Rizičnost vrijednosti

Žganjer, Tomislav

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:345232

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Tomislav Žganjer

Rizičnost vrijednosti

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Nela Bosner

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik
2. _____ , član
3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Procjena rizičnosti vrijednosti u uvjetno Gaussovoj klasi modela **2**
2.1 Uvod u rizičnost vrijednosti 2
2.1.1 Praktična primjena rizičnosti vrijednosti 2
2.1.2 Statističko modeliranje rizičnosti vrijednosti 4
2.1.3 Aproksimacije rizičnosti vrijednosti 6
2.1.4 Svojstva Delta-Gama normalnih modela 7
2.1.5 Prednosti i nedostatci Delta-Gama aproksimacije . . . 9
2.2 Cornish-Fisher aproksimacija 10
2.2.1 Izvođenje i svojstva 10
2.3 Tehnike smanjena varijance u Monte-Carlo simulaciji 13
2.3.1 Generiranje uzorka Monte-Carlo metodom 13
2.3.2 Parcijalna Monte-Carlo simulacija sa metodom uzorkovanja po važnosti 20

3 Primjena copula u računanju rizičnosti vrijednosti **28**
3.1 Copule 28
3.1.1 Sklarov teorem 29
3.1.2 Primjeri copula 30
3.2 Računanje rizičnosti vrijednosti primjenom copula 32

4 Implementacija u matematičkom softveru R **34**

Literatura **45**

Sažetak **47**

Summary **48**

Životopis **49**

1 Uvod

U novije vrijeme financijske institucije suočene su sa kompleksnim zadatkom procjene i kontrole svoje izloženosti tržišnim rizicima koji mogu biti uzrokovani raznim čimbenicima poput promjena cijena kapitala, roba, deviznog tečaja i kamatnih stopa. Veliki napredak u pristupu rizicima ostvaren je nakon što je Odbor za nadzor banaka u Baselu donio niz pravila koja su omogućila inovacije u metodologiji upravljanja rizicima. Osnova za mjerenje tržišnog rizika postala je metrika zvana rizičnost vrijednosti (engl. Value at Risk - VaR) - statistička metoda za mjerenje razine rizika nekog investicijskog portfelja u danom vremenskom periodu. Nju je uvelike popularizirao J.P.Morgan 1990-ih jer su zaposlenici u upravljanju rizicima na kraju svakog dana morali računati statističku vrijednost koja je predstavljala rizik cijelog portfelja banke. Cilj je bio dobiti jedan broj koji predstavlja ukupni rizik bez potrebe za promatranjem rizika vezanih uz određene pozicije u portfelju. VaR mjeri maksimalnu veličinu koja se može izgubiti u portfelju u danom vremenskom periodu uz određenu razinu povjerenja, kao i vjerojatnost materijalizacije određenog gubitka. Koristeći podatke dobivene modeliranjem pomoću VaR-a financijske institucije mogu odrediti imaju li dovoljno kapitalnih rezervi da pokriju eventualne gubitke i trebaju li dodatno diverzificirati portfelj u slučaju neprihvatljivo visokih rizika.

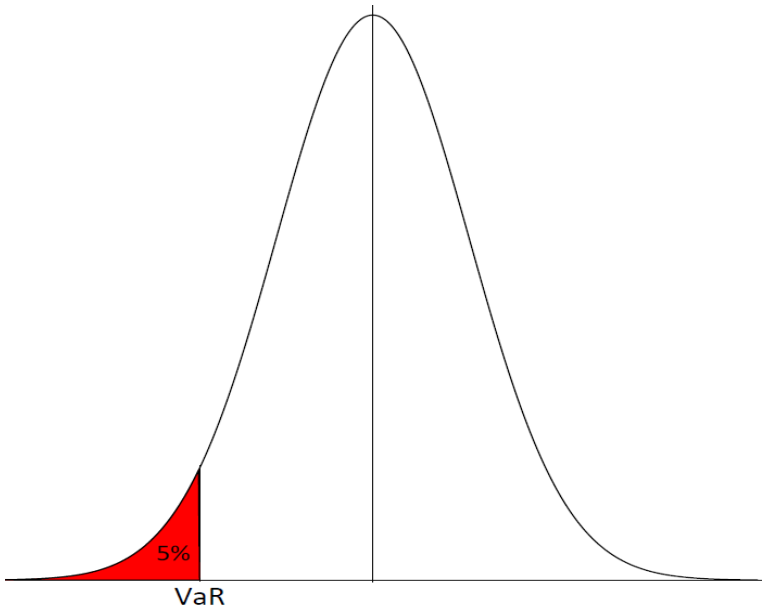
2 Procjena rizičnosti vrijednosti u uvjetno Gaussovoj klasi modela

2.1 Uvod u rizičnost vrijednosti

2.1.1 Praktična primjena rizičnosti vrijednosti

VaR je određen veličinom potencijalnog gubitka, vjerojatnosti pojave gubitka i vremenskim periodom. Statistički gledano, VaR portfelja je kvantil distribucije gubitka portfelja u određenom vremenskom intervalu pri danoj vjerojatnosti.

Slika 1



Izvor: Slika 1 konstruirana u matematičkom software-u R

Na slici 1 nacrtana je grafička reprezentacija VaR-a sa 95%-tnom razinom povjerenja. Slika prikazuje hipotetsku funkciju gustoće povrata za portfelj. Crveno područje lijevo od razine VaR-a predstavlja 5% ukupnog područja ispod krivulje, a područje desno od razine VaR-a predstavlja 95% ukupnog područja ispod krivulje. Ako na primjer portfelj dionica ima dnevni 95%-tni VaR od $1 000 000 to znači da će vrijednost portfelja u 5% slučajeva pasti za više od $1 000 000.

Prvi zadatak institucija kod korištenja VaR-a je softverski problem implementacije sučelja u razne sustave i baze podataka koji koriste potencijalno različite operacijske sustave i jezike. Sljedeći zadatak je korištenje dobivenih podataka za kontrolu rizika i stvaranje uvjeta u kojima svi sudionici prihvaćaju takav sustav upravljanja rizikom.
Postoji mnogo prednosti korištenja VaR-a koje su i dovele do njegove velike popularnosti. Prvenstveno, VaR je vrlo jednostavan za interpretaciju - to je broj izražen u nekoj valuti ili postotku vrijednosti portfelja koji opisuje rizičnost portfelja. Nadalje, jako je rasprostranjen i postoji široka primjenjivost na različite oblike financijske imovine. Također, upravo zbog svoje popularnosti često je unaprijed implementiran u raznim financijskim softverima što omogućuje brzo računanje VaR-a nekog portfelja. Ipak, nakon Svjetske financijske krize 2007.g-2008.g, postalo je jasno da VaR ima neke značajne nedostatke. Neki od njih su:

- *Rezultat procjene ovisi o uzetim pretpostavkama*
  Kao i kod svake druge kvantitativne metode u financijama, rezultati i upotrebljivost VaR-a ovise o podatcima koje koristimo pri računanju. Zato različite metode računanja daju rezličite rezultate.

- *VaR ne mjeri najveći gubitak koji se može dogoditi*
  Najveće ograničenje VaR-a je da nam on ne govori koliki je najveći mogući gubitak. Na primjer, dnevni 99%-tni VaR od $1 000 000 znači da će u 1% slučajeva (to su 2-3 dana trgovanja u godini sa dnevnim računanjem VaR-a) gubitak biti veći od $1 000 000, ali problem je da ne znamo ništa o veličini gubitka unutar tih 1%. On može biti malo veći od spomenutog iznosa, ali može se dogoditi i da je značajno veći. Zato se za VaR često kaže da daje lažan osjećaj sigurnosti.

- *Često korištenje pretpostavke o normalnosti*
  Većina prihvaćenih i nagrađivanih ekonomskih teorija počiva na normalnosti distribucije rizika. To znači da se najčešće događaju situacije koje imaju manje ozbiljne posljedice, a vjerojatnost da se ostvare rijetki događaji poput sloma tržišta je gotovo nula. Nažalost, takve pretpostavke ne odražavaju stvarni svijet (imali smo već nekoliko slomova tržišta, a prema ovoj pretpostavci to se ne bi trebalo uopće dogoditi, a kamoli više puta).

- *Teško se izračunava za velike portfelje*
  Što je veći broj pozicija u portfelju to je teže izračunati VaR. Također, velika raznolikost portfelja otežava, ali i poskupljuje zadatak određivanja rizika.

- *VaR nije aditivan*
  Moguće postojanje korelacije između različitih faktora rizika mora se uzeti u obzir pri računanju rizika. Zato zbroj VaR-a portfelja koji sadrži financijsku imovinu X i VaR-a portfelja koji sadrži financijsku imovinu Y nije jednak VaR-u portfelja koji sadrži imovine X i Y.

I zaista, VaR (kao i mnogi drugi pokazatelji) uvelike je podcijenio opasnost i učestalost rizika koji su doveli do krize. Kako su banke bile previše uvjerene u uspješnost VaR-a, nisu imale dovoljno sredstava da pokriju novonastale gubitke. Svjetska financijska kriza 2007.g-2008.g uvelike je narušila povjerenje koje su banke imale u VaR. Ipak, to ne znači da je VaR nužno loš pokazatelj. VaR može biti vrlo dobar pokazatelj ako smo svjesni njegovih mogućnosti i ograničenja. Ne smijemo ga koristiti kao jedini pokazatelj rizika, već ga treba implementirati zajedno sa drugim mjerama rizika.

2.1.2 Statističko modeliranje rizičnosti vrijednosti

U praksi računanje VaR-a za velike portfelje sa kompliciranijim financijskim instrumentima predstavlja pronalaženje ravnoteže između brzine i točnosti. Kao što ćemo vidjeti, brži modeli zahtjevaju ograničavajuće pretpostavke o promjeni vrijednosti portfelja ovisno o faktorima rizika, a precizniji modeli obično vode dužem vremenu izvršavanja. Pitanje modeliranja i aproksimacije rizika je ključno jer neadekvatni pristup VaR-u može upropastiti cijeli sustav upravljanja rizicima financijske institucije. Korištenje VaR metodologije zato zahtijeva odabir prikladnog statističkog modela i načina aproksimacije. Odabir modela nije jednostavan proces i nalaže da se u obzir uzmu mnogi čimbenici. Ovisno o tome dobit ćemo rezultate sa različitim razinama preciznosti i drugačijim vremenima izvršavanja. Neke od važnih odluka povezanih sa modeliranjem su:

1. *Koje faktore rizika treba uzeti u obzir?*
   Ta odluka prvenstveno ovisi o poslovanju banke, tj. o imovini koja dominira u njenom portfelju, ali također može ovisiti o dostupnosti povijesnih podataka. Nedovoljna količina podataka vezana uz određeni rizik može dovesti do pogrešne interpretacije važnosti određenog rizika. Zato je bolje koristiti drugačiji faktor sa boljim, dostupnijim povijesnim podatcima. Isto tako, izostavljanjem nekog bitnog pokazatelja može se dogoditi da određena dobra ili loša svojstva pogrešno pripišemo nekom drugom čimbeniku. Zato naš model mora u obzir uzeti sve relevantne faktore rizika.

2. *Kako modelirati cijene kao funkcije faktora rizika?*
   Na primjer kod manjih portfelja sa dionicama obično se uzima da svaka dionica predstavlja zaseban faktor rizika. Ako $X_t^i = log(S_t^i) - log(S_{t-1}^i)$ predstavlja log povrat dionice i u vremenskom intervalu [t-1,t], onda je promjena u vrijednosti portfelja koji sadrži samo dionicu i dana sa

   $$\Delta S_t^i = S_{t-i}^i(e^{X_t^i} - 1)$$

   gdje S_t^i predstavlja cijenu dionice i u trenutku t.

3. *Koja svojstva pretpostavljamo za dinamiku faktora rizika X_t?*
   Osnovni modeli za dionice pretpostavljaju da log povrati dionica $X_t^i = log(S_t^i) - log(S_{t-1}^i)$ imaju multivarijantnu normalnu razdiobu i da su međusobno nezavisni. Slični zaključci vrijede i za ostale faktore rizika.

4. *Kako procijeniti parametre modela na temelju povijesnih podataka?*
   Uobičajeni pristup je definirati model i onda tražiti procjenitelje koji zadovoljavaju određene uvjete. Tako je na primjer nepristrani procjenitelj minimalne varijance kovarijacijske matrice Σ faktora rizika X_t „pravokutni pomični prosjek"

   $$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(X_t - \mu)(X_t - \mu)^T$$

   gdje je μ očekivanje varijable X_t. Drugačiji pristup je da prvo nađemo procjenitelja, a tek nakon toga odredimo model za koji taj procjenitelj zadovoljava određena svojstva.

Iako postoji mnogo različitih statističkih modela za tržišne rizike, u praksi se pretežito koriste dvije vrste:

1. *IID-modeli*
   Faktori rizika X_t nezavisni i jednako distribuirani, ali distribucija od X_t nije nužno normalna.

2. *Uvjetno Gaussovi modeli*
   Faktori rizika X_t imaju multivarijantnu normalnu distribuciju uvjetno na informaciju do trenutka $t-1$.

2.1.3 Aproksimacije rizičnosti vrijednosti

Promatrat ćemo aproksimacije VaR-a u klasi uvjetno Gaussovih modela. Pretpostavljamo da je uvjetno očekivanje od X_t jednako nula ($\mu_t = 0$) i da je kovarijacijska matrica Σ_t procijenjena u trenutku t-1. Tada je promjena vrijednosti portfelja na vremenskom intervalu [t-1,t] dana sa

$$\Delta V_t(X_t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta S_t^i(X_t)$$

gdje su ω_i težine portfelja. Ubuduće ćemo promatrati situciju bez vremenskih indeksa. Dakle ΔV će predstavljati promjenu vijednosti portfelja u sljedećem vremenskom intervalu, a X pripadni vektor faktora rizika. VaR ne možemo dobiti iz distribucije individualnih faktora rizika, već VaR trebamo odrediti pomoću distribucije od ΔV. Jedina općenita metoda za određivanje kvantila distribucije od ΔV je Monte Carlo simulacija. Nažalost u praksi se pokazalo da Monte Carlo simulacije nisu najpraktičnije rješenje, pogotovo za jako velike portfelje. Pomoću raznih metoda aproksimacije vrijednosti portfelja kao funkcije faktora rizika možemo približno odrediti kako izgleda ΔV, iako ju ne znamo. Te metode pokazuju kako promjene faktora rizika određuju promjene vrijednosti portfelja. Danas se najviše koristi takozvana Delta-Gama aproksimacija. Ona je poboljšana verzija Delta metode koja nije bila uspješna zbog pretpostavke linearnosti (u stvarnom svijetu financijski instrumenti u portfelju nisu linearno vezani za faktore rizika). Naime, Delta metoda obuhvaćala je samo prvu derivaciju funkcije vrijednosti, a Delta-Gama metoda obuhvaća prvu i drugu derivaciju funkcije vrijednosti. Delta-Gama aproksimacija temelji se na Taylorovom razvoju drugog reda za vrijednost portfelja. Slijedi:

$$\Delta V(X) \approx \Delta^T X + \frac{1}{2} X^T \Gamma X, \tag{1}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \Delta V(X_t) &= V(X_t) - V(X_{t-1}) \\ &= \Delta(X_{t-1})^T (X_t - X_{t-1}) + \frac{1}{2}(X_t - X_{t-1})^T \Gamma(X_{t-1})(X_t - X_{t-1}). \end{aligned}$$

Δ je vektor,a Γ simetrična matrica koji predstavljaju redom prvu, odnosno drugu derivaciju od V u odnosu na X, tj. Δ i Γ predstavljaju osjetljivost od V na faktore rizike.

2.1.4 Svojstva Delta-Gama normalnih modela

Kao što smo gore rekli, promjenu vrijednosti portfelja ΔV možemo aproksimirati kao:

$$\Delta V(X) \approx \Delta^T X + \frac{1}{2} X^T \Gamma X = \sum_i^n \Delta_i X_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n X_i \Gamma_{i,j} X_j$$

gdje je $X \sim N(0, \Sigma)$ i $\Delta_i := \frac{\partial V}{\partial X_i}$, $\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j}$ za sve $i, j = 1, ..., n$.
Cilj nam je pokazati da se vrijednost portfelja ΔV može izraziti kao suma nezavisnih slučajnih varijabli koje su kvadratične funkcije standardnih normalnih varijabli Y_i. To ćemo napraviti u tri koraka:

1. *Faktorizacija Choleskog matrice* Σ *radi transformacije varijabli* X_i *u nezavisne slučajne varijable*
   Koristeći faktorizaciju Choleskog za kovarijacijsku matricu Σ, može se naći matrica A tako da vrijedi: $AA^T = \Sigma$. Iz toga slijedi $A^{-1}X \sim N(0, I)$. Promotrimo sad ponovo aproksimaciju od ΔV, ali zapisanu sa jediničnim matricama koje ćemo zamijeniti sa $I = AA^{-1}$ ili $I = (A^T)^{-1}A^T$:

$$\begin{aligned}
\Delta V(X) &= \Delta^T \mathbf{I} X + \frac{1}{2} X^T \mathbf{I} \Gamma \mathbf{I} X \\
&= \Delta^T A A^{-1} X + \frac{1}{2} X^T (A^T)^{-1} A^T \Gamma A A^{-1} X \\
&= \Delta^T A A^{-1} X + \frac{1}{2} X^T (A^{-1})^T A^T \Gamma A A^{-1} X \\
&= \Delta^T A (A^{-1} X) + \frac{1}{2} (A^{-1} X)^T A^T \Gamma A (A^{-1} X)
\end{aligned}$$

   Sada možemo pisati:

$$\Delta V(X) = \Delta^T A Z + \frac{1}{2} Z^T M Z, \tag{2}$$

   gdje je $Z = A^{-1}X \sim N(0, I)$ (sve varijable Z_i su standardne normalne nezavisne slučajne varijable) i $M = A^T \Gamma A$ (M je simetrična matrica jer je Γ simetrična).

2. *Dijagonalizacija matrice* Γ
   Svojstveni vektori e^i matrice M su vektori za koje vrijedi:

$$M e^i = \lambda_i e^i \tag{3}$$

gdje se skalari λ_i nazivaju svojstvene vrijednosti. Gornja jednadžba ima netrivijalno rješenje ako je matrica $(M - \lambda_i I)$ singularna. Zato rješavanjem sustava

$$det(M - \lambda_i I) = 0$$

dobivamo svojstvene vrijednosti koje možemo iskoristiti u jednadžbi (3) za računanje svojstvenih vektora. Kako je gore definirana matrica M simetrična, slijedi da ima n ortonormiranih svojstvenih vektora (jedinični i ortogonalni) $(e^j)^T = (e_1^j \ e_2^j \ \cdots \ e_n^j)$, $j = 1, 2, ..., n$. Sada definirajmo matricu Q čiji stupci su svojstveni vektori matrice M:

$$Q = \begin{pmatrix} e^1 & e^2 & \dots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & \dots & e_1^n \\ e_2^1 & e_2^2 & \dots & e_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^1 & e_n^2 & \dots & e_n^n \end{pmatrix}.$$

Iz toga odmah slijedi $Q^T Q = I$. Zato je i $Q^T = Q^{-1} \implies QQ^T = I$. Svojstvene vrijednosti se mogu iskoristiti da se konstruira dijagonalna matrica:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sada se jednadžba (3) može zapisati kao $MQ = Q\Lambda$. Množenjem obje strane sa Q^T slijedi $Q^T MQ = Q^T Q\Lambda = \Lambda$ što možemo zapisati kao

$$Q^T A^T \Gamma A Q = \Lambda$$

što je upravo tražena dijagonalizacija matrice Γ.

3. *Zapis ΔV u traženom obliku*
Sada u jednandžbu (2) uvedimo jedinične matrice i zamijenimo ih sa QQ^T:

$$\begin{aligned} \Delta V(X) &= \Delta^T A \mathbf{I} Z + \frac{1}{2} Z^T \mathbf{I} M \mathbf{I} Z \\ &= \Delta^T A Q Q^T Z + \frac{1}{2} Z^T Q Q^T M Q Q^T Z \\ &= \Delta^T A Q (Q^T Z) + \frac{1}{2} (Q^T Z)^T \Lambda (Q^T Z). \end{aligned}$$

Sada možemo pisati

$$\Delta V(X) = \Delta^T A Q Y + \frac{1}{2} Y^T \Lambda Y,$$

gdje je $Y = Q^T Z = Q^T A^{-1} X$ i $\Lambda = Q^T M Q = Q^T A^T \Gamma A Q$. Ako još označimo $\delta = Q^T A^T \Delta$ slijedi da je

$$\Delta V(X) = \delta^T Y + \frac{1}{2} Y^T \Lambda Y \quad sa \;\; Y \sim N(0, I).$$

To povlači

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i Y_i + \frac{1}{2} \lambda_i Y_i^2). \tag{4}$$

Ako (4) zapišemo na drugačiji način, dobivamo sljedeći izraz za ΔV:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_i (\frac{\delta_i}{\lambda_i} + Y_i)^2 - \frac{\delta_i^2}{2\lambda_i} \right\}.$$

2.1.5 Prednosti i nedostatci Delta-Gama aproksimacije

Ovaj pristup sa Delta-Gama aproksimacijom naišao je na mnoge pohvale, ali i kritike. Postoje jednostavni primjeri portfelja sa opcijama kod kojih kvadratična aproksimacija funkcije vrijednosti može dovesti do velikih pogrešaka u računanju VaR-a. Također, navedena Taylorova aproksimacija je lokalna i upitno je može li biti dobra u modeliranju ekstremnih događaja. Usprkos tome, postoji mnogo razloga zašto bi banke trebale implementirati ovu metodu. Statistička pretpostavka uvjetno Gaussovih faktora rizika može pomoći objasniti razne činjenice vezane uz povrate imovine. Također, primamljivo je izražavati promjene u vrijednosti portfelja u deltama i gamama jer su one lako računaju i već su široko implementirane u raznim sustavima koji se koriste u trgovini (a bolje je nego korištenje samo delta). Na kraju, osobi koja se bavi upravljanjem rizika teško je odbaciti Delta-Gama metodu ako ju većina konkurencije ima implementiranu.
Predloženo je mnogo metoda za računanje kvantila distribucije određene modelom (1). Neke od njih su Monte Carlo simulacija (ako se koristi stvarna vrijednost funkcije $\Delta V(X)$ govorimo o „punoj" Monte Carlo simulaciji, a ako se koristi kvadratična aproksimacija, tada govorimo o parcijalnoj Monte Carlo simulaciji), Johnsonova transformacija, Cornish Fisherova ekspanzija, Solomon-Stephensonova aproksimacija i druge. Dvije metode koje se vrlo često koriste u praksi su Cornish-Fisherova aproksimacija i parcijalna Monte Carlo simulacija. Cornish-Fisherova aproksimacija je veoma brza, ali i nedovoljno precizna. Monte Carlo simulacije mogu (u teoriji) postići bilo koju željenu točnost, dok Cornish-Fisherova aproksimacija daje samo ograničenu točnost.

2.2 Cornish-Fisher aproksimacija

2.2.1 Izvođenje i svojstva

Ako postoji odnos između dviju distribucija i ako je poznata funkcija kvantila jedne distribucije, onda je ponekad moguće iskoristiti taj odnos kako bi se dobio prikaz funkcije kvantila druge distribucije pomoću funkcije kvantila prve distribucije. Jedna od najpoznatijih reprezentacija funkcije kvantila je Cornish-Fisherov razvoj koji su osmislili znanstvenici E.A.Cornish i R.A.Fisher.
Neka Φ predstvlja neku distribuciju i ϕ njenu funkciju gustoće. Generalizirani Cornish-Fisherov razvoj nastoji procijeniti α-kvantil određene distribucije F u terminima α-kvantila od Φ, tj. nastoji procijeniti funkciju $F^{-1} \circ \Phi$. Za razvoj $F^{-1} \circ \Phi$ u red koristeći derivacije od F i Φ trebat ćemo Lagrangeov teorem inverzije[1] koji kaže da ako je funkcija $s \longmapsto t$ definirana sa

$$t = c + s \cdot h(t), \tag{5}$$

gdje je c konstanta i h analitička funkcija u c, tada se analitička funkcija $f(t)$ može razviti u red u okolini od $s = 0$ $(t = c)$:

$$f(t) = f(c) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s^r}{r!} D_c^{r-1}[f' \cdot h^r](c),$$

gdje je D_c operator diferenciranja definiran sa $D_c = \frac{d}{dc}$, a D_c^{r-1} označava diferenciranje $r-1$ puta.
Općenito, ako su x i z redom kvantili distribucija F i Φ tada je ideja riješiti

$$F(x) = \Phi(z) \tag{6}$$

po x jer nastojimo odrediti kvantil distribucije F u terminima kvantila distribucije Φ. Za funkciju gustoće $\phi(z)$ distribucije Φ pretpostavljat ćemo da je diferencijabilna. Ako sada definiramo

$$Z(x) = F(x) - \Phi(x) \tag{7}$$

tada iz (6) slijedi

$$Z(x) = \int_x^z \phi(t)dt.$$

Zapišimo formulu (6) u drugačijem obliku kao

$$\Phi(x) = \Phi(z) - Z(x) \tag{8}$$

[1]Za precizan iskaz i dokaz pogledati: [19]

i stavimo $t = \Phi(x)$ i $c = \Phi(z)$. Tada (8) možemo zapisati kao

$$t = c - Z(\Phi^{-1}(t)),$$

gdje je Φ^{-1} inverz funkcije Φ. Kako ta jednandžba ima traženi oblik iz Lagrangeovog teorema (za $s = -1$ i $h = Z(\Phi^{-1}) = (F - \Phi) \circ \Phi^{-1}$), slijedi da za $f = \Phi^{-1}$ vrijedi:

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(c) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D_c^{r-1}[([F - \Phi]^r/\phi) \circ \Phi^{-1}](c).$$

Pri tome smo koristili formulu za derivaciju inverza funkcije Φ :

$$(\Phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(x))}.$$

Stavljanjem $s = -1$ u (5) slijedi

$$t = c - 1 \cdot (F - \Phi) \circ \Phi^{-1}(t),$$

a iz toga dobijemo $\Phi^{-1}(t) = F^{-1}(c)$. Ako označimo $x = F^{-1}(c), z = \Phi^{-1}(c)$ tada gornja jednandžba poprima oblik:

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D_c^{r-1}[((F - \Phi)^r/\phi) \circ \Phi^{-1}](\Phi(z)) \tag{9}$$

Nadalje D_c možemo zapisati kao $D_c = \frac{d}{dc} = \frac{dz}{dc}\frac{d}{dz} = \frac{dz}{dc} D_z$ pa supstituiranjem tog izraza u (9) dobivamo:

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\phi(z)} D_z \right)^{r-1} \left[\frac{(F - \Phi)^r}{\phi} \right](z), \tag{10}$$

gdje smo koristili da je $\frac{dz}{dc} = \frac{d}{dc}\Phi^{-1}(c) = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(c))} = \frac{1}{\phi(z)}$. Konačno, stavljanjem $a = (F - \Phi)/\phi$ dobivamo da se (10) može zapisati kao:

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D_{(r-1)}[a^r](z) \tag{11}$$

gdje je $D_{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} (D + \frac{\phi'}{\phi})(D + 2\frac{\phi'}{\phi})...(D + r\frac{\phi'}{\phi})$ i $D_{(0)}$ identiteta.
Kako bismo pokazali da su (10) i (11) ekvivalentni zapisi, uočimo da vrijedi

$(D + r\frac{\phi'}{\phi}) = \frac{1}{\phi^r} D\phi^r$. Ta činjenica slijedi iz pravila za derivaciju produkta dviju funkcija:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\phi^r} D\phi^r\right)(u) = \frac{1}{\phi^r} D(\phi^r u) = \frac{1}{\phi^r} D(\phi\phi^{r-1}u) &= \frac{1}{\phi^r}\left[D(\phi)\phi^{r-1}u + \phi D(\phi^{r-1}u)\right] \\
&= \frac{\phi'}{\phi}u + \frac{1}{\phi^{r-1}} D(\phi^{r-1}u) \\
&= \frac{\phi'}{\phi}u + \frac{1}{\phi^{r-1}} D(\phi\phi^{r-2}u) \\
&= \frac{\phi'}{\phi}u + \frac{1}{\phi^{r-1}}\left[D(\phi)\phi^{r-2}u + \phi D(\phi^{r-2}u)\right] \\
&= 2\frac{\phi'}{\phi}u + \frac{1}{\phi^{r-2}} D(\phi^{r-2}u) \\
&= ... = \\
&= r\frac{\phi'}{\phi}u + Du \\
&= \left(r\frac{\phi'}{\phi} + D\right)(u).
\end{aligned}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned}
D_{(r-1)}\left[\left(\frac{F-\Phi}{\phi}\right)^r\right] &= (D + \frac{\phi'}{\phi})(D + 2\frac{\phi'}{\phi}) \cdots (D + (r-1)\frac{\phi'}{\phi})\left[\left(\frac{F-\Phi}{\phi}\right)^r\right] \\
&= (\phi^{-1}D\phi^1)(\phi^{-2}D\phi^2) \cdots (\phi^{-(r-1)}D\phi^{(r-1)})\left[\left(\frac{F-\Phi}{\phi}\right)^r\right] \\
&= \phi^{-1}D\phi^1\phi^{-2}D\phi^2 \cdots \phi^{-(r-1)}D\phi^{(r-1)}\left[\left(\frac{F-\Phi}{\phi}\right)^r\right] \\
&= \phi^{-1}D\phi^{-1}D\phi^{-1} \cdots \phi^{-1}D\left[\phi^{(r-1)}\left(\frac{F-\Phi}{\phi}\right)^r\right] \\
&= (\phi^{-1}D)^{r-1}\left[\frac{(F-\Phi)^r}{\phi}\right].
\end{aligned}$$

Sa (11) je označen generalizirani Cornish-Fisherov razvoj koji daje aproksimaciju za funkciju $x = F^{-1}(\Phi(z))$. Kada su Cornish i Fisher prvo osmislili ideju ovog razvoja, oni su promatrali gore navedenu distribuciju Φ kao standardnu normalnu funckiju distribucije. Tada se jednadžba (11) reducira do tzv. standardne Cornish-Fisherove jednadžbe[2]. Ta prvotna ideja se kasnije proširila pa se za distribuciju Φ može uzeti bilo koja distibucija. Označimo sa

[2]Za detalje vidjeti:[14]

$\tilde{F}^{-1}$ aproksimaciju (procjenjenu funkciju) funkcije F^{-1} dobivenu korištenjem (11) za neku konačnu gornju ogradu sume r.
Iako su Cornish-Fisherove aproksimacije često korištene u financijama za računanje VaR-a, moramo biti svjesni da imaju neke nedostatke[3]:

- Procjenjene funkcije $\tilde{F}$ i $\tilde{F}^{-1} \circ \Phi$ nisu nužno monotone (Cornish-Fisherov razvoj aproksimira funkciju $F^{-1} \circ \Phi$ polinomijalno. Jasno je da je nužan uvjet za monotonost od F neparan stupanj polinoma).
- $\tilde{F}$ ima loše ponašanje na repovima. Cornish-Fisherova aproksimacija α-kvantila postaje sve lošija (manje pouzdana) kako se α približava nuli (ili jedinici).
- Aproksimacija se ne poboljšava kako povećavamo broj r

Ukratko, Cornish-Fisherova aproksimacija ima dosta prednosti i nedostataka. S jedne strane, metoda se može lako implementirati i jednostavna je za računanje, a s druge strane ponekad nije dovoljno precizna. U praksi je ponekad korisna jer aproksimira brzo sa dovoljnom preciznošću. Ipak, rezultati se svakako moraju proučiti jer posljedice mogu biti teške ukoliko se ostvari najlošiji scenarij Cornish-Fisherove aproksimacije.

2.3 Tehnike smanjena varijance u Monte-Carlo simulaciji

2.3.1 Generiranje uzorka Monte-Carlo metodom

Parcijalna Monte-Carlo metoda (razlikuje se od obične Monte-Carlo metode po tome što se brže izvodi) je Monte-Carlo simulacija koja se izvodi generiranjem određenih cijena u statističkom modelu i njihovim izvrednjavanjem korištenjem jednostavne Delta-Gama aproksimacije. Koristit ćemo sljedeće oznake:

- X =vektor faktora rizika
- ΔV =promjena u vrijednosti portfelja koja proizlazi iz X
- $L = -\Delta V$
- α =razina točnosti
- l= referentna razina gubitka

[3]Svojstva preuzeta iz:[11]

- Δ= derivacija prvog reda od V u odnosu na faktore rizika
- Γ= derivacija drugog reda od V u odnosu na faktore rizika
- Σ_X =kovarijacijska matrica faktora rizika

Sjetimo se jednandžbe koja definira klasu Delta-Gama normalnih metoda: $\Delta V(X) \approx \Delta^T X + \frac{1}{2} X^T \Gamma X$. Procedura za implementaciju parcijalne Monte-Carlo metode dana je sljedećim koracima:

1. Generiraj N scenarija simulirajući fakotre rizika $X_1, X_2, ..., X_N$ u skladu sa Σ_X
2. Promotri portfelj i odredi gubitke u vrijednosti portfelja $L_1, L_2, ..., L_N$ koristeći jednostavnu delta-gama aproksimaciju
3. Izračunaj broj scenarija u kojima gubitci prelaze referentni gubitak l:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{L_i > l\}}$$

   (za procjenu VaR-a ovaj korak se može ponoviti za više različitih vrijednosti od l)

Dakle parcijalna Monte-Carlo metoda je fleksibilna i jednostavna za implementaciju. Daje nam preciznu procjenu VaR-a kada je funkcija gubitka približno kvadratična. Jedini kompliciran korak u gornjem algoritmu je drugi korak. Svaki put moramo iznova procijeniti promjenu vrijednosti portfelja, a svaki takav postupak može biti dugotrajan. Trajanje tog procesa je ograničavajući faktor za broj scenarija koji možemo promatrati. Također, ukoliko postoji velik broj faktora rizika, trebat će mnogo ponavljanja da se algoritam provede što potencijalno znači da će vrijeme izvođenja biti jako dugačko. Kako bi se riješio taj problem, osmišljena je metoda smanjenja varijance koja se može ostvariti kroz nekoliko različitih tehnika. Krenimo od objašnjenja važnosti smanjenja varijance.
Pretpostavimo da želimo odrediti određeni parametar θ. Monte Carlo simulacijom generiramo niz $\{\hat{\theta}_i, i = 1, 2, ...\}$ gdje su sve $\hat{\theta}_i$ nezavisne i jednako distribuirane i svaki $\hat{\theta}_i$ ima očekivanje θ i varijancu σ^2. Tada je procjenitelj za θ, na temelju N ponavljanja, sredina uzorka $\bar{\theta}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\theta}_i$. Koristit ćemo Centralni granični teorem[4] koji kaže da za niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_1, X_2, ...$ koje imaju konačno očekivanje μ i

[4]Cjelovit iskaz, dokaz i posljedice pogledati u:[15]

konačnu varijancu $\sigma^2 > 0$ vrijedi da niz slučajnih varijabli $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$ konvergira po distribuciji jediničnoj normalnoj razdiobi kada n teži u beskonačnost:

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0,1), n \to \infty.$$

Pritom je definicija konvergencije po distribuciji dana u definiciji 2.1.

Definicija 2.1. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x), \ za\ svaki\ x \in C(F),$$

gdje je F_n funkcija distribucije slučajne varijable X_n, F funkcija distribucije slučajne varijable X i $C(F)$ je skup točaka neprekidnosti funkcije F.

Dakle, zbog Centralnog graničnog teorema slijedi da je za veliki broj ponavljanja N sredina uzorka približno normalno distribuirana sa očekivanjem θ i varijancom σ^2/N. Također, slijedi da je $100(1-\beta)\%$ interval pouzdanosti za parametar θ dan sa

$$\left[\bar{\theta}_N - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{\frac{\beta}{2}}, \bar{\theta}_N + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{\frac{\beta}{2}}\right],$$

gdje $z_{\frac{\beta}{2}}$ predstavlja kvantil standardne normalne distribucije. Dakle, greška u procjeni proporcionalna je $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ pa uz ostale uvjete nepromijenjene, smanjenje varijance za faktor 10 ima isti učinak na smanjenje greške kao povećanje broja uzoraka za 100. Sada vidimo da se proces smanjenja varijance koristi za povećanje preciznosti procjene za određeni broj iteracija. Na taj način možemo dobiti značajno preciznije rezultate i to u kraćem vremenu. Postoji tehnika poboljšanja metode smanjenja varijance koja, osim promatranja minimalne varijance, uzima u obzir i efikasnost izvršavanja.
Promotrimo sljedeći slučaj. Pretpostavimo sad da imamo mogućnost izbora između dva Monte Carlo procjenitelja $\{\hat{\theta}_i^1, i = 1, 2, ...\}$ i $\{\hat{\theta}_i^2, i = 1, 2, ...\}$. Pretpostavimo da su oba nepristrani procjenitelji ($E[\hat{\theta}_i^1] = E[\hat{\theta}_i^2] = \theta$), ali da vrijedi $\sigma_1 < \sigma_2$. Prema gornjem razmišljanju slijedilo bi da je sredina za N ponavljanja $\hat{\theta}^1$ bolji procjenitelj za θ od sredine za N ponavljanja $\hat{\theta}^2$. Nažalost, promatranje manje varijance nekad nije dovoljno za odabir boljeg procjenitelja jer ne znamo koliko je zahtjevan proces generiranja uzorka. Označimo sa konstantom $b_j,\ j = 1, 2$ posao potreban za generiranje jednog uzorka $\hat{\theta}^j$ i označimo sa t potrebno vrijeme izvršavanja. U vremenu t može se generirati t/b_j ponavljanja $\hat{\theta}^j$. Zato su procjenitelji dani sa

$$\frac{b_1}{t}\sum_{i=1}^{t/b_1} \hat{\theta}_i^1 \quad i \quad \frac{b_2}{t}\sum_{i=1}^{t/b_2} \hat{\theta}_i^2.$$

Za velike t oni su približno normalno distribuirani sa očekivanjem θ i standardnim devijacijama

$$\sigma_1\sqrt{\frac{b_1}{t}} \quad i \quad \sigma_2\sqrt{\frac{b_2}{t}}.$$

Zato za velike t treba preferirati prvi procjenitelj ako vrijedi

$$\sigma_1^2 b_1 < \sigma_2^2 b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1^2/\sigma_2^2 < b_2/b_1. \tag{12}$$

Jednadžba (12) nam govori da odabir dobrog procjenitelja znači kompromis između varijance procjenitelja i zahtjevnosti izvršavanja. Ako se vodimo načelom efikasnosti, treba koristiti procjenitelj sa manjom varijancom ako je gornji omjer varijanci manji od omjera b_2/b_1. To znači da je nekad bolji procjenitelj sa većom varijancom, ali manjim vremenom izvršavanja.
Neke poznate tehnike smanjenja varijance su:

1. *Antitetička metoda*
   Antitetička metoda (za detalje vidjeti [8]) nastoji smanjiti varijancu uvođenjem negativne ovisnosti među parovima vrijednosti. Pretpostavimo da nekom implementacijom antitetičkog uzimanja uzorka dobijemo niz parova $(z_1, \tilde{z}_1), (z_2, \tilde{z}_2), ..., (z_N, \tilde{z}_N)$ gdje su za svaki $i = 1, ..., N$ $z_i \in \mathbb{R}^m$ nezavisni uzorci iz standardne normalne distribucije i $\tilde{z}_i = -z_i$. Pretpostavimo da je $W_i = f(z_i)$ za svaki $i = 1, ..., N$. Dakle promatramo parove $(f(z_1), f(-z_1)), (f(z_2), f(-z_2)), ..., (f(z_N), f(-z_N))$. Cilj nam je procijeniti $\mu = E(W)$ koristeći antitetičku metodu. Na temelju N ponavljanja, nepristrani procjenitelj za $\mu = E(W)$ dan je sa

   $$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(z_i).$$

   U ovom primjeru se antitetička metoda temelji na činjenici da ako z_i ima standardnu normalnu distribuciju da onda i antitetička vrijednost $\tilde{z}_i$ također ima standardnu normalnu distribuciju.
   Tada je istinita činjenica da za standardnu normalnu varijablu X vrijedi $E[f(X)] = E[f(-X)]$ za svaku funkciju f jer standardne normalne varijable X i $-X$ imaju istu funkciju gustoće. Zato je i

   $$\tilde{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(-z_i)$$

   nepristrani procjenitelj za μ. Slijedi da je i

   $$\hat{\mu}_{AV} = \frac{\hat{\mu} + \tilde{\mu}}{2} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}(f(z_i) + f(-z_i)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(f(z_i) + f(-z_i))}{2}$$

nepristrani procjenitelj za μ.
Sada se možemo zapitati pod kojim uvjetima je procjenitelj antitetičke metode bolji od običnog Monte-Carlo procjenitelja. Kako bismo mogli uspoređivati te procjenitelje pretpostavimo da je vrijeme izvršavanja kod simuliranja para $(z_i, \tilde{z}_i)$ dvostruko dulje od vremena izvršavanja kod simulacije z_i. Pod tom pretpostavkom je vrijeme izvršavanja potrebno za određivanje $\hat{\mu}_{AV}$ približno jednako vremenu izvršavanja za određivanje srednje vrijednosti $2N$ nezavisnih ponavljanja $f(z_i)$ i zato ima smisla uspoređivati varijance te dvije vrijednosti. Dakle antitetička metoda smanjuje varijancu ako vrijedi

$$Var[\hat{\mu}_{AV}] < Var\left[\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{2N} f(z_i)\right].$$

Koristeći činjenicu da su $z_i, i = 1, ..., N$ međusobno nezavisne i jednako distribuirane (a samim time su i $\frac{f(z_i)+f(-z_i)}{2}, i = 1, ..., N$ međusobno nezavisne i jednako distribuirane) slijedi da je gornja nejednakost ekvivalentna izrazu:

$$Var[f(z_i) + f(-z_i)] < 2Var[f(z_i)].$$

Raspisivanjem lijeve strane dobijemo:

$$Var[f(z_i)] + Var[f(-z_i)] + 2Cov[f(z_i), f(-z_i)] < 2Var[f(z_i)],$$

odnosno

$$2Var[f(z_i)] + 2Cov[f(z_i), f(-z_i)] < 2Var[f(z_i)].$$

Dakle uvjet da bi antitetička metoda smanjila varijancu je

$$Cov[f(z_i), f(-z_i)] < 0.$$

Uspješnost ove metode uvelike ovisi o funkciji f. Antitetička metoda najčešće dovodi do smanjena varijance, ali čak i tad ne možemo biti sigurni koliko će to smanjenje biti. Općenito govoreći ova metoda je dobra za smanjenje varijance, ako ne postoji neki razlog zašto se ne bi trebala koristiti.

2. *Kontrola varijabi*[5]
Neka je procjena od $\mu = E[W_i] = E[f(z_i)]$ dana sa $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i$ i pretpostavimo da znamo $\tilde{\mu} = E[\tilde{W}_i] = E[g(z_i)]$. Osnovna ideja ove metode je

[5]Metod preuzeta iz [1]

zamijeniti procjenu nepoznatog očekivanja sa procjenom razlike između nepoznate veličine i poznatog očekivanja. Dakle kako bismo smanjili grešku

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i - \mu$$

koristimo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i - \beta(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i - \tilde{\mu}) \tag{13}$$

u skladu s idejom ove metode. Označimo sada $\bar{Y} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i$ i $\bar{X} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{W}_i$, to jest $Y_i = W_i$ i $X_i = \tilde{W}_i$. Naš problem postaje

$$\bar{Y}(\beta) = \bar{Y} - \beta(\bar{X} - E[X]) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \beta(X_i - E[X]))$$

ili po komponentama

$$Y_i(\beta) = Y_i - \beta(X_i - E[X]). \tag{14}$$

Ovo je procjenitelj kontrole varijable. Uočena greška $\bar{X} - E[X]$ služi kao kontrola u procjeni $E[Y]$. Zbog

$$E[\bar{Y}(\beta)] = E[\bar{Y} - \beta(\bar{X} - E[X])] = E[\bar{Y}] = \mu$$

slijedi da je $\bar{Y}(\beta)$ nepristrani procjenitelj za μ.
Vrijedi da je

$$\begin{aligned} Var[Y_i(\beta)] &= Var[Y_i - \beta(X_i - E[X])] \\ &= \sigma_Y^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \beta^2\sigma_X^2 =: \sigma^2(\beta), \end{aligned}$$

gdje je $\sigma_X^2 = Var[X]$, $\sigma_Y^2 = Var[Y]$ i ρ_{XY} koeficijent korelacije između X i Y. Dakle sada koristeći raspis (14) slijedi da je varijanca procjenitelja kontrole varijable $\bar{Y}(\beta)$:

$$\begin{aligned} Var[\bar{Y}(\beta)] = Var\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i(\beta)\right] &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(Y_i(\beta)) \\ &= \frac{1}{N}Var(Y_i(\beta)) \\ &= \frac{\sigma^2(\beta)}{N}. \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa vidimo da $\bar{Y}$ (koji odgovara slučaju kada je $\beta = 0$) ima varijancu σ_Y^2/N. Zato procjenitelj kontrole varijable ima manju varijancu od običnog procjenitelja ako vrijedi:

$$Var[\bar{Y}(\beta)] < Var[\bar{Y}] \iff \frac{\sigma^2(\beta)}{N} < \frac{\sigma_Y^2}{N},$$

a po tome kako je definirano $\sigma^2(\beta)$ to vrijedi ako i samo ako je $\beta^2\sigma_X < 2\beta\sigma_Y\rho_{XY}$. Slijedi da je oprimalni parametar β^* (u smislu da zadovoljava spomenutu nejednakost i daje najmanju vrijednost varijance) dan sa

$$\beta^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}.$$

Tada je

$$Var[Y_i(\beta)] = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2).$$

To nam govori da uspješnost ove metode ovisi o jačini korelacije između Y i X (predznak korelacije je nebitan jer ga apsorbira β^*). U praksi se pokazalo da je potreban vrlo visok stupanj korelacije kako bi upotreba ove metode bila opravdana.

3. *Metoda izjednačavanja momenata*[6]
Označimo ponovo sa $z_i, i = 1, ..., N$ nezavisne standardne normalne slučajne vektore koje koristimo u simulaciji. Uzorački momenti neće točno odgovarati momentima standardne normalne razdiobe. Ideja ove metode je da tranformiramo z_i kako bi konačan broj momenata bio jednak momentima promatrane populacije.

Definicija 2.2. *Za $r \in \mathbb{N}$ sa $M_r = E[X^r]$ definiramo r-ti moment slučajne varijable X ukoliko očekivanje postoji.*

Na primjer transformacija potrebna za izjednačavanje prvog momenta je:

$$\tilde{z}_i = (z_i - \tilde{z}) + \mu_z,\ i = 1, ..., N$$

gdje je $\tilde{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$ uzoračka sredina od z_i, a μ_z je stvarno (egzaktno) očekivanje. Vrijedi:

$$E[\tilde{z}_i] = E[z_i] - \frac{1}{N}(NE[z_i])] + \mu_z = \mu_z.$$

[6]Metoda preuzeta iz[1]

Može se naći i transformacija koja osigurava izjednačavanje drugog, trećeg i viših momenata, ali pronalaženje tih transformacija zna biti vrlo zahtjevno i sporo. Jedan nedostatak ove metode je da uvođenje ovih transformacija uzorka dovodi do stvaranja ovisnosti među uzorcima što znači da nećemo moći koristiti neke alate koje zahtjevaju nezavisnost uzoraka.

4. *Uzorkovanje po važnosti*
   Još jedna važna tehnika smanjenja varijance. U sljedećem odjeljku dajemo detaljan opis računanja VaR-a parcijalnom Monte-Carlo simulacijom sa metodom važnosti uzorka.

Antitetička metoda i *Kontrola varijabli* su tehnike koje se najviše upotrebljavaju u praksi prvenstveno zbog jednostavnosti njihove implementacije. Ipak, ovisno o problemu, njihova učinkovitost nije uvijek zadovoljavajuća. Zato se ponekad odlučujemo za snažnije metode poput *Uzorkovanja po važnosti* koja je učinkovitija, ali zahtjeva veći napor pri implementaciji. Također, pogrešna implementacija može dovesti do povećanja varijance što je suprotno onomu što želimo postići.

2.3.2 Parcijalna Monte-Carlo simulacija sa metodom uzorkovanja po važnosti

Prije nego što uđemo u detalje parcijalne Monte-Carlo simulacija sa metodom uzorkovanja po važnosti, uočimo da pomoću aproksimacije (1) za ΔV možemo $L = -\Delta V$ zapisati kao $L = -\Delta^T X - \frac{1}{2} X^T \Gamma X$. Koristeći sličan postupak kao u potpoglavlju 2.1.4 dobivamo da se L može zapisati kao:

$$L = \delta^T Z + Z^T \Lambda Z = \sum_{i=1}^{n} \delta_i Z_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i^2. \tag{15}$$

To smo dobili tako da smo odabrali matricu A tako da vrijedi $AA^T = \Sigma$, zatim smo odabrali ortogonalnu matricu Q čiji su stupci svojstveni vektori od $-\frac{1}{2} A^T \Gamma A$. Svojstvene vrijednosti smo iskoristili za konstrukciju dijagonalne matrice Λ koja na dijagonali sadrži svojstvene vrijednosti od $-\frac{1}{2} A^T \Gamma A$. Za $Z = Q^T A^{-1} X$ vrijedi $Z \sim N(0, I)$, a sa δ^T smo označili $\delta^T = -\Delta^T A Q$.[7]
Prvi cilj nam je izračunati funkciju izvodnicu momenta za L koja će nam koristiti u daljnjem računu.

[7] Za cijeli raspis pogledati [10]

Definicija 2.3. *Neka je X diskretna ili neprekidna slučajna varijabla. Funkcija izvodnica momenta slučajne varijable X je funkcija $M_X(t)$ definirana sa*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

za sve realne brojeve t za koje gornje očekivanje postoji, tj. za koje vrijedi $E[e^{tX}] < \infty$.

Kako je u (15) $Z_i \sim N(0,1)$, slijedi[8] da je $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$. To znači da (15) možemo zapisati kao:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \delta_i Z_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{Z}_i, \ gdje\ je\ Z_i \sim N(0,1)\ i\ \tilde{Z}_i \sim \chi^2(1).$$

$\tilde{Z}_i$ očito nisu nezavisni od Z_i jer za svaki i vrijedi $\tilde{Z}_i = Z_i^2$. Sada ćemo zapisati L tako da svaki član bude nezavisan od svakog drugog člana. Z_i je nezavisan od svakog drugog člana u L ako je odgovarajuća svojstvena vrijednost λ_i jednaka 0.
Definiramo $J := \{j = 1, .., n \mid \lambda_j \neq 0\}$ i zapišemo L kao:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i \notin J} \delta_i Z_i + \sum_{j \in J} \delta_j Z_j + \sum_{j \in J} \lambda_j Z_j^2 \\ &= \sum_{i \notin J} \delta_i Z_i + \sum_{j \in J} \left[\delta_j Z_j + \lambda_j Z_j^2 \right] \\ &= \sum_{i \notin J} \delta_i Z_i + \sum_{j \in J} \lambda_j (\frac{\delta_j}{2\lambda_j} + Z_j)^2 - \sum_{j \in J} \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j} \end{aligned}$$

Uvodimo sljedeće oznake: $u_0 := \sum_{j \notin J} \delta_j Z_j$, $u_j := (\frac{\delta_j}{2\lambda_j} + Z_j)^2$. Kako je $Z_j \sim N(0,1)$ i kako je u_0 linearna kombinacija tih standardnih normalnih varijabli, slijedi da je $u_0 \sim N(0, \sum_{j \notin J} \delta_j^2)$. Isto tako zbog $Z_j \sim N(0,1)$ slijedi da je $Z_j + \frac{\delta_j}{2\lambda_j} \sim N(\frac{\delta_j}{2\lambda_j}, 1)$. Kako je kvadrat standardne normalne slučajne varijable zapravo χ^2 slučajna varijabla slijedi:

$$u_j = \left(Z_j + \frac{\delta_j}{2\lambda_j} \right)^2 \sim \chi^2 \left(1, \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j^2} \right).$$

[8] Općenito, dokaz da je suma kvadrata standardnih normalnih varijabli zapravo χ^2 slučajna varijabla može se naći u [3]

Odredimo sada funkciju izvodnicu momenta za neku normalnu slučajnu varijablu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} M_X(t) = E[e^{tX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \\ &= \Big[supstitucija: \ x = z\sigma + \mu \Big] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma + t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2\sigma^2}{\sigma^2}} \sigma dz = \cdot \\ &= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

To nam pomaže u daljnjem rješavanju problema. Kao što smo već naveli, ako je Z standardna normalna slučajna varijabla, onda vrijedi $(Z+a) \sim N(a, 1)$ i zatim $(Z+a)^2 \sim \chi^2(1, a^2)$. Želimo odrediti funkciju izvodnicu momenta za $(Z+a)^2$.

$$\begin{aligned} M_{(Z+a)^2}(t) = E[e^{tX^2}]_{X \sim N(a,1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big\{ tx^2 - \frac{1}{2}(x-a)^2 \Big\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big\{ (t - \frac{1}{2})x^2 + ax - \frac{1}{2}a^2 \Big\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ e^{-\left[\frac{1}{2}(1-2t)\right]x^2} e^{-2\left[-\frac{1}{2}a\right]x} \Big\} dx \end{aligned}$$

Sada korištenjem poznatog integrala $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}$ dobivamo da je funkcija izvodnica momenta za $(Z+a)^2$ dana sa:

$$M_{(Z+a)^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}(1-2t)}} e^{-\frac{1}{2}a^2} e^{\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}(1-2t)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} exp\Big\{ \frac{a^2 t}{1-2t} \Big\}.$$

U raspisu za L vidjeli smo da varijable u_j imaju distribuciju $\chi^2\left(1, \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j^2}\right)$ što odgovara distribuciji ovdje navedene varijable $(Z+a)^2$. Zato je funkcija izvodnica momenta za u_j dana sa:

$$M_{u_j}(t) = M_{\left(Z_j + \frac{\delta_j}{2\lambda_j}\right)^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} exp\Big\{ \frac{t}{1-2t} \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j^2} \Big\}.$$

Vidjeli smo da je $u_0 \sim N(0, \sum_{j \notin J} \delta_j^2)$. Zato je

$$M_{u_0}(t) = exp\left(\frac{1}{2}t^2 \sum_{j \notin J} \delta_j^2\right).$$

Kako bismo odredili funkciju izvodnicu momenta za L trebat će nam još dvije propozicije.

Propozicija 2.4. *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable sa funkcijama izvodnicama momenata redom $M_X(t)$ i $M_Y(t)$. Tada je funkcija izvodnica momenta njihovog zbroja dana sa $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz definicije funkcije izvodnice momenta i iz činjenice da je očekivanje umnoška dvije nezavisne varijable jednako umnošku očekivanja tih dviju varijabli.

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}e^{tY}] = E[e^{tX}]E[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t)$$

□

Propozicija 2.5. *Za slučajnu varijablu X koja ima funkciju izvodnicu momenta $M_X(t)$ i za $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ vrijedi $M_{aX+b}(t) = e^{tb}M_X(at)$.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz definicije funkcije izvodnice momenta.

$$M_{aX+b}(t) = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{(ta)X}e^{tb}] = e^{tb}E[e^{(ta)X}] = e^{tb}M_X(at).$$

□

Kako smo L zapisali kao

$$L = u_0 + \sum_{j \in J} \lambda_j u_j - \sum_{j \in J} \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j},$$

korištenjem spomenutih propozicija odmah slijedi:

$$\begin{aligned} M_L(t) &= exp\left\{ -t \sum_{j \in J} \frac{\delta_j^2}{4\lambda_j} \right\} M_{u_0}(t) \prod_{j \in J} M_{u_j}(\lambda_j t) \\ &= \prod_{j \in J} exp\left\{ -t\frac{\delta_j^2}{4\lambda_j} \right\} M_{u_0}(t) \prod_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}} exp\left\{ \frac{\frac{1}{4}\delta_j^2 t}{(1-2\lambda_j t)\lambda_j} \right\} \\ &= M_{u_0}(t) \prod_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}} exp\left\{ \frac{1}{2}\delta_j^2 \frac{t^2}{1-2\lambda_j t} \right\}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za $M_{u_0}(t)$ dobijemo:

$$M_L(t) = exp\left(\frac{1}{2}t^2 \sum_{i \notin J} \delta_i^2\right) \prod_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}} exp\left\{\frac{1}{2}\delta_j^2 \frac{t^2}{1-2\lambda_j t}\right\}. \tag{16}$$

Ako uočimo da vrijedi $\lambda_i = 0$ za svaki $i \notin J$, prvu eksponencijalnu funkciju možemo napisati kao:

$$exp\left(\frac{1}{2}t^2 \sum_{i \notin J} \delta_i^2\right) = \prod_{i \notin J} exp(\frac{1}{2}t^2\delta_i^2) = \prod_{i \notin J} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_i t}} exp\left\{\frac{1}{2}\delta_i^2 \frac{t^2}{1-2\lambda_i t}\right\}.$$

Uvrštavanjem u (16) funkciju izvodnicu momenta za L možemo napisati za svaki indeks $j = 1, ..., n$:

$$M_L(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}} exp\{\frac{1}{2}\delta_j^2 t^2/(1-2\lambda_j t)\}.$$

Sada kada imamo funkciju izvodnicu momenta za L želimo odrediti funkciju izvodnicu kumulanata za L.

Definicija 2.6. *Neka je X diskretna ili neprekidna slučajna varijabla. Funkcija izvodnica kumulanata slučajne varijable X definirana je sa*

$$\kappa_X(t) = ln(M_X(t))$$

za one $t \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija izvodnica momenta $M_X(t)$ definirana.

Funkcija izvodnica kumulanata za L je:

$$\begin{aligned}
\kappa_L(t) = ln(M_L(t)) &= ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}} exp\{\frac{1}{2}\delta_j^2 t^2/(1-2\lambda_j t)\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ln(\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_j t}}) + \frac{\frac{1}{2}t^2\delta_j^2}{1-2\lambda_j t}\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{(t\delta_j)^2}{1-2\lambda_j t} - ln(1-2\lambda_j t)\right\}.
\end{aligned}$$

Osnovna ideja kod *Metode uzorkovanja po važnosti* je da određene slučajne varijable u simulaciji imaju veći utjecaj na parametre koji se procjenjuju. Nastoji se smanjiti statistička nesigurnost Monte-Carlo metode koncentriranjem na te „važnije" vrijednosti i njihovim češćim simuliranjem.

To se može postići promjenom distribucije iz koje dolazi naš generirani uzorak u neku drugu distribuciju koristeći primjereni vjerojatnosni omjer. Jedan od osnovnih pristupa u parcijalnoj Monte-Carlo metodi je da umjesto uzimanja uzorka faktora rizika X_i uzmemo vektor Z standardnih normalnih slučajnih varijabli. Uočimo da smo zbog raspisa (15) gdje je $X = AQZ$ problem uzimanja uzorka faktora rizika X_i upravo sveli na uzimanje vektora Z standardnih normalnih slučajnih varijabli.
U metodi *uzorkovanja po važnosti* promijenit ćemo distribuciju (iz koje simuliramo Z) iz $N(0, I)$ (standardne multivarijantne normalne) u $N(\mu, \Sigma)$ (multivarijantnu normalnu sa vektorom očekivanja μ i matricom kovarijacije Σ). To radimo kako bismo se koncentrirali na generiranje iz „važnijeg" područja. Ključni izraz za to je

$$\begin{aligned} P(L > l) = E[I(L > l)] &= \int \mathbb{1}_{\{L>l\}} f(z)dz \\ &= \int \mathbb{1}_{\{L>l\}} \frac{f(z)}{g(z)} g(z)dz = E_{\mu,\Sigma}[\theta(Z)I(L > l)] \end{aligned} \tag{17}$$

gdje je $f(z)$ multivarijantna funkcija gustoće od $N(0, I)$ izračunata u z, $g(z)$ je multivarijantna funkcija gustoće od $N(\mu, \Sigma)$ izračunata u z, a $\theta(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ je vjerojatnosni omjer. Pritom smo sa $I(L > l)$ označili funkciju:

$$I(L > l) = \mathbb{1}_{\{L>l\}} = \begin{cases} 1 & , ako\ je\ L > l \\ 0 & , ako\ je\ L \leq l \end{cases}.$$

Sljedeći korak je odabir μ i Σ tako da Monte-Carlo procjenitelj ima minimalnu varijancu. Zbog (17) možemo generirati Z iz bilo koje distribucije $N(\mu, \Sigma)$ i dobiti nepristrani procjenitelj $\theta(Z)I(L > l)$ za vjerojatnost gubitka. Kako izabrati μ i Σ tako da dobijemo procjenitelj sa manjom varijancom (i samim time većom preciznošću)? Kako promjena μ i Σ ne uzrokuje promjene očekivanja, usporedba varijanci je ekvivalentna usporedbi drugih momenata zato što varijancu možemo zapisati kao

$$Var_{\mu,\Sigma}[\theta(Z)I(L > l)] = E_{\mu,\Sigma}[(\theta(Z)I(L > l))^2] - (E_{\mu,\Sigma}[\theta(Z)I(L > l)])^2.$$

Uočimo da je drugi moment od $\theta(Z)I(L > l)$ jednak:

$$\begin{aligned} E_{\mu,\Sigma}[(\theta(Z)I(L > l))^2] &= \int \theta^2(z)\mathbb{1}_{\{L>l\}} g(z)dz \\ &= \int \theta(z)\mathbb{1}_{\{L>l\}} f(z)dz = E[\theta(Z)I(L > l)]. \end{aligned}$$

Zato smanjenje varijance podrazumijeva da vjerojatnosni omjer bude malen kada $L > l$. Također, želimo izabrati μ i Σ tako da $L > l$ bude vjerojatnije kod $N(\mu, \Sigma)$, nego kod $N(0, I)$.
Koristeći Delta-Gama aproksimaciju $L = \sum_i \delta_i Z_i + \sum_i \lambda_i Z_i^2$ možemo odrediti u kojim slučajevima su gubitci veliki i iskoristiti tu informaciju za odabir μ i Σ. Pitamo se koje vrijednosti od Z će učiniti aproksimirani gubitak najvećim. To će se dogoditi za:

- velike pozitivne Z_i kada je $\delta_i > 0$
- velike negativne Z_i kada je $\delta_i < 0$
- velike Z_i^2 kada je $\lambda_i > 0$.

To opisuje „važne" dijelove koje trebaju dobiti veću vjerojatnost u novoj distribuciji (u odnosu na staru). Sugerira nam da trebamo povećati očekivanje od Z_i kada je $\delta_i > 0$, smanjiti očekivanje od Z_i kada je $\delta_i < 0$ i povećati varijancu od Z_i kada je $\lambda_i > 0$ te možda smanjiti varijancu od Z_i kada je $\lambda_i < 0$. To radimo tako da odabir μ i Σ svedemo na odabir parametra $\omega > 0$ i onda odredimo taj parametar.

$$\Sigma(\omega) = (I - 2\omega\Lambda)^{-1} \quad , \quad \mu(\omega) = \omega\Sigma(\omega)\delta$$

S tim parametrima Z više ne simuliramo iz $N(0, I)$, nego iz $N(\mu(\omega), \Sigma(\omega))$. Dakle, sada je Z_i normalna slučajna varijabla sa očekivanjem i varijancom:

$$\mu_i(\omega) = \frac{\omega\delta_i}{1 - 2\omega\lambda_i} \quad , \quad \sigma_i^2(\omega) = \frac{1}{1 - 2\omega\lambda_i}.$$

Uočimo da smo time ostvarili da imamo Z_i kakve i trebamo. Na primjer ako je $\lambda_i > 0$ onda se varijanca od Z_i poveća što smo i htjeli.
Nakon ove promjene distribucije iz koje simuliramo, vjerojatnosni omjer $\theta(Z)$ može se zapisati[9] kao:

$$\theta(Z) = e^{-\omega L + \kappa_L(\omega)}. \tag{18}$$

Iz zapisa (18) sada slijedi da je naš traženi nepristrani procjenitelj za vjerojatnost gubitka:

$$e^{-\omega L + \kappa_L(\omega)} I(L > l).$$

Također, može se pokazati da vrijedi sljedeće[10]:

$$\frac{d}{d\omega}\kappa_L(\omega) = E_{\mu(\omega),\Sigma(\omega)}[L]. \tag{19}$$

[9] Za detalje vidjeti [8]
[10] Vidjeti [10]

Dakle gornja jednadžba (19) nam kaže da prva derivacija od funkcije izvodnice kumulanata κ_L po ω daje očekivani gubitak kada Z simuliramo iz $N(\mu(\omega), \Sigma(\omega))$. Kako mi nastojimo procijeniti $P(L > l)$ onda ćemo ω odabrati tako da bude rješenje jednadžbe

$$\frac{d}{d\omega}\kappa_L(\omega) = E_{\mu(\omega),\Sigma(\omega)}[L] = l. \tag{20}$$

Sada smo dobili upravo ono što smo i htjeli: u slučajevima kada je $L > l$ vrijedi da je vjerojatnosni omjer $\theta(Z)$ malen. Odabirom ω tako da vrijedi (20) osigurali smo da kada simuliramo Z iz $N(\mu(\omega), \Sigma(\omega))$ da će slučajevi kada je $L > l$, koji su prije bili rijetki, sada biti „tipični" jer je očekivana vrijednost gubitka L upravo l.
Dakle, nakon što odredimo $N(\mu(\omega), \Sigma(\omega))$, možemo koristiti istu proceduru kao kod obične parcijalne Monte-Carlo metode navedene na početku potpoglavlja 2.3.1. Jedina razlika je da se broj scenarija u kojima gubitci prelaze referentni gubitak l računa kao: $N^{-1}\sum_{i=1}^{N}[e^{-\omega L_i+\kappa_L(\omega)}I(L_i > l)]$.

3 Primjena copula u računanju rizičnosti vrijednosti

3.1 Copule

Promatrimo jedan primjer vezan uz rizičnost vrijednosti. Neka je $\mathrm{VaR}_\alpha(X_i)$, $i = 1, 2$ dnevni $100\alpha\%$ VaR za portfelj sa financijskom imovinom X_i, $i = 1, 2$ te pretpostavimo da je on procijenjen nekim modelom banke. Problem nastaje kada banka treba odrediti VaR za zajedničku poziciju $X_1 + X_2$, odnosno $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$ jer je poznato da VaR nije aditivan, tj. općenito ne vrijedi $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$. Kako je $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$ zapravo α-kvantil od funkcije distribucije gubitka portfelja sa imovinama X_1 i X_2, problem bi bio jednostavan kada bismo znali zajedničku distribuciju od X_1 i X_2. U praki nažalost najčešće nema dovoljno informaciji o zavisnosti između faktora rizika, tj. zajednička distribucija od X_1 i X_2 je nepoznata. Većina VaR metoda pretpostavlja multivarijantnu normalnu distribuciju faktora rizika pa je zato zavisnost između različitih faktora rizika određena korelacijom između tih faktora. Ipak, u [6] se pokazalo da taj koncept korelacije između različitih faktora ima nekoliko značajnih mana. Zato je preporučena upotreba teorije copula kako bi se opisala zavisnost. Copule mogu služiti za opisivanje zavisnosti između dvije ili više varijabli sa nekim proizvoljnim distribucijama. Omogućuju nam definiranje zajedničke distribucije pomoću marginalnih distribucija i zavisnosti između varijabli. Također, teorija copula nam omogućuje da rastavimo n-dimenzionalnu zajedničku distribuciju na n marginalnih distribucija i funkciju copule.

Za početak promotrimo situaciju u kojoj su nam dane dvije slučajne varijable X i Y sa funkcijama distribucije redom $F(x) = P(X \leq x)$ i $G(y) = P(Y \leq y)$ te zajedničkom funkcijom distribucije $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Za svaki par realnih brojeva (x, y) možemo odrediti tri broja: $F(x), G(y), H(x, y)$. Uočimo da svaki od tih brojeva leži u intervalu $[0, 1]$. Drugim riječima, svaki par realnih brojeva (x, y) vodi do točke $(F(x), G(x))$ u jediničnom kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$, a taj uređeni par vodi broju $H(x, y)$ u $[0, 1]$. Ta veza koja vrijednosti zajedničke funkcije distribucije pridružuje uređenom paru vrijednosti individualnih funkcija distribucije je zapravo funkcija i to funkcija koju zovemo copula.

Ovdje nećemo promatrati općenite, n-dimenzionalne copule, već ćemo se koncentrirati na dvodimenzionalne copule.

Definicija 3.1. *Dvodimenzionalna copula je funkcija* $C : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *sa sljedećim svojstvima*

1. *Za svako* $u \in [0,1]$ *vrijedi:*

$$C(0,u) = C(u,0) = 0.$$

2. *Za svako* $u \in [0,1]$ *vrijedi:*

$$C(u,1) = u \quad i \quad C(1,u) = u.$$

3. *Za svaki uređeni par* $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in [0,1] \times [0,1]$ *tako da je* $u_1 \leq v_1$ *i* $u_2 \leq v_2$ *vrijedi:*

$$C(v_1,v_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,u_2) \geq 0.$$

3.1.1 Sklarov teorem

Teorem u naslovu ovog potpoglavlja je centralni teorem u teoriji copula i osnova je gotovo svih primjena te teorije u statistici. Prije iskaza samog teorema navodimo neke potrebne definicije.

Definicija 3.2. *Funkcija distribucije slučajne varijable* X *je funkcija* F *koja svakom* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *pridružuje vjerojatnost* $F(x) = P(X \leq x)$.

Pritom smo u gornjoj definiciji sa $\overline{\mathbb{R}}$ označili $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ i vrijedi $F(-\infty) = 0$ *i* $F(+\infty) = 1$.

Definicija 3.3. *Zajednička funkcija distribucije slučajnih varijabli* X *i* Y *(ili funkcija distribucije slučajnog vektora* (X,Y)*) je funkcija* H *koja svim* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *pridružuje vjerojatnost* $H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. *Pritom vrijedi* $H(x,-\infty) = H(-\infty,y) = 0$ *i* $H(+\infty,+\infty) = 1$.

Teorem 3.4. *(Sklarov teorem) Neka je* H *zajednička funkcija distribucije sa marginalnim funkcijama distribucije* F_1 *i* F_2. *Tada postoji copula* C *tako da vrijedi:*

$$H(x_1,x_2) = C(F_1(x_1),F_2(x_2)), \text{ za sve } x_1,x_2 \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{21}$$

Ako su funkcije F_1 *i* F_2 *neprekidne, onda je* C *jedinstvena. Inače je* C *jedinstveno definirana na* $Ran(F_1) \times Ran(F_2)$ *gdje smo sa* $Ran()$ *označili sliku funkcije. Obrnuto, ako je* C *copula i* F_1 *i* F_2 *su funkcije distribucije, onda je funcija* H *definirana sa (21) zajednička funkcija distribucije sa marginalnim funkcijama distribucije* F_1 *i* F_2.

Dokaz. Vidjeti [17] □

U [17] se pokazuje da su marginalne funkcije F_1 i F_2 od H iz gornjeg teorema definirane kao

$$F_1(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} H(x_1, +\infty) \quad i \quad F_2(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} H(+\infty, x_2).$$

Američki matematičar Abe Sklar prvi je iskoristio naziv „*copula*" koji u prijevodu iz latinskog znači *povezati*. Kroz Sklarov teorem taj naziv dobiva smisao jer teorem opisuje funkciju koja povezuje multidimenzionalnu distribuciju sa svojim jednodimenzionalnim marginalnim distribucijama.
Ako promatramo određene slučajne varijable X_1 i X_2 sa funkcijama distribucije redom F_1 i F_2 te zajedničkom funkcijom distribucije H onda jednadžbu (21) iz Sklarovog teorem možemo napisati na sljedeći način:

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2). \tag{22}$$

3.1.2 Primjeri copula

U nastavku navodimo nekoliko primjera poznatih copula[11].

1. **Produktna copula**
   Produktna copula dana je funkcijom

   $$\Pi(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} uv.$$

   Važnost ove copule proizlazi iz opisa nezavisnih slučajnih varijabli. O tome govori sljedeći teorem.

   Teorem 3.5. *Neka su X i Y slučajne varijable sa neprekidnim funkcijama distribucije redom F i G te zajedničkom funkcijom distribucije H. Iz Sklarovog teorema znamo da postoji jedinstvena copula C_{XY} tako da vrijedi*

   $$P(X \leq x, Y \leq y) = H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)).$$

   Tada su X i Y nezavisne slučajne varijable ako i samo ako vrijedi $C_{XY} = \Pi$.

   Dokaz. Vidjeti [17] □

[11] Primjeri copula preuzeti su iz [18]

2. **Granične copule**
   Copula definirana sa $M(u,v) \overset{\text{def}}{=} min(u,v)$ naziva se *Fréchet-Hoeffdingova gornja granica*, a copula definirana sa $W(u,v) \overset{\text{def}}{=} max(u+v-1,0)$ naziva se *Fréchet-Hoeffdingova donja granica*. Može se pokazati da za svaku copulu C vrijedi

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v), \ za\ sve\ u,v \in [0,1].$$

3. **Gumbel-Hougaardova copula**
   Gumbel-Hougaardova copula dana je funkcijom

$$C_\theta(u,v) \overset{\text{def}}{=} exp\big\{ -[(-ln\ u)^\theta + (-ln\ v)^\theta]^{1/\theta}\big\},$$

   gdje parametar θ može poprimiti sve vrijednosti iz $[1,+\infty\rangle$. Ako za parametar θ uzmemo $\theta = 1$ gornja copula reducira se do Produktne copule, tj. $C_1(u,v) = \Pi(u,v) = uv$. Također, može se pokazati da kada $\theta \longrightarrow +\infty$ onda Gumberl-Hougaardova copula konvergira prema Fréchet-Hoeffdingovoj gornjoj granici,tj.

$$C_\theta(u,v) \overset{\theta \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} min(u,v) = M(u,v).$$

4. **Frankova copula**
   Još jedna važna copula zove se Frankova copula, a dana je izrazom:

$$C_\theta(u,v) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{1}{\theta} ln\big[1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\big] & ,\theta \in \langle -\infty, +\infty\rangle \\ uv & ,\theta = 0 \end{cases}$$

   Iz definicije copule je jasno da u slučaju da je parametar θ jednak 0, tj. $\theta = 0$, Frankova copula reducira se do Produktne copule. Također, za Frankovu copulu vrijedi:

$$C_\theta(u,v) \overset{\theta \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} M(u,v)$$

   i još:

$$C_\theta(u,v) \overset{\theta \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} W(u,v).$$

3.2 Računanje rizičnosti vrijednosti primjenom copula

U ovom potpoglavlju navodimo postupak računanja rizičnosti vrijednosti portfelja pomoću copula (opet se koncentriramo samo na dvodimenzionalni slučaj), a u sljedećem poglavlju navodimo implementaciju tog postupka u matematičkom softveru R. Taj postupak zahtijeva nekoliko koraka. Prvi korak je odabir marginalnih distribucija - mi ćemo se zbog jednostavnosti koncentrirati na normalnu distribuciju. Sljedeći korak je odabir copule. Ne postoje neka posebna pravila za odabir copule, već taj odabir ovisi o svojstvima podataka kojima raspolažemo. Nakon odabira copule nastojimo „podesiti" copulu vremenskom nizu:

$$s = s^{(1)}, ..., s^{(T)} \ gdje \ je \ s^{(t)} = (s_1^{(t)}, s_2^{(t)}) \ za \ t \in \{1, 2, ..., T\}.$$

Zbog jednostavnosti pretpostavljamo da su $s^{(t)}$ realizacije nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $S^{(t)}$. Procjena parametara copule može se napraviti na mnogo načina, a mi ćemo se koncentrirati na metodu podešavanja najmanjim kvadratom[12]. Ideja ove metode je da funkcija distribucije $F_\theta^{(C)}(x)$ određena copulom C (pa onda i parametrom copule θ) treba što više odgovarati funkciji distribucije $S(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbb{1}_{\{s_1^{(t)} \leq x_1, s_2^{(t)} \leq x_2\}}$. Procjenitelji parametara copule dobiju se kao rješenje problema minimizacije:

$$\min_\theta \sum_{t=1}^{T} \left(F_\theta^{(C)}(s^{(t)}) - S(s^{(t)}) + \frac{1}{2T} \right)^2$$

korištenjem Newtonove metode. U [11] se objašnjava da dodavanje izraza $\frac{1}{2T}$ rješava probleme koji proizlaze iz mogućih $\frac{1}{T}$ skokova u uzorku.
Pretpostavimo sada da je copula C odabrana. Želimo odrediti VaR za neki portfelj. Za to trebamo generirati parove slučajnih varijabli (X_1, X_2) sa marginalnim distribucijama Φ_1, Φ_2 (ovdje su Φ_1 i Φ_2 normalne funckije distribucije jer smo se odlučili koncentrirati na takve marginalne distribucije) i čija je zajednička distribucija definirana copulom C. Ti parovi oblikuju scenarije mogućih promjena faktora rizika. Zatim ćemo Monte-Carlo metodom generirati N takvih scenarija. Tada je α-kvantil uzorka traženi VaR sa razinom pouzdanosti α.

Kako bismo generirali gore navedene parove slučajnih varijabli pratimo sljedeći postupak: prvo trebamo generirati parove (u, v) opservacija slučajnih varijabli U i V koje imaju uniformnu distribuciju $U(0, 1)$ i čija je zajednička funkcija distribucije $C(u, v)$. Definiramo funkciju c_u na sljedeći način:
$c_u(v) \stackrel{\text{def}}{=} P(V \leq v, U = u)$.

[12] Vidjeti [11]

U [7] se pomoću višedimenzionalnih copula pokazuje da vrijedi:

$$c_u(v) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} C_u(v). \qquad (23)$$

Zbog sljedećeg teorema znamo da $c_u(v)$ postoji i neopadajuća je za skoro sve $v \in [0, 1]$.

Teorem 3.6. *Neka je C copula. Za svako $u \in [0, 1]$ parcijalna derivacija $\frac{\partial C}{\partial v}$ postoji za skoro svako $v \in [0, 1]$. Za takve u i v vrijedi:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1.$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za parcijalnu derivaciju od C po u.
Također, funkcije $u \to C_v(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ i $v \to C_u(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ postoje i neopadajuće su skoro svugdje na $[0, 1]$.

Dokaz. Vidjeti [17] □

Zbog jednostavnosti ćemo nadalje pretpostaviti da c_u postoji i strogo je rastuća za sve $v \in [0, 1]$.

Sada kada znamo (23) radimo sljedeće korake:

- Generiramo dva nezavisna broja $u, w \in [0, 1]$ (ovaj u je prvi broj iz gore spomenutog para (u, v))
- Izračunamo inverz od funkcije c_u (pretpostavili smo da je c_u strogo rastuća na $[0, 1]$ pa znamo da inverz postoji). Nakon toga treba staviti $v = c_u^{-1}(w)$ kako bi se dobio v iz para (u, v)
- Na kraju, kada znamo u i v, odredimo $x_1 = \Phi_1^{-1}(u)$ i $x_2 = \Phi_2^{-1}(v)$ kako bismo dobili jedan traženi par (x_1, x_2). Pritom smo sa Φ_1 i Φ_2 označili marginalne normalne funkcije distribucije.

Gornji postupak ponovimo N puta kako bismo dobili Monte Carlo uzorak $(x^{(1)}, x^{(2)})$, gdje su $x^{(1)}$ i $x^{(2)}$ N-torke. Ako sa a_1, a_2 označimo težine pozicija u portfelju tada je promjena u vrijednosti portfelja $\sum_{i=1}^{2} a_i \cdot x_i$. Računanjem kvantila tog izraza dobijemo traženi VaR.

4 Implementacija u matematičkom softveru R

U ovom poglavlju navest ćemo implementaciju postupka[13] računanja rizičnosti vrijednosti primjenom copula u matematičkom softveru R.
Prva funkcija koju navodimo je funkcija **VaRcopula**. Ona računa funkciju copule, njezine derivacije i inverz. Argumenti navedene funkcije su:

- ***uv***; $n \times 2$ matrica
- ***θ***; skalar, parametar copule
- ***mode***; cijeli broj iz skupa $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ***copula***; cijeli broj između 1 i 10-odabire copulu prema tablici 1

Tablica 1

#	$C_\theta(u,v) =$	$\theta \in$
1	$\max\left([u^{-\theta}+v^{-\theta}-1]^{-1/\theta}, 0\right)$	$[-1,\infty)\backslash\{0\}$
2	$\max\left(1-[(1-u)^\theta+(1-v)^\theta-1]^{1/\theta}, 0\right)$	$[1,\infty)$
3	$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$[-1,1)$
4	$\exp\left(-[(-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right)$	$[1,\infty)$
5	$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$	$(-\infty,\infty)\backslash\{0\}$
6	$1-\left[(1-u)^\theta+(1-v)^\theta-(1-u)^\theta(1-v)^\theta)\right]^{1/\theta}$	$[1,\infty)$
7	$\max\left[\theta uv+(1-\theta)(u+v-1), 0\right]$	$(0,1]$
8	$\max\left[\frac{\theta^2uv-(1-u)(1-v)}{\theta^2-(\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right]$	$(0,1]$
9	$uv\exp(-\theta\ln u\ln v)$	$(0,1]$
10	$uv/\left[1+(1-u^\theta)(1-v^\theta)\right]^{1/\theta}$	$(0,1]$

Izvor: Tablica 1 preuzeta iz [11]

Ovisno o tome koji ***mode*** odaberemo, naša funkcija rješava drugačiji problem, tj. vraća različitu vrijednost:

- mode=-1 ; računa $\left(\frac{dC}{du}\right)^{-1}(v)$
- mode=0 ; računa copulu $C_\theta(u,v)$

[13] Pratit ćemo implementaciju postupka i primjere dane u [11]

- mode=1/2/3 ; računa prvu derivaciju copule u odnosu na 1./2./3. parametar (u/v/θ)
- mode=4/5/6 ; računa drugu derivaciju copule u odnosu na 1./2./3. parametar (u/v/θ)
- mode=7 ; daje inicijalnu vrijednost od θ danu u vektoru *thetainit*

Kod:

```
VaRcopula<-function(uv,theta,mode,copula)
{
  if (is.numeric(uv)==FALSE)
    stop("Elementi matrice uv moraju biti brojevi!")
  if (ncol(uv)!=2)
    stop("Matrica uv mora imati dva stupca!")

  uu<-uv[,1]
  vv<-uv[,2]

  fact<-0.0001
  eps<-0.00000000000001

  #copula            1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
  thetainit<-cbind(c(1,1.5,0,1.5,1,1.5,0.5,1.5,0.5,0.5))
  thetamin<-cbind(c(-1,1,-1,1,-Inf,1,0,1,0,0))
  thetamax<-cbind(c(Inf,Inf,1,Inf,Inf,Inf,1,Inf,1,1))
  thetanot<-cbind(c(0,NaN,NaN,NaN,0,NaN,NaN,NaN,NaN,NaN))

  if (mode==0)
  {
    # Moramo provjeriti je li theta koji funkcija primi unutar dozvoljenih
    # granica. Ako nije, malo ga "popravimo".
    if(theta<=(thetamin[copula]+eps)) theta<-(thetamin[copula]+eps)
    if(theta>=(thetamax[copula]-eps)) theta<-(thetamax[copula]-eps)
    else if((is.nan(thetanot[copula])==FALSE) &&
            (abs(theta-thetanot[copula])<fact))
      theta<-thetanot[copula]+sign(theta-thetanot[copula])*fact

    F<-matrix(0,length(uu),1)
    index0<-numeric(0)
    index1<-numeric(0)
    for (i in 1:nrow(uv))
    {
      if (uv[i,1]<=eps || uv[i,2]<=eps)  index0 <- c(index0,i)
      if (!(uv[i,1]<=eps || uv[i,2]<=eps)) index1<- c(index1,i)
    }
```

```
  if (length(index0)!=0) F[index0,1]=0
  if (length(index1)!=0)
  {
    u<-uu[index1]
    v<-vv[index1]
    if (copula==1) {
      F[index1]=((u^(-theta)+v^(-theta)-1)^(-1/theta))
      F[index1]=F[index1]*(F[index1]>0)}
    if (copula==2){
      F[index1]=(1-((1-u)^theta+(1-v)^theta)^(1/theta))
      F[index1]=F[index1]*(F[index1]>0)}
    if(copula==3) F[index1]=u*v/(1-theta*(1-u)*(1-v))
    if(copula==4)
      F[index1]=exp(-((-log(u)) ^ theta +
                        (-log(v)) ^ theta)^ (1 / theta))
    if(copula==5)
      F[index1]=-(1/theta)*log( 1+((exp(-theta*u)-1)*
                                     (exp(-theta*v)-1))/(exp(-theta)-1))
    if(copula==6)
      F[index1]=1-((1-u)^theta+(1-v)^theta-
                     (1-u)^theta*(1-v)^theta)^(1/theta)
    if(copula==7){
      F[index1]=(theta*(u*v)+(1-theta)*(u+v-1))
      F[index1]=F[index1]*(F[index1]>0)}
    if(copula==8){
      F[index1]=((theta^2*(u*v)-(1-u)*(1-v))/
                   (theta^2-(theta-1)^2*((1-u)*(1-v))))
      F[index1]=F[index1]*(F[index1]>0)}
    if(copula==9) F[index1]=u*v*exp(-theta*log(u)*log(v))
    if(copula==10)
      F[index1]=u*v/(1+(1-u^theta)*(1-v^theta))^(1/theta)
  }
}
if(mode==1)
{
  h=uu*fact

  # Kako je uu iz [0,1], vrijedi da je uu-h>=0.
  # Jos moramo provjeriti da je uu+h<=1.

  index<-numeric()
  for (j in 1:length(h))
  {if (uu[j]>1-h[j]) index<-c(index,j)}
  if (!(length(index)==0)) uu[index]=1-h[index]

  F=(VaRcopula(cbind((uu+h),vv),theta,mode-1,copula)-
       VaRcopula(cbind((uu-h),vv),theta,mode-1,copula))/(2*h)
}
```

```
if(mode==2)
{
  h=vv*fact

  # Kako je vv iz [0,1], vrijedi da je vv-h>=0.
  # Jos moramo provjeriti da je vv+h<=1.

  index<-numeric()
  for (j in 1:length(h))
  {if (vv[j]>1-h[j]) index<-c(index,j)}
  if (!(length(index)==0)) vv[index]=1-h[index]

  F=(VaRcopula(cbind(uu,(vv+h)),theta,mode-2,copula)-
       VaRcopula(cbind(uu,(vv-h)),theta,mode-2,copula))/(2*h)
}
if (mode==3)
{
  h<-abs(theta*fact)
  if (h<fact) h<-fact
  F<-(VaRcopula(uv,theta+h,mode-3,copula)-
        VaRcopula(uv,theta-h,mode-3,copula))/(2*h)
}
if(mode==4)
{
  h=uu*fact

  # Kako je uu iz [0,1], vrijedi da je uu-h>=0.
  # Jos moramo provjeriti da je uu+h<=1.

  index<-numeric()
  for (j in 1:length(h))
  {if (uu[j]>1-h[j]) index<-c(index,j)}
  if (!(length(index)==0)) uu[index]=1-h[index]

  F=(VaRcopula(cbind((uu+h),vv),theta,mode-4,copula)-
       2*VaRcopula(cbind(uu,vv),theta,mode-4,copula)+
       VaRcopula(cbind((uu-h),vv),theta,mode-4,copula))/(h^2)
}
if(mode==5)
{
  h=vv*fact

  # Kako je vv iz [0,1], vrijedi da je vv-h>=0.
  # Jos moramo provjeriti da je vv+h<=1.

  index<-numeric()
  for (j in 1:length(h))
  {if (vv[j]>1-h[j]) index<-c(index,j)}
```

```
  if (!(length(index)==0)) vv[index]=1-h[index]

  F=(VaRcopula(cbind(uu,(vv+h)),theta,mode-5,copula)-
       2*VaRcopula(cbind(uu,vv),theta,mode-5,copula)+
       VaRcopula(cbind(uu,(vv-h)),theta,mode-5,copula))/(h^2)
}
if (mode==6)
{
  h<-abs(theta*fact)
  if (h<fact) h<-fact
  F<-(VaRcopula(uv,theta+h,mode-6,copula)-
        2*VaRcopula(uv,theta,mode-6,copula)+
        VaRcopula(uv,theta-h,mode-6,copula))/(h^2)
}
if (mode==7)
{
  F<-thetainit[copula]
}
if(mode==-1)
{
  rhs=vv;
  v0=matrix(0,length(uu),1)
  v1=matrix(1,length(uu),1)
  f0=VaRcopula(cbind(uu,v0),theta,1,copula)-rhs
  f1=VaRcopula(cbind(uu,v1),theta,1,copula)-rhs
  i=1
  while(i<=20)
  {
    v2=(v1+v0)/2;
    f2=VaRcopula(cbind(uu,v2),theta,1,copula)-rhs
    index1<-numeric()
    index2<-numeric()
    for (j in 1:length(f2))
    {
      if (sign(f0[j])==sign(f2[j]))
        index1<-c(index1,j)
    }
    for (j in 1:length(f2))
    {
      if (!(sign(f0[j])==sign(f2[j])))
        index2<-c(index2,j)
    }
    if (!(length(index1)==0))
    {
      v0[index1]=v2[index1]
      f0[index1]=f2[index1]
    }
```

```
      if (!(length(index2)==0))
      {
        v1[index2]=v2[index2]
        f1[index2]=f2[index2]
      }
      i=i+1
    }
    F=v2
  }

  return(F)
}
```

Pritom smo u gornjem kodu kod mode= -1 koristili metodu bisekcije[14]. To je metoda za numeričko rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ gdje je f neprekidna funkcija definirana na intervalu $[a, b]$ te $f(a)$ i $f(b)$ imaju suprotne predznake. Portupak kod metode bisekcije prati sljedeće korake:

· Podjela intervala $[a, b]$ na dva dijela računanjem $c = \frac{a+b}{2}$

· Računanje vrijednosti $f(c)$

· Ako je sign(f(a))≠sign(f(c)), zamijeni interval $[a, b]$ sa intervalom $[a, c]$. Inače zamijeni interval $[a, b]$ sa intervalom $[c, b]$

· Ponovi gornji postupak sa „zamijenjenim" intervalom

Uvjet zaustavljanja može biti npr. određeni broj iteracija ili dodavanje uvjeta poput $|c_i - c_{i-1}| < tol$ gdje je i broj iteracije, a tol je neki unaprijed određeni fiksni broj.

[14]Za više detalja o metodi bisekcije vidjeti:[2]

Primjer: Promotrimo primjer u kojemu računamo Gumbel-Hougaardovu copulu (mode=0,copula=4) za određeni vektor uv i parametar θ.

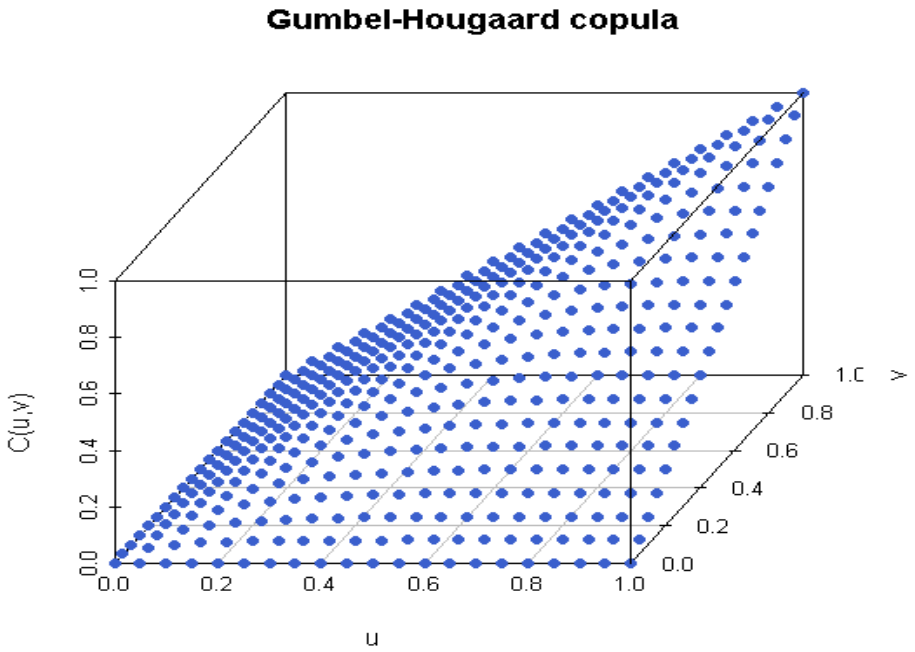
```
theta<-3

uv<-matrix(0,441,2)
uv[,1]<-rep(seq(0,1,0.05),21)
uv_pom <- seq(0,1,0.05)
uv_pom2 <- numeric()
for (i in 1:length(uv_pom)) uv_pom2 <- c(uv_pom2, rep(uv_pom[i],21))
uv[,2] <- uv_pom2

cuv<-VaRcopula(uv,theta,0,4)

install.packages("scatterplot3d")
library("scatterplot3d")
scatterplot3d(uv[,1], uv[,2], cuv,color = "royalblue3",pch=16,main =
              "Gumbel-Hougaard copula", xlab = "u",
          ylab ="v", zlab = "C(u,v)", angle = 60)
```

Dobili smo Gumbel-Hougaardovu copulu koju smo zatim nacrtali pomoću funkcije *scatterplot3d*:



Funkcija **VaRfitcopula** podešava (prilagođava) copulu danim podatcima koristeći metodu podešavanja najmanjim kvadratom. Argumenti ove funkcije su:

- ***history***; $n \times 2$ matrica, podatci
- ***copula***; cijeli broj između 1 i 10-odabire copulu prema tablici 1

Funkcija vraća listu ***res*** koja sadrži procjenu parametra copule i standardne devijacije dvaju marginalnih normalnih distribucija.
Kod:

```
VaRfitcopula<-function(history,copula)
{
  if (is.numeric(history)==FALSE)
    stop("Prvi parametar mora biti numericki.")
  if (ncol(history)!=2) stop("History mora imati 2 stupca")

  res<-matrix(0,3,1)
  sigma<-cov(history)
  sigma1<-sqrt(sigma[1,1])
  sigma2<-sqrt(sigma[2,2])
  histdim<-dim(history)
  histcum<-matrix(0,histdim[1],1)

  hist1<-history[,1]
  hist2<-history[,2]

  dc1<-pnorm(history[,1])
  dc2<-pnorm(history[,2])
  # Funkcija pnorm(x) vraca vrijednosti normalne funkcije
  # distribucije u x

  NUMNEWTON<-10
  k<-1
  while(k<=length(hist1))
  {
    index<-numeric()
    for (i in 1:length(hist1))
    {
      if ( (hist1[i]<hist1[k]) && (hist2[i]<hist2[k]) )
        index<-c(index,i)
    }
    histcum[k]<-length(index);
    k<-k+1;
  }
  hc<-(histcum+0.5)/histdim[1];
  theta<-VaRcopula(matrix(0,1,2),0,7,copula);
  i<-1
```

```
  while(i<=NUMNEWTON)
  {
    htheta<-theta*0.001;
    f<-sum(hc-VaRcopula (cbind(dc1,dc2),theta,0,copula))^2
    df<--2*sum((hc-VaRcopula (cbind(dc1,dc2),theta,0,copula))*
                VaRcopula (cbind(dc1,dc2),theta,3,copula))
    ddf<-2*sum(VaRcopula (cbind(dc1,dc2),theta,3,copula)^2)-2*
      sum((hc-VaRcopula (cbind(dc1,dc1),theta,0,copula))*
            VaRcopula (cbind(dc1,dc1),theta,6,copula))
    theta<-theta-df/ddf
    i<-i+1
  }
  res<-list(Theta=theta,Sigma1=sigma1,Sigma2=sigma2)
  return(res)
}
```

Sljedeća funkcija koju promatramo je funckija **VaRsimcopula**. Njezini argumenti su:

- ***N***; skalar, broj opservacija
- ***sigma1***; standardna devijacija prve normalne distribucije
- ***sigma2***; standardna devijacija druge normalne distribucije
- ***θ***; skalar, parametar copule
- ***copula***; cijeli broj između 1 i 10-odabire copulu prema tablici 1

Funckija vraća uzorak duljine ***N*** za copulu ***copula*** sa parametrom ***θ*** i za normalne distribucije sa standardnim devijacijama ***sigma1*** i ***sigma2***.
Kod:

```
VaRsimcopula<-function(N,sigma1,sigma2,theta,copula)
{
  u<-runif(N)
  v<-runif(N)
  x<-qnorm(u)*sigma1
  y<-qnorm(VaRcopula(cbind(u,v),theta,-1,copula))*sigma2
  res<-cbind(x,y)
  return(res)
}
```

Posljednja funkcija koju promatramo je **VaRestMCcopula** koja vraća procjenjeni parametar θ dane copule i procijenjeni VaR za dani portfelj koristeći copule.
Ona prima sljedeće ulazne podatke:

- ***history***; $n \times 2$ matrica, podatci
- ***a***; 2×1 vektor
- ***copula***; cijeli broj između 1 i 10-odabire copulu prema tablici 1
- ***opt***; lista koja sadrži:
  - alpha; skalar, razina značajnosti za VaR (*default* vrijednost 0.01)
  - nsimu; skalar, broj Monte Carlo simulacija (*default* vrijednost 1000)

Kod:

```
VaRestMCcopula<-function(history,a,copula,opt=list(alpha=0.01,nsim=1000))
{
  if ((opt$alpha<=0) || (opt$alpha>0.1))
    stop("alpha mora biti izmedu 0 i 0.1")

  if (opt$nsim<=0)
    stop("Broj MC simulacija treba biti pozitivan")

  alpha<-opt$alpha
  N<-opt$nsim

  respom<-VaRfitcopula(history,copula)

  res<-VaRsimcopula(N,respom$Sigma1,respom$Sigma2,respom$Theta,copula)

  pl<-res%*%a
  VaR<-quantile(pl,alpha)
  # Naredba quantile(niz,alpha) vraca alpha-kvantil od
  # vektora niz

  VaRMCc<-list(respom$Theta,VaR)
  return(VaRMCc)

}
```

Primjer: Promotrimo primjer računanja VaR-a sa razinom značajnosti 1% za dane podatke pomoću Gumbel-Hougaardove copule.

```
pom<-rnorm(200)
hist<-matrix(pom,100,2)
a <- cbind(c(1,2))

opt=list(alpha=0.01,nsim=1000)
proc<-VaRestMCcopula(hist,a,4,opt)

print(proc)
#procijenjeni theta
[[1]] 7.066699
#procijenjeni VaR
[[2]]-5.904234
```

Literatura

[1] Phelim Boyle, Mark Broadie, Paul Glasserman, *Monte Carlo methods for security pricing*, Journal of Economic Dynamics and Control, 21(1997) p.1267-1321

[2] Richard Burden, J.Douglas Faires, Annette Burden, *Numerical Analysis*, 10th edition, Cengage Learning, 2014, p.48-55

[3] Nicolas Christou, skripta *Statistics 100B*, www.stat.ucla.edu/ nchristo/statistics100B/stat100b_gamma_chi_t_f.pdf, UCLA, Department of Statistics, p.3-4

[4] Dr. Hans-Peter Deutsch, d-fine, *Value at Risk*, http://gsfp.physi.uni-heidelberg.de/graddays_april_2009/content/en/zubehoer/anhaenge/ Lecture_Notes/ XVI/FInanzmathematik/HPD%20Value%20at%20 Risk%20portrait.pdf, Frankfurt/Mein.

[5] Paul Embrechts, Andrea Höing, Alessandro Juri, *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*, Finance & Stohastics 7(2), 2003.

[6] Paul Embrechts, Alexander McNeil & Daniel Straumann, *Correlation:Pitfalls and Alternatives*, RISK, 1999.

[7] Jürgen Franke, W.Härdle, Christian Hafner, *Statistics of Financial Markets: An introduction*, 2nd edition, Springer, 2008.

[8] Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York, 2003.

[9] Paul Glasserman, Philip Heidelberger, Perwez Shahabuddin, *Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk, Mastering Risk Vol 2*, Financial Times-Prentice Hall, 2001.

[10] Paul Glasserman, Philip Heidelberger, Perwez Shahabuddin, *Importance Sampling and Stratification for Value-at-Risk, Computational Finance 1999*, MIT Press 2000.

[11] W.Härdle, T.Kleinow and G.Stahl, *Applied Quantitative Finance*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2002.

[12] G.W.Hill and A.W.Davis, Generalized asymptotic expansions of Cornish-Fisher type, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1968., Vol.39, No.4, p.1264-1273

[13] Miljenko Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, PMF-matematički odsjek, 2006.

[14] Stefan R. Jaschke, *The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations*, Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, 2001.

[15] Vlad Krokhmal, skripta *Introductory Probability and the Central Limit Theorem*, Univ. of Chicago, Department of Mathematics, 2011.

[16] Asad Ulah Khan Munir, University od London, Department of mathematics, *Series Representation and Approximation of some Quantile Functions appearing in Finance*, 2013.g, p.27-29

[17] Roger B.Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Second edition, Springer, 2006.

[18] Dr.J.R, *Improving Value at Risk Calculations by Using Copulas and Non-Gaussian Margins*, University of Oxford, 2002.

[19] E.T.Whittaker and G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1972, reprinted 1996, ch.7.3-7.32

Sažetak

Rizičnost vrijednosti (engl. Value at Risk - Var) jedna je od uobičajenih mjera rizika u financijskoj industriji. VaR mjeri maksimalnu potencijalnu promjenu u vrijednosti portfelja financijskih instrumenata u danom vremenskom periodu uz određenu razinu povjerenja. Statistički gledano, VaR portfelja je kvantil distribucije gubitka portfelja u određenom vremenskom intervalu pri danoj vjerojatnosti. Usprkos mnogim prednostima korištenja VaR metodologije (jednostavna za razumijevanje, vrlo često prisutna u raznim oblicima financijskih softvera), postoje određeni nedostatci - prvenstveno, rizičnost vrijednosti daje lažan osjećaj sigurnosti jer ne mjeri najveći gubitak koji se može dogoditi.
Jedan od glavnih ciljeva ovog diplomskog rada je opisati metode aproksimacije rizičnosti vrijednosti u uvjetno Gaussovoj klasi modela (faktori rizika imaju multivarijantnu normalnu distribuciju). Naglasak je na Delta-Gama pristupu u kojem se pretpostavlja da postoji dovoljno dobra kvadratična aproksimacija (kao funkcija faktora rizika) promjene vrijednosti portfelja. Prva metoda za određivanje kvantila distribucije promjene vrijednosti portfelja je Cornish-Fisherova aproksimacija. To je relativno brza metoda koja daje aproksimaciju sa dovoljno dobrom preciznošću u mnogim situacijama u praksi, ali može biti nedovoljno dobra u najlošijim scenarijima. Druga metoda koju promatramo je parcijalna Monte Carlo metoda sa uzorkovanjem po važnosti. Uzorkovanje po važnosti pomaže nam generirati uzorke iz područja koja su važnija za naš problem. Parcijalna Monte-Carlo metoda je sporija, ali i preciznija od Cornish-Fisherove aproksimacije.
Drugi važan cilj ovog diplomskog rada je objasniti primjenu copula u određivanju rizičnosti vrijednosti. Copule su funkcije koje se koriste za opisivanje zavisnosti između slučajnih varijabli sa proizvoljnim marginalnim distribucijama. Na kraju opisujemo postupak za računanje rizičnosti vrijednosti pomoću copula.

Summary

Value at Risk, often referred to as VaR, is a commonly used risk measure in the financial industry. Value at Risk measures the maximum potential change in value of a portfolio of financial instruments with a given probability over a pre-set horizon. Statistically speaking, the VaR of a portfolio is the quantile of the distribution of that portfolio's loss over a specifed time interval, at a given probability level. Despite many advantages of using VaR methodology (simple to understand, frequently available in various types of financial software), there are certain drawbacks - most importantly, it creates a false sense of security because Value at Risk does not measure worst case loss.

One of the main goals of this graduate thesis is to describe Value at Risk approximating methods in conditional Gaussian class of models (i.e. the risk factors are assumed to be joint normal). The emphasis is being placed on Delta-Gamma approach where the assumption is that there is a reasonably good quadratic approximation (as a function of risk factors) of the change in the portfolio's value. Our first method used to determine a quantile of the distribution of the change in the portfolio's value is called Cornish-Fisher approximation. It is a relatively fast method that gives approximations with sufficient accuracy in many practical situations but it can be mediocre in worst-case scenarios. The second method that we examine is partial Monte-Carlo method with importance sampling. Importance sampling method helps us generate more samples from the region that is more important for the problem at hand. Partial Monte-Carlo method is slower, but more accurate than Cornish-Fisher approximation.

The second main goal of this graduate thesis is explaining the applications of copulas for the calculation of Value at Risk. Copulas are functions that can be used to describe the dependence between random variables with arbitrary marginal distributions. In the end we describe the procedure for computing VaR with copulas.

Životopis

Tomislav Žganjer rođen je 18. lipnja 1993. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole „Vladimir Nazor", upisuje matematičku XV. gimnaziju (tzv. MIOC) u Zagrebu. Za vrijeme pohađanja srednje škole osvaja Stipendiju Grada Zagreba za izvrsnost u svojem obrazovanju i nastavlja ju primati sve do završetka srednjoškolskog obrazovanja. Akademske godine 2012./2013. upisuje Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu (Matematički odsjek) u Zagrebu. Tamo nastavlja primati Stipendiju Grada Zagreba zahvaljujući izvrsnim rezultatima državne mature i uspjesima koje je ostvario na fakultetu. 2015. godine stječe akademski naziv sveučilišnog prvostupnika (baccalaureus) matematike (univ. bacc. math.). Nakon toga iste godine upisuje Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike.