Bilinearne i kvadratne forme

Halambek, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:145897

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-15**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Halambek

BILINEARNE I KVADRATNE FORME

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, studeni, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo bilinearne i kvadratne forme te neka njihova svojstva. Pobliže promatramo simetrične i alternirajuće bilinearne forme te hermitske forme definirane na vektorskim prostorima te iskazujemo i dokazujemo važne teoreme vezane uz te forme.

Bilinearne i kvadratne forme između ostalog, služe kao svojevrstan most između linearne algebre i matematičke analize jer linearna algebra ponekad može biti preapstraktna u odnosu na analizu. Kao drugo, bilinearne i kvadratne forme su osnova multilinearne algebre i temelj analize tenzora. Također se, mnoge ideje napredne analize, kao što su diferencijalne forme, mogu razumijeti preko multilinearnih formi.

Rad je podijeljen u dva poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su svi važni pojmovi i definicije koje su potrebne za razumijevanje sadržaja sljedećeg poglavlja. Između ostalog, navodimo definiciju prstena, polja, modula.

Drugo poglavlje podijeljeno je na jedanaest potpoglavlja. U prvom i drugom potpoglavlju navodimo definicije bilinearnog preslikavanja te bilinearne forme i uočavamo razliku među njima. Također definiramo simetrične, alternirajuće te hermitske forme.

U trećem potpoglavlju navodimo definicije kvadratnog preslikavanja te kvadratne forme i uočavamo razliku među njima, dok u četvrtom potpoglavlju promatramo simetrične bilinearne forme te iskazujemo i dokazujemo teorem o egzistenciji ortogonalne baze za vektorski prostor na kojem je definirana simetrična forma. U petom potpoglavlju promatramo simetrične forme definirane na vektorskom prostoru nad uređenim poljem. Također, iskazujemo te dokazujemo Sylvesterov teorem.

U šestom potpoglavlju proučavamo hermitske bilinearne forme te iskazujemo i dokazujemo teorem o egzistenciji ortonormirane baze za vektorski prostor na kojem je definirana hermitska forma. U sedmom potpoglavlju iskazujemo i dokazujemo spektralne teoreme, u hermitskom i unitarnom slučaju, dok u osmom poglavlju iskazujemo i dokazujemo spektralni teorem u simetričnom slučaju. U devetom potpoglavlju promatramo alternirajuće bilinearne forme te uvodimo definicije hiperboličke ravnine te hiperboličkog prostora.

U desetom potpoglavlju iskazujemo i dokazujemo Wittov teorem te važnije posljedice tog teorema. Nakon toga, u jedanaestom potpoglavlju definiramo i pojam Wittove grupe.

Poglavlje 1

Prsteni i moduli

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije i tvrdnje koje će se koristiti u daljnjim poglavljima.

Definicija 1.0.1. *Uređeni par* $(G, \cdot)$*, koji se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije* $\cdot : G \times G \to G$ *nazivamo grupa, ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

(1) binarna operacija je asocijativna, tj. vrijedi

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in G;$$

(2) za binarnu operaciju postoji i jednoznačno je određen neutralni element, tj. $e \in G$ *sa svojstvom*

$$ea = ae = a, \quad \forall a \in G;$$

(3) svaki je element invertibilan, tj. za svaki $a \in G$ *postoji i jednoznačno je određen* $a^{-1} \in G$ *sa svojstvom*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Ako je ispunjen i dodatni zahtjev

(4) binarna operacija je komutativna, tj. vrijedi

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in G,$$

onda kažemo da je grupa $(G, \cdot)$ *komutativna ili Abelova.*

Definicija 1.0.2. *Neka imamo skup G na kojem je definirana operacija* $\cdot : G \times G \to G$*, tj. za bilo koje* $x, y \in G$ *je uvijek i* $x \cdot y \in G$*, kažemo da je* $(G, \cdot)$ *grupoid. Grupoid u kojem vrijedi i asocijativnost zove se polugrupa, a polugrupa koja ima neutralni element zove se monoid.*

Definicija 1.0.3. *Uređenu trojku $(R, +, \cdot)$, koja se sastoji od nepraznog skupa R i dviju binarnih operacija, $+ : R \times R \to R$ i $\cdot : R \times R \to R$ nazivamo prsten, ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

(1) skup R je u odnosu na zbrajanje komutativna grupa, tj.

$$(K, +) \text{ je Abelova grupa;}$$

(2) skup R je u odnosu na množenje polugrupa, tj. vrijedi

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in R;$$

(3) dvije su operacije povezane zakonom distribucije, tj. vrijedi

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in R,$$

$$(a + b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in R.$$

(4) postoji $1_R \in R$, tako da je $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a, \quad \forall a \in R$.

Definicija 1.0.4. *Ako je množenje u prstenu R komutativno, tj. vrijedi*

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in R,$$

kažemo da je R komutativan prsten.

Definicija 1.0.5. *Neka je R prsten. Kažemo da je R*

(1) karakteristike m, ako je m najmanji prirodni broj sa svojstvom da je $ma = 0$, za svaki $a \in R$;

(2) karakteristike 0, ako takav broj ne postoji.

Definicija 1.0.6. *Komutativni prsten u kojem svaki element različit od nule ima multiplikativni inverz nazivamo polje.*

Definicija 1.0.7. *Neka je R prsten.*

(1) Lijevi R-modul je Abelova grupa zajedno s operacijom množenja skalarom $\cdot : R \times M \to M$, koja za sve elemente $a, b \in R$ i $m, n \in M$ zadovoljava sljedeće aksiome:

(i) $a(m + n) = am + an$,

(ii) $(a + b)m = am + bm$,

(iii) $(ab)m = a(bm)$,

(iv) $1m = m$.

(2) Desni R-modul je Abelova grupa zajedno s operacijom množenja skalarom $\cdot : M \times R \to M$*, koja za sve elemente* $a, b \in R$ *i* $m, n \in M$ *zadovoljava sljedeće aksiome:*

(i) $(m + n)a = ma + na$,

(ii) $m(a + b) = ma + mb$,

(iii) $m(ab) = (ma)b$,

(iv) $m1 = m$.

Napomena 1.0.8. *Ako je R komutativan prsten, lagano se pokazuje da je svaki lijevi R-modul ujedno i desni R-modul. U tom slučaju govorimo o R-modulu.*

Definicija 1.0.9. *Neka je R prsten te neka je M R-modul. Ako M ima nepraznu bazu kažemo da je M slobodan K-modul.*

Napomena 1.0.10. *Neka je K polje. Tada se pojam K-modula svodi na pojam vektorskog prostora nad K. Također, svaki vektorski prostor nad K je slobodan K-modul.*

Definicija 1.0.11. *Neka je M K-modul. Definiramo podmodul N od M tako da za svaki* $x, y \in N$ *vrijedi* $x - y \in N$ *te tako da vrijedi* $KN \subset N$.

Tada je N modul s naslijeđenim operacijama od K na M. Neka je E vektorski prostor. Ako je $v_1, \ldots, v_m \in E$, s $(v_1, \ldots, v_m)$ označavamo potprostor od E koji je generiran s $v_1, \ldots, v_m$.

Definicija 1.0.12. *Definiramo homomorfizam modula kao preslikavanje* $f : M \to M'$ *sa jednog modula u drugi nad istim prstenom R za koji vrijedi*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

te

$$f(ax) = af(x)$$

za sve $a \in R$ *te* $x, y \in M$.

Preslikavanje f iz Definicije 1.0.12. zovemo i R-linearno preslikavanje (ili kraće linearno preslikavanje, ako je jasno o kojem prstenu R je riječ).

Poglavlje 2

Bilinearne i kvadratne forme

2.1 Bilinearne forme

Definicija 2.1.1. *Neka je R komutativan prsten te neka su E, F i G moduli nad R. R-bilinearno preslikavanje je preslikavanje $g : E \times F \to G$ koje ima sljedeća svojstva:
za svaki $x \in E$ preslikavanje $y \mapsto g(x, y)$ je R-linearno te za svaki $y \in F$ preslikavanje $x \mapsto g(x, y)$ je R-linearno.*

Ako je $E = F$ i $G = R$, tada R-bilinearno preslikavanje $f : E \times E \to R$ zovemo R-bilinearnom formom.

Napomena 2.1.2. *Nadalje možemo izostaviti prefiks R u R-bilinearnom preslikavanju te pisati $\langle x, y\rangle_f$ ili samo $\langle x, y\rangle$ umjesto $f(x, y)$.*

Uvodimo definiciju matrice forme koja će nam biti potrebna kasnije.

Definicija 2.1.3. *Neka su E i F slobodni moduli nad komutativnim prstenom R. Neka je $f : E \times F \to R$ bilinearno preslikavanje. Neka je $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ baza za E,
a $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ baza za F te neka je $g_{ij} = \langle v_i, w_j\rangle$. Ako su $x = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$ i $y = y_1w_1 + \cdots + y_nw_n$ redom elementi od E i F, s koordinatama $x_i, y_j \in R$, tada vrijedi*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j.$$

Neka su X i Y redom stupci vektora koordinata za x i y. Tada vrijedi $\langle x, y\rangle = X^tGY$ gdje je G matrica (g_{ij}). Možemo pisati $G = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$. G zovemo matricom forme u bazama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.

Sada ćemo navesti još nekoliko definicija potrebnih u daljnjem promatranju blinearnih formi. Neka je $f : E \times F \to R$, $f(x, y) = \langle x, y\rangle$ bilinearno preslikavanje koje također u ovom potpoglavlju zovemo forma. Ako je $y \in F$, tada pišemo $x \perp y$ ako vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$.

Slično, ako je S potprostor od F, definiramo $x \perp S$ ako vrijedi $x \perp y$, za svaki $y \in S$. Tada kažemo da je x okomit na S. Neka se $S^{\perp}$ sastoji od svih elemenata od E koji su okomiti na S. Tada je on očito podmodul od E.

Definiramo lijevu jezgru od f s $F^{\perp}$ te desnu jezgru s $E^{\perp}$. Kažemo da je f lijevo nedegenerirana ako joj je lijeva jezgra jednaka nuli. Analogno definiramo desno nedegeneriranu formu. Ako je E_0 lijeva jezgra od f, tada smo inducirali bilinearno preslikavanje

$$E/E_0 \times F \to R$$

koje je lijevo nedegenerirano.

Slično, ako je F_0 desna jezgra od f, tada smo inducirali bilinearno preslikavanje

$$E/E_0 \times F/F_0 \to R$$

koje je nedegenerirano na obje strane.

Označimo s $L^2(E, F; R)$ skup bilinearnih preslikavanja $E \times F \to R$. Jasno je da je taj skup modul uz uobičajeno definirane operacije zbrajanja i množenja elemenata iz R.

Forma f dovodi do homomorfizma

$$\varphi_f : E \to \mathrm{Hom}_R(F, R)$$

takvog da

$$\varphi_f(x)(y) = f(x, y) = \langle x, y \rangle,$$

za sve $x \in E$ i $y \in F$. $\mathrm{Hom}_R(F, R)$ zovemo dualni modul te ga označavamo s F^V.

Dalje imamo izomorfizam

$$L^2(E, F; R) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(E, \mathrm{Hom}_R(F, R))$$

dan s $f \mapsto \varphi_f$, njegov inverz je definiran na očigledan način: ako je

$$\varphi : E \to \mathrm{Hom}_R(F, R)$$

homomorfizam, definiramo f s

$$f(x, y) = \varphi(x)(y).$$

Kažemo da je f lijevo nesingularna ako je φ_f izomorfizam, drugim riječima, ako možemo formu f iskoristiti za identifikaciju E s dualnim modulom od F. Desno nesingularnu formu definiramo na analogan način. Kažemo da je f nesingularna ako je lijevo i desno nesingularna. Važno je primijetiti da nedegeneriranost ne povlači nužno nesingularnost.

Sada ćemo dobiti izomorfizam

$$\mathrm{End}_R(E) \mapsto L^2(E, F; R)$$

ovisan o fiksnom nesingularnom bilinearnom preslikavanju $f : E \times F \to R$.

Neka je $A \in \mathrm{End}_R(E)$ linearno preslikavanje sa E u E. Tada je preslikavanje

$$(x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle = \langle Ax, y\rangle_f$$

bilinearno i na taj način ga linearno pridružujemo svakom $A \in \mathrm{End}_R(E)$ bilinearno preslikavanje u $L^2(E, F; R)$.

Obratno, neka je $h : E \times F \to R$ bilinearno preslikavanje. Za dan $x \in E$, preslikavanje $h_x : F \to R$ definirano s $h_x(y) = h(x, y)$ je linearno te se nalazi u dualnom modulu F^V. Po pretpostavci, u tom modulu postoji jedinstveni element $x' \in E$ takav da za sve $y \in F$ imamo

$$h(x, y) = \langle x', y\rangle.$$

Jasno je da je pridruživanje $x \mapsto x'$ linearno preslikavanje s E u E. Tako sa svakim bilinearnim preslikavanjem $E \times F \to R$ imamo pridruženo linearno preslikavanje $E \to E$.

Direktno je tada da su prethodno opisana preslikavanja međusobno inverzni izomorfizmi između $\mathrm{End}_R(E)$ i $L^2(E, F; R)$. Istaknimo još da ta preslikavanja naravno ovise o našoj formi f.

Naravno, isto možemo raditi i s desne strane pa tako imamo sličan izomorfizam

$$L^2(E, F; R) \leftrightarrow \mathrm{End}_R(F)$$

također ovisan o fiksnoj nesingularnoj normi f.

Kao primjena, neka je $A : E \to E$ linearno preslikavanje te $(x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ pridruženo bilinearno preslikavanje. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$A^t : F \to F$$

takvo da

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$$

za sve $x \in E$ i $y \in F$. A^t zovemo transponirano od A s obzirom na formu f.

Odmah je jasno da ako su A i B linearna preslikavanja s E u E, tada za $c \in R$ vrijedi

$$(cA)^t = cA^t, \quad (A + B)^t = A^t + B^t \text{ i } (AB)^t = B^t A^t.$$

Još više generalno, promatramo module E i F s nesingularnim bilinearnim formama označenim redom s $\langle\ ,\ \rangle_E$ i $\langle\ ,\ \rangle_F$. Neka je $A : E \to F$ linearno preslikavanje. Tada po nesingularnosti od $\langle\ ,\ \rangle_E$ postoji jedinstveno linearno preslikavanje $A^t : F \to E$ takvo da

$$\langle Ax, y\rangle_F = \langle x, A^t y\rangle_E$$

za sve $x \in E$ i $y \in F$. Također A^t zovemo i transponirano s obzirom na te forme.

Slično se pokazuje i za pojedine tipove formi. Neka je $f : E \times E \to R$ bilinearna forma. Kažemo da je f simetrična bilinearna forma ako vrijedi $f(x, y) = f(y, x)$ za sve $x, y \in E$. Skup simetričnih bilinearnih formi na E označavamo s $L^2_s(E)$. Uzmimo fiksnu simetričnu nesingularnu bilinearnu formu f na E, označenu s $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. Za endomorfizam $A : E \to E$ kažemo da je simetričan s obzirom na formu f ako vrijedi $A^t = A$. Jasno je da je skup simetričnih endomorfizama od E modul, koji možemo označiti sa $\mathrm{Sym}(E)$. Imamo izomorfizam

$$L^2_s(E) \leftrightarrow \mathrm{Sym}(E)$$

ovisan o fiksnoj simetričnoj nesingularnoj formi f. Ako je g simetrična bilinearna forma na E, tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje A takvo da

$$g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

za sve $x, y \in E$. Koristeći činjenicu da su obje forme f i g simetrične, dobivamo

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle y, A^t x \rangle = \langle A^t x, y \rangle.$$

Stoga je $A = A^t$. Pridruživanje $g \mapsto A$ daje nam homomorfizam iz L^2_s na $\mathrm{Sym}(E)$. Obratno, za dan simetričan endomorfizam A na E možemo definirati simetričnu formu pravilom $(x, y) \mapsto \langle Ax, y \rangle$ te pridruživanje te forme preslikavanju A jasno daje homomorfizam od $\mathrm{Sym}(E)$ u $L^2_s(E)$ koji je inverzan prethodnom homomorfizmu. Stoga su $\mathrm{Sym}(E)$ i $L^2_s(E)$ izomorfni.

Slično se pokazuje i u slučaju alternirajuće bilinearne forme.

Pretpostavimo da R ima automorfizam reda 2 u oznaci $a \mapsto \overline{a}$. Kažemo da je $g : E \times E \to R$ hermitska forma ako vrijedi

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)}$$

za sve $x, y \in E$ te ako je forma linearna u prvoj varijabli, a antilinearna u drugoj varijabli. Neka je $A : E \to E$ linearno preslikavanje. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje

$$A^* : F \to F$$

takvo da

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

za sve $x \in E$ i $y \in F$. Primijetimo da je A^* linearno. A^* zovemo adjungirano od A s obzirom na našu formu. Imamo sljedeća pravila

$$(cA)^* = \overline{c}A^*, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*$$

za sva linearna preslikavanja A i B s E na E te za $c \in R$.

Označimo skup hermitskih formi na E s $L_h^2(E)$. Neka je R_0 potprsten prstena R koji se sastoji od svih fiksnih elemenata obzirom na automorfizam $a \to \overline{a}$. Tada je $L_h^2(E)$ R_0-modul.

Uzmimo fiksnu hermitsku nesingularnu formu g na E te je označimo s $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. Za endomorfizam $A : E \to E$ kažemo da je hermitski s obzirom na g ako vrijedi $A^* = A$. Jasno je da je skup hermitskih endomorfizama R_0-modul koji označavamo s $\mathrm{Herm}(E)$. Imamo R_0-izomorfizam

$$L_h^2(E) \leftrightarrow \mathrm{Herm}(E)$$

ovisan o fiksnoj hermitskoj nesingularnoj formi g definiran na uobičajen način. Hermitska forma odgovara hermitskom preslikavanju A ako i samo ako

$$g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

za sve $x, y \in E$.

2.2 Vrste bilinearnih formi

Tri su glavna oblika bilinearnih formi: simetrične, unitarne i alternirajuće. Ponovimo definicije tih formi.

Neka je E modul nad komutativnim prstenom R te neka je $g : E \times E \to R$ bilinearna forma. Kažemo da je:

(1) g simetrična forma ako vrijedi $g(x, y) = g(y, x)$, za sve $x, y \in E$;

(2) g alternirajuća forma ako vrijedi $g(x, x) = 0$ te stoga također vrijedi $g(x, y) = -g(y, x)$, za sve $x, y \in E$.

Kažemo da je g hermitska forma ako R ima automorfizam reda 2, u oznaci $a \mapsto \overline{a}$, ako vrijedi $g(x, y) = \overline{g(y, x)}$, za sve $x, y \in E$ te ako je forma linearna u prvoj varijabli, a antilinearna u drugoj varijabli.

Možemo koristiti i sljedeće oznake: $g(x, y) = \langle x, y \rangle, g(x, y) = x \cdot y$ ili $g(x, x) = x^2$. Hermitsku formu g ponekad nazivamo i skalarnim produktom.

Sada definirajmo jezgru forme te nedegeneriranu formu.

Definicija 2.2.1. *Neka je g simetrična, alternirajuća ili hermitska forma na E. Jezgra od g, s oznakom $E^0 = E^0(g)$, je definirana s $E^0 = \{y \in E : g(x, y) = 0, \forall x \in E\}$.*

Definicija 2.2.2. *Neka je g simetrična, alternirajuća ili hermitska forma na E. Kažemo da je g nedegenerirana ako je nula jedini element jezgre, odnosno ako joj je jezgra trivijalna. Inače kažemo da je forma degenerirana.*

Pretpostavimo da je E konačnodimenzionalan prostor nad poljem K. Forma definirana na tom prostoru je nedegenerirana ako i samo ako je nesingularna, tj. uzrokuje izomorfizam od E sa svojim dualnim prostorom (anti-dualnim u slučaju hermitske forme). Ako je E vektorski prostor na kojem je definirana forma g te ako su F, F' potprostori od E, pišemo $E = F \perp F'$, ako je E direktna suma od F i F' te su F i F' ortogonalni. Drugim riječima, F i F' su ortogonalni ako vrijedi $x \perp y$, odnosno $\langle x, y \rangle = 0$, za svaki $x \in F$ te za svaki $y \in F'$. Tada kažemo da je E ortogonalna suma od F i F'.

Neka je E vektorski prostor te neka je g simetrična ili hermitska forma definirana na E. Ako je $\langle \ , \ \rangle$ simetrična ili hermitska, kažemo da je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza s obzirom na formu g ako vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. Vidimo da ako je forma nedegenerirana te ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza, tada vrijedi $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, za svaki i.

Propozicija 2.2.3. *Neka je E vektorski prostor nad poljem K te neka je g forma koja je definirana na E te je simetrična, alternirajuća ili hermitska. Pretpostavimo da je E prikazan pomoću ortogonalne sume,*

$$E = E_1 \perp \cdots \perp E_m.$$

Tada je g nedegenerirana na E ako i samo ako je nedegenerirana na svakom potprostoru E_i. Ako je E_i^0 jezgra restrikcije od g na E_i, tada je jezgra od g na E ortogonalna suma

$$E^0 = E_1^0 \perp \cdots \perp E_m^0.$$

Dokaz. Elemente $v, w \in E$ možemo zapisati na jedinstven način

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

gdje su $v_i, w_i \in E$. Tada vrijedi $v \cdot w = \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot w_i$ te $v \cdot w = 0$ ako vrijedi $v_i \cdot w_i = 0$, za svaki $i = 1, \ldots, m$. Odavde je tvrdnja očita. □

Neka su $E_1, \ldots, E_m$ vektorski prostori nad poljem K te neka su $g_1, \ldots, g_m$ forme redom definirane na njima. Tada definiramo formu $g = g_1 \oplus \cdots \oplus g_m$ na direktnoj sumi $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ na sljedeći način: ako su v i w zapisani kao gore tada definiramo

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^{m} g_i(v_i, w_i).$$

Tada je jasno da zapravo imamo $E = E_1 \perp \cdots \perp E_m$ pa također možemo pisati $g = g_1 \perp \cdots \perp g_m$.

Propozicija 2.2.4. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K te neka je g forma prethodnog tipa definirana na E. Pretpostavimo da je g nedegenerirana te neka je F potprostor od E. Tada je forma nedegenerirana na F ako i samo ako vrijedi $F + F^\perp = E$ te ako i samo ako je nedegenerirana na $F^\perp$.*

Dokaz. Imamo sljedeće:

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim(F + F^\perp) + \dim(F \cap F^\perp).$$

Stoga vrijedi $F + F^\perp = E$ ako i samo ako je $\dim(F \cap F^\perp) = 0$. Prva tvrdnja sada direktno slijedi. Budući da je gornja relacija simetrična obzirom na F i $F^\perp$, druga tvrdnja također slijedi. □

Možemo govoriti da je E nedegeneriran, umjesto izraza da je forma nedegenerirana na E.

2.3 Kvadratne forme

Neka je R komutativni prsten te neka su E i F R-moduli. Kažemo da je F bez 2-torzija ako za svaki $y \in F$, $2y = 0$ povlači $y = 0$.

Za preslikavanje $f : E \to F$ kažemo da je kvadratno ako postoji simetrično bilinearno preslikavanje $g : E \times E \to F$ i linearno preslikavanje $h : E \to F$ takvo da vrijedi

$$f(x) = g(x, x) + h(x), \quad \forall x \in E.$$

Propozicija 2.3.1. *Pretpostavimo da je F bez 2-torzija. Neka je $f : E \to F$ kvadratno preslikavanje kao u definiciji. Tada su g i h jedinstveno određeni sa f. Dalje, vrijedi*

$$2g(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Dokaz. Ako izračunamo $f(x + y) - f(x) - f(y)$, dobijemo da je to jednako $2g(x, y)$. Treba još pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da je g_1 simetrično bilinearno i h_1 linearno preslikavanje takvo da vrijedi

$$f(x) = g_1(x, x) + h_1(x).$$

Tada je $2g(x, y) = 2g_1(x, y)$. Kako je F bez 2-torzija, slijedi da je

$$g(x, y) = g_1(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Time je g jedinstveno određen. Iz toga slijedi da je i h jedinstveno određen relacijom $h(x) = f(x) - g(x, x)$, za svaki $x \in E$. □

Kažemo da su g, h bilinearno i linearno preslikavanje pridružena f.
Neka je $f : E \to F$ preslikavanje. Definiramo $\Delta f : E \times E \to F$ s

$$\Delta f(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Za f kažemo da je homogeno kvadratno preslikavanje, ako je kvadratno i ako mu je pridruženo linearno preslikavanje 0. Kažemo da je F jedinstveno djeljiv s 2 ako za svaki $z \in F$ postoji jedinstveni $u \in F$ takav da vrijedi $2u = z$. Tada možemo pisati $u = \frac{1}{2}z$.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $f : E \to F$ preslikavanje takvo da je Δf bilinearno. Pretpostavimo da je F jedinstveno djeljiv s 2. Ako vrijedi $f(2x) = 4f(x)$, tada je f homogeno kvadratno preslikavanje.*

Dokaz. Slijedi $\Delta f(x, x) = f(2x) - 2f(x) = 4f(x) - 2f(x) = 2f(x)$, za svaki $x \in E$ iz definicije. Budući da je F jedinstveno djeljiv s 2, slijedi

$$f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x, x), \quad \forall x \in E.$$

Preslikavanje Δf po definiciji je simetrično, a po pretpostavci propozicije je i bilinearno pa je preslikavanje $\frac{1}{2}\Delta f : E \times E \to F$ simetrično bilinearno preslikavanje. To znači da je f homogeno kvadratno preslikavanje. □

Uvodimo definiciju kvadratne forme pomoću homogenog kvadratnog preslikavanja.

Definicija 2.3.3. *Neka je E R-modul. Preslikavanje $f : E \to R$ je kvadratna forma na E ako je f homogeno kvadratno preslikavanje.*

2.4 Simetrične forme, ortogonalne baze

U ovom poglavlju dokazat ćemo egzistenciju ortogonalne baze za simetrične bilinearne forme. U cijelom poglavlju pretpostavljamo da je polje K karakteristike različite od 2.

Neka je E vektorski prostor nad K i neka je g simetrična forma na E. Kažemo da je g nul-forma ako je $\langle x, y\rangle = 0$ za svaki $x, y, \in E$. Budući da smo pretpostavili da je polje karakteristike $\neq 2$, iz $x^2 = 0$ za svaki $x \in E$, slijedi da je g nul-forma.
Doista,

$$4x \cdot y = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Teorem 2.4.1. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Neka je g simetrična forma na E. Ako je $E \neq 0$, onda postoji ortogonalna baza za E.*

Dokaz. Pretpostavimo da je g nedegenerirana na E. Neka je n dimenzija od E. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$, tvrdnja je očita.

Pretpostavimo da je $n > 1$. Neka je $v_1 \in E$ takav da je $v_1^2 \neq 0$. Neka je $F = (v_1)$ potprostor od E generiran s v_1. Tada je F nedegeneriran te po Propoziciji 2.1.7. slijedi

$$E = F + F^{\perp}.$$

Osim toga, $\dim F^{\perp} = n-1$. Neka je $\{v_2, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza za $F^{\perp}$. Tada su $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u parovima ortogonalni. Uz to, taj skup je i linearno nezavisan jer iz jednakosti

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0, \ \text{ uz } \ a_i \in K,$$

skalarnim množenjem s v_i dobivamo $a_i v_i^2 = 0$, odnosno $a_i = 0$, za svaki i.

Pretpostavimo sada da je g degenerirana te neka je E_0 jezgra. Tada E možemo napisati kao direktnu sumu $E = E_0 \oplus W$, za neki potprostor W. Restrikcija od g na W je nedegenerirana, u suprotnom bi postojao element iz W koji je u jezgri i koji je različit od nule. Odavde dobivamo da ako je $\{v_1, \ldots, v_r\}$ baza od E_0 i $\{w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ ortogonalna baza od W, tada je $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ ortogonalna baza od E. □

Napomena 2.4.2. *Primijetimo da iz dokaza Teorema 2.3.1. slijedi da za nedegeneriranu formu g i $v \in E$, takav da je $v^2 \neq 0$, v možemo nadopuniti do ortogonalne baze od E.*

Korolar 2.4.3. *Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza od E. Pretpostavimo da vrijedi*

$$v_i^2 \neq 0, \ \textit{ za svaki } \ i \leqslant r \ \textit{ i } \ v_i^2 = 0, \quad \textit{za svaki } \ i > r.$$

Tada je $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ jezgra za E.

Dokaz. Očit. □

Sada uvodimo dijagonalizirani prikaz forme koristeći Definiciju 2.1.3. matrice forme.

Ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza od E i ako zapišemo X u obliku $X = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ za $x_i \in K$, tada kvadriranjem dobivamo

$$X^2 = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2,$$

gdje je $a_i = \langle v_i, v_i \rangle$.

Ovakav prikaz forme naziva se dijagonalnim. U odnosu na ortogonalnu bazu, vidimo da je ovoj formi pridružena dijagonalna matrica:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & \mathbf{0} & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r & & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5 Simetrične forme nad uređenim poljem

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je polje uređeno.

Teorem 2.5.1 (**Sylvester**). *Neka je K uređeno polje i neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad K. Neka je g nedegenerirana simetrična bilinearna forma. Tada postoji cijeli broj $r \geq 0$, takav da, ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza od E, onda je upravo r elemenata među n elementa $v_1^2, \ldots, v_n^2 > 0$ i $n - r$ među tim elementima je < 0.*

Dokaz. Označimo s $a_i = v_i^2$, za $i = 1, \ldots, n$. Recimo da vrijedi $a_1, \ldots, a_r > 0$ i $a_i < 0$ za $i > r$. Neka je $\{w_1, \ldots, w_n\}$ neka ortogonalna baza od E i neka je $b_i = w_i^2$ za $i = 1, \ldots, n$. Uzmimo da vrijedi $b_1, \ldots, b_s > 0$ i $b_j < 0$ za $j > s$. Treba pokazati da je $r = s$. Dovoljno je dokazati da je skup $\{v_1, \ldots, v_r, w_{s+1}, \ldots, w_n\}$ linearno nezavisan jer tada dobivamo $r + n - s \leqslant n$, odakle slijedi $r \leqslant s$ i $r = s$ po simetriji. Pretpostavimo sljedeće:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r + y_{s+1} w_{s+1} + y_n w_n = 0.$$

Iz toga slijedi:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r = -y_{s+1} w_{s+1} - \cdots - y_n w_n.$$

Kvadriramo li obje strane jednadžbe dobivamo:

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2 = b_{s+1} y_{s+1}^2 + \cdots + b_n y_n^2.$$

Lijeva strana je $\geqslant 0$, a desna strana je $\leqslant 0$. Stoga slijedi da su obje strane jednakosti jednake 0 i slijedi da je $x_i = y_i = 0$. Time smo pokazali da je skup linearno nezavisan. □

Korolar 2.5.2. *Pretpostavimo da je svaki pozitivni element polja K kvadrat. Tada postoji ortogonalna baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ od E takva da vrijedi $v_i^2 = 1$ za $i \leq r$ i $v_i^2 = -1$ za $i > r$, gdje je r jedinstveno određen.*

Dokaz. Svaki vektor v_i u ortogonalnoj bazi podijelimo s $\sqrt{|v_i^2|}$. □

Baza koja ima svojsvo iz prethodnog korolara zove se ortonormirana baza. Ako je $X \in E$ s koordinatama $(x_1, \dots, x_n)$ u odnosu na ortonormiranu bazu, tada je

$$X^2 = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

Neka je E vektorski prostor i g simetrična forma na E. Kažemo da je simetrična forma g pozitivno definitna ako vrijedi

$$X^2 > 0, \quad \forall X \in E, \quad X \neq 0.$$

Taj slučaj nastupa ako i samo ako vrijedi $r = n$ u Teoremu 2.4.1.
Za g kažemo da je negativno definitna ako vrijedi

$$X^2 < 0, \quad \forall X \in E, \quad X \neq 0.$$

Korolar 2.5.3. *Neka je E vektorski prostor kojem je pridružena ortogonalna dekompozicija $E = E^+ \perp E^-$ takva da je g pozitivno definitna na E^+ i negativno definitna na E^-. Dimenzija od E^+ (odnosno E^-) je jednaka u svim takvim dekompozicijama.*

Pretpostavimo sada da je forma g pozitivno definitna te da je svaki pozitivni element u polju K kvadrat.

Definicija 2.5.4. *Definiramo normu za elemente $v \in E$ kao $|v| = \sqrt{v \cdot v}$.*

Ako je $v \neq 0$, tada vrijedi $|v| > 0$. Također, vrijedi Schwarzova nejednakost:

$$|v \cdot w| \leqslant |v| \cdot |w|, \quad \forall v, w \in E.$$

Tvrdnju dokazujemo proširenjem po bilinearnosti:

$$0 \leqslant (av \pm bw)^2 = (av \pm bw) \cdot (av \pm bw)\,.$$

Uvrstimo zatim $b = |v|$ i $a = |w|$ te dobivamo

$$\mp 2abv \cdot w \leqslant 2|v|^2|w|^2.$$

Ako je $|v| = 0$ ili $|w| = 0$, tada je nejednakost trivijalna. Ako vrijedi $|v| \neq 0$ i $|w| \neq 0$, tada možemo obje strane nejednakosti podijeliti s $|v||w|$ te dobivamo

$$|v \cdot w| \leqslant |v||w|.$$

Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za sve $v, w \in E$.

Na sličan način dobivamo i nejednakost trokuta koja glasi:

$$|v + w| \leqslant |v| + |w|, \quad \forall v, w \in E.$$

Kada imamo pozitivno definitnu formu, tada postoji standardni način dobivanja ortonormirane baze. Započinjemo s proizvoljnom bazom $\{v_1, \ldots, v_n\}$ te postupamo induktivno.
Neka je

$$v_1' = \frac{1}{|v_1|} v_1.$$

Tada je v_1 norme 1. Neka je

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot v_1')\, v_1',$$

te definiramo

$$v_2' = \frac{1}{|w_2|} w_2.$$

Nastavljanjem induktivnog postupka dobivamo sljedeće:

$$w_r = v_r - (v_r \cdot v_1')v_1' - \cdots - (v_r \cdot v_{r-1}')v_{r-1}'$$

i

$$v_r' = \frac{1}{|w_r|} w_r.$$

Tada je $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ ortonormirana baza za E. Opisan induktivni postupak naziva se *Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije.*

2.6 Hermitske forme

Neka je K_0 uređeno polje te neka je $K = K_0(i)$ proširenje polja, gdje je $i = \sqrt{-1}$. Tada K ima automorfizam reda 2, čije je fiksno polje K_0.

Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Promatrat ćemo hermitsku formu na E, odnosno preslikavanje $E \times E \to K$ koje označavamo s

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle.$$

To preslikavanje je K-linearno u prvoj varijabli te K-antilinearno u drugoj varijabli te vrijedi

$$\langle x, y\rangle = \langle\overline{y, x}\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Vidimo da vrijedi $\langle x, x\rangle \in K_0$, za svaki $x \in E$. To je zapravo razlog zašto su tvrdnje i dokazi u hermitskom slučaju analogni onima u slučaju kad smo promatrali simetrične forme. Zato ćemo napisati samo one tvrdnje čija se svojstva odnose na hermitski slučaj.

Teorem 2.6.1. *Postoji ortogonalna baza za hermitsku formu. Ako je hermitska forma nedegenerirana, onda postoji broj $r \geq 0$ takav da ima sljedeće svojstvo: točno r elemenata od n elementa $\langle v_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle v_n, v_n \rangle$ je > 0, dok je točno $n - r$ elemenata < 0.*

Ortogonalnu bazu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ za koju vrijedi da je $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ ili $\langle v_i, v_i \rangle = -1$ zovemo ortonormiranom bazom.

Korolar 2.6.2. *Pretpostavimo da je hermitska forma nedegenerirana te da je svaki pozitivni element od K_0 kvadrat. Tada postoji ortonormirana baza.*

Kažemo da je hermitska forma pozitivno definitna ako vrijedi

$$\langle x, x \rangle > 0, \quad \forall x \in E, \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Kažemo da je hermitska forma negativno definitna ako vrijedi

$$\langle x, x \rangle < 0, \quad \forall x \in E, \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Korolar 2.6.3. *Pretpostavimo da je hermitska forma nedegenerirana na E. Tada E dopušta ortogonalnu dekompoziciju $E = E^+ \perp E^-$ takvu da je forma pozitivno definitna na E^+ i negativno definitna na E^-. Dimenzija od E^+ (odnosno E^-) je jednaka u svim takvim dekompozicijama.*

Napomena 2.6.4. *Dokazi prethodnog teorema i korolara su analogni dokazima analognih teorema i korolara za simetrične forme.*

Za svako K-linearno preslikavanje $A : E \to E$ imamo polarizacijski identitet:

$$\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle = 2[\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle].$$

Ako vrijedi $\langle Ax, x \rangle = 0$, za svaki $x \in E$, zamjenom x-a sa ix dobivamo sljedeće:

$$\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0,$$

$$i\langle Ax, y \rangle - i\langle Ay, x \rangle = 0.$$

Odavde zaključujemo da ako vrijedi $\langle Ax, x \rangle = 0$, za svaki $x \in E$, tada vrijedi $A = 0$.

To je jedina tvrdnja koja nema analogon u slučaju simetričnih formi.

Pretpostavimo da je hermitska forma pozitivno definitna te da je svaki pozitivni element iz K_0 kvadrat. Tada imamo Schwarzovu nejednakost,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

koja se dokazuje polazeći od nejednakosti

$$0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle$$

i postavljajući $\alpha = \langle y, y \rangle$ i $\beta = -\langle x, y \rangle$.

Definiramo normu od $|x|$ kao

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Tada imamo i nejednakost trokuta,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

te za $\alpha \in K$ vrijedi

$$|\alpha x| = |\alpha||x|.$$

Kao i u simetričnom slučaju, možemo dobiti ortonormiranu bazu pomoću induktivnog postupka oduzimanjem uzastopnih projekcija.

2.7 Spektralni teorem (hermitski slučaj)

U ovom poglavlju promatramo konačnodimenzionalan vektorski prostor E nad kompleksnim poljem $\mathbb{C}$, dimenzije ≥ 1 te pretpostavljamo da je na E definirana pozitivno definitna hermitska forma.

Neka je $A : E \to E$ linearno preslikavanje. Za fiksni $y \in E$, preslikavanje

$$x \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

je linearni funkcional te stoga postoji jedinstveni element $y^* \in E$ takav da vrijedi

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle, \quad \forall x \in E.$$

Definiramo preslikavanje $A^* : E \to E$ s $A^* y = y^*$. Jasno je da je A^* linearni operator, a nazivamo ga adjungirani operator od A.

Za proizvoljne linearne operatore A, B sa E u E lako je pokazati sljedeće tvrdnje:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad A^{**} = A,$$

$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

Linearni operator A je hermitski ako vrijedi $A = A^*$.

Propozicija 2.7.1. *Linearno preslikavanje $A : E \to E$ je hermitsko ako i samo ako vrijedi*

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je A hermitsko preslikavanje. Tada vrijedi

$$\overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle Ax, x\rangle,$$

pa je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.
Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, za svaki $x \in E$. Tada vrijedi

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^* x, x\rangle$$

te zbog toga vrijedi $\langle (A - A^*)x, x\rangle = 0$, za svaki $x \in E$. Stoga vrijedi $A = A^*$. □

Definicija 2.7.2. *Neka je $A : E \to E$ linearno preslikavanje. Element $\xi \in E$ zovemo svojstveni vektor od A ako postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi $A\xi = \lambda\xi$. Ako vrijedi $\xi \neq 0$, tada kažemo da je λ svojstvena vrijednost od A koja pripada vektoru ξ.*

Propozicija 2.7.3. *Neka je A hermitsko preslikavanje. Tada sve svojstvene vrijednosti od A, koje pripadaju ne-nul vektorima, su realne. Ako su ξ, ξ' svojstveni vektori $\neq 0$ kojima pripadaju redom svojstvene vrijednosti λ, λ' te ako vrijedi $\lambda \neq \lambda'$ tada vrijedi $\xi \perp \xi'$.*

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost koja pripada svojstvenom vektoru $\xi \neq 0$. Tada vrijedi

$$\langle A\xi, \xi\rangle = \langle \xi, A\xi\rangle$$

te su ta dva broja redom jednaka $\lambda\langle \xi, \xi\rangle$ i $\overline{\lambda}\langle \xi, \xi\rangle$. Pošto vrijedi $\xi \neq 0$, slijedi da je $\lambda = \overline{\lambda}$, odnosno da je $\lambda \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo dalje da su ξ, ξ' i λ, λ' definirani kao gore. Tada vrijedi

$$\langle A\xi, \xi'\rangle = \lambda\langle \xi, \xi'\rangle = \langle \xi, A\xi'\rangle = \lambda'\langle \xi, \xi'\rangle,$$

odakle slijedi $\langle \xi, \xi'\rangle = 0$. □

Lema 2.7.4. *Neka je $A : E \to E$ linearno preslikavanje te neka je dimenzija od $E \geq 1$. Tada postoji barem jedan ne-nul svojstveni vektor od A.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{C}[A]$ prsten generiran s A nad $\mathbb{C}$. Kao vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, on je sadržan u prstenu svih endomorfizama na E koji je konačnodimenzionalan. Ta dimenzija je jednaka kao i dimenzija prstena svih $n \times n$ matrica ako je $n = \dim E$. Stoga postoji ne-nul polinom P s koeficijentima iz $\mathbb{C}$ tako da vrijedi $P(A) = 0$. Možemo rastaviti polinom P na produkt linearnih faktora

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m),$$

gdje su $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Tada vrijedi

$$(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_m I) = 0.$$

Iz tog razloga ne mogu biti svi faktori $A - \lambda_j I$ izomorfizmi te postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ tako da $A - \lambda I$ nije izomorfizam. Stoga postoji $\xi \neq 0$ iz njegove jezgre pa slijedi da je $A\xi - \lambda\xi = 0$.

Dakle, pokazali smo da je ξ ne-nul svojstveni vektor, što smo i željeli. □

Teorem 2.7.5 (Spektralni teorem, hermitski slučaj). *Neka je $E \neq 0$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad kompleksnim poljem, na kojem je definirana pozitivno definitna hermitska forma. Neka je $A : E \to E$ hermitsko linearno preslikavanje. Tada postoji ortogonalna baza za E sastavljena od svojstvenih vektora od A.*

Dokaz. Neka je ξ_1 ne-nul svojstveni vektor sa svojstvenom vrijednosti λ_1 te neka je E_1 potprostor generiran s ξ_1. Tada A preslikava $E_1^\perp$ u samog sebe, jer

$$\langle AE_1^\perp, \xi_1\rangle = \langle E_1^\perp, A\xi_1\rangle = \langle E_1^\perp, \lambda_1\xi_1\rangle = \lambda_1\langle E_1^\perp, \xi_1\rangle = 0,$$

odakle dobivamo da je $AE_1^\perp$ ortogonalan na ξ_1.

Budući da je $\xi_1 \neq 0$, vrijedi $\langle \xi_1, \xi_1\rangle > 0$ te budući da je hermitska forma nedegenerirana, vrijedi

$$E = E_1 \oplus E_1^\perp.$$

Restrikcija forme na $E_1^\perp$ je pozitivno definitna ako je $\dim E > 1$. Iz Propozicije 2.6.1. vidimo da je restrikcija od A na $E_1^\perp$ hermitska. Stoga dokaz možemo završiti indukcijom. □

Korolar 2.7.6. *Neka su pretpostavke jednake kao u prethodnom teoremu. Tada postoji ortonormirana baza sastavljena od svojstvenih vektora od A.*

Dokaz. Potrebno je podijeliti svaki vektor u ortogonalnoj bazi s njegovom normom. □

Korolar 2.7.7. *Neka je $E \neq 0$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad kompleksnim poljem, na kojem je definirana pozitivno definitna hermitska forma f. Neka je g neka druga hermitska forma na E. Tada postoji baza od E, koja je orgonalna za f i za g.*

Dokaz. Pišemo $f(x, y) = \langle x, y\rangle$. Kako je f nesingularna, jer je pozitivno definitna, tako postoji jedinstveno hermitsko linearno preslikavanje A takvo da vrijedi

$$g(x, y) = \langle Ax, y\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Primjenom teorema na A pronalazimo ortogonalnu bazu kao u teoremu. Označimo je s $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Neka su λ_i svojstvene vrijednosti takve da vrijedi $Av_i = \lambda_i v_i$. Tada vrijedi

$$g(v_i, v_j) = \langle Av_i, v_j\rangle = \lambda_i\langle v_i, v_j\rangle.$$

Stoga je ova baza ortogonalna i za formu g, što smo i htjeli pokazati. □

Prisjetimo se da je linearno preslikavanje $U : E \to E$ unitarno ako i samo ako vrijedi $U^* = U^{-1}$. To je ekvivalentno svojstvu

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Drugim riječima, U je automorfizam forme f.

Teorem 2.7.8 (Spektralni teorem, unitarni slučaj). *Neka je $E \neq 0$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad kompleksnim poljem, na kojem je definirana pozitivno definitna, hermitska forma. Neka je $U : E \to E$ unitarno linearno preslikavanje. Tada E ima ortogonalnu bazu sastavljenu od svojstvenih vektora od U.*

Dokaz. Neka je $\xi_1 \neq 0$ svojstveni vektor od U. Lagano se provjerava da je potprostor od E ortogonalan na ξ_1 invarijantan na U. Naime, ako koristimo relaciju $U^* = U^{-1}$ te ako je η ortogonalan na ξ_1, tada vrijedi

$$\langle U\eta, \xi_1 \rangle = \langle \eta, U^*\xi_1 \rangle = \langle \eta, U^{-1}\xi_1 \rangle = \langle \eta, \lambda^{-1}\xi_1 \rangle = 0.$$

Sada možemo završiti dokaz indukcijom, kao i u prethodnim dokazima. □

Napomena 2.7.9. *Ako je λ svojstvena vrijednost unitarnog preslikavanja U, tada je nužno apsolutna vrijednost od λ jednaka 1, odakle slijedi da λ možemo pisati u obliku $e^{i\theta}$, gdje je $\theta \in \mathbb{R}$ pa možemo gledati na U kao na rotaciju.*

Neka je $A : E \to E$ invertibilno linearno preslikavanje. Za zapis kompleksnog broja $z = re^{i\theta}$, gdje je $r > 0$, postoji analogna dekompozicija od A kao produkta koju zovemo polarna dekompozicija.

Neka je $P : E \to E$ linearno preslikavanje. Kažemo da je P semipozitivno ako je P hermitsko preslikavanje te vrijedi

$$\langle Px, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

Ako vrijedi

$$\langle Px, x \rangle > 0, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0,$$

tada kažemo da je P pozitivno definitno.

Primjer 2.7.10. *Neka je $P = A^*A$. Tada je P pozitivno definitno jer vrijedi*

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle > 0, \quad \textit{ako je} \ \ x \neq 0.$$

Propozicija 2.7.11. *Neka je P semipozitivno. Tada P ima jedinstveni kvadratni korijen $B : E \to E$, odnosno semipozitivno linearno preslikavanje takvo da je $B^2 = P$.*

Dokaz. Pretpostavimo zbog jednostavnosti da je P pozitivno definitno. Tada po spektralnom teoremu postoji baza od E sastavljena od svojstvenih vektora. Dalje, svojstvene vrijednosti moraju biti > 0. Linearno preslikavanje, definirano preslikavanjem svakog svojstvenog vektora u njegov umnožak kvadratnim korijenom odgovarajuće svojstvene vrijednosti, zadovoljava tražene uvjete.

Potrebno je još dokazati jedinstvenost preslikavanja B. Kako B komutira s P, jer vrijedi $B^2 = P$, slijedi da ako je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza sastavljena od svojstvenih vektora od P, tada je svaki vektor v_i svojstveni vektor za B. Budući da pozitivan broj ima jedinstveni pozitivni kvadratni korijen, slijedi da je B određen jedinstvenim linearnim preslikavanjem koje djeluje na v_i. To linearno preslikavanje je zapravo množenje s kvadratnim korijenom pripadajuće svojstvene vrijednosti za P. □

Teorem 2.7.12. *Neka je $A : E \to E$ invertibilno linearno preslikavanje. Tada A možemo zapisati na jedinstven način kao produkt $A = UP$, gdje je U unitaran, a P pozitivno definitan.*

Dokaz. Neka je $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ te neka vrijedi $U = AP^{-1}$. Koristeći definiciju, odmah dobivamo da je U unitaran pa slijedi postojanje dekompozicije. Potrebno je još dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da je $A = U_1P_1$ te neka je

$$U_2 = PP_1^{-1} = U^{-1}U_1.$$

Tada je U_2 unitaran pa vrijedi $U_2^*U_2 = I$. Iz činjenice da vrijedi $P^* = P$ i $P_1^* = P_1$ zaključujemo da vrijedi

$$P^2 = P_1^2.$$

Kako su P i P_1 hermitski pozitivno definitni, iz Propozicije 2.6.11. slijedi da je $P = P_1$, što je i trebalo dokazati. □

Napomena 2.7.13. *Prikaz $A = UP$ kao u teoremu zovemo polarna dekompozicija od A. Također, postoji jedinstvena dekompozicija $A = P_1U_1$, gdje je P_1 pozitivno definitan te U_1 unitaran.*

2.8 Spektralni teorem (simetrični slučaj)

Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ te neka je g simetrična, pozitivno definitna forma na E.

Ako je $A : E \to E$ linearno preslikavanje, tada je A^t transponirani operator od A koji zadovoljava sljedeću relaciju:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Za A kažemo da je simetričan ako vrijedi $A = A^t$.

Teorem 2.8.1 (Spektralni teorem, simetrični slučaj). *Neka je $E \neq 0$ vektorski prostor te neka je $A : E \to E$ simetrično linearno preslikavanje. Tada postoji ortogonalna baza za E sastavljena od svojstvenih vektora od A.*

Dokaz. Ako odaberemo ortogonalnu bazu za pozitivno definitnu formu, tada je matrica od A obzirom na ovu bazu realna simetrična matrica pa se tvrdnja reducira na slučaj $E = \mathbb{R}^n$. Neka je M matrica koja predstavlja A. Ako M djeluje na $\mathbb{C}^n$, tada M predstavlja hermitsko linearno preslikavanje. Neka je $z \neq 0$ kompleksni svojstveni vektor za M oblika

$$z = x + iy, \quad \text{gdje su} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Iz Propozicije 2.6.3. znamo da je svojstvena vrijednost od M λ pridružena z realna pa imamo $Mz = \lambda z$. Stoga vrijedi

$$Mx = \lambda x \ \text{ te } \ My = \lambda y.$$

Ali mora vrijediti da je $x \neq 0$ ili $y \neq 0$. Tako smo pronašli ne-nul svojstveni vektor za η pa i za A, u E. Sada možemo postupiti kao i prije. Ortogonalni komplement od tog svojstvenog vektora u E je dimenzije $(n-1)$ te ga A preslikava samog u sebe. Stoga dalje možemo nastaviti dokaz po indukciji kao i u prethodnim dokazima. □

Korolar 2.8.2. *Neka su pretpostavke jednake kao u prethodnom teoremu. Tada postoji ortonormirana baza sastavljena od svojstvenih vektora od A.*

Dokaz. Potrebno je podijeliti svaki vektor u ortogonalnoj bazi s njegovom normom. □

Korolar 2.8.3. *Neka je $E \neq 0$ konačnodimenzionalan vektorski prostor nad realnim poljem, na kojem je definirana simetrična, pozitivno definitna forma f. Neka je g neka druga simetrična forma na E. Tada postoji baza od E koja je ortogonalna za formu f i za formu g.*

Dokaz. Pišemo $f(x,y) = \langle x, y\rangle$. Kako je f nesingularna, jer je pozitivno definitna, tako postoji jedinstveno simetrično linearno preslikavanje takvo da vrijedi

$$g(x,y) = \langle Ax, y\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Primjenom teorema na A pronalazimo ortogonalnu bazu kao u teoremu. Očito je da je ta baza ortogonalna i u odnosu na formu g. □

2.9 Alternirajuće forme

Neka je E vektorski prostor nad proizvoljnim poljem K. Neka je f alternirajuća forma na E, odnosno bilinearno preslikavanje $f : E \times E \to K$ takvo da vrijedi $f(x,x) = x^2 = 0$, za svaki $x \in E$. Tada, uvrštavanjem $(x+y)$ umjesto x-a u jednakost $x^2 = 0$, dobivamo sljedeće:

$$x \cdot y = -y \cdot x, \quad \forall x, y \in E.$$

Definiramo hiperboličku ravninu, za alternirajuću formu, kao dvodimenzionalni vektorski prostor koji je nedegeneriran. Automatski dobivamo element $w \in E$ takav da je $w^2 = 0$ i $w \neq 0$. Ako je P hiperbolička ravnina te vrijedi $w \in P$, $w \neq 0$, tada postoji element $y \neq 0$, $y \in P$, takav da vrijedi $w \cdot y \neq 0$. Nakon dijeljenja y s nekom konstantom, možemo pretpostaviti da vrijedi $w \cdot y = 1$. Tada vrijedi i $y \cdot w = -1$. Stoga je matrica forme u odnosu na bazu $\{w, y\}$ sljedećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par w, y zovemo hiperbolički par. Ako dan dvodimenzionalni vektorski prostor nad poljem K s bilinearnom formom i parom elemenata $\{w, y\}$ zadovoljava relacije

$$w^2 = y^2 = 0, \qquad y \cdot w = -1, \qquad w \cdot y = 1,$$

tada je forma alternirajuća i (w, y) je hiperbolička ravnina za danu formu.

Za danu alternirajuću formu f na E kažemo da je E (ili f) hiperbolički ako se E može prikazati kao ortogonalna suma hiperboličkih ravnina. Kažemo da je E (ili f) nula ako vrijedi

$$x \cdot y = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

Teorem 2.9.1. *Neka je f alternirajuća forma na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru E nad poljem K. Tada je E ortogonalna suma njegove jezgre i hiperboličkog potprostora. Ako je E nedegeneriran, tada je E hiperbolički prostor te je njegova dimenzija parna.*

Dokaz. Znamo da je komplementarni potprostor jezgre nedegeneriran te stoga možemo pretpostaviti da je E nedegeneriran. Neka je $w \in E$, $w \neq 0$. Zatim, postoji i $y \in E$ takav da vrijedi $w \cdot y \neq 0$ te $y \neq 0$. Tada je (w, y) nedegeneriran, stoga je hiperbolička ravnina koju označavamo s P. Dalje imamo $E = P \oplus P^\perp$ te je $P^\perp$ nedegeneriran. Dokaz završavamo indukcijom. □

Korolar 2.9.2. *Sve alternirajuće nedegenerirane forme dane dimenzije nad poljem K su izometrične.*

Iz prethodnog teorema vidimo da postoji baza od E takva da matrica alternirajuće forme u odnosu na tu bazu ima oblik:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Radi lakšeg zapisa, možemo organizirati elemente baze naše ortogonalne sume hiperboličkih ravnina na način da je matrica forme jednaka

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gdje je I_r jedinična matrica reda $r \times r$. Sljedeću matricu zovemo standardnom alternirajućom matricom:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Korolar 2.9.3. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K, na kojem je definirana nedegenerirana, simetrična forma označena s $\langle \ , \ \rangle$. Neka je Ω nedegenerirana alternirajuća forma na E. Tada postoji dekompozicija u direktnu sumu, $E = E_1 \oplus E_2$ te simetričan izomorfizam A od E koji ima sljedeće svojstvo. Ako $x, y \in E$ zapišemo na sljedeći način:*

$$x = (x_1, x_2) \quad sa \quad x_1 \in E_1 \quad i \quad x_2 \in E_2,$$
$$y = (y_1, y_2) \quad sa \quad y_1 \in E_1 \quad i \quad y_2 \in E_2,$$

tada vrijedi:

$$\Omega(x, y) = \langle Ax_1, y_2 \rangle - \langle Ax_2, y_1 \rangle.$$

Dokaz. Uzmimo bazu od E takvu da je matrica od Ω standardna alternirajuća matrica. Neka je f simetrična nedegenerirana forma definirana na E dana skalarnim produktom u odnosu na tu bazu. Tada dobivamo dekompoziciju u direktnu sumu od E na potprostore E_1, E_2 takvu da vrijedi

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1).$$

Budući da je $\langle \ , \ \rangle$ nedegenerirana po pretpostavci, možemo pronaći automorfizam A koji daje traženi efekt. Zaključujemo da je A simetričan jer je forma f simetrična. □

2.10 Wittov teorem

U ovom poglavlju pretpostavljamo da su forme simetrične te da je polje karakteristike različite od 2.

Neka je E vektorski prostor nad poljem K na kojem je definirana simetrična forma. Kažemo da je E hiperbolička ravnina ako vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) forma definirana na E je nedegenerirana;

(2) E je dimenzije 2;

(3) postoji element $w \neq 0$ u E takav da vrijedi $w^2 = 0$.

Kažemo da je E hiperbolički prostor ako se može prikazati kao ortogonalna suma hiperboličkih ravnina. Tada kažemo da je i forma definirana na E hiperbolička.

Pretpostavimo dalje da je E hiperbolička ravnina koja sadrži element $w \neq 0$ tako da vrijedi $w^2 = 0$. Neka je $u \in E$ takav da vrijedi $E = (w, u)$. Tada znamo da vrijedi i $u \cdot w \neq 0$, inače bi w bio ne-nul element jezgre, odnosno forma bi bila degenerirana. Neka je $b \in K$ takav da vrijedi $w \cdot bu = bw \cdot u = 1$. Tada odabiremo $a \in K$ tako da vrijedi

$$(aw + bu)^2 = 2abw \cdot u + b^2u^2 = 0.$$

(Potrebno je riješiti linearnu jednadžbu po a.) Stavimo $v = aw + bu$. Time smo pronašli bazu za E, u oznaci $E = (w, v)$, takvu da vrijedi

$$w^2 = v^2 = 0 \quad \text{i} \quad w \cdot v = 1.$$

U odnosu na tu bazu, matrica forme je sljedećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obratno, promatramo prostor E koji ima bazu $\{w, v\}$, koja zadovoljava sljedeće relacije: $w^2 = v^2 = 0$ i $w \cdot v = 1$ te je nedegenerirana. U tom slučaju je E hiperbolička ravnina. Bazu $\{w, v\}$ koja zadovoljava prethodne relacije zovemo hiperboličkim parom.

Ortogonalna suma sastavljena od nedegeneriranih prostora je nedegenerirana te je stoga hiperbolički prostor nedegeneriran. Dimenzija hiperboličkog prostora je uvijek parna.

Lema 2.10.1. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K, na kojem je definirana nedegenerirana simetrična forma g. Neka je F potprostor od E, neka je F_0 jezgra od F te pretpostavimo da imamo ortogonalnu dekompoziciju*

$$F = F_0 \perp U.$$

Neka je $\{w_1, \dots, w_s\}$ baza od F_0. Tada postoje elementi $v_1, \dots, v_s$ sadržani u E okomiti na U, pri čemu je svaki par $\{w_i, v_i\}$ hiperbolički par koji generira hiperboličku ravninu P_i. Na ovaj način dobivamo orgonalnu dekompoziciju

$$U \perp P_1 \perp \cdots \perp P_s.$$

Dokaz. Neka je

$$U_1 = (w_2, \dots, w_s) \oplus U.$$

Tada je U_1 strogo sadržan u $F_0 \oplus U$ te zbog toga proizlazi da je $(F_0 \oplus U)^{\perp}$ strogo sadržan u $U_1^{\perp}$. Stoga postoji element $u_1 \in U_1^{\perp}$ za koji vrijedi

$$u_1 \notin (F_0 \oplus U)^{\perp}.$$

Imamo $w_1 \cdot u_1 \neq 0$ te je stoga (w_1, u_1) hiperbolička ravnina P_1. Prethodno smo vidjeli da možemo pronaći element $v_1 \in P_1$ takav da je $\{w_1, v_1\}$ hiperbolički par. Osim toga, dobivamo sljedeću dekompoziciju u ortogonalnu sumu:

$$F_1 = (w_2, \dots, w_s) \perp P_1 \perp U.$$

Tada je jasno da je $(w_2, \dots, w_s)$ jezgra za F_1 te dokaz možemo završiti indukcijom. □

Prije iskaza sljedećeg teorema, potrebno je definirati pojam izometrije.

Definicija 2.10.2. *Neka su E i $E^{'}$ konačnodimenzionalni vektorski prostori s redom definiranim formama g i g' na njima. Za linearno preslikavanje $\sigma : E \to E^{'}$ kažemo da je metričko ako vrijedi*

$$g' \neq (\sigma x, \sigma y) = g(x, y)$$

odnosno

$$\sigma x \cdot \sigma y = x \cdot y, \quad \forall x, y \in E.$$

Ako je σ linearni izomorfizam, kažemo da je σ izometrija.

Teorem 2.10.3. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K te neka je g nedegenerirana simetrična forma definirana na E. Neka su F i $F^{'}$ potprostori od E te neka je preslikavanje $\sigma : F \to F^{'}$ izometrija. Tada σ možemo proširiti do izometrije od E na samoga sebe.*

Dokaz. Prvo svodimo dokaz na slučaj kada je F nedegeneriran. Možemo pisati $F = F_0 \perp U$ kao u lemi u prethodnom potpoglavlju te tada vrijedi

$$\sigma F = F^{'} = \sigma F_0 \perp \sigma U.$$

Osim toga, $\sigma F_0 = F_0^{'}$ je jezgra od $F^{'}$. Sada možemo proširiti F i $F^{'}$ kao u lemi do ortogonalnih suma:

$$U \perp P_1 \perp \cdots \perp P_s \quad \text{i} \quad \sigma U \perp P_1^{'} \perp \cdots \perp P_s^{'}$$

uz odgovarajući odabir baze u F_0 te odgovarajuću sliku u $F_0^{'}$. Tako možemo proširiti σ do izometrije na proširenim prostorima koji su nedegenerirani. To nam daje željenu redukciju.

Pretpostavimo da su F i $F^{'}$ nedegenerirani. Postupamo postepeno.

Pretpostavimo prvo da vrijedi $F^{'} = F$, odnosno da je σ izometrija od F na samog sebe. Možemo proširiti σ na E jednostavno fiksiranjem svakog elementa sadržanog u $F^{\perp}$.

Dalje, pretpostavimo da je $\dim F = \dim F^{'} = 1$ te tada vrijedi $F \neq F^{'}$. Neka je $F = (v)$ te $F^{'} = (v')$. Tada vrijedi $v^2 = v'^2$. Osim toga, dimenzija od (v, v') je jednaka 2.

Ako je (v, v') nedegeneriran, onda σ proširimo na izometriju koja v preslikava u v' i obratno. Sada možemo primijeniti prethodni korak kako bismo završili dokaz.

Ako je (v, v') degeneriran, onda je dimenzija njegove jezgre jednaka 1. Neka je w baza za tu jezgru. Tada postoje $a, b \in K$ takvi da vrijedi $v' = av + bw$. Tada vrijedi $v'^2 = a^2v^2$ te stoga slijedi $a = \pm 1$. Ako je potrebno, zamijenimo v' s $-v'$ te možemo pretpostaviti da je $a = 1$. Zamjenom w sa bw možemo pretpostaviti i $v' = v + w$. Neka je $z = v + v'$. Primijenjujemo Lemu 2.9.1. na prostor

$$(w, z) = (w) \perp (z).$$

Možemo pronaći element $y \in E$ tako da vrijedi

$$y \cdot z = 0, \quad y^2 = 0 \ \text{ i } \ w \cdot y = 1.$$

Prostor $(z, w, y) = (z) \perp (w, y)$ je nedegeneriran jer je ortogonalna suma od (z) i hiperboličke ravnine (w, y). On ima izometriju koja preslikava

$$z \leftrightarrow z, \quad w \leftrightarrow -w, \quad y \leftrightarrow -y.$$

Ali, po toj izometriji, $v = \frac{1}{2}(z - w)$ je preslikano u $v' = \frac{1}{2}(z + w)$. Sada imamo rješenje ovog slučaja.

Dovršavamo dokaz teorema indukcijom. Zbog egzistencije ortogonalne baze za F, svaki potprostor od F dimenzije > 1 ima ortogonalnu dekompoziciju na sumu potprostora manjih dimenzija. Neka je $F = F_1 \perp F_2$, gdje su dimenzije od F_1 i $F_2 \geq 1$. Tada vrijedi

$$\sigma F = \sigma F_1 \perp \sigma F_2.$$

Neka je $\sigma_1 = \sigma | F_1$ restrikcija σ na F_1. Po indukciji, možemo proširiti σ_1 do izometrije

$$\overline{\sigma_1} : E \to E.$$

Tada vrijedi $\overline{\sigma_1}(F_1^{\perp}) = (\sigma_1 F_1)^{\perp}$. Budući da je σF_2 ortogonalan sa $\sigma F_1 = \sigma_1 F_1$, slijedi da je σF_2 podskup skupa $\overline{\sigma_1}(F_1^{\perp})$. Neka je $\sigma_2 = \sigma|F_2$. Tada izometriju

$$\sigma_2 : F_2 \to \sigma_2 F_2 = \sigma F_2$$

možemo proširiti do izometrije

$$\overline{\sigma_2} : F_1^{\perp} \to \overline{\sigma_1}(F_1^{\perp}).$$

Par $(\sigma_1, \overline{\sigma_2})$ daje izometriju sa $F_1 \perp F_1^{\perp} = E$ na E, kao što smo i željeli. □

Korolar 2.10.4. *Neka su E i E' konačnodimenzionalni vektorski prostori s nedegeneriranim simetričnim formama. Pretpostavimo da su E i E' izometrični. Neka su F i F' potprostori te neka je $\sigma : F \to F'$ izometrija. Tada σ možemo proširiti do izometrije sa E u E'.*

Dokaz. Očit. □

Neka je E prostor sa simetričnom formom g te neka je F nul-potprostor. Tada po Lemi 2.9.1., možemo uložiti F u hiperbolički potprostor H čija je dimenzija $2 \dim F$. Primjenom Teorema 2.9.2., dobivamo nekoliko sljedećih korolara.

Korolar 2.10.5. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor na kojem je definirana nedegenerirana simetrična forma. Neka je W maksimalni nul-potprostor te neka je W' neki nul-potprostor. Tada vrijedi $\dim W' \leq \dim W$ te je W' sadržan u nekom maksimalnom nul-potprostoru, čija je dimenzija jednaka kao i dimenzija od W.*

Dokaz. Činjenica da je W' sadržan u maksimalnom nul-potprostoru slijedi iz Zornove leme. Pretpostavimo da vrijedi $\dim W' \geq \dim W$. Imamo izometriju od W na potprostor od W' koju možemo proširiti na izometriju od E na samog sebe. Tada je $\sigma^{-1}(W')$ nul-potprostor koji sadrži W, stoga je jednak W odakle slijedi $\dim W = \dim W'$. Tvrdnje slijede zbog simetrije. □

Neka je E vektorski prostor na kojem je definirana nedegenerirana simetrična forma. Neka je W nul-potprostor. Po Lemi 2.9.1. možemo uložiti W u hiperbolički potprostor H od E tako da je W maksimalni nul potprostor od H te je H nedegeneriran. Bilo koji takav H nazivamo hiperboličko proširenje od W.

Korolar 2.10.6. *Neka je E konačnodimenzionalan vektorski prostor na kojem je definirana nedegenerirana simetrična forma. Neka su W i W' maksimalni nul potprostori. Neka su H i H' hiperbolička proširenja od W i W' redom. Tada su H i H' izometrični kao i $H^{\perp}$ i $H'^{\perp}$.*

Dokaz. Očito imamo izometriju od H na H' koja može biti proširena na izometriju od E na sebe samog. Ta izometrija preslikava $H^{\perp}$ u $H'^{\perp}$ kao što smo i željeli. □

Korolar 2.10.7. *Neka su g_1, g_2 i h simetrične forme definirane na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima nad poljem K. Ako je $g_1 \oplus h$ izometrična s $g_2 \oplus h$ te ako su g_1 i g_2 nedegenerirane, tada je g_1 izometrična s g_2.*

Dokaz. Neka je g_1 forma na E_1 te g_2 forma na E_2. Neka je h forma na F. Tada imamo izometriju između $F \oplus E_1$ i $F \oplus E_2$. Po Korolaru 2.9.3. proširujemo funkciju identitete id : $F \to F$ na izometriju σ sa $F \oplus E_1$ na $F \oplus E_2$. Budući da su E_1 i E_2 redom ortogonalni komplementi od F, vrijedi $\sigma(E_1) = E_2$ čime je tvrdnja dokazana. □

Ako je g simetrična forma na E. Kažemo da je g definitna ako vrijedi

$$g(x, x) \neq 0, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0,$$

tj. vrijedi $x^2 \neq 0$ ako je $x \neq 0$.

Korolar 2.10.8. *Neka je g simetrična forma na E. Tada g ima dekompoziciju u ortogonalnu sumu*

$$g = g_0 \oplus g_{hyp} \oplus g_{def}$$

gdje je g_0 nul-forma, g_{hyp} hiperbolička forma te g_{def} definitna. Forma $g_{hyp} \oplus g_{def}$ je nedegenerirana. Forme g_0, g_{hyp} te g_{def} su jedinstveno određene do na izometriju.

Dokaz. Dekompozicija $g = g_0 \oplus g_1$, gdje je g_0 nul-forma te g_1 nedegenerirana forma, je jedinstvena do na izometriju, budući da g_0 odgovara jezgri od g.

Možemo pretpostaviti da je g nedegenerirana. Ako vrijedi

$$g = g_h \oplus g_d$$

gdje je g_h hiperbolička forma te g_d definitna forma, tada g_h odgovara hiperboličkom proširenju nekog maksimalnog nul-potprostora te po Korolaru 2.9.5. slijedi da je g_h jedinstveno određena.

Stoga je g_d jedinstveno određena kao ortogonalni komplement od g_h (do na izometriju). Skratili smo oznake g_{hyp} s g_h te g_{def} s g_d. □

2.11 Wittova grupa

Neka su g i φ simetrične forme definirane na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru nad poljem K. Kažemo da su forme ekvivalentne ako je g_d izometrična s φ_d. Lagano se provjerava da je tako definirana relacija ekvivalencije. Osim toga, (ortogonalna) suma dviju nul-forma je također nul-forma, a suma dviju hiperboličkih forma je hiperbolička. Međutim, suma dviju definitnih formi ne mora biti definitna. Prije spomenutu ekvivalenciju zapisujemo s $g \sim \varphi$. Ekvivalencija je očuvana pod ortogonalnim sumama te stoga klase ekvivalencije simetričnih formi čine monoid.

Teorem 2.11.1. *Monoid klasa ekvivalencije simetričnih formi (nad poljem K) je grupa.*

Dokaz. Moramo pokazati da svaki element ima aditivni inverz. Neka je g simetrična forma za koju možemo pretpostaviti da je definitna. Neka je forma $-g$ takva da je

$$(-g)(x, y) = -g(x, y).$$

Tvrdimo da je $g \oplus -g$ ekvivalentno 0. Neka je E prostor na kojem je definirana forma g. Tada je $g \oplus -g$ definirana na $E \oplus E$. Neka je W potprostor koji se sastoji od svih parova (x, x), gdje je $x \in E$. Tada je W nul prostor za $g \oplus -g$. Kako je

$$\dim(E \oplus E) = 2\dim W,$$

slijedi da je W maksimalni nul prostor te da je $g \oplus -g$ hiperbolička, kao što je trebalo pokazati. □

Grupu iz Teorema 2.10.1. zovemo Wittovom grupom polja K te je označavamo s $W(K)$. Ona je važna u proučavanju prikaza elemenata iz K kvadratnom formom f koja proizlazi iz g (tj. $f(x) = g(x, x)$), na primjer kada želimo klasificirati definitne forme f.

Bibliografija

[1] K. Horvatić, *Linearna algebra I.dio*, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatsko matematičko društvo, 1995.

[2] K. Horvatić, *Linearna algebra II.dio*, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatsko matematičko društvo, 2001.

[3] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] V. Perić, *Algebra II.dio*, IGKRO Svjetlost OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo, 1980.

[6] B. Širola, *Algebarske strukture*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf`.

Sažetak

Tri su glavna tipa bilinearnih formi: simetrične, unitarne i alternirajuće. U ovom diplomskom radu dajemo strukturne teoreme o matričnim prikazima ovih formi s obzirom na odgovarajuće baze. Rad između ostalog, prati standardni postupak rastava objekata na direktnu sumu prostih objekata, koliko je to moguće.

Nakon prvog poglavlja, u kojem su definirani osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje daljnjeg sadržaja rada, slijedi drugo poglavlje koje je podijeljeno u jedanaest potpoglavlja. Pobliže promatramo blinearna te kvadratna preslikavanja, a također i bilinearne i kvadratne forme. Dokazujemo također i egzistenciju ortogonalne baze za simetrične bilinearne forme te donosimo dijagonalni prikaz te forme. Zatim promatramo simetrične bilinearne forme definirane nad uređenim poljem te iskazujemo i dokazujemo Sylvesterov teorem te opisujemo induktivni postupak, *Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije*. Donosimo i dokaz egzistencije ortogonalne baze za vektorski prostor na kojem je definirana hermitska forma, a nakon toga slijede spektralni teoremi, u hermitskom, unitarnom te simetričnom slučaju. Slijede alternirajuće bilinearne forme te uvođenje definicija hiperboličke ravnine te hiperboličkog prostora. Na kraju, iskazujemo te dokazujemo Wittov teorem te definiramo pojam Wittove grupe.

Summary

There are three major types of blinear forms: symmetric, unitary, and alternating. In this diploma thesis, we present structural theorems giving normalized expressions for these forms with respect to suitable bases. We follow the standard pattern of decomposing an object into a direct sum of simple objects, insofar as possible.

After the first chapter, in which the basic concepts necessary to understand the further contents of the work were defined, follows the second chapter which is divided into eleven subsections. We closely study bilinear and quadratic maps and also bilinear and quadratic forms. We also prove the existence of orthogonal basis for symmetric bilinear forms and present the diagonal representation of this form. Furthermore, we study bilinear symmetric forms defined on an ordered field, we state and prove Sylvester theorem and we describe the inductive process, *Gram-Schmidt orthogonalization process*. We present the proof of existence of orthogonal basis for a vector space in which the hermitian form is defined, followed by spectral theorems, in hermitian, unitary and symmetric cases. After that we study alternating bilinear forms and define hyperbolic plane and hyperbolic space. Finally, we state the Witt theorem and define the concept of Witt group.

Životopis

Rođena sam 22.05.1989. godine u Zagrebu. Živim u općini Veliko Trgovišće, gdje sam i pohađala osnovnu školu, OŠ Veliko Trgovišće od 1996. - 2004. godine. Nakon toga, upisala sam prirodoslovno-matematičku gimnaziju, Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2008. godine te iste godine upisujem prvu godinu preddiplomskog sveučilišnog studija Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2014. završavam preddiplomski sveučilišni studij te stječem akademski naziv sveučilišni prvostupnik (baccalaureus) matematike, univ. bacc. math. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer nastavnički. Godine 2016. završavam upisani diplomski studij, zaključno s obranom ovog diplomskog rada.