Laplaceova transformacija

Zemlić, Valentina

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:628980

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Zemlić

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Laplaceova transformacija jedna je od poznatijih integralnih transformacija koja svoju primjenu nalazi u brojnim znanstvenim područjima, među kojima se najviše ističu matematika i fizika. Stoga je cilj ovog rada detaljnije proučiti Laplaceovu transformaciju.

Svoje ime dobila je prema poznatom matematičaru Pierre-Simon Laplaceu koji je svojim radom nastavio Eulerova istraživanja o integralima kao rješenjima diferencijalnih jednadžbi. Laplace na taj način produbljuje Eulerove rezultate te uvodi Laplaceovu transformaciju u modernom smisu u svrhu rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Važnost Laplaceove transformacije najbolje se očituje u rješavanju diferencijalnih jednadžbi koje na taj način transformiramo u algebarske jednadžbe, čime je njihovo rješavanje znantno olakšano. No, da bi se od rješenja algebarske jednadžbe dobilo rješenje početne diferencijalne jednadžbe trebamo odrediti inverz Laplaceove transformacije.

Ovaj rad bavi se prvenstveno Laplaceovom transformacijom, njezinim svojstvima, inverzom te u konačnici primjenom u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Laplaceova transformacija je linearni operator na odgovarajućim prostorima funkcija. Pri tome domenu čine sve one funkcije čiji Laplaceovi transformati postoje, a kodomenu čine upravo njihovi Laplaceovi transformati. Laplaceov transformat može se promatrati kao specijalni slučaj nepravog Riemann-Stieltjesovog integrala. Stoga se u radu prvo uvodi pojam Riemann-Stieltjesovog integrala i određuju se dovoljni uvjeti njegovog postojanja. Početak drugog poglavlja donosi teoreme koji govore o području konvergencije i analitičnosti Laplace-Stieltjesovog integrala te definiciju Laplaceovog transformata. Nakon toga, prelazi se na računanje Laplaceovih transformata osnovnih funkcija i prikaz važnih svojstava Laplaceove transformacije. Treće poglavlje posvećeno je inverznoj Laplaceovoj transformaciji pri čemu se, osim definicije, prikazuje primjer određivanja inverzne Laplaceove transformacije za racionalne funkcije.

Na kraju rada kroz nekoliko primjera ilustrira se primjena Laplaceove transformacije u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Poglavlje 1

Stieltjesov integral

Prvo poglavlje posvećeno je Stieltjesovom integralu, počevši od njegove definicije, preko teorema o nužnim i dovoljnim uvjetima za njegovo postojanje pa u konačnici do korisnih svojstava. Kroz sve spomenuto cilj je demonstrirati uvjete u kojima postoji Laplaceova transformacija, kojom ćemo se baviti u narednim poglavljima.

Da bismo definirali Stieltjesov integral potrebno je najprije uvesti realne funkcije f i g, realne varijable x , pri čemu $x \in [a, b]$. Nadalje, definiramo particiju P danog segmenta određenu točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pri čemu je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Označimo $\Delta := \max |x_{i+1} - x_i|$, za $i = 0, 1, \ldots, n-1$, što nazivamo *normom* particije P.

Definicija 1.0.1. *([9]) Kažemo da postoji limes integralnih suma*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\left[g(x_{i+1}) - g(x_i)\right],$$

te da je on jednak I ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji Δ_0 takav da za svaki $0 < \Delta < \Delta_0$ i svaku particiju P norme Δ te svaki izbor točaka $\alpha_i^P \in \left[x_i^P, x_{i+1}^P\right]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, vrijedi:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^P)\left[g(x_{i+1}^P) - g(x_i^P)\right] - I \right| < \epsilon.$$

Tada Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g definiramo kao

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\left[g(x_{i+1}) - g(x_i)\right].$$

S obzirom na to da tako definirani integral postaje Riemannov ukoliko je $g(x) = x$ uobičajeno je zvati ga i Riemann-Stieltjesovim integralom. Pritom za funkciju f kažemo da je Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na funkciju g.

Pri definiranju Stieltjesovog integrala, izborom funkcija f i g ograničili smo se na realne funkcije realne varijable x pa se prirodno javlja problem definiranja Stieltjesovog integrala za kompleksne funkcije.
U tu svrhu uvodimo kompleksne funkcije f i g realne varijable x takve da je

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$$

pri čemu su funkcije f_1, f_2, g_1, g_2 realne funkcije realne varijable x. Tada se Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g definira kao:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dg(x) \quad &:= \quad \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]d[g_1(x) + ig_2(x)] \\
&= \quad \int_a^b [f_1(x)dg_1(x) + f_1(x)idg_2(x) + if_2(x)dg_1(x) + i^2 f_2(x)dg_2(x)] \\
&= \quad \int_a^b f_1(x)dg_1(x) - \int_a^b f_2(x)dg_2(x) + i\int_a^b f_1(x)dg_2(x) \\
&+ \quad i\int_a^b f_2(x)dg_1(x),
\end{aligned}$$

uz uvjet da integrali s desne strane jednakosti postoje. Time je definicija Stieltjesovog integrala proširena na način da uključuje kompleksne funkcije realne varijable x.

Prije prelaska na uvjete postojanja Stieltjesovog integrala i bitna svojstva potrebno je uvesti oznake za gornju i donju Stieltjesovu sumu. Označimo sa M_i supremum funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$, a sa m_i infimum funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$, pod pretpostavkom da supremum i infimum postoje. Sume

$$S_P = \sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

$$s_P = \sum_{i=0}^{n-1} m_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

nazivamo redom *gornja* i *donja* Stieltjesova suma funkcije f u odnosu na funkciju g, obzirom na particiju P.

Teorem 1.0.2. *([9]) Neka su funkcije f i g realne i omeđene na segmentu $[a, b]$ te neka je uz to funkcija g neopadajuća[1]. Tada Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g postoji ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{\Delta \to 0}(S_P - s_P) = 0,$$

neovisno o izboru particije P.

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da Stieltjesov integral postoji te da je

$$\int_a^b f(x)dg(x) = I.$$

Neka je $\epsilon > 0$ te neka je P proizvoljna particija. Tada, za svaki $i = 0, 1, \dots, n-1$ možemo naći $\alpha_i^\epsilon \in [x_i, x_{i+1}]$ tako da vrijedi nejednakost

$$0 \leq M_i - \epsilon < f(\alpha_i^\epsilon), \tag{1.1}$$

pri čemu je $M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)$ čije postojanje garantira činjenica da je funkcija f omeđena.
Uočimo da, kako je funckija g neopadajuća, vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

odnosno

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq S_P \tag{1.2}$$

jer je $S_P = \sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$. Osim toga, iz (1.1) slijedi

$$M_i < f(\alpha_i^\epsilon) + \epsilon,$$

odnosno

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \cdot \epsilon.$$

[1]Funkcija g je neopadajuća na segmentu $[a, b]$ ako za svaki $x, y \in [a, b]$, $x < y$, vrijedi $g(x) \leq g(y)$. Često ih zovemo rastućim (ne nužno strogo rastućim) funkcijama.

Sređivanjem tog izraza dobivamo sljedeće

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \epsilon[g(b) - g(a)],$$

točnije

$$S_P \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \epsilon[g(b) - g(a)]. \tag{1.3}$$

Sada iz (1.2) i (1.3) dobivamo nejednakost

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq S_P \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \epsilon[g(b) - g(a)]. \tag{1.4}$$

Zbog Stieltjes integrabilnosti funkcije f u odnosu na funkciju g slijedi da je

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = I,$$

pa puštanjem $\lim_{\Delta \to 0}$ na (1.4) dobivamo

$$I \leq \lim_{\Delta \to 0} S_P \leq I + \epsilon[g(b) - g(a)]$$

iz čega puštanjem $\lim_{\epsilon \to 0}$ slijedi

$$I \leq \lim_{\Delta \to 0} S_P \leq I.$$

Stoga, možemo zaključiti da je

$$\lim_{\Delta \to 0} S_P = I.$$

Analogno, uočimo da za proizvoljnu particiju P i $\epsilon > 0$ možemo naći $\alpha_i^\epsilon \in [x_i, x_{i+1}]$ tako da vrijedi

$$m_i + \epsilon > f(\alpha_i^\epsilon), \tag{1.5}$$

pri čemu je m_i infimum funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$. Također, očito je da za donju sumu s_p vrijedi sljedeće

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \geq s_P, \tag{1.6}$$

a kako iz (1.5) slijedi

$$m_i > f(\alpha_i^\epsilon) - \epsilon,$$

imamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \geq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \cdot \epsilon.$$

Sređivanjem tog izraza dobivamo sljedeće

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \geq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \epsilon[g(b) - g(a)],$$

točnije

$$s_P \geq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \epsilon[g(b) - g(a)]. \tag{1.7}$$

Sada iz (1.6) i (1.7) slijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \epsilon[g(b) - g(a)] \leq s_P \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \tag{1.8}$$

Zbog Stieltjes integrabilnosti funkcije f u odnosu na funkciju g vrijedi

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i^\epsilon)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = I,$$

pa puštanjem $\lim_{\Delta\to 0}$ na (1.8) dobivamo

$$I - \epsilon[g(b) - g(a)] \leq \lim_{\Delta\to 0} s_P \leq I$$

iz čega puštanjem $\lim_{\epsilon\to 0}$ slijedi

$$I \leq \lim_{\Delta\to 0} s_P \leq I.$$

Stoga, možemo zaključiti da je

$$\lim_{\Delta\to 0} s_P = I.$$

Konačno, primjenom svojstva o limesu razlike dobivamo

$$\lim_{\Delta\to 0}(S_P - s_P) = \lim_{\Delta\to 0} S_P - \lim_{\Delta\to 0} s_P = I - I = 0$$

čime smo dokazali nužan uvjet za postojanje Stieltjesovog integrala.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da vrijedi

$$\lim_{\Delta\to 0}(S_P - s_P) = 0, \tag{1.9}$$

pri čemu su S_P i s_P redom gornja i donja suma pridružene particiji P.
Neka je

$$\sigma_P = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

jedna integralna suma pridružena particiji P, za $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$. S obzirom na to da je funkcija g neopadajuća vrijedi

$$s_P \leq \sigma_P \leq S_P. \tag{1.10}$$

Da bismo dokazali postojanje Stieltjesovog integrala, zbog (1.9) dovoljno je pokazati da postoji $\lim_{\Delta\to 0} S_P$. Tada postoji i $\lim_{\Delta\to 0} s_P$ te primjenom teorema o sendviču na (1.10) zaključujemo da postoji $\lim_{\Delta\to 0} \sigma_P$, što je ekvivalentno postojanju Stieltjesovog integrala.
Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Pokažimo da za taj ϵ postoji Δ_0 takav da za gornje sume pridružene proizvoljnim particijama P_1 i P_2, normi Δ_1 i Δ_2 takvih da je $\Delta_1, \Delta_2 < \Delta_0$ vrijedi

$$\left|S_{P_1} - S_{P_2}\right| < \epsilon.$$

S obzirom na to da vrijedi $\lim_{\Delta\to 0}(S_P - s_P) = 0$ možemo naći Δ_0 tako da $\forall\Delta < \Delta_0$ i svaku particiju P norme manje od Δ_0 vrijedi

$$S_P - s_P < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Uzmimo sada dvije particije P_1 i P_2 normi Δ_1 i Δ_2 takvih da vrijedi $\Delta_1, \Delta_2 < \Delta_0$. Neka je P_3 particija segmenta $[a, b]$ takva da uključuje točke sadržane u particijama P_1 i P_2. To znači da je particija P_3 nastala iz particije P_1 dodavanjem konačno mnogo točaka iz P_2, ali je nastala i iz P_2 dodavanjem konačno mnogo točaka iz particije P_1. To znači da za gornje sume vrijedi

$$S_{P_3} \leq S_{P_1} \quad \text{te} \quad S_{P_3} \leq S_{P_2},$$

a donje sume zadovoljavaju nejednakosti

$$s_{P_1} \leq s_{P_3} \quad \text{i} \quad s_{P_2} \leq s_{P_3}.$$

Iz čega dobivamo

$$s_{P_1} \leq S_{P_3} \leq S_{P_1} \qquad \text{i} \qquad s_{P_2} \leq S_{P_3} \leq S_{P_2}. \tag{1.12}$$

Tada zbog (1.11) i (1.12) vrijedi

$$0 \leq (S_{P_1} - S_{P_3}) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad 0 \leq (S_{P_2} - S_{P_3}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sređivanjem, dolazimo do

$$\left|S_{P_1} - S_{P_2}\right| < \epsilon$$

što smo trebali pokazati te sada možemo zaključiti da postoji $\lim_{\Delta\to 0} S_P$, a time i $\lim_{\Delta\to 0} s_P$. Zbog teorema o sendviču slijedi da postoji $\lim_{\Delta\to 0} \sigma_P$, odnosno da je funkcija f Stieltjes integrabilna u odnosu na funkciju g. □

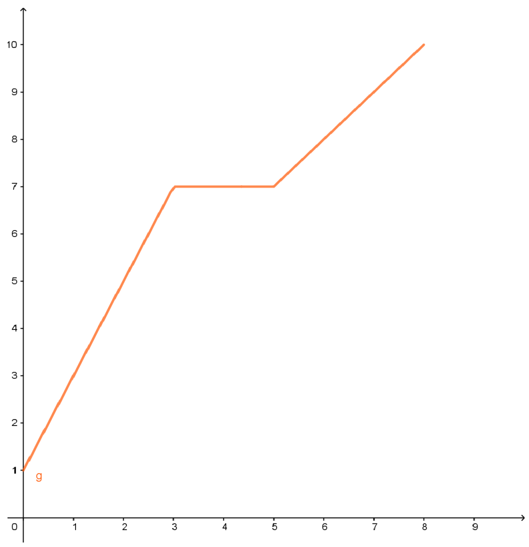
U daljnjem proučavanju Stieltjesovog integrala trebat će nam pojam neopadajuće funkcije i funkcije ograničene varijacije, pa ćemo kroz definicije i teoreme koji slijede proći osnovna svojstva takvih funkcija.

Definicija 1.0.3. *([9]) Neka je funkcija g neopadajuća na segmentu* $[a, b]$*. Točku* $x_i \in [a, b]$ *nazivamo točkom nepromjenjivosti funkcije g ako postoji dvostrana (ili jednostrana u slučaju* $x = a$ *ili* $x = b$*) okolina te točke u kojoj je funkcija g konstanta.*

Definicija 1.0.4. *([9]) Ako je dana neopadajuća funkcija, točkom rasta funkcije nazivamo onu točku koja nije točka nepromjenjivosti.*

Primjer 1.0.5. *Na slici je prikazan graf funkcije g definirane sa*

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [0, 3\rangle \\ 7, & x \in [3, 5] \\ x + 2, & x \in \langle 5, 8] \end{cases}.$$



Slika 1.1: Grafički prikaz funkcije g

Uočimo da je funkcija g neopadajuća na segmentu $[0, 8]$*, pri čemu je na intervalima* $[0, 3\rangle$ *i* $\langle 5, 8]$ *strogo rastuća, a na segmentu* $[3, 5]$ *je konstantna. Za svaku točku iz segmenata* $[0, 3]$ *i* $[5, 8]$ *kažemo da je točka rasta jer ne postoji niti jedna dvostrana okolina svake od* *tih točaka u kojoj je funkcija konstantna. S druge strane, točke iz intervala $\langle 3, 5\rangle$ su točke nepromjenjivosti jer oko svake od njih postoji okolina u kojoj je funkcija konstantna.*

Teorem 1.0.6. *([9]) Neka je dana neopadajuća funkcija na segmentu koja ima konačan broj točaka rasta. Tada ona nije neprekidna u točkama rasta te je konstantna između njih. To je po dijelovima konstantna (step) funkcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f neopadajuća na segmentu s konačnim brojem točaka rasta. Pretpostavimo suprotno, tj. da je funkcija f neprekidna u točkama rasta. Neka je a bilo koja od (konačno mnogo) točaka rasta i neka je funckija f neprekidna u a. Tada je točka a izolirana točka rasta, točnije postoji okolina te točke $\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$, za dovoljno mali $\epsilon > 0$, u kojoj su sve ostale točke točke nepromjenjivosti (u protivnom, imali bismo kontradikciju s konačnosti broja točaka rasta). Zbog nepromjenjivosti, očito je funkcija f konstantna na intervalima $\langle a - \epsilon, a\rangle$ i $\langle a, a + \epsilon\rangle$. Pošto je f neprekidna u a, konstante slijeva i zdesna su jednake te je njihova vrijednost jednaka $f(a)$. No tada je a također točka nepromjenjivosti funkcije f, što je kontradikcija s pretpostavkom. Stoga f ima prekid u točki a, tj. konstante slijeva i zdesna se razlikuju. Analogno zaključujemo za sve točke rasta, pa slijedi je funkcija f po dijelovima konstantna (step) funkcija. □

Definicija 1.0.7. *([1, 5]) Za funkciju g kažemo da je funkcija ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$ ako postoji realan broj $M > 0$ takav da za svaku particiju P segmenta $[a, b]$ vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq M.$$

Potpuna varijacija funkcije g ograničene varijacije je funkcija od $x \in [a, b]$, koju definiramo kao

$$V[g]_a^x = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|, \qquad x \in [a, b].$$

Kažemo da je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$ ako vrijedi $V[g]_a^b < \infty$.

Nadalje, objasnit ćemo odnos omeđene funkcije na segmentu i funkcije ograničene varijacije na segmentu.

Teorem 1.0.8. *([1]) Neka je funkcija g neopadajuća i omeđena na segmentu $[a, b]$. Tada je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$ te vrijedi*

$$V[g]_a^b = g(b) - g(a).$$

Dokaz. Neka je dana funkcija g neopadajuća i omeđena na segmentu $[a, b]$. Neka je P proizvoljna particija segmenta $[a, b]$ takva da je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Da bismo dokazali da je funkcija g ograničene varijacije trebamo pokazati da za potpunu varijaciju vrijedi $V[g]_a^b < \infty$. S obzirom na to da je funkcija g rastuća imamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = g(b) - g(a).$$

Tada za potpunu varijaciju funkcije g vrijedi

$$V[g]_a^b = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = g(b) - g(a) < \infty$$

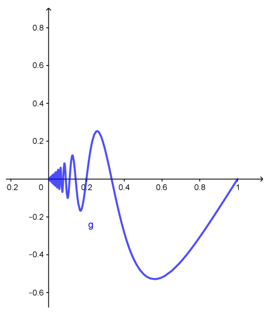
pa zaključujemo da je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. $\square$

Pitamo se je li svaka omeđena funkcija na segmentu bez pretpostavke rasta ujedno i funkcija ograničene varijacije. Sljedećim kontraprimjerom pokazat ćemo da to ne mora vrijediti.

Primjer 1.0.9. *([8]) Neka je funkcija* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definirana kao*

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \in \langle 0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija g je omeđena, što se može zaključiti iz grafičkog prikaza funkcije:



Slika 1.2: Graf funkcije g

Pokažimo da funkcija g nije ograničene varijacije na segmentu $[0,1]$.
Uzmimo particiju P segmenta $[0,1]$ *određenu točkama*

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Funkcija g je ograničene varijacije na $[0,1]$ *ako za potpunu varijaciju vrijedi* $V[g]_0^1 < \infty$.
Stoga računamo

$$V[g]_0^1 = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

pa krenimo od dane sume. Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| &= |g(x_1) - g(x_0)| + |g(x_2) - g(x_1)| + |g(x_3) - g(x_2)| + \ldots \\
&+ |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| + |g(x_n) - g(x_{n-1})| = \\
&= \left|\frac{1}{2n}\cos n\pi - 0\right| + \left|\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{1}{2n}\cos n\pi\right| + \ldots \\
&+ \left|\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right| = \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1,$$

iz čega slijedi da je

$$V[g]_0^1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

što očito teži u ∞ *kada* $n \to \infty$ *pošto harmonijski red divergira.*
Stoga zaključujemo da funkcija g nije ograničene varijacije.

Teorem 1.0.10. *([1]) Ako je funkcija g ograničene varijacije na segmentu* $[a,b]$ *tada je ona omeđena na segmentu* $[a,b]$.

Dokaz. Neka je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$ te neka je particija P segmenta $[a,b]$ određena točkama $a = x_0 \le x_1 \le x_2 = b$. Tada je

$$\sum_{i=0}^{1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = |g(x_1) - g(a)| + |g(b) - g(x_1)|$$

iz čega, zbog $V[g]_a^b = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$ slijedi

$$|g(x_1) - g(a)| + |g(b) - g(x_1)| \le V[g]_a^b.$$

Osim toga, očito je

$$|g(x_1) - g(a)| + |g(b) - g(x_1)| \ge |g(x_1) - g(a)|\,,$$

pa imamo

$$|g(x_1) - g(a)| \le |g(x_1) - g(a)| + |g(b) - g(x_1)| \le V[g]_a^b$$

iz čega zaključujemo da je funkcija g omeđena na segmentu $[a,b]$. Primijetimo da je zaključak valjan zbog proizvoljnosti izbora točke x_1 jer činjenica da je funkcija g ograničene varijacije ne ovisi o izboru particije segmenta $[a,b]$. □

Sljedeći teorem pokazuje da funkciju ograničene varijacije možemo prikazati kao razliku dviju neopadajućih funkcija.

Teorem 1.0.11. *([1]) Neka je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$. Tada na segmentu $[a,b]$ postoje neopadajuće funkcije g_1 i g_2 takve da vrijedi*

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x) \tag{1.13}$$

te

$$V[g]_a^x = g_1(x) + g_2(x), \quad x \in [a,b]\,. \tag{1.14}$$

Dokaz. Neka je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$. Definirajmo funkcije g_1 i g_2 na segmentu $[a,b]$ sa

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{2}\left(V[g]_a^x + g(x)\right), \\ g_2(x) &= \frac{1}{2}\left(V[g]_a^x - g(x)\right), \qquad x \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

Funkcije smo definirali na taj način kako bi one zadovoljavale jednakosti (1.13) i (1.14), što možemo provjeriti:

$$\begin{aligned} g_1(x) - g_2(x) &= \frac{1}{2}V[g]_a^x + \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}V[g]_a^x + \frac{1}{2}g(x) = g(x), \quad \text{te} \\ g_1(x) + g_2(x) &= \frac{1}{2}V[g]_a^x + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}V[g]_a^x - \frac{1}{2}g(x) = V[g]_a^x. \end{aligned}$$

Preostaje provjeriti jesu li funkcije g_1 i g_2 neopadajuće. Provjerimo prvo je li funkcija g_1 neopadajuća.
Neka su $x, y \in [a, b]$ takvi da $x < y$. Trebamo dokazati da vrijedi $g_1(y) - g_1(x) \geq 0$. Imamo

$$\begin{aligned} g_1(y) - g_1(x) &= \frac{1}{2}\left(V[g]_a^y + g(y)\right) - \frac{1}{2}\left(V[g]_a^x + g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(V[g]_a^y - V[g]_a^x\right) + \frac{1}{2}\left(g(y) - g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[V[g]_x^y + (g(y) - g(x))\right]. \end{aligned}$$

Budući da je funkcija g ograničene varijacije vrijedi

$$V[g]_x^y \geq |g(y) - g(x)|$$

pa slijedi da je

$$\frac{1}{2}\left[V[g]_x^y + (g(y) - g(x))\right] \geq 0,$$

odnosno

$$g_1(y) - g_1(x) \geq 0$$

što znači da je funkcija g_1 neopadajuća.
Analogno se pokaže da je funkcija g_2 također neopadajuća. □

Kroz dva teorema prikazat ćemo dovoljne uvjete za postojanje Stieltjesovog integrala takvih funkcija.

Teorem 1.0.12. *([9]) Neka je funkcija f neprekidna, a g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Tada postoji Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su funkcije f i g realne, s obzirom na to da kompleksne funkcije realne varijable prikazujemo pomoću realnih funkcija, koristeći pritom svojstva Stieltjesovog integrala (1.20) i (1.21). Neka je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Prema Teoremu 1.0.10 slijedi da je funkcija g omeđena na segmentu $[a, b]$. Nadalje, prema Teoremu 1.0.11 funkciju g možemo zapisati kao razliku dviju neopadajućih funkcija. To znači da možemo primijeniti Teorem 1.0.2 o nužnom i dovoljnom uvjetu za postojanje Stieltjesovog integrala.
Budući da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, ona je ujedno i uniformno neprekidna na tom segmentu pa možemo pretpostaviti da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji norma Δ_0 takva da za svaku subdiviziju P norme Δ za koju je $\Delta < \Delta_0$, vrijedi

$$M_i - m_i < \epsilon. \tag{1.15}$$

Pritom su M_i i m_i supremum i infimum funkcije f na $[x_i, x_{i+1}]$, za $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
Stoga, za proizvoljnu particiju P takvu da je $\Delta < \Delta_0$ iz (1.15) slijedi

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} m_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \cdot \epsilon,$$

odnosno, nakon sređivanja dobivamo

$$0 \leq S_P - s_P \leq \epsilon \left[g(b) - g(a)\right]. \tag{1.16}$$

Puštanjem $\lim_{\Delta \to 0}$ na (1.16) dolazimo do

$$0 \leq \lim_{\Delta \to 0}(S_P - s_P) \leq \lim_{\Delta \to 0} \epsilon \left[g(b) - g(a)\right],$$

što je jednako

$$0 \leq \lim_{\Delta \to 0}(S_P - s_P) \leq \epsilon \left[g(b) - g(a)\right].$$

Konačno, pustimo $\lim_{\epsilon \to 0}$ i dolazimo do

$$0 \leq \lim_{\Delta \to 0}(S_P - s_P) \leq 0,$$

što znači da je

$$\lim_{\Delta \to 0}(S_P - s_P) = 0.$$

Iz toga, zbog Teorema 1.0.2 slijedi da Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g postoji, što je i trebalo dokazati. □

Promotrimo specijalni slučaj kada je funkcija $g(x) = x$, a funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$. Funkcija $g(x) = x$ je ograničene varijacije. Naime, uzmimo proizvoljnu particiju P segmenta $[a, b]$ određenu točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
S obzirom na to da je $g(x) = x$ neopadajuća funkcija, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\
&= x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1} \\
&= x_n - x_0 \\
&= b - a,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $V[g]_a^b = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = b - a < \infty$ pa zaključujemo da je funkcija g ograničene varijacije.
Prema Teoremu 1.0.12 funkcija f je Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na funkciju g. U tom slučaju je Riemann-Stieltjesov integral zapravo Riemannov integral funkcije f.

Teorem 1.0.13. *([10]) Neka su dane funkcije f i g takve da je f funkcija ograničene varijacije, a funkcija g neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada postoji Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g te vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \tag{1.17}$$

Dokaz. Neka je P proizvoljna particija danog segmenta $[a, b]$, te neka je funkcija f ograničene varijacije, a funkcija g neprekidna na zadanom segmentu. Neka je

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

pri čemu $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, proizvoljna integralna suma za particiju P.
Sumu σ_P možemo zapisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + f(\alpha_n)g(x_n) - f(\alpha_n)g(x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})]g(x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_{i+1})g(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_i)g(x_{i-1}) + f(\alpha_n)g(x_n) - f(\alpha_n)g(x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})]g(x_i) + f(\alpha_n)g(x_{n-1}) - f(\alpha_1)g(x_0) + f(\alpha_n)g(x_n) - f(\alpha_n)g(x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})]g(x_i) + f(\alpha_n)g(x_n) - f(\alpha_1)g(x_0).$$

Definiramo li $\alpha_0 = a$ te $\alpha_{n+1} = b$, dodavanjem i oduzimanjem izraza $g(x_0)f(\alpha_0) = g(a)f(a)$ i $g(x_n)f(\alpha_{n+1}) = g(b)f(b)$ desnoj strani jednakosti, dobit ćemo

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=0}^{n} g(x_i)[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})] + g(b)f(b) - g(a)f(a). \tag{1.18}$$

S obzirom na to da je funkcija g neprekidna, a f ograničene varijacije, prema Teoremu 1.0.12 postoji Stieltjesov integral funkcije g u odnosu na funkciju f. To znači da postoji $\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n} g(x_i)[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})]$. Uočimo da kada norma $\Delta = \max|x_i - x_{i+1}|$ teži u nulu, jednako će biti i s $\max|\alpha_i - \alpha_{i+1}|$ jer je točkama $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$ određena particija ugniježđena s particijom određenom točkama x_i segmenta $[a, b]$. Stoga zaključujemo da postoji $\lim_{\Delta\to 0} \sigma_P$. To znači da puštanjem $\lim_{\Delta\to 0}$ na jednakost (1.18) dobivamo

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n} g(x_i)[f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1})] + \lim_{\Delta\to 0} [g(b)f(b)] - \lim_{\Delta\to 0} [g(a)f(a)],$$

iz čega slijedi

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x).$$

□

Formula (1.17) naziva se formulom *parcijalne integracije* za Riemann-Stieltjesov integral. Primijetimo, ako stavimo $g(x) = x$, ona prelazi u formulu parcijalne integracije za Riemannov integral na koju smo navikli.

1.1 Svojstva Stieltjesovog integrala

Teoremima koji slijede u nastavku prikazat ćemo svojstva Stieltjesovog integrala. Pritom podrazumijevamo da su f i g kompleksne funkcije realne varijable, ukoliko u iskazu teorema ne definiramo drugačije.
Za početak primijetimo da, ukoliko je funkcija g konstanta, vrijedi

$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0.$$

Također, vrijedi

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

Teorem 1.1.1. *([9], [10]) Neka je funkcija f neprekidna, a g funkcija ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Tada vrijede sljedeća svojstva Stieltjesovog integrala:*

1.
$$\int_a^b kf(x)dg(x) = k\int_a^b f(x)dg(x), \qquad k \text{ je konstanta} \tag{1.19}$$

2.
$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x) \tag{1.20}$$

3.
$$\int_a^b f(x)d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x) \tag{1.21}$$

4.

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x), \qquad c \in \langle a, b\rangle \tag{1.22}$$

5.

$$f_1(x) \leq f_2(x) \Rightarrow \int_a^b f_1(x)dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)dg(x) \tag{1.23}$$

6.

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dV[g]_a^x, \quad x \in [a, b] \tag{1.24}$$

Dokaz. Svojstva (1.19) , (1.20) i (1.21) slijede iz definicije Stieltjesovog integrala te primjenom svojstava sume.
Pokažimo sada (1.22). Odaberimo particiju P segmenta $[a, b]$ koja sadrži točku c, što je moguće napraviti jer po definiciji Stieltjesov integral postoji neovisno o izboru particije. Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g postoji prema Teoremu 1.0.12.
Točkom c možemo podijeliti segment $[a, b]$ na podsegmente $[a, c]$ i $[c, b]$. Kako smo ustanovili da je funkcija f Stieltjes integrabilna na segmentu $[a, b]$, bit će Stieltjes integrabilna i na podsegmentima $[a, c]$ i $[c, b]$. Neka je P_1 particija segmenta $[a, c]$ određena točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c$, a P_2 particija segmenta $[c, b]$ određena točkama $c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$ te neka je $P = P_1 \cup P_2$ pripadna particija segmenta $[a, b]$. Za integralne sume pridružene tim particijama vrijedi:

$$\sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} = \sigma_P.$$

Kako je funkcija f Stieltjes integrabilna na segmentima $[a, c]$, $[c, b]$ i $[a, b]$, a limes integralnih suma Stieltjes integrabilnih funkcija ne ovisi o izboru particije, puštanjem $\lim_{\Delta\to 0}$ dobivamo:

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j)[g(x_{j+1})-g(x_j)]+\lim_{\Delta\to 0}\sum_{j=m}^{n-1} f(\alpha_j)[g(x_{j+1})-g(x_j)] = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_j)[g(x_{j+1})-g(x_j)],$$

iz čega slijedi

$$\int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Nadalje, dokažimo svojstvo (1.23). Kako je $f_1(x) \leq f_2(x)$, za svaki $x \in [a, b]$, nejednakost će vrijediti i za svaku točku $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, iz čega slijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Kako su funkcije f_1 i f_2 Stieltjes integrabilne, postoje $\lim_{\Delta\to 0}$, pa je

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \leq \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_2(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)], \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

□

Uočimo kako postojanje integrala na desnoj strani jednakosti (1.22) samo po sebi ne garantira postojanje integrala na lijevoj strani jednakosti što ćemo pokazati primjerom preuzetim iz ([9]). Neka su funkcije f i g definirane sa:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in \langle 1,2] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1\rangle \\ 0, & x \in [1,2]\,. \end{cases}$$

Primijetimo da integrali $\int_0^1 f(x)dg(x)$ i $\int_1^2 f(x)dg(x)$ zaista postoje jer je

$$\int_0^1 f(x)dg(x) = \int_0^1 dg(x) = g(x)|_0^1 = g(1) - g(0) = 0 - 1 = -1,$$

te

$$\int_1^2 f(x)dg(x) = 0.$$

No, kako funkcije f i g imaju zajedničku točku prekida, $x = 1$, integral $\int_0^2 f(x)dg(x)$ ne postoji. Promatramo limes po subdivizijama sve manjeg koraka tako da točka prekida $x = 1$ uvijek leži unutar nekog intervala subdivizije. Kad korak $\Delta \to 0$, taj interval oko $x = 1$ postaje sve uži. Kad bi Stieltjesov integral postojao, postojao bi limes integralnih suma kad korak $\Delta \to 0$, $n \to \infty$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

No, s lijeve i desne strane točke $x = 1$ je funkcija g konstanta, pa u čitavoj sumi, bez obzira na korak subdivizije, preživljava samo član $f(\alpha_i)(0-1)$, pri čemu je α_i proizvoljno izabran iz intervala subdivizije oko $x = 1$. Kako taj α_i možemo odabrati iz intervala oko $x = 1$

s lijeve ili desne strane točke $x = 1$ (gdje f poprima vrijednost 1, odnosno 0), taj član je jednak -1 ili 0. Zbog toga je i limes po opadajućim subdivizijama koje sadrže $x = 1$ unutar nekog intervala jednal -1, odnosno 0. To je kontradikcija s definicijom postojanja Stieltjesovog integrala, pa Stieltjesov integral ne postoji.

Teorem 1.1.2. *([9]) Neka su funkcije f_1 i f_2 neprekidne, g_1 i g_2 funkcije ograničene varijacije te $k_1,\ k_2,\ l_1,\ l_2$ konstante. Tada vrijedi*

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] d[l_1 g_1(x) + l_2 g_2(x)] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} k_i l_j \int_a^b f_i(x) dg_j(x).$$

Dokaz teorema slijedi direktnom primjenom svojstava (1.19) , (1.20) i (1.21) Stieltjesovog integrala.

Lema 1.1.3. *([5]) Neka je funkcija g klase $C^1\,[a,b]$. Tada je funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$.*

Dokaz. S obzirom na to da je funkcija g klase $C^1\,[a,b]$ znamo da postoji njena derivacija g' te da su g i g' neprekidne na segmentu $[a,b]$. Također, funkcije g i g' omeđene su na segmentu $[a,b]$. Da bi funkcija g bila ograničene varijacije trebamo pokazati da vrijedi $V[g]_a^b < \infty$, odnosno

$$\sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| < \infty.$$

Primijenimo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti prema kojem postoje točke $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ takve da

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i),$$

za $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Odnosno, to znači da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |g'(\eta_i)|\, |x_{i+1} - x_i|\,. \tag{1.25}$$

Nadalje, kako je funkcija g' omeđena, slijedi da postoji M takav da za svaki $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ vrijedi $|g'(\eta_i)| \leq M$, za svaki $i = 0, i, \ldots, n-1$, što primjenimo na (1.25) te dobivamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |g'(\eta_i)|\, |x_{i+1} - x_i| \leq M(b-a).$$

Iz toga slijedi

$$V[g]_a^b = \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq M(b-a) < \infty$$

pa je funkcija g ograničene varijacije. □

Teorem 1.1.4. *([9]) Neka je funkcija f neprekidna, te neka je funkcija φ apsolutno integrabilna[2] na segmentu $[a,b]$. Ako je funkcija g definirana sa*

$$g(x) = \int_c^x \varphi(t)dt, \quad x \in [a,b]\,, \tag{1.26}$$

pri čemu $a \leq c \leq b$, vrijedi sljedeće

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)g^{'}(x)dx. \tag{1.27}$$

Dokaz. Kako je funkcija φ apsolutno integrabilna na segmentu $[a,b]$ vrijedi

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx < \infty.$$

Može se pokazati da je funkcija g definirana sa (1.26) ograničene varijacije na segmentu $[a,b]$ (vidjeti ([9]), Teorem 5c). To znači da Stieltjesov teorem funkcije f u odnosu na funkciju g postoji, prema Teoremu 1.0.12.
Neka je P proizvoljna particija segmenta $[a,b]$, norme Δ. Stavimo

$$\sigma_P := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Kako je $g(x) = \int_c^x \varphi(t)dt$ slijedi

$$\sigma_P = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)dt,$$

iz čega oduzimanjem $\int_a^b f(t)\varphi(t)dt$ s obje strane jednakosti dobivamo

$$\sigma_P - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - f(t)) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)dt$$

[2]Funkcija φ je apsolutno integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako $\int_a^b |\varphi(x)|\, dx < \infty$.

$$\sigma_P - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) - f(t)\right] \varphi(t)dt.$$

Nadalje, promotrimo li apsolutne vrijednosti dobivenih izraza slijedi da je

$$\left|\sigma_P - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x_i) - f(t)| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|\, dt.$$

Ako $\max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x_i) - f(t)|$, za $i = 0, 1, \ldots, n-1$, označimo s M_P, dobivamo

$$\left|\sigma_P - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt\right| \leq M_P \int_a^b |\varphi(t)|\, dt.$$

Uočimo kako vrijednost M_P teži u nulu kako norma particije P teži u nulu, zbog uniformne neprekidnosti. Stoga, $\lim_{\Delta\to 0} \sigma_P = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt$. S druge strane, kako je funkcija f Stieltjes integrabilna u odnosu na funkciju g, iz definicije Stieltjesovog integrala vrijedi i $\lim_{\Delta\to 0} \sigma_P = \int_a^b f(x)dg(x)$. Time dobivamo:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

□

Korolar 1.1.5. *([10]) Neka je funkcija f neprekidna, a g klase C^1 na segmentu $[a, b]$. Tada za Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g^{'}(x)dx.$$

Dokaz. Neka je $\varphi := g'$ na segmentu $[a, b]$. Tada je funkcija φ neprekidna, pa i apsolutno integrabilna na segmentu $[a, b]$. Stoga tvrdnja direktno slijedi iz Teorema 1.1.4. □

Teorem 1.1.6. *([9]) Neka su funkcije f i φ neprekidne, a funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Ako je funkcija β definirana sa*

$$\beta(x) = \int_c^x \varphi(t)dg(t), \quad x \in [a, b], \quad c \in [a, b],$$

tada je i funkcija β ograničene varijacije na $[a, b]$ te vrijedi

$$\int_a^b f(x)d\beta(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dg(x).$$

Primijetimo da je teorem, u slučaju pretpostavke da je funkcija g klase C^1 na $[a, b]$, direktna posljedica Teorema 1.1.4. Važnost ovog teorema, čiji se dokaz može naći u [9] jest u tome da vrijedi i uz slabiju pretpostavku na funkciju g, a to je da je funkcija ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Jasno je da je svojstvo C^1 na segmentu $[a, b]$ jače od svojstva ograničene varijacije funkcije jer Lema 1.1.3 garantira da je funkcija koja je klase C^1 ujedno i ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$.

Definicija 1.1.7. *([9]) Funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiranu sa*

$$g(x) = a_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}\rangle$$

pri čemu $a_i \in \mathbb{R}$, za $i = 0, 1, \ldots, n-1$, nazivamo step-funkcijom.

Primjer 1.1.8. *([9]) Odredimo Stieltjesov integral neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u odnosu na step-funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiranu sa*

$$g(x) = a_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}\rangle$$

pri čemu $a_i \in \mathbb{R}$, za $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Jedna particija segmenta $[a, b]$ određena je točkama skoka step-funkcije

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Promatrajmo sva moguća profinjenja te particije s normom koja teži u 0. Tada je Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na step-funkciju (za koji znamo da postoji jer je f neprekidna, a g ograničene varijacije) jednak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[a_{i+1} - a_i], \end{aligned}$$

pri čemu su x_i, $i = 0, ..., n-1$, točke skoka step-funkcije. Primijetimo da, bez obzira koliko profinili particiju, u sumi ostaje samo navedenih n članova, jer ostali iščezavaju zbog toga što je između točaka skoka g konstanta.

Teorem 1.1.9. *([9]) Neka je funkcija f neprekidna, a funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, b]$. Uz to neka funkcija g poprima vrijednost c na gustom skupu točaka iz segmenta $[a, b]$ koji uključuje i krajnje točke segmenta. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0.$$

Dokaz. Dokaz teorema slijedi direktno iz definicije Stieltjesovog integrala. Naime, znamo da je funkcija f Stieltjes integrabilna u odnosu na funkciju g, pa je

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]. \tag{1.28}$$

Tada, zbog činjenice da funkcija g poprima vrijednost c na gustom skupu točaka iz segmenta $[a, b]$ koji uključuje i krajnje točke segmenta, particiju možemo birati upravo iz tog gustog skupa točaka. Iz toga, sređivanjem izraza (1.28), dobivamo da zaista vrijedi

$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0.$$

□

1.2 Nepravi Stieltjesov integral

Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, \infty\rangle$ te funkcija g ograničene varijacije na segmentu $[a, R]$, za svaki $R > 0$.

Definicija 1.2.1. *([9]) Integral definiran sa*

$$\int_a^{\infty} f(x)dg(x) = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dg(x),$$

ako limes postoji, nazivamo nepravim Stieltjesovim integralom funkcije f u odnosu na funkciju g.

Primijetimo da integral $\int_a^R f(x)dg(x)$, za $R > a$, postoji prema Teoremu 1.0.12.
Na sličan način, ukoliko je funkcija f neprekidna na intervalu $\langle -\infty, a]$, nepravi Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g definiramo sa

$$\int_{\infty}^a f(x)dg(x) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^a f(x)dg(x).$$

Ukoliko je pak funkcija f neprekidna na intervalu $\langle -\infty, \infty\rangle$, nepravi Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g definiramo na sljedeći način

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dg(x) \quad + \int_0^{\infty} f(x)dg(x).$$

Za nepravi Stieltjesov integral kažemo da konvergira kada definirani limes postoji.
U suprotnome, kažemo da integral divergira. ([9])

Definicija 1.2.2. *([9]) Kažemo da nepravi Stieltjesov integral konvergira apsolutno ako i samo sljedeći Stieltjesov integral konvergira*

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dV[g]_a^x < \infty,$$

pri čemu $V[g]_a^x$ potpuna varijacija funkcije g.

Po Teoremu 1.0.11, postoje neopadajuće funkcije g_1 i g_2 takve da je $V[g]_a^x = g_1(x) + g_2(x)$ pa integral $\int_a^R |f(x)|\, dV_g(x) = \int_a^R |f(x)|\, d[g_1(x) + g_2(x)]$ postoji za svaki $R > a$.

Poglavlje 2

Laplaceova tranformacija

Laplaceova transformacija poznata je matematička metoda koja se koristi za rješavanje problema iz područja matematičke analize. Posebno je pogodna za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Stoga ćemo u ovom poglavlju krenuti od formalne definicije Laplaceove transformacije kako bismo kasnije mogli prikazati osnovna svojstva te primjenu u rješavanju diferencijalnih jednadžbi.

2.1 Definicija Laplaceove transformacije i područje konvergencije

Prije formalne definicije Laplaceove transformacije uspostavit ćemo vezu sa Stieltjesovim integralom.

Utemeljeno na ([9]), neka je g kompleksna funkcija realne varijable t na intervalu $[0, \infty\rangle$ te ograničene varijacije na segmentu $[0, R]$, za svaki $R > 0$, takva da $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$. Neka je dana kompleksna funkcija jedne realne varijable $f(t) = e^{-st}$, pri čemu je s kompleksna varijabla, $s = x + iy$.
Tada prema Teoremu 1.0.12 postoji Stieltjesov integral funkcije f u odnosu na funkciju g na segmentu $[0, R]$ te je on jednak

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-st}dg(t) &= \int_0^R e^{-(x+iy)t}d[g_1(t)+ig_2(t)]\\
&= \int_0^R e^{-xt-iyt}dg_1(t)+i\int_0^R e^{-xt-iyt}dg_2(t)\\
&= \int_0^R e^{-xt}\left[\cos(yt)-i\sin(yt)\right]dg_1(t)+i\int_0^R e^{-xt}\left[\cos(yt)-i\sin(yt)\right]dg_2(t)\\
&= \int_0^R e^{-xt}\cos(yt)dg_1(t)-i\int_0^R e^{-xt}\sin(yt)dg_1(t)+i\int_0^R e^{-xt}\cos(yt)dg_2(t)\\
&+ \int_0^R e^{-xt}\sin(yt)dg_2(t).
\end{aligned}$$

Nadalje, prema definiciji 1.2.1 nepravi Stieltjesov integral funkcije $f = e^{-st}$ u odnosu na funkciju g definiramo kao

$$\int_0^\infty e^{-st}dg(t) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dg(t). \tag{2.1}$$

Za $s \in \mathbb{C}$ za koje limes postoji, nepravi Stieltjesov integral konvergira dok za ostale divergira.

Nepravi Stieltjesov integral funkcije $f(t) = e^{-st}$ u odnosu na funkciju g, definiran u (2.1), nazivamo *Laplace-Stieltjesovim integralom*. Njime je zadana jedna funkcija kompleksne varijable $s \in \mathbb{C}$, na domeni konvergencije nepravog integrala.

Područje konvergencije i analitičnost Laplace-Stieltjesovog integrala

Sljedeći teoremi govore o području konvergencije Laplace-Stieltjesovog integrala. U svim teoremima u ovom poglavlju pretpostavljamo da je funkcija g ograničene varijacije na svakom segmentu $[0, R]$, $R > 0$.

Teorem 2.1.1. *([9]) Neka je g kompleksna ili realna funkcija ograničene varijacije na svakom segmentu $[0, R]$, $R > 0$. Neka je $s_0 \in \mathbb{C}$ te neka je $\sup_{0\le u<\infty}\left|\int_0^u e^{-s_0t}dg(t)\right| = M$, pri čemu $M < \infty$. Tada integral*

$$\int_0^\infty e^{-st}dg(t) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dg(t)$$

konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) > Re(s_0)$.
Nadalje, za $s \in \mathbb{C}$ takve da je $Re(s) > Re(s_0)$ taj integral jednak je

$$\int_0^\infty e^{-st} dg(t) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} h(t) dt$$

gdje je

$$h(u) := \int_0^u e^{-s_0 t} dg(t), \qquad u \geq 0.$$

Pritom, integral na desnoj strani konvergira apsolutno za $Re(s) > Re(s_0)$.

Dokaz. Neka je g funkcija ograničene varijacije na segmentu $[0, R]$.
Prema Teoremu 1.1.6 za funkciju h definiranu s $h(u) := \int_0^u e^{-s_0 t} dg(t)$ vrijedi

$$\int_0^R e^{-(s-s_0)t} dh(t) = \int_0^R e^{-st+s_0 t} e^{-s_0 t} dg(t) = \int_0^R e^{-st} dg(t),$$

odnosno

$$\int_0^R e^{-st} dg(t) = \int_0^R e^{-(s-s_0)t} dh(t).$$

Parcijalnom integracijom Stieltjesovog integrala, po Teoremu 1.0.13, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-st} dg(t) &= e^{-(s-s_0)t} \cdot h(t)\Big|_0^R - \int_0^R -(s - s_0) e^{-(s-s_0)t} h(t) dt \\
&= e^{-(s-s_0)R} h(R) - e^{-(s-s_0)0} h(0) + (s - s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} h(t) dt \\
&= e^{-(s-s_0)R} h(R) + (s - s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} h(t) dt.
\end{aligned}$$

S obzirom na to da je

$$\int_0^\infty e^{-st} dg(t) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} dg(t)$$

trebamo odrediti vrijednost tog limesa. To znači da puštanjem $\lim_{R\to\infty}$ na desnu stranu jednakosti

$$\int_0^R e^{-st} dg(t) = e^{-(s-s_0)R} h(R) + (s - s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} h(t) dt$$

dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}dg(t) &= \lim_{R\to\infty}\left[e^{-(s-s_0)R}h(R) + (s-s_0)\int_0^R e^{-(s-s_0)t}h(t)dt\right] \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[e^{-(s-s_0)R}h(R)\right] + \lim_{R\to\infty}\left[(s-s_0)\int_0^R e^{-(s-s_0)t}h(t)dt\right] \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[e^{-(s-s_0)R}h(R)\right] + (s-s_0)\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-(s-s_0)t}h(t)dt.
\end{aligned}$$

Iz pretpostavke $\sup_{0\leq u<\infty}\left|\int_0^u e^{-s_0t}dg(t)\right| = M$, pri čemu $M < \infty$, zaključujemo da je funkcija h omeđena. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left(e^{-(s-s_0)R}h(R)\right) \leq \lim_{R\to\infty}\left|e^{-(s-s_0)R}h(R)\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|e^{-(s-s_0)R}\right||h(R)| \\
&\leq M\lim_{R\to\infty}\left|e^{-(s-s_0)R}\right| \\
&= M\lim_{R\to\infty}e^{-(Re(s)-Re(s_0))R} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stoga, zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}dg(t) &= (s-s_0)\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-(s-s_0)t}h(t)dt \\
&= (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}h(t)dt
\end{aligned}$$

odnosno da dani nepravi integral konvergira za svaki s za koji je $Re(s) > Re(s_0)$.
Preostaje još provjeriti konvergira li integral $\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}h(t)dt$ apsolutno. Budući da je funkcija h omeđena, za $Re(s) > Re(s_0)$ slijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|e^{-(s-s_0)t}h(t)\right|dt &= \int_0^\infty \left|e^{-(s-s_0)t}\right||h(t)|\,dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-(Re(s)-Re(s_0))t}Mdt \\
&= M\int_0^\infty e^{-(Re(s)-Re(s_0))t}dt \\
&= M\cdot\frac{1}{Re(s)-Re(s_0)} < \infty
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da za $Re(s) > Re(s_0)$ integral konvergira apsolutno. □

Korolar 2.1.2. *[9] Ako integral $\int_0^\infty e^{-st}dg(t)$ konvergira za neki $s_0 = x_0 + iy_0$ tada konvergira i za svaki $s = x + iy$ za koji vrijedi $x > x_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\int_0^\infty e^{-st}dg(t)$ konvergira za neki s_0.
Tada postoji $\sup_{0\leq u<\infty} \left|\int_0^u e^{-s_0t}dg(t)\right|$ pa tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 2.1.1 □

Kao posljedicu ovog korolara možemo zaključiti da ako integral

$$\int_0^\infty e^{-st}dg(t) \tag{2.2}$$

divergira za neki $s_0 \in \mathbb{C}$, onda divergira u svakoj točki $s \in \mathbb{C}$ za koju je $Re(s) \leq Re(s_0)$.

Stoga, zbog Korolara 2.1.2 i komentara o divergenciji, prema ([9]) razlikujemo tri slučaja vezana uz područje konvergencije nepravog Laplace-Stieltjesovog integrala:

1. integral konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$,
2. integral ne konvergira ni za koji $s \in \mathbb{C}$,
3. postoji $\beta_0 \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) > \beta_0$ integral konvergira, a za $s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) < \beta_0$ integral divergira.

U trećem slučaju, iz očitih razloga,točku $\beta_0 \in \mathbb{R}$ nazivamo *apscisom konvergencije*, a pravac $Re(s) = \beta_0$ nazivamo *os konvergencije*.

Sljedeći teoremi govore o području konvergencije Laplace-Stieltjesovog integrala u slučaju eksponencijalne omeđenosti funkcije g.

Teorem 2.1.3. *([9]) Neka je*

$$g(t) = O(e^{\gamma t})$$[1]

za neki realan broj γ te neka je g ograničene varijacije na $[0, R]$, za svaki $R > 0$. Tada integral

$$\int_0^\infty e^{-st}dg(t)$$

konvegira za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) > \gamma$.

[1]Neka su dane dvije funkcije f i g. Kažemo da je $g(x) = O(f(x))$ ako postoje konstante $C > 0$ i $x_0 > 0$ takve da za svaki $x \geq x_0$ vrijedi $|g(x)| \leq C\,|f(x)|$.

Dokaz. Neka je $g(t) = O(e^{\gamma t})$. To znači da postoje $C > 0$ i $t_0 > 0$ tako da za svaki $t \geq t_0$ vrijedi

$$|g(t)| \leq Ce^{\gamma t}.$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
\left|e^{-st}g(t)\right| &\leq Ce^{-Re(s)t}e^{\gamma t}, \quad \forall t \in [t_0, \infty\rangle \\
\int_0^\infty \left|e^{-st}g(t)\right| dt &\leq \int_0^\infty Ce^{-(Re(s)-\gamma)t}dt \\
\int_0^\infty \left|e^{-st}g(t)\right| dt &\leq C\int_0^\infty e^{-(Re(s)-\gamma)t}dt \\
\int_0^\infty \left|e^{-st}g(t)\right| dt &\leq C\frac{1}{Re(s)-\gamma},
\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) > \gamma$. Naime, raspisivanjem integrala s lijeve strane nejednakosti dobivamo

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}g(t)\right| dt \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^R Ce^{-(Re(s)-\gamma)t}dt = C\left[\frac{\lim_{R\to\infty} -e^{-(Re(s)-\gamma)R}}{Re(s)-\gamma} + \frac{1}{Re(s)-\gamma}\right].$$

Za $Re(s) > \gamma$ je $\lim_{R\to\infty} -e^{-(Re(s)-\gamma)R} = 0$, odnosno nepravi integral konvergira. S druge strane, za $Re(s) < \gamma$ nepravi integral divergira.
Dakle, zaključujemo da integral $\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$ konvergira apsolutno za svaki $s \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $Re(s) > \gamma$, a time konvergira i obično.
Nadalje, trebamo provjeriti konvergira li integral $\int_0^\infty e^{-st}dg(t)$ za takve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $Re(s) > \gamma$. Parcijalnim integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dg(t) &= \lim_{R\to\infty}\left[g(t)e^{-st}\Big|_0^R - \int_0^R -se^{-st}g(t)dt\right] \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[g(R)e^{-sR} - g(0)e^{-s0}\right] + s\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}g(t)dt \\
&= -g(0) + s\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}g(t)dt
\end{aligned}$$

Primijetimo da je $\lim_{R\to\infty} g(R)e^{-sR} = 0$ zbog toga što je $g(t) = O(e^{\gamma t})$. Kako smo već pokazali da $\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$ konvergira apsolutno za $s \in \mathbb{C}$ za koje je $Re(s) > \gamma$, konvergira i obično što znači da postoji limes na desnoj strani jednakosti, pa postoji i limes na lijevoj strani jednakosti te konačno dobivamo

$$\int_0^\infty e^{-st}dg(t) = s\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt - g(0).$$

Zaključujemo da integral $\int_0^\infty e^{-st}dg(t)$ konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \gamma$. $\square$

Teorem 2.1.4. *([9]) Obratno, neka je funkcija g ograničene varijacije na* $[0, R]$*, za svaki* $R > 0$*. Neka integral*

$$\int_0^\infty e^{-st} dg(t)$$

konvergira za neki $s = \gamma + i\delta$*,* $\gamma > 0$*. Tada vrijedi*

$$g(t) = o(e^{\gamma t})^2,$$

kad $t \to \infty$*.*

Dokaz. Neka je $s = \gamma + i\delta \in \mathbb{C}$, $\gamma > 0$, kao u teoremu. Definirajmo funkciju

$$\beta(t) := \int_0^t e^{-su} dg(u),$$

za $t \in \langle 0, \infty \rangle$.
Tada je prema Teoremu 1.1.6

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{su} d\beta(u) &= \int_0^t e^{su} e^{-su} dg(u) \\
&= \int_0^t dg(u) \\
&= g(t) - g(0).
\end{aligned}$$

Parcijalnim integriranjem integrala $\int_0^t e^{su} d\beta(u)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
g(t) - g(0) &= \beta(u) e^{su}|_0^t - \int_0^t s e^{su} \beta(u) du \\
&= \beta(t) e^{st} - \beta(0) - s \int_0^t e^{su} \beta(u) du \\
&= \beta(t) e^{st} - s \int_0^t e^{su} \beta(u) du
\end{aligned}$$

jer iz integralne definicije funkcije β slijedi $\beta(0) = 0$.
Pomnožimo li obje strane jednakosti s e^{-st} te pustimo $\lim_{t\to\infty}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} [g(t) - g(0)] e^{-st} &= \lim_{t\to\infty} \left[\beta(t) - s e^{-st} \int_0^t e^{su} \beta(u) du \right] \\
&= \beta(\infty) - \lim_{t\to\infty} \left(s e^{-st} \int_0^t e^{su} \beta(u) du \right).
\end{aligned}$$

[2] Pišemo $g(x) = o(f(x))$, $x \to \infty$, ako $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ kad $x \to \infty$.

Uočimo da je $\beta(\infty) < \infty$ po pretpostavci konvergencije u iskazu teorema, pa konačno dobivamo

$$\lim_{t\to\infty}[g(t) - g(0)]e^{-st} = \lim_{t\to\infty}\left(se^{-st}\int_0^t e^{su}[\beta(\infty) - \beta(u)]du\right).$$

Za $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) = \gamma > 0$, limes na desnoj strani jednakosti jednak je 0, pa je

$$\lim_{t\to\infty}[g(t) - g(0)]e^{-st} = 0,$$

što ustvari znači da je

$$g(t) - g(0) = o(e^{\gamma t})$$

kad t teži u ∞.
Zbog $\gamma > 0$ imamo $g(t) = o(e^{\gamma t})$, kad $t \to \infty$. □

Sljedeća dva teorema govore o analitičnosti Laplace-Stieltjesovog integrala na domeni konvergencijie integrala.

Teorem 2.1.5. *([9]) Neka je $0 \leq a \leq b$. Neka je funkcija g ograničene varijacije na $[a, b]$. Tada je funkcija*

$$f(s) := \int_a^b e^{-st}dg(t)$$

analitička na $\mathbb{C}$, te za njene derivacije vrijedi

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \int_a^b e^{-st}t^k dg(t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Fiksiramo proizvoljan $s \in \mathbb{C}$.
Zapišimo e^{-st} u obliku sume, odnosno

$$e^{-st} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!}.$$

Tada slijedi

$$f(s) = \int_a^b e^{-st}dg(t) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!}dg(t).$$

Za fiksan s eksponencijalni red kao red funkcija varijable t uniformno konvergira.
Naime, označimo sa $S_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-s)^k t^k}{k!}$ parcijalne sume danog reda za fiksan s.

One su funkcije varijable t definirane na segmentu $[a, b]$. Štoviše, znamo da $S_n(t)$ uniformno konvergira po $t \in [a, b]$ funkciji sume $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k t^k}{k!}$. Tada po Teoremu 6.19 iz ([4]) vrijedi $\int_a^b S_n(t)dt \to \int_a^b S(t)dt$, $n \to \infty$. Zbog toga, u našem slučaju vrijedi

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!} dg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \int_a^b t^n dg(t).$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b t^n dg(t) \right| &\leq \int_a^b |t|^n dV(g)_a^t dt \\ &\leq \max(|a|^n, |b|^n)(V(g)_a^b - V(g)_a^a) \\ &= \max(|a|^n, |b|^n) V(g)_a^b \end{aligned}$$

što slijedi iz svojstva (1.24) Stieltjesovog integrala, pa je red u varijabli s dominiran eksponencijalnim redom te konvergira uniformno na kompaktima u $\mathbb{C}$. Po Weierstrassovom M-testu (vidjeti u ([6])) funkcija f je analitička na $\mathbb{C}$.
Kako niz analitičkih funkcija uniformno konvergira na kompaktima, po istom teoremu smijemo derivirati član po član te za derivacije funkcije f dobivamo:

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \int_a^b (-t)^n dg(t),$$

odnosno

$$f^{(k)}(s) = \int_a^b e^{-st}(-t)^k dg(t) = (-1)^k \int_a^b e^{-st} t^k dg(t).$$

$\square$

Teorem 2.1.6. *([9]) Neka je g ograničene varijacije na* $[0, R]$*, za svaki* $R > 0$*. Neka integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dg(t)$$

konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$ *takav da je* $Re(s) > \beta_0 < \infty$*. Tada je funkcija* $f(s) = \int_a^b e^{-st} dg(t)$ *analitička na* $\mathbb{C}$ *za* $Re(s) > \beta_0$ *te vrijedi*

$$f^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}(-t)^k dg(t).$$

Dokaz. Pretpostavimo da integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dg(t) \tag{2.3}$$

konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) > \beta_0 < \infty$.
Neka je s_0 proizvoljna točka iz poluravnine u kojoj integral (2.3) konvergira. Postoji zatvoren krug K koji se nalazi u poluravnini konvergencije integrala (2.3), a točka s_0 pripada krugu K. Može se pokazati (vidjeti Teorem 4.3 u ([9])) da integral (2.3) konvergira uniformno po s u krugu K. Funkciju f možemo zapisati u obliku reda:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} dg(t),$$

koji po prethodnom konvergira uniformno na K.
Nadalje, prema Teoremu 2.1.5 svaki član reda je analitička funkcija na $\mathbb{C}$, a on konvergira uniformno na kompaktnim krugovima K u poluravnini konvergencije, pa možemo primijeniti Weierstrassov M-test te zaključiti da je funkcija f analitička na $\mathbb{C}$ za $Re(s) > \beta_0$. Po istom teoremu smijemo derivirati član po član te za derivacije funkcije f dobivamo:

$$f^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}(-t)^k dg(t).$$

□

Laplaceova transformacija

Za $s \in \mathbb{C}$ za koje integral $\int_0^{\infty} e^{-st} dg(t)$ konvergira, definira funkciju F varijable s koju nazivamo Laplace-Stieltjesovim transformatom funkcije g.
Ako je za funkciju $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{C}$, funkcija F definirana kao

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

nazivamo je *Laplaceovim transformatom* funkcije f.
Funkcije f i g nazivat ćemo originalom. U daljnjem tekstu bavit ćemo se Laplaceovom transformacijom, dok Laplace-Stieltjesova transformacija ima mnoga slična svojstva. Sama veza Laplaceove i Laplace-Stieltjesove transformacije dana u Teoremu 1.1.4.
U prethodnim teoremima pokazali smo područje konvergencije Laplace-Stieltjesove transformacije neke funkcije.

Definicija 2.1.7. *([7]) Neka je f kompleksna funkcija realne varijable t, $t > 0$, te neka je $s \in \mathbb{C}$. Laplaceov transformat funkcije f, u oznaci $\mathcal{L}f(s)$, definiramo kao funkciju kompleksne varijable s danu s*

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t) dt, \tag{2.4}$$

za $s \in \mathbb{C}$ za koje limes postoji.

Napomena 2.1.8. *Primijetimo da je u definiciji funkcija f općenito kompleksna funkcija realne varijable, $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{C}$. Međutim, stavljanjem $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ u* (2.4) *i rastavljanjem integrala na dva integrala, u nastavku ćemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne realne varijable.*

Iz definicije možemo zaključiti da je Laplaceov transformat funkcije definiran za one vrijednosti $s \in \mathbb{C}$ za koje nepravi integral konvergira. U suprotnome, za $s \in \mathbb{C}$ za koje nepravi integral divergira, Laplaceov transformat nije definiran.
Prisjetimo se, kažemo da nepravi integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ konvergira apsolutno ako postoji limes

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T \left| e^{-st} f(t) \right| dt.$$

Apsolutna konvergencija povlači običnu konvergenciju jer za $T' > T$ vrijedi

$$\left| \int_T^{T'} e^{-st} f(t)dt \right| \leq \int_T^{T'} \left| e^{-st} f(t)dt \right|$$

što teži u nulu kad $T \to \infty$ pa prema Cauchy-evom kriteriju zaključujemo da integral konvergira obično.

Da bismo osigurali konvergenciju integrala, a samim time i postojanje Laplaceovog transformata dane funkcije, potrebno je usmjeriti pažnju na odabir domene kojoj pripada $s \in \mathbb{C}$.

U teoremima ispod navodimo dovoljne uvjete, vezane uz eksponencijalni rast originala, za postojanje Laplaceovog transformata. Prije toga navodimo neke osnovne definicije potrebne u iskazu teorema.

Definicija 2.1.9. *([7]) Kažemo da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima skok u točki $t = t_0$ ako u $\mathbb{R}$ postoje lijevi i desni limes funkcije f u točki $t_0 \in \mathbb{R}$ te ako su oni različiti, točnije, ako za*

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) := f(t_0^-),$$

$$\lim_{t \to t_0^+} f(t) := f(t_0^+)$$

vrijedi $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

Definicija 2.1.10. *([7]) Kažemo da je funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna na intervalu $[0, \infty\rangle$ ako:*

1. *postoji desni limes u točki* $t = 0$ *u skupu realnih brojeva koji označavamo sa* $f(0^+)$ *ili* $\lim_{t\to 0^+} f(t)$

2. *funkcija* f *je neprekidna na svakom segmentu* $[0, b]$, $b > 0$, *osim u konačno mnogo točaka* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *segmenta, u kojima funkcija ima skok.*

Iz drugog uvjeta po dijelovima neprekidne funkcije slijedi da je dana funkcija f omeđena na svakom od intervala $\langle 0, x_i\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Specijalno

$$|f(t)| \leq M_0, \quad t \in \langle 0, x_1\rangle .$$

Definicija 2.1.11. *([7]) Kažemo da je funkcija* $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *eksponencijalnog rasta ako postoje konstante* $M > 0$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takve da za neki* $t_0 \geq 0$ *vrijedi*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Infimum skupa svih konstanti α *koje zadovoljavaju nejednakost, ukoliko je različit od* $-\infty$, *nazivamo eksponentom rasta funkcije* f *te označavamo sa* α_0.

Teorem 2.1.12. *([7]) Neka je funkcija* $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *po dijelovima neprekidna s eksponentom rasta* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. *Tada, za* $s \in \mathbb{C}$ *takve da je* $Re(s) > \alpha_0$, *Laplaceov transformat* $\mathcal{L}f(s)$ *funkcije* f *postoji. Štoviše, za takve* $s \in \mathbb{C}$ *integral*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

konvergira apsolutno.

Dokaz. Neka je $s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) > \alpha_0$. Tada postoji konstanta α takva da je $Re(s) > \alpha > \alpha_0$. Osim toga, postoji $t_0 > 0$ i konstanta M takva da vrijedi

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0. \tag{2.5}$$

Tada imamo

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt = \int_0^\infty \left|e^{-st}\right| |f(t)|\, dt$$

iz čega zbog (2.5) slijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|e^{-st}\right| |f(t)|\, dt &\leq \int_0^\infty e^{-Re(s)t} M e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(Re(s)-\alpha)t} M dt \\
&= M \int_0^\infty e^{-(Re(s)-\alpha)t} dt = M \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-(Re(s)-\alpha)t} dt \\
&= M \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{Re(s)-\alpha} \cdot e^{-(Re(s)-\alpha)t}\Big|_0^R \\
&= M\left[\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{Re(s)-\alpha}\cdot e^{-(Re(s)-\alpha)R}\right) - \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{Re(s)-\alpha}\cdot e^{0}\right)\right] \\
&= \frac{M}{Re(s)-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dakle, za $Re(s) > \alpha > \alpha_0$ vrijedi

$$\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \frac{M}{Re(s)-\alpha} < \infty,$$

iz čega zaključujemo da integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ konvergira apsolutno, pa konvergira i obično. Stoga je Laplaceov transformat definiran za $s \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $Re(s) > \alpha_0$. □

Također, za funkciju koja zadovoljava uvjete Teorema 2.1.12, Laplaceov integral konvergira uniformno za $s \in \mathbb{C}$ za koje $Re(s) > \alpha_0$. Pokažimo to.
Uzmimo funkciju f po dijelovima neprekidnu na intervalu $[0, \infty\rangle$ s eksponentom rasta α_0 kao u Teoremu 2.1.12. Uzmimo $s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) > \alpha_0$. Tada postoji α takav da $Re(s) > \alpha > \alpha_0$. Tada prema definiciji eksponenta rasta postoje $M > 0$ i $R > 0$ tako da vrijedi

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t \geq R.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\left|\int_R^\infty e^{-st} f(t) dt\right| &\leq \int_R^\infty e^{-Re(s)t} |f(t)|\, dt \\
&\leq \int_R^\infty e^{-Re(s)t} M e^{\alpha t} dt \\
&= M \int_R^\infty e^{-(Re(s)-\alpha)t} dt \\
&= M\left[-\frac{1}{Re(s)-\alpha} \cdot e^{-(Re(s)-\alpha)t}\Big|_R^\infty\right] \\
&= \frac{M e^{-(Re(s)-\alpha)R}}{Re(s)-\alpha}.
\end{aligned}$$

Nadalje, neka je x_0 takav da $Re(s) \geq x_0 > \alpha$. Tada je

$$\frac{Me^{-(Re(s)-\alpha)R}}{Re(s)-\alpha} \leq \frac{Me^{-(x_0-\alpha)R}}{x_0-\alpha}. \tag{2.6}$$

Zato za svaki $\epsilon > 0$ postoji R takav da **za sve** vrijednosti $s \in \mathbb{C}$ za koje je $Re(s) \geq x_0 > \alpha$ vrijedi

$$\left| \int_R^\infty e^{-st} f(t) dt \right| < \epsilon.$$

Time je zadovoljen uvjet uniformne konvergencije.

2.2 Osnovni primjeri

Nakon što smo definirali Laplaceov transformat i naveli dovoljne uvjete njegovog postojanja, narednim primjerima prikazat ćemo postupak određivanja Laplaceovog transformata osnovnih funkcija koje ćemo koristiti pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi u kasnijem poglavlju. U računima odmah određujemo i područje definicije transformata, kao područje postojanja pripadnog nepravog integrala.
Kako je za definiciju Laplaceove transformacije bitan samo interval $[0, +\infty\rangle$, možemo pretpostaviti da su sve naše funkcije identički jednake 0 za $t < 0$.

Definicija 2.2.1. *([2]) Heavisideova step funkcija*[3] *ili skraćeno jedinična step funkcija definira se kao*

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Primijetimo da je Heavisideova funkcija zapravo jedinična funkcija kad stavimo $f(t) = 0$, za $t < 0$.

[3] Funkcija je dobila ime prema Oliveru Heavisideu (1850.-1925.)

Primjer 2.2.2. *Odredimo Laplaceov transformat Heavisideove funkcije. Računamo po definiciji:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} 1 dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Pokazujemo da za $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$, vrijedi:

$$\int e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} + C, \quad C \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Koristeći definiciju kompleksne eksponencijalne funkcije: $e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny)$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \int e^{-st} dt &= \int e^{-xt} e^{-iyt} dt = \int e^{-xt} \left[\cos(yt) - i \sin(yt)\right] dt \\ &= \int e^{-xt} \cos(yt) dt - i \int e^{-xt} \sin(yt) dt \\ &= \frac{e^{-xt} \left[y \sin(yt) - x \cos(yt)\right]}{x^2 + y^2} + i \frac{e^{-xt} \left[x \sin(yt) - y \cos(yt)\right]}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{e^{-xt}}{x^2 + y^2} \left[y \sin(yt) - x \cos(yt) + i \left[x \sin(yt) - y \cos(yt)\right]\right]. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-st}}{s} &= -\frac{e^{-(x+iy)t}}{x + iy} = -\frac{e^{-xt} e^{-iyt}}{x + iy} \\ &= -\frac{e^{-xt} \left[\cos(yt) - i \sin(yt)\right]}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} \\ &= -\frac{e^{-xt} \left[\cos(yt) - i \sin(yt)\right] (x - iy)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{e^{-xt}}{x^2 + y^2} \left[(-\cos(yt) + i \sin(yt)) (x - iy)\right] \\ &= \frac{e^{-xt}}{x^2 + y^2} \left[y \sin(yt) - x \cos(yt) + i \left[x \sin(yt) - y \cos(yt)\right]\right]. \end{aligned}$$

Time smo dokazali

$$\int e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}.$$

Konačno odredimo Laplaceov transformat funkcije f:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt \\ &= \lim_{T\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^T \\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{1}{s}\right) \\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-sT}}{s}\right)+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s},\end{aligned}$$

za $Re(s) > 0$ *jer* $\lim_{T\to\infty}\left|e^{-sT}\right| = \lim_{T\to\infty} e^{-Re(s)T} = 0$. *Za* $Re(s) < 0$ *integral divergira jer* $\lim_{T\to\infty}|e^{-sT}| = +\infty$. *Konačno, za* $Re(s) = 0$ *je* $s = iy$, $y \in \mathbb{R}$, *pa računamo*

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{iyt}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \cos(yt)dt + i\lim_{T\to\infty}\int_0^T \sin(yt)dt,$$

što se vidi da divergira za svaki $y \in \mathbb{R}$. *Dakle, za* $f(t) = 1$, $t > 0$ *je*

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}, \quad s\in\mathbb{C}, \quad Re(s) > 0.$$

Primjer 2.2.3. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije identitete* $f(t) = t$, $t \geq 0$. *Parcijalnim integriranjem dolazimo do*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}t\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^T - \int_0^T\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{T}{s}e^{-sT} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^T\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{T}{s}e^{-sT} - \frac{1}{s^2}e^{-sT} + \frac{1}{s^2}\right).\end{aligned}$$

Za $Re(s) > 0$ *prva dva člana teže u nulu te ostaje* $\frac{1}{s^2}$. *Za* $Re(s) < 0$ *te za* $Re(s) = 0$, *tj.* $s = iy$, $y \in \mathbb{R}$, *izraz divergira.*
Stoga je

$$\mathcal{L}(id)(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s\in\mathbb{C}, \quad Re(s) > 0.$$

Prethodni rezultat možemo generalizirati u obliku korolara.

Korolar 2.2.4. *([2]) Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t^n$, $n > 0$, jednak je*

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

$s \in \mathbb{C}$ takav da $Re(s) > 0$.

Dokaz. Kako bismo dokazali tvrdnju primijenit ćemo matematičku indukciju.
Zapišimo rekurzivnu formulu za određivanje Laplaceovog transformata funkcije $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Primjenom definicije parcijalne integracije dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^n)(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^T + \int_0^T \frac{nt^{n-1}}{s} e^{-st} dt \right] \\
&= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{T^n}{s} e^{-sT} \right) + \frac{n}{s} \lim_{T\to\infty} \left(\int_0^T t^{n-1} e^{-st} dt \right)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1})(s), \tag{2.8}$$

za $Re(s) > 0$, dok se za $Re(s) \leq 0$ može, slično kao i prije, pokazati divergencija integrala.
Već smo prije pokazali da za $n = 0$ vrijedi:

$$L(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > 0.$$

Prema (2.8), za $n = 1$ vrijedi:

$$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2},$$

$s \in \mathbb{C}$, takav da $Re(s) > 0$.
Pretpostavimo sada da vrijedi

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > 0.$$

Tada po (2.8) slijedi:

$$\mathcal{L}(t^{n+1})(s) = \frac{n+1}{s} \mathcal{L}(t^n)(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^{n+1})(s) &= \frac{n+1}{s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}\\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}, \quad s\in\mathbb{C}, \quad Re(s)>0.\end{aligned}$$

□

Primjer 2.2.5. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Računamo:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{\alpha t}e^{-st}dt\\ &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-\alpha)t}dt\\ &= \lim_{T\to\infty} -\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\bigg|_0^T\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}+\frac{e^{-(s-\alpha)0}}{s-\alpha}\right)\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}\right)+\frac{1}{s-\alpha}\\ &= \frac{1}{s-\alpha},\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$ za koji je $Re(s) > \alpha$. U suprotnome integral divergira te Laplaceov transformat nije definiran.

Primjer 2.2.6. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$. Računamo po definiciji:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) &= \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t}dt\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T e^{-(s-i\omega)t}dt\right)\\ &= \lim_{T\to\infty} -\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega}\bigg|_0^T\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-i\omega)T}}{s-i\omega}+\frac{1}{s-i\omega}\right)\\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-i\omega)T}}{s-i\omega}\right)+\frac{1}{s-i\omega}.\end{aligned}$$

S obzirom na to da je

$$\lim_{T\to\infty}\left|e^{-(s-i\omega)T}\right| = \lim_{T\to\infty} e^{-Re(s)T} = 0,$$

za $Re(s) > 0$, *zaključujemo da je traženi Laplaceov transformat jednak*

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s-i\omega}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > 0.$$

Za ostale $s \in \mathbb{C}$ *pokaže se, kao i prije, da integral divergira.*

Primjer 2.2.7. *Odredimo Laplaceove transformate funkcija* $f_1(t) = \sin(\omega t)$ *i* $f_2(t) = \cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$.

Znamo da je

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

pa za Laplaceov transformat vrijedi

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right)(s).$$

Zbog svojstva linearnosti Laplaceove transformacije (koje ćemo kasnije u Teoremu 2.3.1 i dokazati) te prethodnog primjera slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) &= \frac{\mathcal{L}(e^{i\omega t)})(s) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t)})(s)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+i\omega+s-i\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$.
Analogno, kako je

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i},$$

Laplaceov transformat bit će jednak

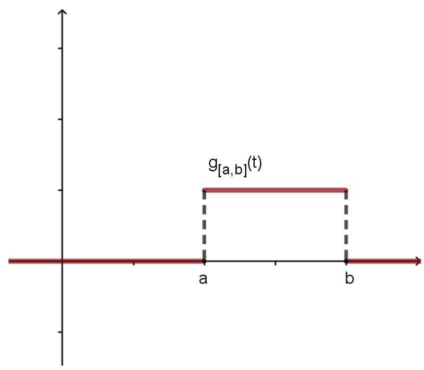
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)(s) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right)(s) - \mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}\right)(s)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{2i\omega}{2i(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

$s \in \mathbb{C}$, *takav da* $Re(s) > 0$.

Uočimo kako smo u svim primjerima određivali Laplaceov transformat funkcija koje su neprekidne na intervalu $[0, \infty\rangle$. No, s obzirom na to da i funkcije neprekidne po dijelovima imaju Laplaceov transformat u sljedećim primjerima ilustrirat ćemo određivanje Laplaceovog transformata nekih takvih funkcija.

Definicija 2.2.8. *([3]) Gate funkcija na intervalu* $[a, b]$, *u oznaci* $g_{[a,b]}$, $0 < a < b$, *je realna funkcija realne varijable dana s:*

$$g_{[a,b]}(t) = H(t-b) - H(t-a).$$



Slika 2.1: Gate funkcija

Primjer 2.2.9. *Odredimo Laplaceov transformat gate funkcije.*
Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g_{[a,b]})(s) &= \mathcal{L}\left(H(t-a)-H(t-b)\right)(s)\\
&= \mathcal{L}\left(H(t-a)\right)(s)-\mathcal{L}\left(H(t-b)\right)(s)\\
&= \frac{1}{s}e^{-sa}-\frac{1}{s}e^{-sb}\\
&= \frac{1}{s}\left(e^{-sa}-e^{-sb}\right),
\end{aligned}$$

za $s\in\mathbb{C}$*,* $Re(s)>0$ *dok za ostale* $s\in\mathbb{C}$ *integral divergira.*

Primjer 2.2.10. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije*

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t\leq 1\\ t+1, & t>1\end{cases}$$

Lako se provjeri da je funkcija f *neprekidna po dijelovima na* $[0,\infty\rangle$ *te da ima skok u* $t=1$*.*
Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^1 1e^{-st}dt+\int_1^\infty (t+1)e^{-st}dt\\
&= \int_0^1 e^{-st}dt+\lim_{T\to\infty}\int_1^T (t+1)e^{-st}dt\\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^1+\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{(t+1)e^{-st}}{s}\Big|_1^T-\int_1^T\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt\right]\\
&= -\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}+\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{(T+1)e^{-sT}}{s}+\frac{2e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\right]\\
&= -\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}+\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}\\
&= \frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2},
\end{aligned}$$

za $s\in\mathbb{C}$*,* $Re(s)>0$*. Primijetimo da za ostale* $s\in\mathbb{C}$ *integral divergira.*

2.3 Svojstva Laplaceove transformacije

Prilikom određivanja Laplaceovih transformata elementarnih funkcija, u prethodnom dijelu, primijenili smo između ostalog i svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije, koje ćemo sada dokazati. Osim linearnosti, prikazat ćemo i preostala bitna svojstva Laplaceove transformacije- njezino ponašanje u odnosu na derivaciju, integraciju, pomak ili prigušenje originala.

Teorem 2.3.1 (Linearnost operatora Laplaceove transformacije $\mathcal{L}$)**.** *([2]) Neka je $s_0 \in \mathbb{R}$. Neka za dane funkcije f_1 i f_2 postoje Laplaceovi transformati, za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da $Re(s) > s_0$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}(af_1 + bf_2)(s) = a\mathcal{L}(f_1)(s) + b\mathcal{L}(f_2)(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > s_0,$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka za funkcije f_1 i f_2 postoje Laplaceove transformacije. Tada postoji i Laplaceov transformat sume funkcija f_1 i f_2.
Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(af_1 + bf_2)(s) &= \int_0^\infty (af_1(t) + bf_2(t))e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty (af_1(t)e^{-st} + bf_2(t)e^{-st})dt \\
&= \int_0^\infty af_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty bf_2(t)e^{-st}dt \\
&= a\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt \\
&= a\mathcal{L}(f_1)(s) + b\mathcal{L}(f_2)(s),
\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$ takve da $Re(s) > s_0$ jer Laplaceovi transformati funkcija f_1 i f_2 postoje upravo za takve $s \in \mathbb{C}$. □

Napomena 2.3.2. *Ne vrijedi nužno $\mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$, točnije Laplaceova transformacija umnoška ne podudara se s umnoškom Laplaceovih transformacija. Uzmimo na primjer $f(t) = H(t)$ te usporedimo $L(f^2)$ i Lf^2. Već smo ranije izračunali $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}$, a kako je $f^2(t) = f(t) = H(t)$ vrijedi $\mathcal{L}(f^2)(s) = \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}$. No, s druge strane je $\mathcal{L}f^2 = \frac{1}{s^2}$ što je različito od $\mathcal{L}(f^2)$. Množenju slika odgovara operacija **konvolucije** nad originalima, vidjeti u ([2]).*

Teorem 2.3.3 (Teorem o prigušenju originala)**.** *([2]) Neka je $g(t) = e^{-bt}f(t)$, $b \in \mathbb{C}$. Neka funkcija f ima Laplaceov transformat na domeni $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > s_0$. Tada Laplaceov transformat funkcije g postoji za sve $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > s_0 - Re(b)$ i vrijedi:*

$$\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}f(s + b).$$

Dokaz. Po definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-bt}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+b)t}f(t)dt \\
&= \mathcal{L}f(s+b)
\end{aligned}$$

Kako funkcija f ima Laplaceov transformat za $s \in \mathbb{C}$ takve da $Re(s) > s_0$, slijedi da integral na desnoj strani konvergira ako je $Re(s+b) > s_0$, tj. ako je $Re(s) > s_0 - Re(b)$. Po definiciji Laplaceovog transformata funkcije f, taj integral jednak je $\mathcal{L}f(s+b)$. □

Teorem 2.3.4 (Teorem o pomaku originala)**.** *([2]) Neka je $s_0 \in \mathbb{R}$ te neka funkcija f ima Laplaceov transformat $\mathcal{L}f$ na domeni $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > s_0$. Neka je $g(t) := H(t-t_0)f(t-t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Tada i funkcija g ima Laplaceov transformat na istoj domeni te vrijedi:*

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-st_0}\mathcal{L}f(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > s_0,$$

pri čemu je H Heavisideova step funkcija.

Dokaz. Po definiciji Laplaceove transformacije je:

$$\mathcal{L}g(s) = \int_0^\infty H(t-t_0)f(t-t_0)e^{-st}dt. \tag{2.9}$$

S obzirom na to da je step funkcija definirana sa

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

očito je da za $t < t_0$ vrijedi $H(t-t_0) = 0$, a za $t \geq t_0$ $H(t-t_0) = 1$. Tada integral iz (2.9) postaje

$$\mathcal{L}g(s) = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}dt.$$

Uvedemo li supstituciju $u = t - t_0$ dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+t_0)}du \\
&= \int_0^\infty e^{-st_0}e^{-su}f(u)du \\
&= e^{-st_0}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du \\
&= e^{-st_0}\mathcal{L}f(s).
\end{aligned}$$

Vidimo da integral s desne strane konvergira za $s \in \mathbb{C}$ takve da $Re(s) > s_0$ jer je na tom području definiran Laplaceov transformat funkcije f. $\square$

Da bismo, pomoću Laplaceove transformacije, mogli rješavati diferencijalne jednadžbe trebamo se upoznati s određivanjem Laplaceovog transformata derivacija dane funkcije f.

Teorem 2.3.5. *([2]) Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $[0, \infty\rangle$ te eksponencijalnog rasta s eksponentom rasta α_0. Neka je derivacija f' po dijelovima neprekidna funkcija na intervalu $[0, \infty\rangle$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}f(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0. \tag{2.10}$$

Dokaz. Po definiciji Laplaceove transformacije je

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} f(t)e^{-st}\Big|_0^T - \lim_{T\to\infty} \int_0^T -(s)e^{-st} f(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} f(T)e^{-sT} - \lim_{T\to\infty} f(0)e^{-s0} + s\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Primijetimo da posljednji limes na desnoj strani postoji za $Re(s) > \alpha_0$ i jednak je $\mathcal{L}f(s)$, zbog postojanja $\mathcal{L}f$ za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$.
Zbog eksponencijalne omeđenosti funkcije f postoji $M > 0$ takav da za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \left| f(T)e^{-sT} \right| &\leq \lim_{T\to\infty} \left(Me^{\alpha_0 T} e^{-Re(s)T} \right) \\
&= M \lim_{T\to\infty} e^{-(Re(s)-\alpha_0)T} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}f(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

$\square$

Svojstvo Laplaceove transformacije iskazano Teoremom 2.3.5 jedno je od često korištenih pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi. Iskazani teorem koristan je jer pri određivanju Laplaceove transformacije derivacije f' funkcije f nije potrebno prije izračunati samu derivaciju. No, negativna strana jest ta što moramo znati vrijednost $f(0)$. Nadalje, pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi višeg reda trebat će nam Laplaceove transformacije viših derivacija funkcije.

Teorem 2.3.6 (Teorem o derivaciji originala)**.** *([2]) Neka su funkcije $f, f', \dots, f^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, neprekidne na intervalu $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta, a $f^{(n)}$ po dijelovima neprekidna na intervalu $[0, \infty\rangle$. Tada je*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \tag{2.11}$$

Nadalje, ako postoji Laplaceov transformat funkcije f za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$, tada je na tom području definiran i Laplaceov transformat derivacije $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Da bismo dokazali tvrdnju provest ćemo matematičku indukciju.
Teoremom 2.3.5 dokazali smo da za $n = 1$ vrijedi

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}f(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

Pretpostavimo sad da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$.
Pokažimo da tada za $n + 1$ vrijedi

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)})(s) = s^{n+1} \mathcal{L}f(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \dots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0),$$

$s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$.
Primjenom parcijalne integracije te pretpostavke (2.11) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n+1)})(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(n+1)}(t)dt \\
&= f^{(n)}(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)dt \\
&= -f^{(n)}(0) + s\left[s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)\right] \\
&= -f^{(n)}(0) + s^{n+1}\mathcal{L}f(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \dots - sf^{(n-1)}(0) \\
&= s^{n+1}\mathcal{L}f(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \dots - f^{(n)}(0),
\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$. □

Nakon iskazanih teorema o derivaciji originala, prirodno se nameće pitanje deriviranja slike, odnosno Laplaceovog transformata.

Teorem 2.3.7 (Teorem o derivaciji slike)**.** *([7]) Neka je funkcija $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna na intervalu $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta s eksponentom rasta $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Tada je za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$, funkcija f analitička i vrijedi:*

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g_n(s), \tag{2.12}$$

pri čemu je $g_n(t) = (-t)^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Funkcija f je očito analitička i postoje sve derivacije po Teoremu 2.1.6.
Da bismo dokazali teorem provedimo matematičku indukciju.
Provjerimo vrijedi li tvrdnja (2.12) za $n = 1$. Po definiciji Laplaceove transformacije i Teoremu 2.1.5 slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}f(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}) f(t)dt \\
&= \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)dt \\
&= \mathcal{L}g_1(s),
\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \alpha_0$, iz čega zaključujemo da za $n = 1$ tvrdnja vrijedi.
Nadalje, pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g_n(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

Tada trebamo provjeriti vrijedi li za $n + 1$

$$\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g_{n+1}(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

Računamo, koristeći pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\mathcal{L}f(s) &= \frac{d}{ds}\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}f(s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}g_n(s) \\
&= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}(-t)^n f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}(-t)^n f(t)dt \\
&= \int_0^\infty (-t)^{n+1} e^{-st} f(t)dt \\
&= \mathcal{L}g_{n+1}(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.8 (Teorem o integriranju originala)**.** *([7]) Neka je funkcija* $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *po dijelovima neprekidna na intervalu* $[0, \infty\rangle$ *i eksponencijalnog rasta s eksponentom rasta* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$*. Neka je funkcija* g *definirana sa*

$$g(t) = \int_0^t f(u)du, \quad t \in [0, \infty\rangle .$$

Tada Laplaceov transformat funkcije g *postoji na području* $s \in \mathbb{C}$*,* $Re(s) > \max\{0, \alpha_0\}$ *i dan je sa:*

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s).$$

Dokaz. Primijetimo da je funkcija g dobro definirana jer je funkcija f integrabilna na $[0, t]$,$t \in [0, \infty\rangle$. Uočimo da iz definicije funkcije g slijedi da je po dijelovima na $[0, \infty\rangle$, $g'(t) \equiv f(t)$ (u svim točkama, osim u točkama u kojima funkcija f ima skok). Prema definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}g(t)dt,\end{aligned}$$

iz čega nakon parcijalnog integriranja dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s) &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{g(t)}{s}e^{-st}\Big|_0^T - \int_0^T\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}f(t)dt\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{g(T)}{s}e^{-sT} + \frac{g(0)}{s}e^0\right] + \frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{g(T)}{s}e^{-sT}\right) + \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s).\end{aligned}$$

Primijetimo da je zbog definicije funkcije g, $g(0) = 0$. Nadalje, kako je f eksponencijalnog rasta s eksponentom α_0, iz definicije funkcije g slijedi da je i g eksponencijalnog rasta s eksponentom α_0.
Pretpostavimo li da je parametar s kompleksan, $Re(s) > \max 0, \alpha_0$, vrijedit će

$$\begin{aligned}\left|e^{-sT}g(T)\right| &\le e^{-Re(s)T}\int_0^T |f(u)|\,du \le e^{-Re(s)T}\int_0^T Me^{\alpha_0 u}du \\ &= Me^{-Re(s)T}\int_0^T e^{\alpha_0 u}du \\ &= Me^{-Re(s)T}\left(\frac{1}{\alpha_0}e^{\alpha_0 T} - \frac{1}{\alpha_0}\right) \\ &= \frac{M}{\alpha_0}\left(e^{-(Re(s)-\alpha_0)T} - e^{-Re(s)T}\right).\end{aligned}$$

Za $Re(s) > \max\{0, \alpha_0\}$ je:

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} |g(T)e^{-sT}| \leq \lim_{T\to\infty} \left[\frac{M}{\alpha}\left(e^{-(Re(s)-\alpha)T} - e^{-Re(s)T}\right)\right] = 0,$$

što povlači

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s),$$

na području $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > \max\{0, \alpha_0\}$. □

Teorem 2.3.9 (Teorem o integriranju slike)**.** *([7]) Neka je funkcija* $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *po dijelovima neprekidna na intervalu* $[0, \infty\rangle$ *te eksponencijalnog rasta s eksponentom* α_0 *takva da* $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$*. Stavimo* $g(t) := \frac{f(t)}{t}$*. Tada je*

$$\int_s^\infty \mathcal{L}f(u)du = \mathcal{L}g(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

Dokaz. Kako je $f(t) = tg(t)$ pa primjenom Teorema 2.3.7 dobivamo

$$\mathcal{L}f(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}g(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0.$$

Integriramo li obje strane dobit ćemo

$$\begin{aligned} \int_s^\infty \mathcal{L}f(u)du &= -\int_s^\infty \frac{d}{du}\mathcal{L}g(u)du \\ &= -\mathcal{L}g(u)|_s^\infty \\ &= \mathcal{L}g(s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad Re(s) > \alpha_0. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 3

Inverzna Laplaceova transformacija

Pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi korištenjem Laplaceove transformacije ideja je sljedeća: djelovanjem Laplaceove transformacije prebaciti diferencijalnu jednadžbu u algebarsku, riješiti je u području transformata, te se "vratiti" na originalno rješenje. Kako bismo to mogli napraviti, u ovom poglavlju definirat ćemo inverznu Laplaceovu transformaciju te primjerom prikazati jednu metodu za određivanje inverznog Laplaceovog tansformata.

Propozicija 3.0.1 (Injektivnost Laplaceove transformacije)**.** *([7]) Neka su funkcije $f, g : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidne i eksponencijalnog rasta, takve da f i g nisu identički jednake. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}f \neq \mathcal{L}g.$$

Dokaz propozicije može se naći u ([9]). Ograničimo naše razmatranje funkcija na funkcije koje su po dijelovima neprekidne na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta. Skup takvih funkcija označimo s $Exp([0, \infty\rangle)$. Tada je po Propoziciji 3.0.1 Laplaceova transformacija injektivna na $Exp([0, \infty\rangle)$, tj. bijektivna sa $Exp([0, \infty\rangle)$ u sliku $\mathcal{L}(Exp([0, \infty\rangle))$. Funkcije u slici su funkcije kompleksne varijable analitičke na nekoj poluravnini $Re(s) > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Stoga postoji njezin inverz koji nazivamo *inverznom Laplaceovom transformacijom*.

Definicija 3.0.2. *([2]) Inverzna Laplaceova transformacija, u oznaci $\mathcal{L}^{-1}$ je operator $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(Exp\,([0, \infty\rangle)) \to Exp\,([0, \infty\rangle)$ inverzan operatoru Laplaceove transformacije na $Exp\,([0, \infty\rangle)$, tj. $\mathcal{L}^{-1}F = f$, za svaki f iz $Exp\,([0, \infty\rangle)$ i $F = \mathcal{L}f$ njegov Laplaceov transformat.*

Kao i za Laplaceovu transformaciju, svojstvo linearnosti vrijedi i za inverznu Laplaceovu transformaciju što je iskazano sljedećim teoremom.

Teorem 3.0.3 (Linearnost inverzne Laplaceove transformacije)**.** *([2]) Neka su $F_1,\ F_2 \in \mathcal{L}(Exp\,([0,\infty\rangle))$. Tada za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\mathcal{L}^{-1}\,(aF_1 + bF_2) = a\mathcal{L}^{-1}F_1 + b\mathcal{L}^{-1}F_2.$$

Dokaz. Nađemo f_1 i f_2 po dijelovima neprekidne i eksponencijalnog rasta na $[0,\infty\rangle$ takve da vrijedi:

$$\mathcal{L}f_1 = F_1, \quad \text{te} \quad \mathcal{L}f_2 = F_2.$$

Tada je $f_1 = \mathcal{L}^{-1}F_1$ i $f_2 = \mathcal{L}^{-1}F_2$. Zbog linearnosti Laplaceove transformacije vrijedi

$$\mathcal{L}(af_1 + bf_2) = a\mathcal{L}f_1 + b\mathcal{L}f_2 = aF_1 + bF_2.$$

Očito je i $af_1 + bf_2$ po dijelovima neprekidna i eksponencijalnog rasta, pa je zbog injektivnosti Laplaceove transformacije:

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 &= \mathcal{L}^{-1}\,[a\mathcal{L}f_1 + b\mathcal{L}f_2] \\ a\mathcal{L}^{-1}F_1 + b\mathcal{L}^{-1}F_2 &= \mathcal{L}^{-1}\,[aF_1 + bF_2]\,. \end{aligned}$$

Očito je sad i af_1 i bf_2 po dijelovima neprekidna i eksponencijalnog rasta. □

Pri određivanju inverzne Laplaceove transformacije možemo naići na poteškoće.
Naime, dok za Laplaceovu transformaciju postoji jasno definirana metoda u vidu računanja integrala, za određivanje inverzne Laplaceove transformacije ne postoji specifična metoda. No, jedna od metoda koja je korisna kod racionalnih funkcija, jest rastav na parcijalne razlomke. Na taj način danu funkciju rastavljamo na izraze u kojima možemo prepoznati Laplaceove transformate elementarnih funkcija. Ilustrirat ćemo sljedećim primjerom.

Primjer 3.0.4. *Odredimo inverzni Laplaceov transformat $\mathcal{L}^{-1}F$ funkcije $F(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s-3)}$.*

Zapišimo najprije rastav funkcije F na parcijalne razlomke.
Imamo

$$\begin{aligned} \frac{s+3}{s(s+1)(s-3)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3} \quad /s(s+1)(s-3) \\ s+3 &= A(s+1)(s-3) + Bs(s-3) + Cs(s+1) \\ s+3 &= As^2 - 2As - 3A + Bs^2 - 3Bs + Cs^2 + Cs \\ s+3 &= (A+B+C)s^2 + (-2A - 3B + C)s - 3A. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -2A - 3B + C &= 1 \\ -3A &= 3. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednadžbe dobivamo da je $A = -1$, što uvrstimo u preostale dvije jednadžbe te sređivanjem dolazimo do toga da je $B = \frac{1}{2}$ i $C = \frac{1}{2}$.
Tada je

$$\frac{s+3}{s(s+1)(s-3)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3},$$

pa možemo odrediti $\mathcal{L}^{-1}F(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3}\right) \\
&= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) \\
&= -1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}.
\end{aligned}$$

Poglavlje 4

Jedna primjena Laplaceove transformacije: rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

U Poglavlju 2 (*Svojstva Laplaceove transformacije*) pokazali smo da Laplaceova transformacija integrale i derivacije prevodi u algebarske operacije, pa možemo zaključiti da je Laplaceova transformacija koristan alat pri rješavanju diferencijalnih jendadžbi.
Da bismo odredili rješenje linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima pomoću Laplaceove transformacije provodimo tri koraka:

1. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na lijevu i desnu stranu jednadžbe (koristeći svojstvo linearnosti)

2. Nakon transformacije, iz algebarske jednadžbe odredimo Laplaceov transformat rješenja $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$.

3. Odredimo rješenje $y(t)$ primjenom inverzne Laplaceove transformacije, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(t)$.

Pritom do rješenja linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima dolazimo algebarskim metodama, tj. integrale i derivacije zamjenjujemo nekim algebarskim operacijama. Ipak, plaćamo cijenu invertiranjem Laplaceovog transformata.

Sljedećim primjerima ilustrirat ćemo rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi različitih stupnjeva s konstantnim koeficijentima pomoću Laplaceove transformacije.

Primjer 4.0.1. *Riješimo Cauchyjev problem za*

$$\frac{dy}{dt} - y = 1, \qquad y(0) = -2.$$

Na samom početku uzmimo Laplaceovu transformaciju svih članova dane jednadžbe pa, uz oznaku $Y(s) := \mathcal{L}y(s)$*, dobivamo*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right)(s) - \mathcal{L}(y)(s) &= \mathcal{L}(1)(s) \\ -y(0) + sY(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s)\,(s-1) &= \frac{1-2s}{s} \\ Y(s) &= \frac{1-2s}{s(s-1)}. \end{aligned}$$

Preostaje odrediti

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(t).$$

Stoga ćemo najprije $\frac{1-2s}{s(s-1)}$ *rastaviti na parcijalne razlomke:*

$$\begin{aligned} \frac{1-2s}{s(s-1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} \\ 1-2s &= A(s-1) + Bs \end{aligned}$$

iz čega dobivamo sustav dviju jednadžbi

$$A + B = -2$$

$$-A = 1$$

pa sređivanjem dolazimo do $A = -1$ *i* $B = -1$*. To znači da je rješenje početne diferencijalne jednadžbe jednako*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-2s}{s(s-1)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s} - \frac{1}{s-1}\right) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= -1 - e^t. \end{aligned}$$

Primjer 4.0.2. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \qquad y(0) = 2.$$

Uzmemo li Laplaceovu transformaciju svih članova jednadžbe, uz oznaku $Y(s) := \mathcal{L}y(s)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y')(s) + 2\mathcal{L}(y)(s) &= \mathcal{L}(e^t)(s) \\ -y(0) + sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ Y(s)(2+s) &= \frac{2s-1}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{2s-1}{(s-1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Rješenje početne jednadžbe tada dobivamo kao

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(t).$$

Stoga, odredimo inverznu Laplaceovu transformaciju. Analogno kao i u prethodnom primjeru, rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s-1}{(s-1)(s+2)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}e^t + \frac{5}{3}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Primjer 4.0.3. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Djelovanjem Laplaceove transformacije na čitavu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'')(s) + 2\mathcal{L}(y)(s) &= 0 \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2Y(s) &= 0 \\ Y(s)(s^2+2) &= s \\ Y(s) &= \frac{s}{s^2+2}. \end{aligned}$$

Uočimo da je tada tješenje početne jednadžbe

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2}\right) = \cos\left(\sqrt{2}t\right).$$

Bibliografija

[1] A.K. Choudhary, S.M. Nengem i S. Musa, *A comparative Study on Functions of Bounded Variation and Riemann Integral*, International Journal of Mathematics and Statistics Invention **2** (2014), br. 1, 01–05.

[2] P.P.G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transform*, Springer, London, 2008.

[3] N. Elezović, *Matematika 3- Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija*, Element, Zagreb, 2009.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf`.

[5] D. Lesnic, *Characterization of the functions with bounded variation*, (2003), `http://auajournal.uab.ro/upload/51_501_5_Lesnic_Characterizations_of_the_Functions.pdf`.

[6] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[7] J.L. Schiff, *The Laplace Transform:Theory and Applications*, Springer, New York, 1999.

[8] Š. Ungar, *Matematička analiza 4*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf`.

[9] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Dover Publications, Inc., New York, 2010.

[10] D.V. Widder, *Advanced Calculus,Secon Edition*, Dover Publications,Inc., New York, 1985.

Sažetak

U diplomskom radu bavimo se Laplaceovom transformacijom. U prvom poglavlju proučavamo Stieltjesov integral, posebno uvjete postojanja i bitna svojstva. U drugom poglavlju bavimo se uvođenjem i definiranjem Laplaceove transformacije te analizom područja konvergencije i analitičnosti Laplaceovog transformata. Nakon toga, određujemo Laplaceove transformate elementarnih funkcija i pokazujemo osnovna svojstva Laplaceove transformacije. Treće poglavlje posvećeno je inverznoj Laplaceovoj transformaciji. Na samom kraju, u četvrtom poglavlju dajemo jednu primjenu Laplaceove transformacije u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstanstnim koeficijentima.

Summary

In this thesis we study the Laplace transform. In the first chapter we analyze the Stieltjes integral, especially the conditions under which the Stieltjes integral exists and elementary properties of the Siteltjes integral. In the second chapter we introduce and define the Laplace transform, analyze the area of convergence and analytic properties of the Laplace transform. After that, we compute the Laplace transform of elementary functions and observe elementary properties of the Laplace transform. The third chapter is dedicated to the inverse Laplace transform. At the end, in the fourth chapter, we present one application of the Laplace transform in solving linear differential equations with constant coefficients.

Životopis

Rođena sam 31. siječnja 1992. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Augusta Šenoe te po završetku, 2006. godine, upisujem opću Gornjogradsku gimnaziju u Zagrebu. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2010. godine nakon čega, iste godine, upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2015. godine te iste godine nastavljam svoje obrazovanje na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisom diplomskog sveučilišnog studija Matematika, smjer: nastavnički.