n, gdje je $m \geq n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_m, X_n) &= \mathbb{E}(X_m X_n) - \mathbb{E}(X_m)\mathbb{E}(X_n) \\
&= (\text{koristeći } \mathbb{E}(X_n) = 0 \text{ za svaki } n) \\
&= \mathbb{E}(X_m X_n) \\
&= (\text{iz dokaza teorema 3.1.2}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}a_{n,j} \\
&= (\text{koristeći teorem 3.2.2}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_n b_j a_m b_j \\
&= a_m a_n \sum_{j=1}^{n} b_j^2.
\end{aligned}$$

Stavimo sada

$$c_n := \sum_{j=1}^{n} b_j^2.$$

Obratno, neka je kovarijacijska matrica od X dana sa (3.6) i neka je $c_n = \sum_{j=1}^{n} b_j^2$ za neki niz realnih brojeva (b_j). To možemo pretpostaviti radi pretpostavke da je niz (c_n) rastući. Definiramo gaussovski proces Y sa

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j,$$

gdje je $\{\xi_n\}$ nezavisni sistem standardnih gaussovskih slučajnih varijabli. Izračunajmo kovarijancu između Y_m i Y_n za $m \geq n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_m, Y_n) &= \mathbb{E}(Y_m Y_n) - \mathbb{E}(Y_m)\mathbb{E}(Y_n) \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} a_m b_j \xi_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j\Big)\Big] - \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_m b_j \xi_j\Big)\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j\Big) \\
&= (\text{koristeći linearnost i } \mathbb{E}(\xi_n) = 0 \text{ za svaki } n) \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} a_m b_j \xi_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n \\ j\neq k}} a_m a_n b_j b_k \xi_j \xi_k\Big) \\
&= (\text{koristeći linearnost, nezavisnost i } \mathbb{E}(\xi_n) = 0 \text{ za svaki } n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_m a_n b_j^2 \mathbb{E}(\xi_j^2) \\
&= (\text{koristeći } \mathbb{E}(\xi_j^2) = 1 \text{ jer je } \xi_j \sim \chi^2(1)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_m a_n b_j^2 \\
&= a_m a_n c_n.
\end{aligned}$$

Dakle, X i Y su isti gaussovski proces. Da bismo dokazali da za Y vrijedi Markovljevo svojstvo, prema teoremu 3.2.2 trebamo pokazati da je $\{a_n b_j, \xi_n\}$ kanonska reprezentacija, tj. da vrijede svojstva (3.1), (3.2) i (3.3). Svojstvo (3.1) slijedi iz definicije Y_n, a Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije nam osigurava da vrijedi $a_n b_n \neq 0$ pa je time zadovoljeno i svojstvo (3.2). Budući da su $\{\xi_j\}$ međusobno linearno nezavisni za $1 \leq j \leq n$ i $a_n b_n \neq 0$ za svaki n, zaključujemo da $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ i $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ razapinju isti vektorski prostor. Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n|Y_1, \ldots, Y_k) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_n b_j \xi_j \Big| Y_1, \ldots, Y_k\Big) \\
&= \text{(linearnost)} \\
&= a_n b_1 \mathbb{E}(\xi_1|Y_1, \ldots, Y_k) + \ldots + a_n b_k \mathbb{E}(\xi_k|Y_1, \ldots, Y_k) \\
&+ a_n b_{k+1} \mathbb{E}(\xi_{k+1}|Y_1, \ldots, Y_k) + \ldots + a_n b_n \mathbb{E}(\xi_n|Y_1, \ldots, Y_k) \\
&= \text{(koristeći propoziciju 1.2.7 (7.) i (9.))} \\
&= a_n b_1 \xi_1 + \ldots + a_n b_k \xi_k + \mathbb{E}(\xi_{k+1}) + \ldots + \mathbb{E}(\xi_n) \\
&= \text{(koristeći } \mathbb{E}(\xi_n) = 0) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_n b_j \xi_j.
\end{aligned}$$

Time je pokazano svojstvo (3.3). □

Poglavlje 4

Stacionarni gaussovski procesi

U ovom poglavlju bavit ćemo se slučajnim procesima na prostoru $L^2(\Omega)$. Počet ćemo s definicijom stacionarnih procesa koji nisu nužno gaussovski, a onda ćemo se usredotočiti na gaussovske procese s diskretnim parametrom. Za skup parametara uzimamo skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, a n predstavlja vremenski parametar na $\mathbb{Z}$.

4.1 Stacionarni procesi s diskretnim parametrom

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slučajni proces na danom vjerojatnosnom prostoru. Slučajni proces na $L^2(\Omega)$ je familija realnih ili kompleksnih slučajnih varijabli s konačnim drugim momentom. Kada govorimo o slučajnim procesima na $L^2(\Omega)$, mislimo na svojstva slučajnih procesa vezanih uz autokovarijacijsku funkciju.

Definicija 4.1.1. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slučajni proces.* ***Autokovarijacijska funkcija*** *procesa, u oznaci $\gamma(m, n)$ dana je sa*

$$\gamma(m, n) = \mathrm{Cov}(X_m, X_n), \ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 4.1.2. *Slučajni proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ je* ***slabo stacionaran*** *ako vrijedi*

1. $\mathbb{E}(|X_n|^2) < \infty$ *za svaki* $n \in \mathbb{Z}$,

2. $\mathbb{E}(X_n) = m$ *za svaki* $n \in \mathbb{Z}$, *gdje je* m *konstanta nezavisna od* n

3. *za svaki* $h \in \mathbb{Z}$ *zajednička distribucija od* (X_n, X_{n+h}) *ne ovisi o* n *pa ni autokovarijacijska funkcija* $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{n+h}, X_n)$ *ne ovisi o* n.

Definicija 4.1.3. *Kažemo da je slučajni proces X* ***stacionaran*** *ako slučajni vektori $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k-1})$ i $(X_{n+h}, X_{n+h+1}, \ldots, X_{n+h+k+1})$ imaju istu vjerojatnosnu distribuciju za sve $n, h \in \mathbb{Z}$.*

Drugim riječima, slučajni proces je stacionaran ako svaka konačno-dimenzionalna zajednička distribucija ovisi samo o pomaku h i ne ovisi o vremenu.

Kako uređeni par (X_n, X_{n+h}) sačinjavaju naprosto dvije koordinate vektora $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+h})$ (za $h \geq 0$) ili $(X_{n+h}, X_{n+h+1}, \dots, X_n)$ (za $h < 0$), slijedi da stacionarnost implicira slabu stacionarnost. Vremenska homogenost autokovarijacijske funkcije γ se vidi još direktnije. Naime,

$$\mathbb{E}[X_m X_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{X_m, X_n}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} xy dF_{X_{m+h}, X_{n+h}}(x, y) = \mathbb{E}[X_{m+h} X_{n+h}]$$

i slično,

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{X_{n+h}}(x) = \mathbb{E}(X_{n+h}).$$

Obrat općenito ne vrijedi. Na primjer, neka su $Z_n \sim N(0, 1)$ nezavisne i jednako distribuirane za svaki n i definirajmo slučajni proces X na sljedeći način

$$X_n = \begin{cases} Z_n, & n \text{ paran}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1}^2 - 1), & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

X je slabo stacionaran. Naime,

$$\mathbb{E}X_n = \begin{cases} \mathbb{E}(Z_n) = 0, & n \text{ paran}, \\ \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1}^2 - 1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mathbb{E}(Z_{n-1}^2) - 1\Big) = 0, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

i

$$\mathrm{Var} X_n = \begin{cases} \mathrm{Var}(Z_n) = 1, & n \text{ paran}, \\ \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1}^2 - 1)\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(Z_{n-1}^2) = 1, & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

Uočimo da je kovarijanca zbog nezavisnosti jednaka nuli. Za n i h parne imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+h}) &= \mathrm{Cov}(Z_n, Z_{n+h}) \\ &= \mathbb{E}(Z_n Z_{n+h}) - \mathbb{E}(Z_n)\mathbb{E}(Z_{n+h}) = \text{(nezavisnost)} \\ &= \mathbb{E}(Z_n)\mathbb{E}(Z_{n+h}) - \mathbb{E}(Z_n)\mathbb{E}(Z_{n+h}) = 0. \end{aligned}$$

Za n paran i h neparan imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+h}) &= \mathrm{Cov}\Big(Z_n, \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1+h}^2 - 1)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}(Z_n(Z_{n-1+h}^2 - 1)) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}(Z_n)\mathbb{E}(Z_{n-1+h}^2 - 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}(Z_n Z_{n-1+h}^2) = (\text{nezavisnost}) = 0.$$

Za n i h neparne imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+h}) &= \mathrm{Cov}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1}^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1+h}^2 - 1)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}((Z_{n-1}^2 - 1)(Z_{n-1+h}^2 - 1)) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(Z_{n-1}^2 - 1)\mathbb{E}(Z_{n-1+h}^2 - 1) \\
&= (\text{nezavisnost}) = 0.
\end{aligned}$$

Slučaj n neparan i h paran dobivamo analogno kao za n paran i h neparan. Dakle, X je slabo stacionaran. Zanima nas jesu li distribucije za n paran i n neparan jednake. Za n paran imamo

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x),$$

a za n neparan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \leq x) &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{n-1}^2 - 1) \leq x\Big) \\
&= \mathbb{P}(Z_{n-1}^2 \leq \sqrt{2}x + 1) \\
&= \mathbb{P}\bigg(-\sqrt{\sqrt{2}x + 1} \leq Z_{n-1} \leq \sqrt{\sqrt{2}x + 1}\bigg).
\end{aligned}$$

Ako uzmemo $x = 0$, dobivamo

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0.5, & n \text{ paran}, \\ \phi(1) - \phi(-1) = 0.6826, & n \text{ neparan}, \end{cases}$$

gdje je $\phi(x)$ funkcija distribucije standardne gaussovske slučajne varijable. S obzirom da distribucije nisu jednake, zaključujemo da X nije stacionaran.

Definicija 4.1.4. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ stacionarni slučajni proces. Ako je X gaussovski, tada kažemo da je X **stacionarni gaussovski proces**.*

Pokazali smo da općenito slaba stacionarnost ne povlači stacionarnost, no u slučaju gaussovskih procesa implikacija vrijedi. Sljedeći rezultat to dokazuje.

Propozicija 4.1.5. *Ako je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slabo stacionarni gaussovski slučajni proces, on je ujedno i stacionaran.*

Dokaz. Neka je X slabo stacionarni gaussovski proces i neka su $n, h, k \in \mathbb{Z},\ k > 0$ proizvoljni. Zbog $\mathbb{E}(X_n) = m$ k-dimenzionalni slučajni vektori iz definicije stacionarnosti, $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1})$ i $(X_{n+h}, X_{n+h+1}, \dots, X_{n+h+k+1})$, imaju isti vektor očekivanja $(m, m, \dots, m)$. Nadalje, kovarijanca ne ovisi o n, tj. za i, j vrijedi

$$\mathrm{Cov}(X_{n+i}, X_{n+j}) = \mathrm{Cov}(X_{n+i+h}, X_{n+j+h}) = \gamma(h).$$

Budući da dani slučajni vektori imaju isti vektor očekivanja i istu kovarijacijsku matricu, prema teoremu 2.1.2 zaključujemo da $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1})$ i $(X_{n+h}, X_{n+h+1}, \dots, X_{n+h+k+1})$ imaju istu gaussovsku distribuciju. Prema tome, X je stacionaran. □

Sada ćemo dati neka osnovna svojstva slabo stacionarnih procesa.

Definicija 4.1.6. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slabo stacionarni proces. Definiramo*

$$H(X) = L^2\{X_n : n \in \mathbb{Z}\} \tag{4.1}$$

$$H_n(X) = L^2\{X_k : k \leq n\},\ n \in \mathbb{Z} \tag{4.2}$$

$$H_{-\infty}(X) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n(X), \tag{4.3}$$

gdje $H_n(X) = L^2\{X_k : k \leq n\},\ n \in \mathbb{Z}$ znači da je $H_n(X)$ zatvoreni linearni potprostor od $L^2(\Omega)$ razapet sa $\{X_k : k \leq n\}$.

Primijetimo da $H_n(X) \downarrow H_{-\infty}(X)$ kada $n \downarrow -\infty$ i $H_n(X) \uparrow H(X)$ kada $n \uparrow +\infty$. Prema definiciji očito vrijedi i

$$H_n(X) \subseteq H_{n+1}(X), \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Ako je $Y \in L^2(\Omega)$, označimo s P_nY *ortogonalnu projekciju* od Y na $H_n(X)$. Osim toga, definirajmo *operator pomaka* T_h na $H(X)$ s

$$T_h\Big(\sum_{k=m}^{n} a_k X_k\Big) = \sum_{k=m}^{n} a_k X_{k+h},$$

za svake $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ i za svake koeficijente a_k te proširimo po ograničenosti na cijeli prostor $H(X)$. Naime, zbog

$$\Big\|T_h\Big(\sum_{k=m}^{n} a_k X_k\Big)\Big\|^2 = \sum_{k,l=m}^{n} a_k \overline{a_l} \mathbb{E}(X_{k+h}\overline{X_{l+h}}) = \sum_{k,l=m}^{n} a_k \overline{a_l} \mathbb{E}(X_k \overline{X_l}) = \Big\|\sum_{k=m}^{n} a_k X_k\Big\|^2$$

vidimo da je gornjom formulom definirana izometrija na potprostoru konačnih lineranih kombinacija varijabli X_k te se ona jedinstveno proširuje do izometrije T_h na zatvaraču tog potprostora, što je upravo $H(X)$. Nadalje, primijetimo da je inverz operatora T_h upravo operator T_{-h} pa je T_h izometrija s inverzom koji je također izometrija. Dakle, usput smo pokazali da je T_h unitarni operator na $H(X)$.

Definicija 4.1.7. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slabo stacionarni proces. Kažemo da je X* ***deterministički proces*** *ako je $H_{-\infty}(X) = H(X)$ ili, ekvivalentno, ako se $H_n(X)$ ne mijenja s n, tj. $H_n(X) = H(X)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Za X kažemo da je* ***nedeterministički proces*** *ako $H_{-\infty}(X) \subsetneq H(X)$. Ako je $H_{-\infty}(X) \subseteq L^2\{1\}$, gdje $L^2\{1\}$ označava potprostor od $L^2(\Omega)$ koji sadrži samo konstante, $L^2\{1\} = \mathbb{R}$, tada za X kažemo da je* ***potpuno nedeterministički proces****.*

Za potpuno nedeterministički proces X se relacija iz definicije može zamijeniti sa slabijom relacijom

$$H_n(X) \subsetneq H_{n+1}(X), \text{ za neki } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Da bismo predvidjeli X_{n+h} s danim X_k, $k \leq n$, tražimo element prostora $H_n(X)$ najbliži X_{n+h} u prostoru $L^2(\Omega)$, a to je $P_n X_{n+h}$. Iz definicije operatora pomaka zaključujemo

$$T_h H_n(X) = H_{n+h}(X), \text{ za } n, h \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Također vrijedi i sljedeće

$$T_h P_k X_n = P_{k+h} X_{n+h}, \ k \leq n. \tag{4.7}$$

Kako bismo pokazali da to vrijedi, prvo primijetimo da je po definiciji projekcije $P_k X_n \in H_k(X)$ i $X_n - P_k X_n \perp H_k(X)$. Iz (4.6) slijedi $T_h P_k X_n \in H_{k+h}(X)$, a budući da je operator pomaka unitarni operator, on čuva skalarni produkt pa vrijedi

$$T_h(X_n - P_k X_n) \perp T_h H_k(X) = H_{k+h}(X).$$

Drugim riječima,

$$X_{n+h} - T_h P_k X_n \perp H_{k+h}(X).$$

Dakle, $T_h P_k X_n = P_{k+h} X_{n+h}$.

Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

Teorem 4.1.8. *(Woldov teorem dekompozicije)*
Svaki slabo stacionarni proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ možemo zapisati kao zbroj dva međusobno ortogonalna stacionarna procesa

$$X = X' + X'', \tag{4.8}$$

gdje je $X' = \{X'_n : n \in \mathbb{Z}\}$ potpuno nedeterministički proces, a $X'' = \{X''_n : n \in \mathbb{Z}\}$ deterministički proces. Osim toga, takva dekompozicija je jedinstvena.

Dokaz. Definiramo $X''_n = P_{-\infty} X_n$ i $X'_n = X_n - X''_n$. Budući da je $P_{-\infty} X_n$ ortogonalna projekcija od X_n na $H_{-\infty}(X)$, vrijedi $X''_n \in H_{-\infty}(X)$ i $X'_n = X_n - X''_n \perp H_{-\infty}(X)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Odavde slijedi da su X'_n i X''_n međusobno ortogonalni.

Kako je $X_n \in H_n(X)$ i $X''_n \in H_{-\infty}(X) \subseteq H_n(X)$ (po definiciji presjeka), imamo $X'_n = X_n - X''_n \in H_n(X)$ za svaki n. Budući da je X'_n element iz $H_n(X)$, vrijedi $H_{-\infty}(X') \subset H_{-\infty}(X)$. No, pokazali smo da vrijedi $X'_n \perp H_{-\infty}(X)$ pa je $H_{-\infty}(X') \perp H_{-\infty}(X)$. Dakle, $H_{-\infty}(X') = \{0\}$ pa je X' potpuno nedeterministički proces.

Da bismo pokazali da je X'' deterministički proces, uočimo da iz $X''_n \in H_{-\infty}(X)$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$, slijedi $H(X'') \subseteq H_{-\infty}(X)$. Također, kako zbog definicije procesa X vrijedi $X_n = X'_n + X''_n$, za svaki n, te kako su X' i X'' međusobno ortogonalni i vrijedi $X'_n, X''_n \in H_n(X)$, slijedi $H_n(X) = H_n(X') \oplus H_n(X'')$. Zbog definicije presjeka imamo $H_{-\infty}(X) \subseteq H_n(X') \oplus H_n(X'')$ za svaki n. No, kako je $H_{-\infty}(X) \perp X'_n$, slijedi $H_{-\infty}(X) \subseteq H_n(X'')$. Konačno, zaključujemo $H(X'') = H_n(X'') (= H_{-\infty}(X''))$, tj. da je X'' deterministički.

Preostaje nam dokazati jedinstvenost dekompozicije. Ako vrijedi $X_n = X'_n + X''_n$, gdje je X' potpuno nedeterministički, a X'' deterministički proces, prema prethodno dokazanome imamo $H_n(X) = H_n(X') \oplus H_n(X'') = H_n(X') \oplus H(X'')$ (jer je X'' deterministički proces). Uočimo da ako je $Z \in H_{-\infty}(X)$ i $Z \perp H(X'')$, tada je $Z \in H_n(X')$ za svaki n. Odavde slijedi da je $H_{-\infty}(X) = H_{-\infty}(X') \oplus H(X'')$. Budući da je X' potpuno nedeterministički, vrijedi $H_{-\infty}(X) = H(X'')$. Tada imamo $X_n = X'_n + X''_n$, $X''_n \in H(X'') = H_{-\infty}(X)$ i $X'_n \perp H(X'') = H_{-\infty}(X)$. Dakle, $X''_n = P_{-\infty}X_n$ pa je time dokazana tvrdnja. □

U prethodnom teoremu smo slabo stacionarni proces X prikazali kao sumu dva međusobno ortogonalna procesa X' i X'' u $L^2(\Omega)$. X' je potpuno nedeterministički u smislu da dugoročno gledano nije moguća korisna predikcija. Drugim riječima, poznavanje prošlosti procesa ne pomaže u predikciji X'_{n+h} za veliki h. X'' je deterministički u smislu da ako je poznat X''_n za svaki n, moguće je savršeno predvidjeti X''_{n+h} za $h > 0$. Osnovni rezultat Woldovog teorema je da je deterministička komponenta savršeno predvidljiva te da se može naći jednostavna formula za predviđanje potpuno nedeterminstičke komponente.

Pokazali smo da bilo koji slabo stacionarni proces možemo zapisati kao zbroj potpuno nedeterminističkog i determinističkog procesa. Za stacionarne gaussovske procese vrijedi ista tvrdnja, a zbog svojstava gaussovske distribucije, dobivamo i nezavisnost između potpuno nedeterminističke i determinističke komponente.

Propozicija 4.1.9. *Stacionarni gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ možemo zapisati u obliku* (4.8)*, gdje je X' potpuno nedeterministički i X'' deterministički proces. Osim toga, X' i X'' su nezavisni.*

Dokaz. Najprije pokažimo da su X' i X'' gaussovski procesi. Budući da je X gaussovski sistem, isto vrijedi za njegovu linearnu ljusku i podsisteme. Naime, ako je X gaussovski sistem, tada je svaka konačna linearna kombinacija

$$\sum_{k=m}^{n} a_k X_k,$$

gdje su $m \leq k \leq n$ realni brojevi, gaussovska slučajna varijabla. Kako je linearna ljuska skup svih linearnih kombinacija, a za X su sve konačne linearne kombinacije gaussovske slučajne varijable, tada to vrijedi i za njegovu linearnu ljusku. Prema tome, $H(X)$ kao potprostor od $L^2(\Omega)$ razapet s $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ je gaussovski sistem. Uzmemo li $X' = \{X_k : k \in A\}$, gdje je A podskup skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, tada je X' također gaussovski sistem jer su konačne linearne kombinacije njegovih članova oblika

$$\sum_{k \in A} a_k X_k,$$

pri čemu k uzimamo samo iz podskupa A od $\mathbb{Z}$. Analogno vrijedi i za X''. Dakle, X' i X'' su gaussovski sistemi. Nadalje, propozicija 4.1.5 nam garantira da su X' i X'' stacionarni. Budući da su X' i X'' gaussovski, a prema pretpostavci propozicije su i međusobno ortogonalni, zbog propozicije 1.2.3 zaključujemo da su i nekorelirani. S obzirom da nekoreliranost u slučaju gaussovske distribucije implicira nezavisnost (teorem 2.2.3), X' i X'' su nezavisni. □

U prethodnom poglavlju uveli smo kanonsku reprezentaciju gaussovskih procesa. Skup parametara je bio skup nenegativnih cijelih brojeva. Sljedeći korak je proširiti skup parametara na skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$.

Teorem 4.1.10. *Potpuno nedeterministički stacionarni gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ takav da je $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$ ima kanonsku reprezentaciju danu s*

$$a_{n,j} = a_{n-j}, \ \ j \leq n. \tag{4.9}$$

Drugim riječima, X ima kanonsku reprezentaciju, a kanonska jezgra ovisi samo o $n - j$ za $j \leq n$.

Dokaz. Neka je X potpuno nedeterministički proces. Možemo uočiti da je prostor označen sa $H_n(X) \ominus H_{n-1}(X)$, koji je ortogonalni komplement od $H_{n-1}(X)$, najviše jednodimenzionalan. Naime, $H_n(X)$ možemo zapisati kao direktnu ortogonalnu sumu

$$H_n(X) = H_{n-1}(X) \oplus D_n.$$

S obzirom da $H_{n-1}(X) \cup \{aX_n : a \in \mathbb{C}\}$ razapinje $H_n(X)$, D_n je najviše jednodimenzionalan. Ako je $\dim(D_n) = 0$, tada je $H_n(X) = H_{n-1}(X)$ pa je $H_n(X) = H(X)$ za svaki n. Dakle, X je deterministički što nam daje kontradikciju. Dakle, $\dim(D_n) = 1$ za svaki n. Osim toga, za $m < n$ je

$$D_m \subseteq H_{n-1} \perp D_n$$

pa su D_n međusobno ortogonalni. Možemo pretpostaviti da je D_n razapet vektorom ξ_n norme 1. Kako je X gaussovski proces, ξ_n je standardna gaussovska slučajna varijabla za svaki n. U slučaju gaussovskih slučajnih varijabli, prema propoziciji 1.2.3 i teoremu 2.2.3 ortogonalnost povlači nezavisnost. Dakle, sistem $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ je sistem nezavisnih gaussovskih slučajnih varijabli pa je gaussovski. Vrijedi

$$||\xi_n||^2 = \mathbb{E}(\xi_n^2) = 1$$

radi samog odabira od ξ_n, a to vidimo i iz $\xi_n^2 \sim \chi(1)$. Ako je sada $k \in \mathbb{N}$, tada je $\{\xi_m : n-k \leq m \leq n\}$ ortonormirana baza za $D_{n-k} \oplus \ldots \oplus D_n$ jer su ξ_m međusobno ortogonalne, nezavisne i normirane. S obzirom da je

$$H_n(X) = D_{n-k} \oplus \ldots \oplus D_n \oplus H_{n-k-1}(X),$$

slijedi

$$X_n = \sum_{j=0}^{k} a_j \xi_{n-j} + P_{n-k-1} X_n,$$

gdje je

$$\begin{aligned} a_j &= \langle X_n, \xi_{n-j} \rangle \\ &= \mathbb{E}(X_n \xi_{n-j}) \\ &= (\text{koristeći } \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(\xi_{n-j}) = 0) \\ &= \mathrm{Cov}(X_n, \xi_{n-j}). \end{aligned}$$

Budući da je X stacionaran, tada je i slabo stacionaran pa autokovarijacijska funkcija ne ovisi o n. Dakle, imamo

$$a_j = \langle X_0, \xi_{-j} \rangle.$$

Preostaje pokazati da za $k \to \infty$ vrijedi $P_{n-k-1} X_n \to P_{-\infty} X_n = 0$. Stavimo

$$H_n(X) = H_{-\infty}(X) \oplus H'_n(X).$$

Tada je

$$P_n = P_{-\infty} + P'_n,$$

gdje je P'_n projekcija na $H'_n(X)$. Ako uzmemo $Y \in L^2\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$, tada su slučajne varijable $P'_k Y - P'_{k+1} Y$ ortogonalne za svaki k. Naime, vrijedi

$$P'_j P'_k = P'_k P'_j = P'_k \text{ za } j \geq k$$

pa imamo

$$\langle P'_j Y - P'_{j+1} Y, P'_k Y - P'_{k+1} Y \rangle = \langle (P'_k - P'_{k+1})(P'_j - P'_{j+1}) Y, Y \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle (P'_k P'_j - P'_k P'_{j+1} - P'_{k+1} P'_j + P'_{k+1} P'_{j+1}) Y, Y \rangle \\
&= \langle (P'_k - P'_k - P'_{k+1} + P'_{k+1}) Y, Y \rangle = 0,
\end{aligned}
$$

za $j > k$. Tada za svake $m \leq n$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} (P'_k Y - P'_{k+1} Y) \Big\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \| P'_k Y - P'_{k+1} Y \|^2,$$

što konvergira u 0 kada $m, n \to -\infty$, radi

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \| P'_k Y - P'_{k+1} Y \|^2 \leq 2 \|Y\|^2 < +\infty.$$

Dakle,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (P'_k Y - P'_{k+1} Y)$$

konvergira u $L^2(\Omega)$ pa postoji limes od $P'_n Y$ kada $n \to -\infty$; označimo ga s Y_0. Taj limes je u prostoru

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n(X) = H_{-\infty}(X).$$

Budući da je $P'_n Y \in H'_n(X) \perp H_{-\infty}(X)$, imamo $Y_0 = 0$. Slijedi da je $P_n Y = P_{-\infty} Y + P'_n Y \to P_{-\infty} Y$ za $n \to -\infty$. Budući da je X potpuno nedeterministički, za $Y = X_n$ posebno dobivamo $P_{-\infty} X_n = 0$. Konačno,

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{n} a_{n-j} \xi_j.$$

□

U prethodnom poglavlju dali smo primjer gaussovskih procesa koji su Markovljevi te rezultat koji nam daje egzistenciju i oblik kanonske reprezentacije za takve procese. I ovom slučaju možemo proširiti skup parametara na skup cijelih brojeva.

Korolar 4.1.11. *Ako je stacionarni gaussovski proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ potpuno nedeterministički i Markovljev, tada X možemo zapisati u obliku*

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{n} a c^{n-j} \xi_j, \; n \in \mathbb{Z}, \; 0 < |c| < 1. \tag{4.10}$$

Dokaz. Pretpostavimo da X nije trivijalni proces. Prema teoremu 4.1.10 kanonska reprezentacija postoji i kanonska jezgra ima oblik kao u (4.9). Budući da je X Markovljev, kanonska jezgra je oblika (3.5). Dakle, imamo $a_{n-j} = a_n b_j$, a zbog stacionarnosti koja povlači slabu stacionarnost, autokovarijacijska funkcija ne ovisi o n pa imamo

$$a_{n-j} = a_n b_j = a_{n+1} b_{j+1} = \dots .$$

Sada, uz $a_n \neq 0$ i $b_j \neq 0$, stavimo

$$c = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_j}{b_{j+1}},$$

gdje je c konstanta koja ne ovisi o n i j. Nadalje, $a_{n+1} = a_n c$ i $b_{j+1} = \frac{b_j}{c}$. Odavde imamo

$$a_n = a_{n-1} c = a_{n-2} c^2 = \dots = a_0 c^n$$

i

$$b_j = \frac{b_{j-1}}{c} = \frac{b_{j-2}}{c^2} = \dots = \frac{b_0}{c^j},$$

tj. $a_n = a_0 c^n$ i $b_j = b_0 c^{-j}$, za $n, j \in \mathbb{Z}$, a to povlači relaciju (4.10). Preostaje nam pokazati da je $|c| < 1$. To dobivamo računajući varijancu od X_n. Naime,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_n) &= \mathrm{Var}\Big(\sum_{j=-\infty}^{n} a c^{n-j} \xi_j\Big) \\
&= (\text{nezavisnost }) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n} \mathrm{Var}(a c^{n-j} \xi_j) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n} a^2 c^{2n-2j} \mathrm{Var}(\xi_j) \\
&= (\text{koristeći da su } \xi_n \text{ standardne gaussovske slučajne varijable}) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{n} a^2 c^{2n-2j} \\
&= \sum_{j \geq 0} a^2 c^{2j}.
\end{aligned}$$

Da bi ova suma bila konačna, mora vrijediti $|c| < 1$. □

4.2 Spektralna reprezentacija

Ovaj odjeljak je prvenstveno informativne prirode jer diskutira prilično teške rezultate teorije stacionarnih procesa. Dokazi teorema koje spominjemo prelaze okvire ovog diplomskog rada pa samo dajemo smjernice na odgovarajuću literaturu.

Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ kompleksni stacionarni proces. Autokovarijacijska funkcija procesa X je dana sa

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[(X_{n+h} - m)\overline{(X_n - m)}], \;\; h \in \mathbb{Z}.$$

Sljedeća lema nam daje uvjete kada je funkcija na skupu cijelih brojeva autokovarijacijska funkcija kompleksnog stacionarnog procesa. Dokaz leme se može pronaći u knjizi P. J. Brockwella i R. A. Davisa [4].

Lema 4.2.1. *Funkcija γ definirana na skupu cijelih brojeva je autokovarijacijska funkcija kompleksnog stacionarnog procesa ako i samo ako vrijedi $\gamma(h) = \overline{\gamma(-h)}$ za svaki $h \in \mathbb{Z}$ i*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j \gamma(j-k) \overline{a}_k \geq 0,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Promotrimo proces X sljedećeg oblika:

$$X_n = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} Z_k, \tag{4.11}$$

gdje su $c_1, \ldots, c_N$ kompleksni brojevi, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ realni brojevi i Z_k, $1 \leq k \leq N$, nezavisne jednako distribuirane gaussovske kompleksne slučajne varijable s očekivanjem nula i konačnom varijancom. Možemo pokazati da je X kompleksni gaussovski sistem, tj. možemo pokazati da je linearna kombinacija konačno mnogo proizvoljnih X_k kompleksna gaussovska slučajna varijabla. Naime, vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{k=1}^{N} c_k e^{il\lambda_k} Z_k &= a_1 \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k} Z_k + a_2 \sum_{k=1}^{N} c_k e^{2i\lambda_k} Z_k + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} Z_k \\
&= a_1(c_1 e^{i\lambda_1} Z_1 + \ldots + c_N e^{i\lambda_N} Z_N) + a_2(c_1 e^{2i\lambda_1} Z_1 + \ldots \\
&+ c_N e^{2i\lambda_N} Z_N) + \ldots + a_n(c_1 e^{ni\lambda_1} Z_1 + \ldots + c_N e^{ni\lambda_N} Z_N) \\
&= a_1 c_1 e^{i\lambda_1} Z_1 + \ldots + a_1 c_N e^{i\lambda_N} Z_N + a_2 c_1 e^{2i\lambda_1} Z_1 + \ldots + a_2 c_N e^{2i\lambda_N} Z_N + \ldots \\
&= +a_n c_1 e^{ni\lambda_1} Z_1 + \ldots + a_n c_N e^{ni\lambda_N} Z_N \\
&= c_1 Z_1(a_1 e^{i\lambda_1} + \ldots + a_n e^{ni\lambda_1}) + \ldots + c_N Z_N(a_1 e^{i\lambda_N} + \ldots + a_n e^{ni\lambda_N})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N} c_k Z_k \Big(\sum_{l=1}^{n} a_l e^{il\lambda_k} \Big) \\
&= \Big(\text{označimo } A_k := \sum_{l=1}^{n} a_l e^{il\lambda_k} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} c_k A_k Z_k .
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$\sum_{k=1}^{N} c_k A_k Z_k$$

linearna kombinacija konačno mnogo kompleksnih gaussovskih slučajnih varijabli, slijedi da je

$$\sum_{N=1}^{n} a_N \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} Z_k$$

kompleksna gaussovska slučajna varijabla.

Promatrajmo sada X_{n+h}, gdje je $h \in \mathbb{Z}$ pomak vremenskog parametra n. Imamo

$$X_{n+h} = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i(n+h)\lambda_k} Z_k = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} e^{ih\lambda_k} Z_k .$$

Želimo pokazati da je X stacionarni proces pa treba dokazati da $(X_n : n \in \mathbb{Z})$ i $(X_{n+h} : n \in \mathbb{Z})$ imaju istu vjerojatnosnu distribuciju. Budući da je X gaussovski proces, a slaba stacionarnost povlači stacionarnost, prema propoziciji 4.1.5 dovoljno je pokazati da je X slabo stacionaran. Dakle, moramo pokazati da vrijede svojstva iz definicije 4.1.2. Očito je $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki n. Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} Z_k \Big) \\
&= (\text{koristeći linearnost}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} c_k e^{in\lambda_k} \mathbb{E}(Z_k) \\
&= (\text{koristeći } \mathbb{E}(Z_k) = 0 \text{ za svaki } k) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Budući da Z_k imaju konačnu varijancu, stavimo $\mathrm{Var}(Z_k) = \mathbb{E}|Z_k|^2 = \sigma^2$ za svaki k. Tada je autokovarijacijska funkcija $\gamma(h)$ dana sa

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 e^{ih\lambda_k}.$$

Pokažimo da to vrijedi:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathbb{E}[X_{n+h}\overline{X_n}] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{i(n+h)\lambda_k} Z_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{-in\lambda_k} Z_k\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[(c_1 e^{i(n+h)\lambda_1} Z_1 + \ldots + c_N e^{i(n+h)\lambda_N} Z_N)(c_1 e^{-in\lambda_1} Z_1 + \ldots + c_N e^{-in\lambda_N} Z_N)\big] \\
&= \mathbb{E}(|c_1|^2 e^{ih\lambda_1} |Z_1|^2 + \ldots + |c_N|^2 e^{ih\lambda_1} |Z_N|^2 \\
&+ c_1 c_2 e^{i(n+h)\lambda_1 - in\lambda_2} Z_1 Z_2 + \ldots + c_N c_{N-1} e^{i(n+h)\lambda_N - in\lambda_{N-1}} Z_N Z_{N-1}) \\
&= (\text{koristeći linearnost}) \\
&= |c_1|^2 e^{ih\lambda_1} \mathbb{E}(|Z_1|^2) + \ldots + |c_N|^2 e^{ih\lambda_1} \mathbb{E}(|Z_N|^2) \\
&+ c_1 c_2 e^{i(n+h)\lambda_1 - in\lambda_2} \mathbb{E}(Z_1 Z_2) + \ldots + c_N c_{N-1} e^{i(n+h)\lambda_N - in\lambda_{N-1}} \mathbb{E}(Z_N Z_{N-1})) \\
&= (\text{koristeći nezavisnost i } \mathbb{E}(Z_k) = 0 \text{ za svaki } k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 e^{ih\lambda_k} \mathbb{E}(|Z_k|^2) \\
&= (\text{koristeći } \mathbb{E}|Z_k|^2 = \sigma^2) \\
&= \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 e^{ih\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Prema tome X je stacionarni gaussovski kompleksni slučajni proces.

U nastavku dajemo teorem o reprezentaciji autokovarijacijske funkcije koji će nam biti potreban za definiranje spektralne reprezentacije procesa X. Dokaz teorema se može pronaći u knjizi R. B. Asha [2] i L. Breimana [3].

Teorem 4.2.2. *(Herglotzov teorem)*
Funkcija $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa u L^2 ako i samo ako postoji konačna mjera dF na $\mathcal{B}[-\pi, \pi]$ takva da vrijedi

$$\gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda), \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}.$$

Krenuli smo s kompleksnim gaussovskim procesom X s diskretnim vremenom takvim da vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = 0$ za svaki n i pokazali da je stacionaran. Prema Herglotzovom teoremu 4.2.2 postoji jedinstvena konačna mjera dF na $\mathcal{B}[-\pi, \pi]$ takva da vrijedi

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda), \ h \in \mathbb{Z}, \tag{4.12}$$

gdje je

$$F(\lambda) = \sigma^2 \sum_{\lambda_k \leq \lambda} |c_k|^2 \delta_{\lambda_k}(\lambda),$$

pri čemu je

$$\delta_{\lambda_k} = \begin{cases} 1, & -\pi \leq \lambda_k \leq \lambda, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$\lambda \in [-\pi, \pi]$. Mjeru dF zovemo *spektralna mjera procesa*. Budući da je dF mjera, funkcija F je monotono neopadajuća. Nadalje, neprekidna je zdesna i vrijedi $F(-\pi) = 0$. Takva funkcija $F(\lambda)$ je jednoznačno određena autokovarijacijskom funkcijom $\gamma(n)$.

Definicija 4.2.3. *Integral u relaciji 4.12 zovemo* ***spektralna reprezentacija*** *autokovarijacijske funkcije $\gamma(h)$, a F zovemo* ***spektralna funkcija distribucije*** *od X.*

Ako je dF apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru s gustoćom f, tada f zovemo *spektralna gustoća* procesa.

Sada možemo dati teorem o spektralnoj reprezentaciji kompleksnog stacionarnog gaussovskog procesa. Zbog složenosti izostavljamo dokaz teorema, no može se pronaći u knjizi G. R. Grimmetta i D. R. Stirzakera [6].

Teorem 4.2.4. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ kompleksni stacionarni gaussovski proces sa spektralnom funkcijom distribucije F takav da za svaki n vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = 0$. Tada postoji kompleksni proces $Z = \{Z_\lambda : (-\pi, \pi]\}$ takav da vrijedi*

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda). \tag{4.13}$$

Definicija 4.2.5. *Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ kompleksni stacionarni gaussovski proces. Reprezentaciju od X u obliku* (4.13) *zovemo* ***spektralna reprezentacija procesa*** *X. Nadalje, za svaki X_n kažemo da ima* ***spektralnu dekompoziciju***.

Možemo vidjeti da postoji veza između relacija (4.12) i (4.13). Naime,

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \mathbb{E}(X_{n+h}\overline{X}_n) \\ &= (\text{koristeći relaciju (4.13)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+h)\lambda} dZ(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} \overline{dZ(\lambda)} \bigg) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \mathbb{E}|dZ(\lambda)|^2 \\
&= (\text{koristeći relaciju (4.12)}) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda).
\end{aligned}$$

Stoga, vrijedi

$$dF(\lambda) = \mathbb{E}|dZ(\lambda)|^2.$$

Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ slabo stacionarni proces i pretpostavimo da su $A_1, \ldots, A_k$ disjunktni podskupovi intervala $[-\pi, \pi]$ koji u uniji daju taj interval. Također, pretpostavimo da su izmjerivi u odnosu na dF. Tada X_n možemo prikazati kao sumu međusobno ortogonalnih slabo stacionarnih procesa čija je spektralna distribucija ograničena na $A_1, \ldots, A_k$. To možemo učiniti na sljedeći način: ako X_n ima spektralnu reprezentaciju

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda), \quad \mathbb{E}|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda),$$

definirajmo $X_n^{(j)}$ sa

$$X_n^{(j)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \delta_j(\lambda) dZ(\lambda), \;\; j \in \mathbb{Z},$$

gdje je

$$\delta_j(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in A_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je $X_n^{(j)}$ slabo stacionarni proces i ima spektralnu distribuciju danu sa

$$F_j(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \delta_j(\mu) dF(\mu).$$

Prema tome je distribucija F_j ograničena na A_j. Osim toga,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^{(j)} \overline{X_m^{(k)}}) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \delta_j(\lambda) e^{-im\lambda} \overline{\delta_k(\lambda)} dZ(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda} \delta_j(\lambda) \overline{\delta_k(\lambda)} dZ(\lambda) = 0 \text{ za } j \neq k.
\end{aligned}$$

Ovim postupkom dobivamo ranije spomenutu spektralnu dekompoziciju.

Sljedeći specijalni slučaj spektralne dekompozicije je vrlo važan. Neka je F dana spektralna funkcija distribucije. Tada F možemo prikazati u obliku

$$F = F_a + F_s + F_d,$$

gdje je F_a apsolutno neprekidna komponenta,

$$F_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} F'(\mu) d\mu,$$

F_s neprekidna singularna komponenta koja je monotono neopadajuća i F_d komponenta koja se povećava samo na skokovima od F za visinu skoka. Takva dekompozicija od F implicira odgovarajuću dekompoziciju procesa X na tri međusobno ortogonalna procesa.

Spektralna reprezentacija stacionarnog procesa dekomponira isti u sumu komponenti koje su eksponencijalne funkcije. Osim toga, postoji odgovarajuća dekompozicija autokovarijacijske funkcije procesa. Analiza stacionarnog procesa u smislu spektralne reprezentacije se često naziva “frekvencijska domena”. Alternativa je analizi koju zovemo “vremenska domena”, a koja se odnosi na Woldovu dekompoziciju koja je bila ranije obrađena.

Poglavlje 5

Primjeri stacionarnih gaussovskih procesa

U nastavku dajemo nekoliko primjera stacionarnih gaussovskih procesa. Ranije smo definirali autokovarijacijsku funkciju procesa. Možemo definirati i autokorelacijsku funkciju procesa.

Definicija 5.0.1. *Kažemo da je $\rho(h)$ **autokorelacijska funkcija (ACF)** procesa $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ako joj je vrijednost u "lagu" h jednaka*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)},$$

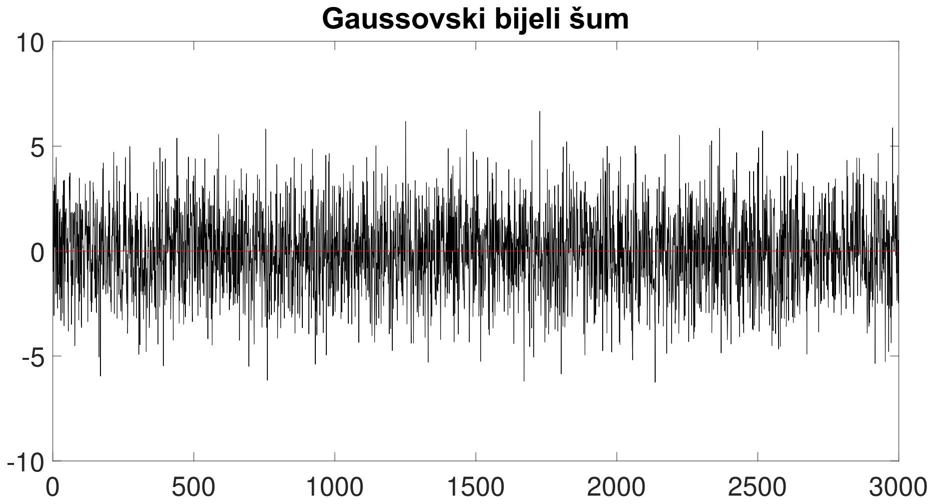
za svaki $h \in \mathbb{Z}$.

Slike simuliranih procesa u nastavku ovog poglavlja izrađene su u programu MATLAB R2017b.

5.1 Gaussovski bijeli šum

Neka je $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ niz međusobno nekoreliranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom σ^2. Proces koji zadovoljava ta svojstva zovemo *bijeli šum*, u oznaci $\xi_n \sim WN(0, \sigma^2)$. Ako su slučajne varijable ξ_n gaussovske, kažemo da je $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *gaussovski bijeli šum*.

Na sljedećoj slici je prikazan gaussovski bijeli šum $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $\xi_n \sim N(0, 4)$.



Slika 5.1: Gaussovski bijeli šum $\{\xi_n\}$ s varijancom $\sigma^2 = 4$

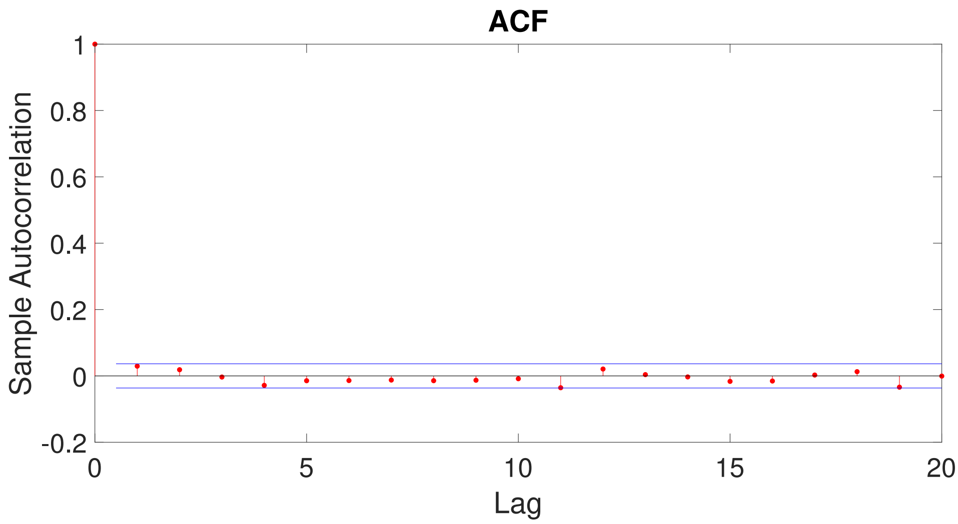
Autokovarijacijska funkcija gaussovskog bijelog šuma je dana s

$$\gamma(n,m) = \mathrm{Cov}(\xi_n, \xi_m) = \mathbb{E}(\xi_n \overline{\xi_m}) = \begin{cases} \mathbb{E}(\xi_n^2), & n = m, \\ \mathbb{E}(\xi_n)\mathbb{E}(\overline{\xi_m}), & n \neq m, \end{cases} = \begin{cases} \sigma^2, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Možemo izračunati i autokorelacijsku funkciju,

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Na sljedećoj slici možemo vidjeti autokorelacijsku funkciju gaussovskog bijelog šuma koji smo prikazali na slici 5.1. Naravno, ovdje (i na kasnijim slikama) je riječ o autokorelacijskoj funkciji simuliranog procesa, koja samo aproksimira teorijsku autokorelacijsku funkciju.



Slika 5.2: Autokorelacijska funkcija gaussovskog bijelog šuma $\{\xi_n\}$ s varijancom $\sigma^2 = 4$

5.2 Gaussovski $ARMA(p, q)$ procesi

Kažemo da je proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *ARMA(p, q) proces* (eng. *autoregressive moving average*) ako je X stacionaran i za svaki n vrijedi

$$X_n - \phi_1 X_{n-1} - \ldots - \phi_p X_{n-p} = Z_n + \theta_1 Z_{n-1} + \ldots + \theta_q Z_{n-q},$$

gdje je $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\}$ gaussovski bijeli šum. Gornju relaciju možemo zapisati i u kompaktnijem obliku na sljedeći način,

$$\phi(B)X_n = \theta(B)Z_n, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

gdje su ϕ i θ polinomi redom, p-tog i q-tog stupnja dani sa

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p$$

i

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q,$$

a B je operator pomaka unatrag zadan s $B^j X_n = X_{n-j}, \ j \in \mathbb{Z}$.

MA procesi

Ako je $\phi(z) \equiv 1$ u (5.1), tada je $X_n = \theta(B)Z_n = Z_n + \theta_1 Z_{n-1} + \ldots + \theta_q Z_{n-q}$ i kažemo da je X *MA proces reda q* ili, kraće, *MA(q) proces* (eng. *moving average*). Možemo vidjeti da je X

stacionarni proces. Naime, ako stavimo $\theta_0 = 1$ i $\theta_j = 0$ za $j > q$, tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{n-j}\Big) \\
&= \text{(koristeći linearnost)} \\
&= \sum_{j=0}^{q} \theta_j \mathbb{E}(Z_{n-j}) \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Uočimo da za $h = 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{n+h}, X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{n-j}\Big)^2 \\
&= \text{(koristeći linearnost i nezavisnost)} \\
&= \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 \mathbb{E}(Z_{n-j}^2) \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2,
\end{aligned}$$

a za $|h| \leq q$, $h \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{n+h}, X_n) &= \mathbb{E}(X_{n+h}\overline{X_n}) \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{q} \theta_j Z_{n+h-j}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \overline{Z_{n-j}}\Big)\Big] \\
&= \text{(koristeći linearnost i nezavisnost)} \\
&= \theta_0\theta_{|h|}\mathbb{E}|Z_n|^2 + \theta_1\theta_{1+|h|}\mathbb{E}|Z_{n+1}|^2 + \ldots + \theta_{q-|h|}\theta_q\mathbb{E}|Z_{n+|h|-q}|^2 \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j\theta_{j+|h|}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathrm{Cov}(X_{n+h}, X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2, & h = 0, \\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & 0 \leq h, \\ 0, & |h| > q \end{cases}$$

pa budući da zadovoljava svojstva iz definicije 4.1.2, zaključujemo da je X slabo stacionarni proces. Kako je $\{Z_n\}$ gaussovski i X je gaussovski pa je prema propoziciji 4.1.5 stacionarni gaussovski proces.

Izračunajmo još vrijednosti autokorelacijske funkcije.

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}}{\sum_{j=0}^{q} \theta_j^2}, & 0 < |h|, \\ 0, & |h| > q. \end{cases}$$

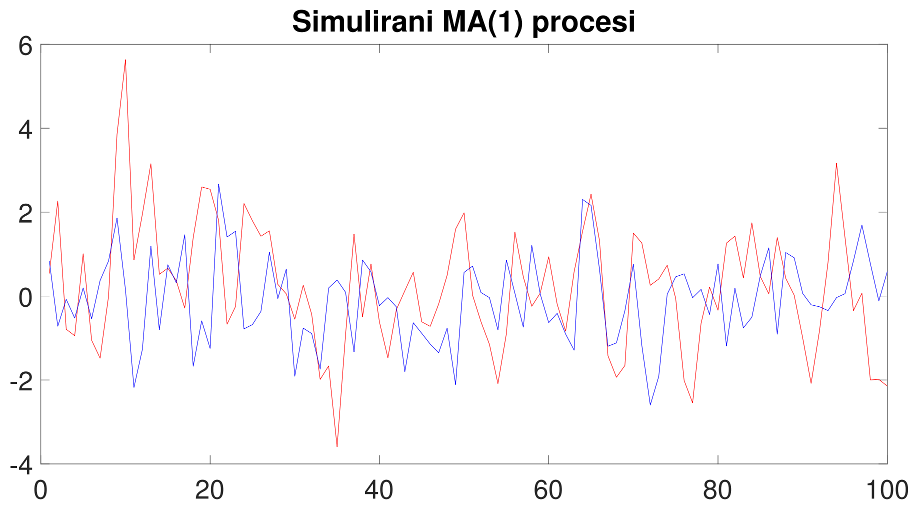
Primjer 5.2.1. *(MA(1) proces)*
Neka je $q = 1$. Tada je $X_n = Z_n + \theta Z_{n-1}$. Autokovarijacijska funkcija je dana sa

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2, & h = 0, \\ \theta\sigma^2, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1, \end{cases}$$

a autokorelacijska funkcija sa dana sa

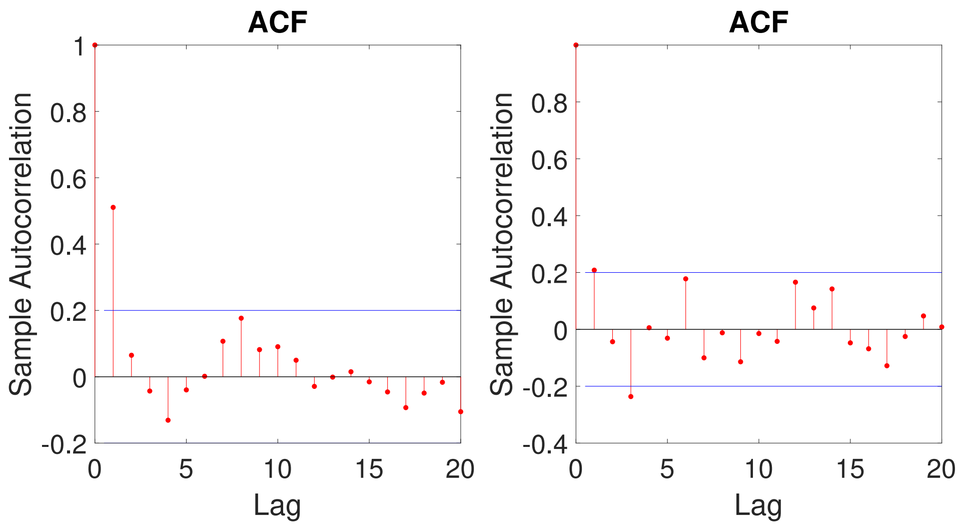
$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1. \end{cases}$$

Na slici 5.3 prikazani su $MA(1)$ procesi za parametar $\theta = 0.8, 0.2$ i gaussovski bijeli šum s varijancom $\sigma^2 = 1$. Crvenom bojom je prikazan $MA(1)$ proces $X_n = Z_n + 0.8Z_{n-1}$, a plavom $X_n = Z_n + 0.2Z_{n-1}$.



Slika 5.3: Simulirani $MA(1)$ procesi za parametar $\theta = 0.8, 0.2$ i gaussovski bijeli šum s varijancom $\sigma^2 = 1$

Njihove autokorelacijske funkcije možemo vidjeti na slici 5.4.



Slika 5.4: Autokorelacijske funkcije $MA(1)$ procesa za parametar $\theta = 0.8$ (lijevo) i $\theta = 0.2$ (desno)

Primjer 5.2.2. *(MA(2) proces)*
Neka je $q = 2$. Tada imamo $X_n = Z_n + \theta_1 Z_{n-1} + \theta_2 Z_{n-2}$. Autokovarijacijsku i autokorelacijsku

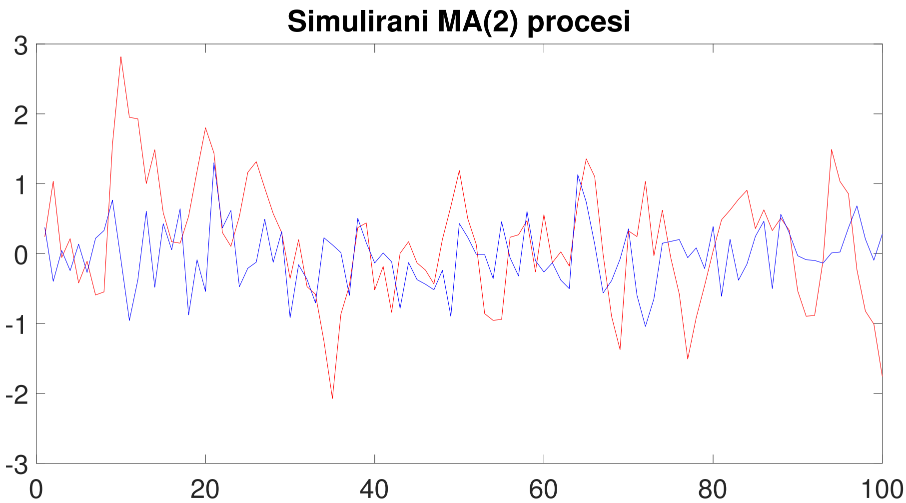
funkciju možemo izraziti kao

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2, & h = 0, \\ (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2, & |h| = 1, \\ \theta_2\sigma^2, & |h| = 2, \\ 0, & |h| > 2 \end{cases}$$

i

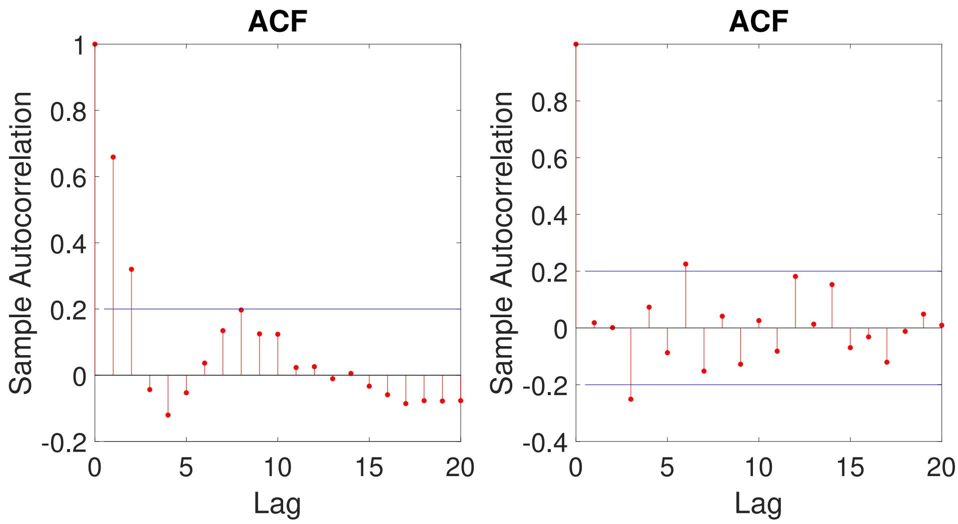
$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & |h| = 1, \\ \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & |h| = 2, \\ 0, & |h| > 2. \end{cases}$$

Na slici 5.5 su prikazani $MA(2)$ *procesi* $X_n = Z_n + 0.9Z_{n-1} + 0.9Z_{n-2}$ *(crvenom bojom) i* $X_n = Z_n + 0.0001Z_{n-1} + 0.0001Z_{n-2}$ *(plavom bojom), gdje je* $\{Z_n\}$ *gaussovski bijeli šum s varijancom* $\sigma^2 = 0.2$.



Slika 5.5: Simulirani $MA(2)$ procesi s parametrima $(\theta_1, \theta_2) = (0.9, 0.9)$ i $(\theta_1, \theta_2) = (0.0001, 0.0001)$

Autokorelacijske funkcije gore prikazanih procesa dane su na slici 5.6.



Slika 5.6: Autokorelacijske funkcije $MA(2)$ procesa s parametrima $(\theta_1, \theta_2) = (0.9, 0.9)$ (lijevo) i $(\theta_1, \theta_2) = (0.0001, 0.0001)$ (desno)

AR procesi

Stavimo sada $\theta(z) \equiv 1$ u (5.1). Tada imamo

$$\phi(B)X_n = Z_n. \tag{5.2}$$

Za proces koji zadovoljava relaciju (5.2) kažemo da je *autoregresivni proces reda p* ili, kraće, *AR(p) proces*. Želimo pokazati da je i ovo slučaj stacionarnog procesa, a to ćemo ilustrirati na primjeru $AR(1)$ procesa.

Neka je $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$, tj.

$$X_n = Z_n + \phi_1 X_{n-1}. \tag{5.3}$$

Ako iteriramo (5.3), dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} X_n &= Z_n + \phi_1(Z_{n-1} + \phi_1 X_{n-2}) \\ &= Z_n + \phi_1 Z_{n-1} + \phi_1^2 X_{n-2} = \ldots \\ &= Z_n + \phi_1 Z_{n-1} + \ldots + \phi_1^k Z_{n-k} + \phi_1^{k+1} X_{n-k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j Z_{n-j} + \phi_1^{k+1} X_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Ako je $|\phi_1| < 1$ i $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ stacionaran, tada je $\|X_n\|^2 = \mathbb{E}(X_n^2)$ konstanta pa vrijedi

$$\Big\|X_n - \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j Z_{n-j}\Big\|^2 = \phi_1^{2k+2}\|X_{n-k-1}\|^2 \to 0 \ \text{ za } k \to \infty.$$

Uočimo da $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{n-j}$ konvergira u srednjem reda 2, tj. da vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{n-j}\Big\|^2 &= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{n-j}\Big)^2 \\
&= (\text{koristeći linearnost i nezavisnost}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j}\mathbb{E}(Z_{n-j}^2) \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} < \infty \ \text{ za } |\phi_1| < 1.
\end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je formulom

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{n-j} \tag{5.4}$$

definiran stacionarni proces koji zadovoljava (5.2). Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{n-j}\Big) \\
&= (\text{koristeći linearnost}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \mathbb{E}(Z_{n-j}) \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Također, vrijedi sljedeće

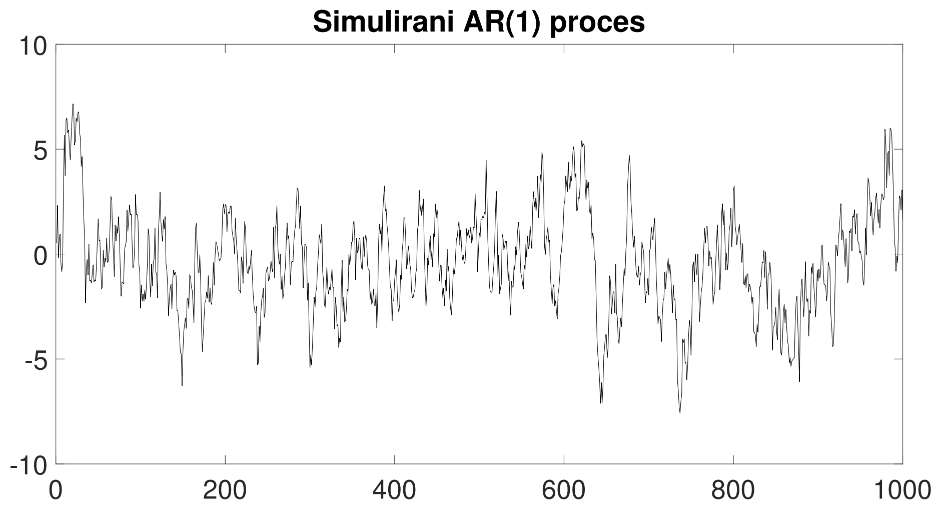
$$\mathrm{Cov}(X_{n+h}, X_n) = \mathbb{E}(X_{n+h}\overline{X_n})$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{m} \phi_1^j Z_{n+h-j}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m} \phi_1^j \overline{Z_{n-j}}\Big)\Big] \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{m-|h|} \phi_1^j \phi_1^{j+|h|} \mathbb{E}|Z_{n+|h|-j}|^2\Big) \\
&= (\text{koristeći da su } Z_n \text{ gaussovski bijeli šum}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{m-|h|} \phi_1^j \phi_1^{j+|h|} \sigma^2\Big) \\
&= \sigma^2 \phi_1^{|j|} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \\
&= \frac{\sigma^2 \phi_1^{|j|}}{1-\phi_1^2}.
\end{aligned}
$$

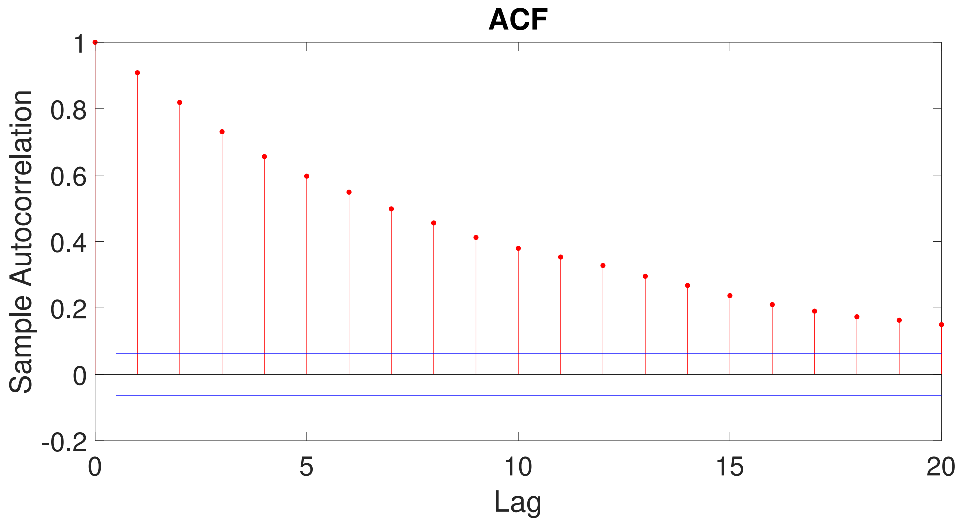
Dakle, $\{X_n\}$ dan s (5.4) je stacionarni proces za $|\phi| < 1$. U slučaju $|\phi| > 1$, $\{X_n\}$ zadan s (5.4) ne konvergira u L^2. Za $|\phi| = 1$ imamo $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{n-j}$. Uočimo da i u tom slučaju $\{X_n\}$ nije stacionaran. Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} Z_{n-j}\Big)^2 \\
&= (\text{koristeći linearnost i nezavisnost}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_{n-j}^2) \\
&= (\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ je gaussovski bijeli šum}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^2 = \infty.
\end{aligned}
$$

Realizacija procesa s parametrom $\phi_1 = 0.9$ i $Z_n \sim N(0,1)$ je prikazana na slici 5.7, a njegova autokorelacijska funkcija na slici 5.8.



Slika 5.7: Simulirani $AR(1)$ proces



Slika 5.8: Autokorelacijska funkcija $AR(1)$ procesa

Dajemo rezultat koji nam govori u kojem slučaju su $ARMA(p, q)$ procesi stacionarni. Dokaz se može pronaći u knjizi P. J. Brockwella i R. A. Davisa [4].

Teorem 5.2.3. *Ako je* $\phi(z) \neq 0$ *za svaki* $z \in \mathbb{C}$ *takav da je* $|z| = 1$*, tada jednadžba za* $ARMA$

proces dana s

$$\phi(B)X_n = \theta(B)Z_n$$

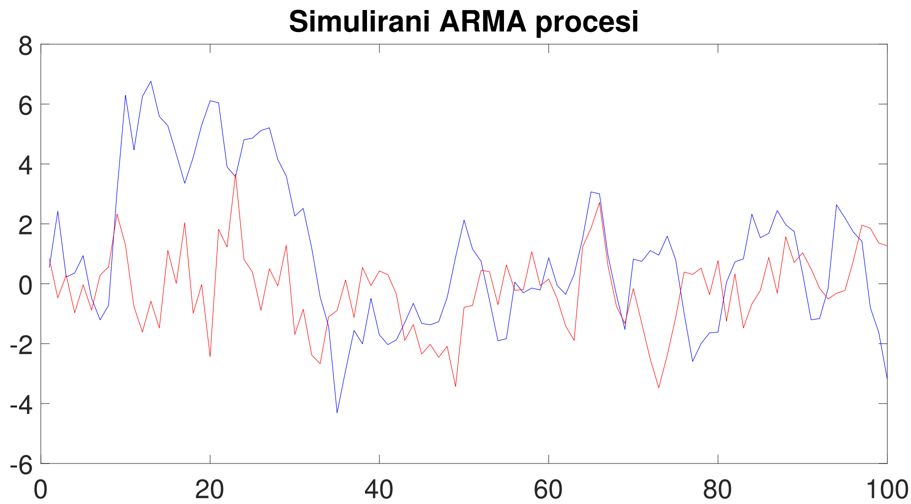
ima jedinstveno stacionarno rješenje

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{n-j},$$

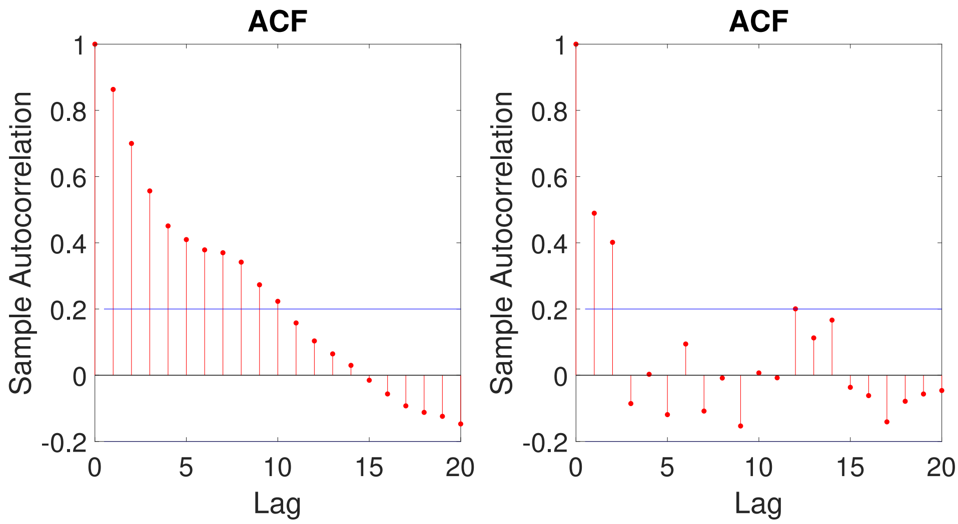
gdje su koeficijenti ψ_j određeni relacijom

$$\theta(z)\phi(z)^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j = \psi(z).$$

Na slici 5.9 prikazani su $ARMA(2,1)$ proces $X_n - 0.7X_{n-1} - 0.1X_{n-2} = 0.4Z_n$ (plavom bojom) i $ARMA(1,2)$ proces $X_n - 0.3X_{n-1} = Z_n + 0.2Z_{n-1} + 0.6Z_{n-2}$ (crvenom bojom). Njihove autokorelacijske funkcije možemo vidjeti na slici 5.10.



Slika 5.9: Simulirani $ARMA$ procesi



Slika 5.10: Autokorelacijska funkcija $ARMA(2,1)$ procesa (lijevo) i $ARMA(1,2)$ procesa (desno)

5.3 Spektralna gustoća $ARMA(p,q)$ procesa

Kako bismo ilustrirali spektralnu gustoću $ARMA(p,q)$ procesa, potreban nam je sljedeći rezultat. Navodimo samo iskaz, a dokaz se može pronaći u knjizi P. J. Brockwella i R. A. Davisa [4].

Teorem 5.3.1. *(Spektralna gustoća $ARMA(p,q)$ procesa)*
Neka je $X = \{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ $ARMA(p,q)$ proces koji zadovoljava

$$\phi(B)X_n = \theta(B)Z_n,$$

gdje je $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\}$ gaussovski bijeli šum te $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p$ i $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$ nemaju zajedničkih nultočaka te ϕ nema nultočaka na jediničnom krugu. Tada je spektralna gustoća od X dana s

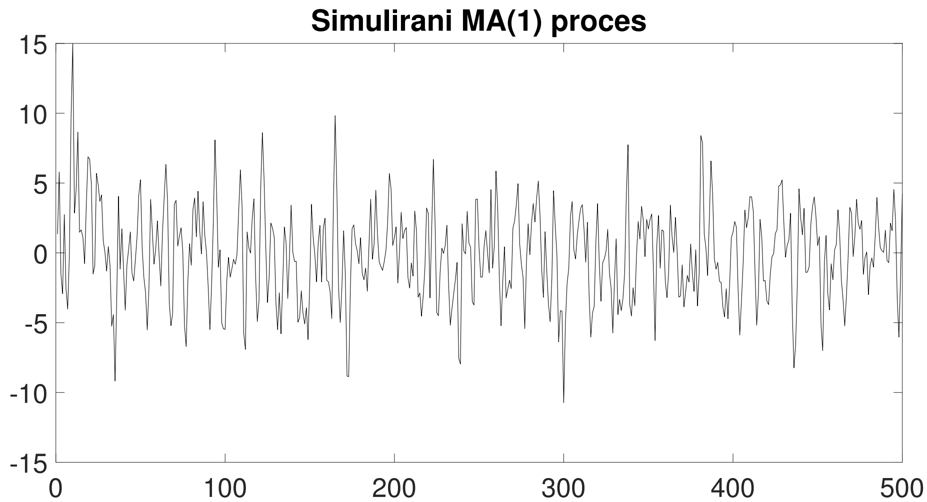
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{5.5}$$

Primjer 5.3.2. *Spektralna gustoća $MA(1)$ procesa*
Neka je $X_n = Z_n + \theta Z_{n-1}$, gdje je $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}\}$ gaussovski bijeli šum. Izračunajmo spektralnu gustoću danog procesa.

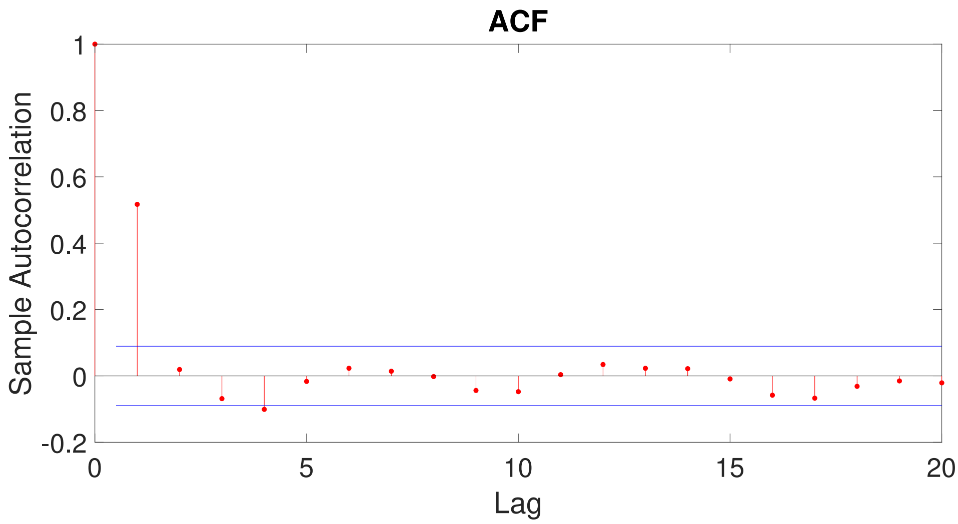
$$f(\lambda) = (\text{prema (5.5)})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}\\
&= (\phi(z) \equiv 1)\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1+\theta e^{-i\lambda}|^2}{1}\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}|1+\theta e^{-i\lambda}|^2\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}|1+\theta\cos\lambda - i\theta\sin\lambda|^2\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big(\sqrt{(1+\theta\cos\lambda)^2+(\theta\sin\lambda)^2}\Big)^2\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+2\theta\cos\lambda+\theta^2).
\end{aligned}
$$

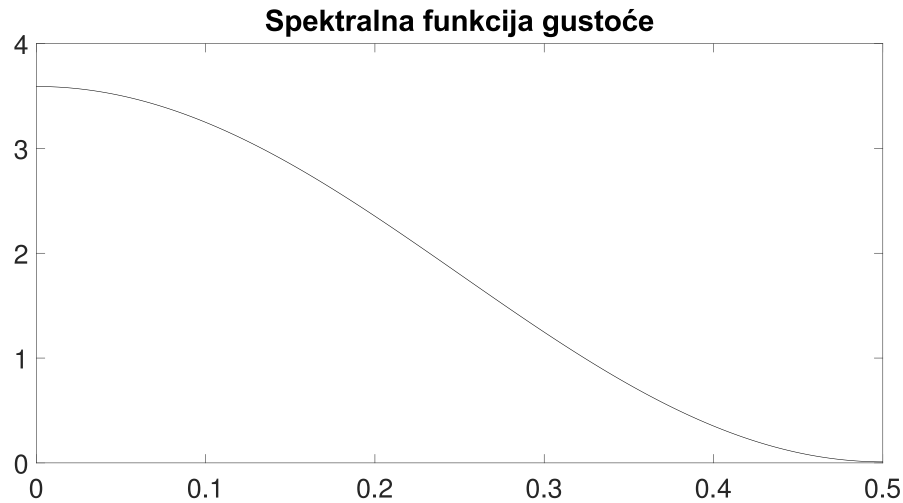
Kao primjer uzimamo $MA(1)$ proces $X_n = Z_n + 0.9Z_{n-1}$, gdje je $\{Z_n\}$ gaussovski bijeli šum s varijancom $\sigma^2 = 6.25$. Na sljedećim slikama prikazani su simulirani proces i autokorelacijska funkcija te spektralna funkcija gustoće.



Slika 5.11: Simulirani $MA(1)$ proces zadan s $X_n = Z_n + 0.9Z_{n-1}$



Slika 5.12: Autokorelacijska funkcija procesa $X_n = Z_n + 0.9Z_{n-1}$

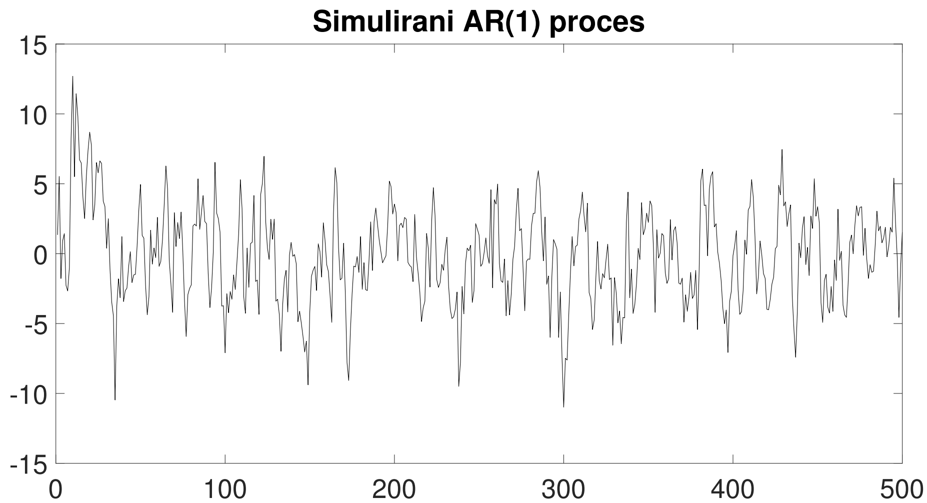


Slika 5.13: Spektralna funkcija gustoće $c \mapsto f(2\pi c),\ 0 \le c \le \frac{1}{2}$, procesa $X_n = Z_n + 0.9Z_{n-1}$

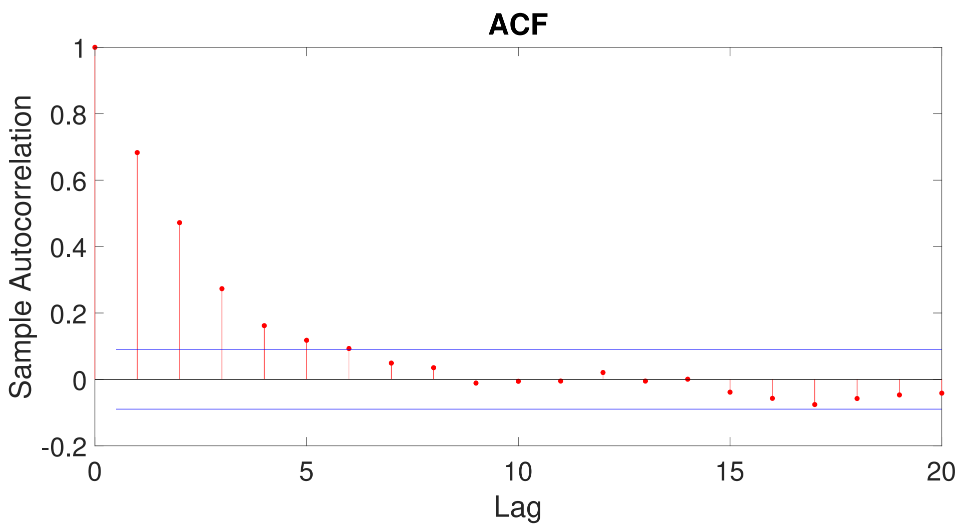
Primjer 5.3.3. *Spektralna gustoća $AR(1)$ procesa*
Uzmimo proces $X_n - \phi X_{n-1} = Z_n$, gdje je $\{Z_n\}$ gaussovski bijeli šum. Koristeći teorem 5.3.1 spektralnu funkciju gustoće danog procesa dobivamo slično kao i u prethodnom primjeru.

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 - \phi e^{-i\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 - 2\theta \cos \lambda + \theta^2)^{-1}.$$

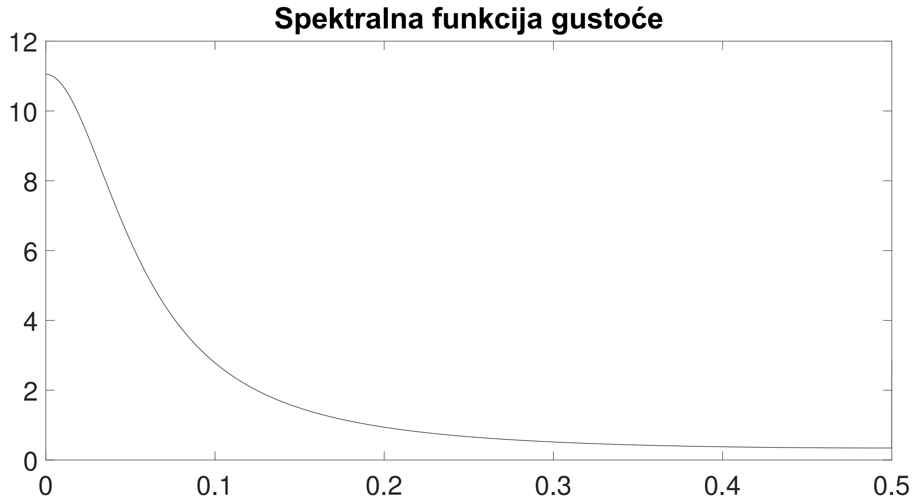
Prikazujemo grafički proces $X_n - 0.7X_{n-1} = Z_n$, gdje je $\{Z_n\}$ gaussovski bijeli šum s varijancom $\sigma^2 = 6.25$, njegovu autokorelacijsku funkciju i spektralnu funkciju gustoće.



Slika 5.14: Simulirani $AR(1)$ proces zadan s $X_n - 0.7X_{n-1} = Z_n$



Slika 5.15: Autokorelacijska funkcija procesa $X_n - 0.7X_{n-1} = Z_n$



Slika 5.16: Spektralna funkcija gustoće $c \mapsto f(2\pi c)$, $0 \le c \le \frac{1}{2}$, procesa $X_n - 0.7X_{n-1} = Z_n$

Bibliografija

[1] R. B. Ash, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, 1972.

[2] ———, *Topics in stochastic processes*, Probability and mathematical statistics, Academic Press, 1975.

[3] L. Breiman, *Probability*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1992.

[4] P. J. Brockwell i R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods: Theory and Methods*, Springer Series in Statistics, Springer New York, 1991.

[5] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley, 1967.

[6] G. Grimmett i D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Probability and Random Processes, OUP Oxford, 2001.

[7] T. Hida i M. Hitsuda, *Gaussian Processes*, Translations of Mathematical Monographs 120, American Mathematical Society, Providence, 1993.

[8] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru: Integral i mjera. Dio 2*, Školska knjiga, 1977.

[9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Školska knjiga, 1992.

Sažetak

Gaussovski proces je u potpunosti određen očekivanjem i autokovarijacijskom funkcijom. U ovom radu proučavamo stacionarne gaussovske procese s diskretnim vremenskim parametrom te njihovu kanonsku i spektralnu reprezentaciju. Također, proučavamo karakterizaciju Markovljevog svojstva za gaussovske procese pomoću kovarijacijske matrice. Konačno, u radu se izlažu i simuliraju primjeri stacionarnih gaussovskih procesa.

Summary

A Gaussian process is completely determined by its mean and autocovariance function. In this thesis we consider stationary Gaussian processes with discrete parameter and their canonical and spectral representations. Also, we discuss the Markov property of Gaussian processes, which can be characterized in terms of the covariance function. Finally, in the thesis we discuss and simulate examples of stationary Gaussian processes.

Životopis

Rođena sam 14. siječnja 1993. godine u Varaždinu, a odrasla u Trnovcu gdje sam do 2007. godine pohađala osnovnu školu. Iste godine sam upisala smjer Prirodoslovna gimnazija u Graditeljskoj, rudarskoj i prirodoslovnoj školi Varaždin i završila je 2011. godine. Te godine sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu te 2015. stekla titulu prvostupnika matematike. Nakon toga, iste godine, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu.