

# Geometrijske v\_k konfiguracije

---

**Barić, Valentina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:872272>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2020-12-04**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Valentina Barić

# Geometrijske $v_k$ konfiguracije

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, travanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

1	Uvod	1
2	Definicija geometrijske konfiguracije	2
3	Simetrije geometrijskih konfiguracija	10
4	Konfiguracije $v_3$	16
5	Konfiguracije $v_k$ za $k \geq 4$	25
6	Zvezdaste konfiguracije	29
	Literatura	35
	Sažetak	36
	Summary	37
	Životopis	38

# 1 Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je dati pregled poznatih rezultata o postojanju geometrijskih  $(v_k)$  konfiguracija prema knjizi *Configurations of Points and Lines* Branka Grünbauma. Geometrijska  $(v_k)$  konfiguracija je skup  $v$  točaka i  $v$  pravaca u euklidskoj ravnini, takav da svaki pravac prolazi kroz  $k$  točaka, a svakom točkom prolazi  $k$  pravaca.

U prvom poglavlju definiramo kombinatornu, a zatim i geometrijsku konfiguraciju. Na primjerima opisujemo način na koji prikazujemo konfiguracije, geometrijske pomoću točaka i pravaca u euklidskoj ravnini, a kombinatorne konfiguracije prikazujemo tablicama. Zatim ćemo dokazati nužne uvjete za egzistenciju kombinatorne konfiguracije. Postoje tri neizomorfne  $(9_3)$  konfiguracije, sve tri ćemo prikazati konfiguracijskom tablicom i slikom, ali najviše ćemo se baviti Papusovom  $(9_3)_1$  konfiguracijom. U idućem poglavlju bavimo se simetrijama geometrijskih konfiguracija. Definiramo pojmove izomorfizma i automorfizma konfiguracija, simetrija skupa, simetrične konfiguracije. Grupe simetrija geometrijske konfiguracije mogu biti ciklička grupa ili diedralna grupa. Geometrijskim konfiguracijama  $(7_3)$ ,  $(9_3)_1$ ,  $(9_3)_2$  i  $(9_3)_3$  određujemo pune grupe automorfizama i grupu simetrija. Na kraju poglavlja definiramo orbitu i određujemo orbite točaka i pravaca konfiguracija  $(9_3)_1$ ,  $(25_4)$ ,  $(30_4)$  i  $(15_3)$ .

Na početku trećeg poglavlja odgovaramo na pitanje za koje  $v$  geometrijske i kombinatorne  $(v_3)$  konfiguracije postoje. Prikazali smo poznate rezultate o broju neizomorfnih konfiguracija  $(v_3)$  za neke vrijednosti  $v$ . Postoji deset neizomorfnih kombinatornih konfiguracija  $(10_3)$ , od kojih se najviše bavimo konfiguracijom  $(10_3)_1$ , Desarguesovom konfiguracijom. Od preostalih devet samo se konfiguracija  $(10_3)_4$  ne može geometrijski realizirati, što smo i dokazali u radu. Osam preostalih konfiguracija prikazano je na slikama. U četvrtom poglavlju prikazali smo dosad poznate rezultate o geometrijskim  $(v_k)$  konfiguracijama za  $k \geq 4$ . U zadnjem poglavlju definirali smo  $h$ -zvjezdaste  $(v_3)$  i  $(v_4)$  konfiguracije. Dvije su vrste  $h$ -zvjezdastih  $(v_3)$  konfiguracija,  $h$ -kiralne (konfiguracije s cikličkom grupom simetrija) i  $h$ -diedralne (konfiguracije s diedralnom grupom simetrija). Dalje u poglavlju prikazujemo način konstruiranja  $h$ -kiralnih zvjezdastih konfiguracija za  $h = 2$ .

Sve slike napravljene su u programu dinamične geometrije *GeoGebra* [3]. Budući da je u radu većinom riječ o simetričnim konfiguracijama s cikličkom ili diedralnom grupom simetrija, tako se i konstrukcija tih konfiguracija zasnivala na rotaciji/osnoj simetriji točaka i pravaca. Neke od konstrukcija nastale su praćenjem koraka u konstrukciji iz knjige [4], dok su neke nastale primjenom teorema, konkretno Papusova i Desarguesova.

## 2 Definicija geometrijske konfiguracije

U ovom poglavlju dat ćemo osnovne definicije, opisati načine na koje prikazujemo konfiguracije i navesti primjere određenih geometrijskih konfiguracija.

**Definicija 2.1.** *Konačna incidencijska struktura  $\mathcal{C}$  je uređena trojka  $\mathcal{C} = (V, B, I)$ , pri čemu je  $V$  konačan skup čije elemente nazivamo točkama,  $B$  konačan skup čije elemente nazivamo blokovima ili pravcima, a  $I \subseteq V \times B$  je relacija incidencije.*

Ako je  $(A, p) \in I$  kažemo da je točka  $A$  incidentna s pravcem  $p$ , geometrijski rečeno točka  $A$  leži na pravcu  $p$ . Budući da su ovi objekti kombinatornog tipa, ponekad incidencijsku strukturu zovemo apstraktnom ili kombinatornom incidencijskom strukturom.

Elemente skupa  $V$  označavamo  $A, B, C, \dots$  (velikim slovima) ili s  $1, 2, 3, \dots$ , dok elemente skupa  $B$  označavamo  $a, b, c, \dots$  (malim slovima) ili s  $[1], [2], [3]$ , itd.

**Definicija 2.2.** *Konačnu incidencijsku strukturu nazivamo  $(v_r, b_k)$  kombinatornom konfiguracijom ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *sastoji se od  $v$  točaka i  $b$  pravaca,*
2. *kroz svaku točku prolazi  $r$  pravaca, a na svakom pravcu leži  $k$  točaka,*
3. *dva različita pravca se sijeku najviše u jednoj točki, a dvije različite točke leže na najviše jednom pravcu.*

Kombinatorne konfiguracije prikazujemo kao **konfiguracijske tablice** gdje će točke biti simboli (obično velika slova ili znamenke), a pravci skupovi tih simbola. Npr. u tablici 1, kojom je zadana  $(16_3, 12_4)$  konfiguracija, slova  $A, B, C, \dots, P$  predstavljaju točke, a skup  $\{A, H, I, C\}$  predstavlja pravac na kojem leže točke  $A, H, I$  i  $C$ . Pravce navodimo kao stupce konfiguracijske tablice.

A	A	A	H	B	B	B	I	C	C	J	D
H	N	G	N	H	N	I	P	O	J	O	K
I	O	L	P	G	M	J	M	M	K	P	L
C	D	E	K	F	E	D	L	F	E	G	F

Tablica 1: Prikaz kombinatorne konfiguracije  $(16_3, 12_4)$ .

**Definicija 2.3.** Neka je  $\mathcal{C}$  konačna incidencijska struktura sa skupom točaka  $V = \{T_1, \dots, T_v\}$  i skupom pravaca  $B = \{p_1, \dots, p_b\}$ . Incidencijska matrica od  $\mathcal{C}$  je  $v \times b$  matrica  $A = [a_{ij}]$  definirana s

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (T_i, p_j) \in I \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Na primjer, incidencijska matrica  $(16_3, 12_4)$  konfiguracije zadane tablicom 1 je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Propozicija 2.4.** Nužni uvjeti za egzistenciju kombinatorne  $(v_r, b_k)$  konfiguracije su:

1.  $vr = bk$ ,
2.  $v \geq r(k - 1) + 1$ .

*Dokaz.* 1) Po definiciji 2.2 kroz svaku točku prolazi  $r$  pravaca, a svaki pravac sadrži  $k$  točaka. Imamo da je  $bk$  broj pravaca puta broj točaka na njemu, a  $vr$  broj točaka puta broj pravaca koji prolaze kroz točku. Oba broja su jednaka ukupnom broju incidencija u relaciji  $I$ .

2) Neka je  $T_0$  fiksna točka. Prebrojimo na dva načina elemente skupa

$$\{(T, p) | T \in V, T \neq T_0, T, T_0Ip\}.$$

Točku  $T$  možemo odabrati na  $v - 1$  načina, a pravac koji prolazi kroz  $T$  i  $T_0$  najviše na jedan način. Prema tome, skup sadrži najviše  $v - 1$  parova.

Pravac  $p$  kroz  $T_0$  možemo odabrati na  $r$  načina, a na svakom leži  $k - 1$  točaka  $T$  različitih od  $T_0$ . Dakle, parova ima  $r(k - 1)$ .

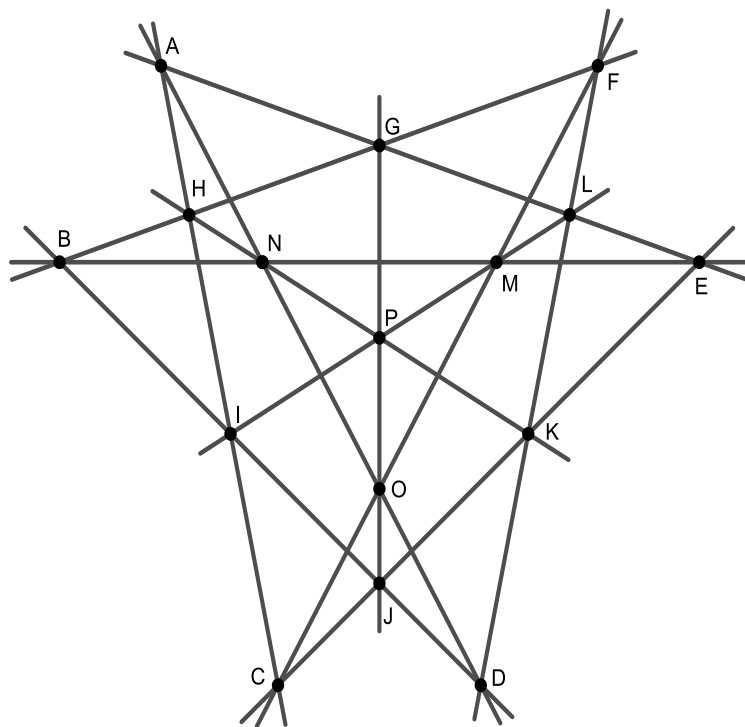
Vidimo da vrijedi  $r(k - 1) \leq v - 1$ , tj.  $v \geq r(k - 1) + 1$ .

□

**Korolar 2.5.** U  $(v_r, b_k)$  konfiguraciji vrijedi  $v = b$  ako i samo ako vrijedi  $r = k$ .

Takve konfiguracije, u kojima vrijedi  $v = b$  ili  $r = k$ , nazivamo kvadratnim i parametre označavamo  $(v_k)$  ili  $v_k$ . U literaturi se koristi i naziv simetrične konfiguracije, ali u ovom radu koristit ćemo taj termin na drugi način (vidi cjelinu 3).

**Definicija 2.6.** *Geometrijska  $(v_r, b_k)$  konfiguracija* je skup  $v$  točaka i  $b$  pravaca u euklidskoj ravnini takav da svakom točkom prolazi  $r$  pravaca, a na svakom pravcu leži  $k$  točaka. Geometrijska konfiguracija predstavlja realizaciju kombinatorne konfiguracije u euklidskoj ravnini.



Slika 1: Konfiguracija  $(16_3, 12_4)$ .

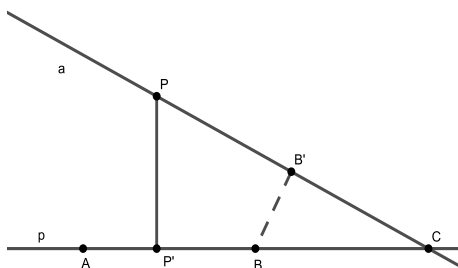


Na slici 1 prikazana je geometrijska konfiguracija  $(16_3, 12_4)$ , koja se sastoji od 16 točkaka i 12 pravaca. Kroz svaku točku prolaze tri pravca te na svakom pravcu leže četiri točke. Geometrijske konfiguracije prikazivat ćemo takvim slikama.

Svaku geometrijsku konfiguraciju moguće je prikazati konfiguracijskom tablicom. Dakle, svaka geometrijska konfiguracija jednoznačno određuje kombinatornu konfiguraciju s istim parametrima. Postavlja se pitanje može li se svaka kombinatorna konfiguracija realizirati kao geometrijska konfiguracija? Odgovor je negativan, nije svaku kombinatornu konfiguraciju moguće prikazati u euklidskoj ravnini. To slijedi iz sljedećeg teorema.

**Teorem 2.7** (Sylvester - Gallai). *Neka je zadan konačan broj nekolinearnih točkaka u euklidskoj ravnini. Tada postoji pravac koji prolazi kroz točno dvije od zadanih točkaka.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{T}$  zadani skup točkaka, a  $\mathcal{P}$  skup svih pravaca na kojima leže bar dvije točke iz skupa  $\mathcal{T}$ . Ako je  $|\mathcal{T}| = n$ , onda je  $|\mathcal{P}| \leq \binom{n}{2}$ , tj. oba skupa su konačna. Zbog konačnosti postoji par  $(P, p) \in \mathcal{T} \times \mathcal{P}$  neincidentne točke i pravca iz tih skupova za koje je udaljenost  $d(P, p)$  minimalna. Tvrdimo da pravac  $p$  sadrži točno dvije točke iz skupa  $\mathcal{T}$ .



Slika 2: Oznake Sylvester - Gallai teorem.

Pretpostavimo suprotno, tj. da pravac  $p$  sadrži barem tri točke iz zadanog skupa točkaka i označimo ih s  $A, B, C$ . Točka  $P'$  označava ortogonalnu projekciju točke  $P$  na pravac  $p$ . Od točkaka  $A, B$  i  $C$  dvije se nalaze na istom polupravcu pravca  $p$  s početkom u točki  $P'$ , kao na slici 2. Bez smanjenja općenitosti neka su te dvije točke  $B$  i  $C$  i neka je točka  $B$  bliža točki  $P'$  ili se podudara s točkom  $P'$ . Neka pravac  $a$  prolazi točkama  $P$  i  $C$ , nacrtajmo okomicu iz  $B$  na  $a$  i označimo točku presjeka s  $B'$ . Budući da su trokuti

$\triangle PP'C$  i  $\triangle BB'C$  slični po KK poučku o sličnosti trokuta, vrijedi

$$d(B, a) < d(P, p).$$

To je u kontradikciji s pretpostavkom da se za par  $(P, p)$  postiže minimalna udaljenost.  $\square$

Konfiguraciju  $(7_3)$  nazivamo Fanovom ravninom. Sastoji se od 7 točaka i 7 pravaca, svakom točkom prolaze tri pravca, a na svakom pravcu leže tri točke. Naziv je dobila po talijanskom matematičaru Gini Fanu (1871. – 1952.). Nije ju moguće realizirati kao geometrijsku konfiguraciju. Incidencijska matrica Fanove ravnine je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

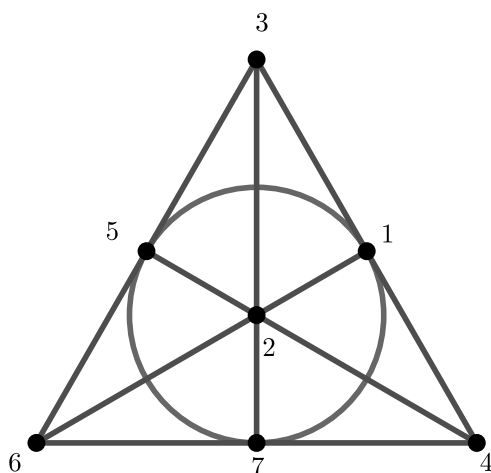
Incidencijska struktura  $\mathcal{C} = (V, B, I)$  naziva se *projektivnom ravninom* ako zadovoljava sljedeće aksiome:

1. svake dvije točke spojene su jedinstvenim pravcem,
2. svaka dva pravca imaju zajedničku točku (sjecište),
3. postoje četiri točke tako da nikoje tri od njih nisu kolinearne, tj. nisu sve tri incidentne s nekim pravcem.

Vrijedi i da skupovi  $V$  i  $B$  imaju barem po 7 elemenata, pri čemu svakom točkom prolaze barem 3 pravca, a na svakom pravcu leže barem 3 točke. Projektivne ravnine koje imaju konačan broj točaka i pravaca nazivamo konačnim projektivnim ravninama.

**Definicija 2.8.** Za konačnu projektivnu ravninu kažemo da je reda  $n$  ako postoji pravac s kojim je incidentno točno  $n + 1$  točaka.

**Teorem 2.9.** Konačna projektivna ravnina reda  $n$  sastoji se točno od  $n^2 + n + 1$  točaka i isto toliko pravaca. Na svakom pravcu leži  $n + 1$  točaka i kroz svaku točku prolazi  $n + 1$  pravaca.



Slika 3: Fanova ravnina.

Fanova ravnina je najmanja konačna projektivna ravnina i ona je reda 2. Kad bismo je mogli uložiti u euklidsku ravninu, po teoremu 2.7 postojao bi pravac na kojem leže točno dvije točke. To je u kontradikciji s time da na svakom pravcu leže tri točke. Slijedi da se Fanova ravnina ne može realizirati kao geometrijska konfiguracija. Ovo je ujedno dokaz da se ostale konačne projektivne ravnine ne mogu uložiti u euklidsku ravninu.

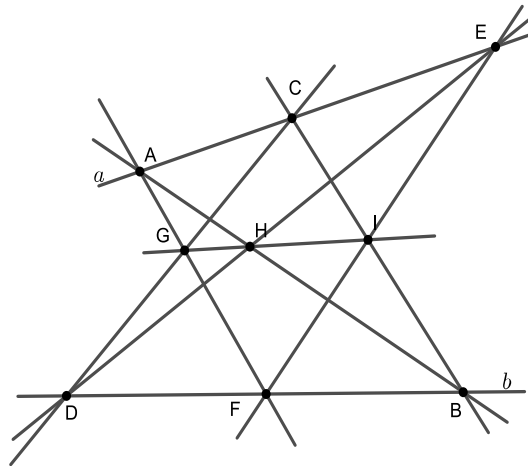
Fanovu ravninu obično prikazujemo kao na slici 3, sa 6 pravaca, a sedmi “pravac” je zakrivljen, odnosno kružnica.

Glavna tema ovoga rada su geometrijske  $(v_k)$  konfiguracije. Najmanja takva geometrijska  $(v_k)$  konfiguracija je konfiguracija  $(9_3)$  koja je prikazana na slici 4 i naziva se Paposovom konfiguracijom. Dobila je naziv po grčkom matematičaru Papsu iz Aleksandrije (290. – 350.). Konfiguracija se temelji na Paposovom teoremu o šesterovrhu. Sastoji se od 9 točaka i 9 pravaca, svakom točkom prolaze tri pravca, a na svakom pravcu leže tri točke.

A	A	A	D	D	D	I	I	I
B	E	G	B	E	G	B	E	G
H	C	F	F	H	C	C	F	H

Tablica 2: Konfiguracijska tablica za  $(9_3)_1$ .

**Teorem 2.10** (Papusov teorem). *Neka vrhovi  $A, C, E$  šesterovrha  $ABCDEF$  leže na pravcu  $a$ , a vrhovi  $D, F, B$  na pravcu  $b$ . Sjecišta  $G, H, I$  parova nasuprotnih stranica toga šesterovrha su kolinearne točke. Točku  $H$  dobijemo kao presjek stranica  $AB$  i  $DE$ , točku  $I$  kao presjek stranica  $BC$  i  $EF$  i točku  $G$  kao presjek stranica  $AF$  i  $CD$ .*



Slika 4: Konfiguracija  $(9_3)_1$ .

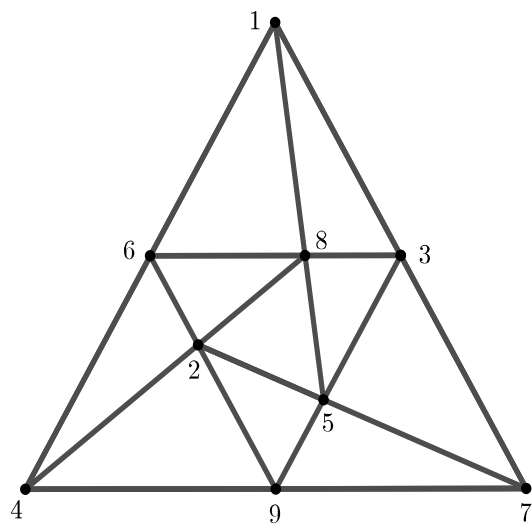
Postoje tri  $(9_3)$  konfiguracije koje nisu izomorfne (vidi definiciju 3.2). Prva  $(9_3)$  konfiguracija je Papusova konfiguracija i označavat ćemo je  $(9_3)_1$ . Pogledajmo sada konfiguracije  $(9_3)_2$  i  $(9_3)_3$  dane konfiguracijskim tablicama 3 i 4 i prikazane na slikama 5 i 6. Moguće ih je smjestiti u euklidsku ravninu, ali uz posebno odabran položaj točaka. Kod Papusove konfiguracije položaj točaka možemo odabrati po volji, tako da zadovoljavaju pretpostavke teorema 2.10.

1	1	1	2	2	2	3	3	4
3	4	5	4	5	6	5	6	7
7	6	8	8	7	9	9	8	9

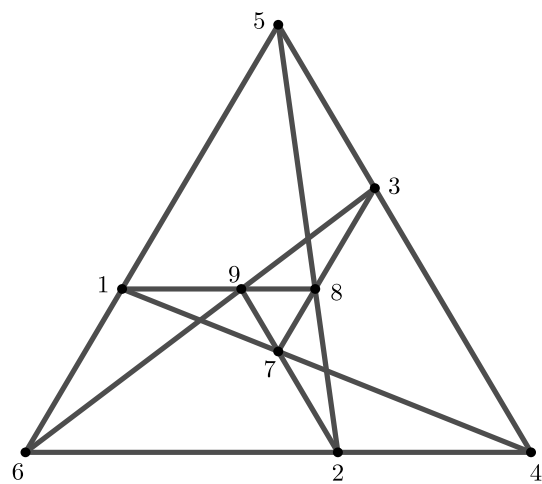
Tablica 3: Konfiguracijska tablica za  $(9_3)_2$ .

1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	5	8	4	5	7	4	6	7
7	6	9	6	8	9	5	9	8

Tablica 4: Konfiguracijska tablica za  $(9_3)_3$ .



Slika 5: Konfiguracija  $(9_3)_2$ .



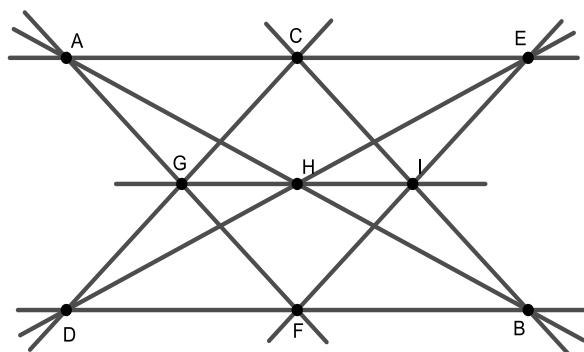
Slika 6: Konfiguracija  $(9_3)_3$ .

### 3 Simetrije geometrijskih konfiguracija

Pod simetrijom nekog objekta obično smatramo preslikavanje tog objekta u samoga sebe pri čemu se sačuvaju osobine objekta. U ovom poglavlju reći ćemo malo više o simetrijama geometrijskih konfiguracija.

**Definicija 3.1.** *Neka su  $\mathcal{C}_1 = (V_1, B_1, I_1)$  i  $\mathcal{C}_2 = (V_2, B_2, I_2)$  konačne incidencijske strukture. Kažemo da su one **izomorfne** ako postoje bijekcije  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  i  $\psi : B_1 \rightarrow B_2$  takve da vrijedi  $AI_1p \Leftrightarrow \varphi(A)I_2\psi(p)$ , za sve  $A \in V_1, p \in B_1$ . Uređeni par  $(\varphi, \psi)$  nazivamo **izomorfizmom između  $\mathcal{C}_1$  i  $\mathcal{C}_2$** . Izomorfizam s incidencijske strukture  $\mathcal{C}$  na samu sebe nazivamo **automorfizmom od  $\mathcal{C}$** .*

**Definicija 3.2.** *Dvije geometrijske konfiguracije su izomorfne ako su njihove odgovarajuće kombinatorne konfiguracije izomorfne. Pod automorfizmom geometrijske konfiguracije smatrat ćemo automorfizam odgovarajuće kombinatorne konfiguracije. Skup svih automorfizama od  $\mathcal{C}$  označavamo s  $\text{Aut}(\mathcal{C})$ .*



Slika 7: Konfiguracija  $(9_3)_1$ .

**Propozicija 3.3.**  *$\text{Aut}(\mathcal{C})$  zajedno s operacijom komponiranja tvori grupu koju nazivamo punom grupom automorfizama od  $\mathcal{C}$ . Za bilo koju podgrupu  $G \leq \text{Aut}(\mathcal{C})$  kažemo da je grupa automorfizama konfiguracije  $\mathcal{C}$ .*

Iz incidencijske matrice Fanove ravnine vidimo da ima ciklički automorfizam  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ . Drugi automorfizam Fanove ravnine je  $(1, 3)(6, 7)$ .

Po definiciji 3.1 automorfizam se sastoji od dvije permutacije, točaka ( $\varphi$ ) i pravaca ( $\psi$ ) te vrijedi da permutacija  $\varphi$  jednoznačno određuje permutaciju  $\psi$ . Za automorfizam  $(1, 3)(6, 7)$  permutacijom redaka (točaka) incidencijske matrice  $A$  na stranici 6 dobivamo matricu:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada postoji samo jedna permutacija stupaca (pravaca) matrice  $B$  koja je vraća u matricu  $A$ , a to je  $\psi = (1, 2)(5, 7)$ .

U nastavku ćemo uz pomoć programskog sustava GAP [2] i programa *Nauty and Traces* [5] odrediti pune grupe automorfizama konfiguracija iz cjeline 2.

Za konfiguraciju  $(7_3)$  automorfizmi  $(1, 3)(6, 7)$  i  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  generiraju punu grupu automorfizama projektivne ravnine reda 2,  $Aut(7_3) = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 3)(6, 7) \rangle$ . Red te grupe je 168.

Za konfiguraciju  $(9_3)_1$  permutacije  $(A, B, C, D, E, F)(G, H, I)$  i  $(B, C)(E, H)(F, G)$  generiraju punu grupu automorfizama,  $Aut((9_3)_1) = \langle (B, C)(E, H)(F, G), (A, B, C, D, E, F)(G, H, I) \rangle$ . Red grupe je 108.

Konfiguracija  $(9_3)_2$  za punu grupu automorfizama ima cikličku grupu reda 9 generiranu s  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ,  $Aut((9_3)_2) = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rangle$ .

Konfiguracija  $(9_3)_3$  za punu grupu automorfizama ima grupu reda 12 generiranu s  $(1, 2)(4, 8)(5, 7)(6, 9)$  i  $(1, 2, 3)(4, 8, 6, 7, 5, 9)$ .

Već je ranije spomenuto da su konfiguracije  $(9_3)_1$ ,  $(9_3)_2$  i  $(9_3)_3$  neizomorfne, što vidimo i iz punih grupa automorfizama za ove tri konfiguracije, budući da izomorfne konfiguracije imaju izomorfne grupe  $Aut(C)$ .

**Definicija 3.4.** *Neka je  $X$  neki skup u euklidskoj ravnini  $E^2$ . Svaku izometriju  $f : E^2 \rightarrow E^2$  takvu da je  $f(X) = X$  nazivamo simetrijom skupa  $X$ .*

**Propozicija 3.5.** *Sve izometrije ravnine danog skupa  $X$  tvore grupu koju nazivamo grupom simetrija i označavamo  $Sym(X)$ .*

**Definicija 3.6.** *Kažemo da je geometrijska konfiguracija **simetrična** ako postoji netrivialna izometrija ravnine koja konfiguraciju preslikava u nju samu.*

Promotrimo pravilni  $n$ -terokut  $X = X_n$  u euklidskoj ravnini  $E^2$  i njegovu grupu simetrija, označimo je s  $D_n := Sym(X)$ . Ta se grupa simetrija zove diedralna grupa. Generirana je sa dvije simetrije; to su rotacija oko središta

$n$ -terokuta za kut  $\frac{2\pi}{n}$  i osna simetrija s obzirom na pravac koji prolazi jednim vrhom  $n$ -terokuta i njegovim središtem.

Puna grupa automorfizama konfiguracije  $(9_3)_3$  je izomorfna diedralnoj grupi  $D_6$ .

Svaka geometrijska konfiguracija ima najmanje jedan automorfizam, identitetu. Pogledajmo konfiguraciju  $(7_3)$ , neki automorfizmi konfiguracije vidljivi su i na slici 3. Izometrije ravnine koje konfiguraciju preslikavaju samu na sebe induciraju automorfizme konfiguracije. Jedan primjer je osna simetrija obzirom na pravac na kojem leže točke 3, 2, 7 koja inducira automorfizam  $\alpha = (1, 5)(4, 6)$  ili rotacija oko točke 2 za 120 stupnjeva u pozitivnom smjeru koja inducira automorfizam  $\beta = (3, 6, 4)(5, 7, 1)$ .

**Propozicija 3.7.** *Grupa simetrija  $Sym(\mathcal{C})$  geometrijske konfiguracije  $\mathcal{C}$  je izomorfna podgrupi pune grupe automorfizama  $Aut(\mathcal{C})$ .*

Elementi grupe  $Sym(7_3)$  su svi automorfizmi konfiguracije  $(7_3)$  sa slike 3 koji su inducirani izometrijama ravnine, vrijedi  $Sym(7_3) \leq Aut(7_3)$ . Grupa  $Sym(7_3) = \{id, (1, 5, 7)(3, 6, 4), (1, 7, 5)(6, 3, 4), (1, 5)(4, 6), (1, 7)(3, 6), (3, 4)(5, 7)\}$  je izomorfna diedralnoj grupi  $D_3$ , ima 6 elemenata.

Na slici 7 možemo vidjeti automorfizme  $\alpha = (A, D)(C, F)(E, B)$  i  $\beta = (A, E)(G, I)(D, B)$  koji su inducirani osnim simetrijama s osima  $GHI$  i  $CHF$  te automorfizam  $\gamma = (A, B)(C, F)(D, E)(G, I)$  koji je induciran rotacijom oko točke  $H$  za 180 stupnjeva. Grupa simetrija  $Sym((9_3)_1)$  konfiguracije  $(9_3)_1$  izomorfna je grupi simetrija pravokutnika. Konfiguraciju  $(9_3)_1$  promatramo na slici 7 jer je nacrtana simetričnije u odnosu na sliku 4 koja nema simetrija, osim identitete.

Simetrije konfiguracije  $(9_3)_2$  na slici 5 su  $(1, 4, 7)(2, 5, 8)(3, 6, 9)$  i  $(1, 7, 4)(2, 8, 5)(3, 9, 6)$ . Inducirane su rotacijom oko središta za  $120^\circ$  u pozitivnom i negativnom smjeru. Simetrije konfiguracije  $(9_3)_3$  na slici 6, koje su također inducirane rotacijom oko središta za  $120^\circ$  u pozitivnom i negativnom smjeru, su  $(1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)$  i  $(1, 3, 2)(4, 6, 5)(7, 9, 8)$ . Grupe simetrija  $Sym((9_3)_2)$  i  $Sym((9_3)_3)$  izomorfne su cikličkoj grupi reda 3.

Koje grupe mogu biti grupe simetrija geometrijske konfiguracije? Uočimo da se radi o konačnim podgrupama grupe izometrija euklidske ravnine. Sljedeći teorem nam daje uvid koje su to konačne podgrupe.

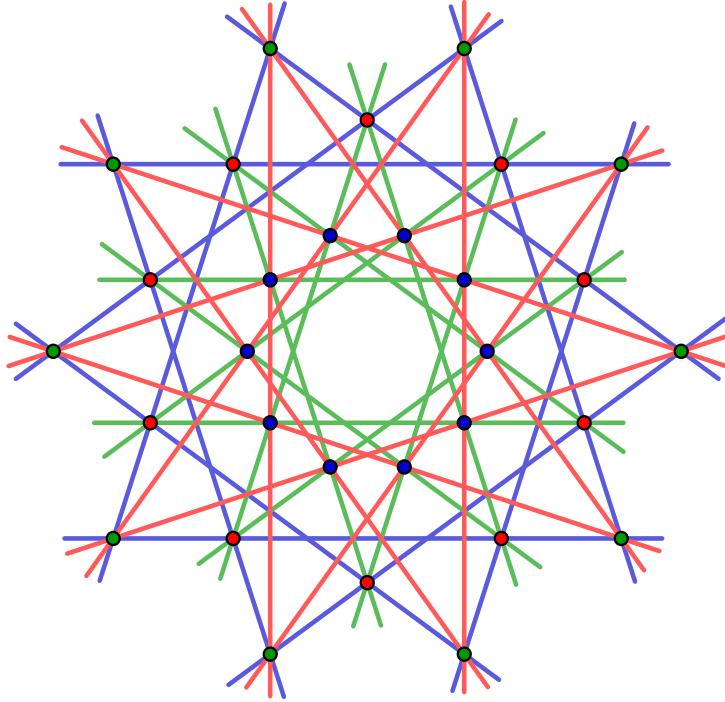
**Teorem 3.8.** *Ako je  $G$  konačna podgrupa grupe izometrija euklidske ravnine reda  $n$ , onda je*

1.  $G$  izomorfna cikličkoj grupi  $C_n$ , ako ne sadrži osnu simetriju.
2.  $G$  izomorfna diedralnoj grupi  $D_m$  ( $n = 2m$ ), ako sadrži osnu simetriju.



Dokaz ovog teorema vidi u [1].

Grupa simetrija geometrijske konfiguracije zadovoljava teorem 3.8 te može biti ili ciklička grupa  $C_n$  ili diedralna grupa  $D_m, n = 2m, n \in \mathbb{N}$ .



Slika 8: Konfiguracija  $(30_4)$ .

Grünbaum u svojoj knjizi [4] navodi dvije stvari koje uzimamo u razmatranje prilikom određivanja simetrije konfiguracije. Jedna je podjela konfiguracije u orbite, a druga je određivanje grupe simetrija dane konfiguracije.

**Definicija 3.9.** *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $X$ . Orbita elementa  $x \in X$  je skup*

$$Orb(x) = \{gx, g \in G\}.$$

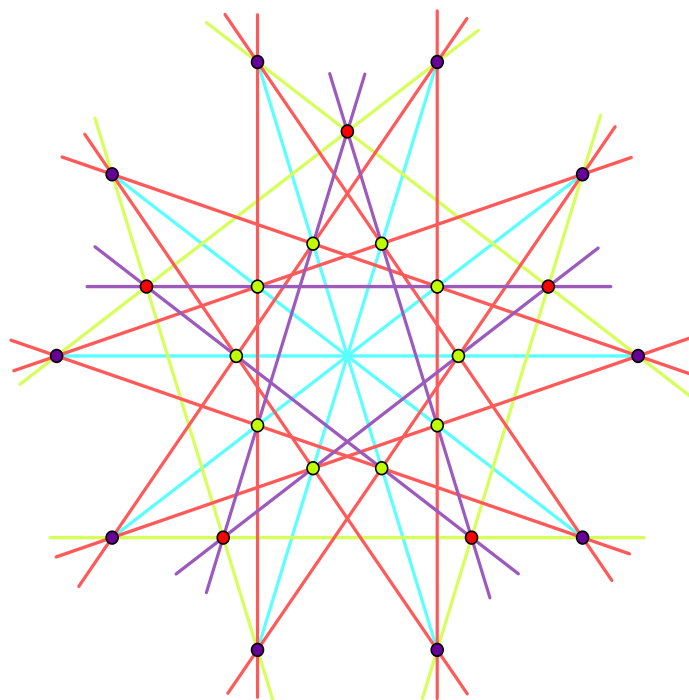
**Primjer 3.10.** *Orbite konfiguracije  $(9_3)_1$  sa slike 7.*

*Konfiguracija  $(9_3)_1$  ima 3 orbite točaka i 4 orbite pravaca. Prva orbita točaka se sastoji od točaka  $\{A, B, D, E\}$ , druga od točaka  $\{C, F\}$ , treća od točaka  $\{G, I\}$  i četvrta orbita ima samo jedan element, točku  $\{H\}$ . Dvije orbite su veličine 2, jedna veličine 1 i jedna veličine 4.*

*Prva orbita pravaca se sastoji od pravaca  $\{AGF, CGD, EIF, BIC\}$ , druga od pravaca  $\{AHB, DHE\}$ , treća od pravaca  $\{ACE, DFB\}$ , a četvrta orbita*

sadrži jedan pravac,  $\{GHI\}$ . Dvije orbite su veličine 2, a preostale dvije veličine 4 i 1.

Orbite ćemo na slikama prikazivati različitim bojama.

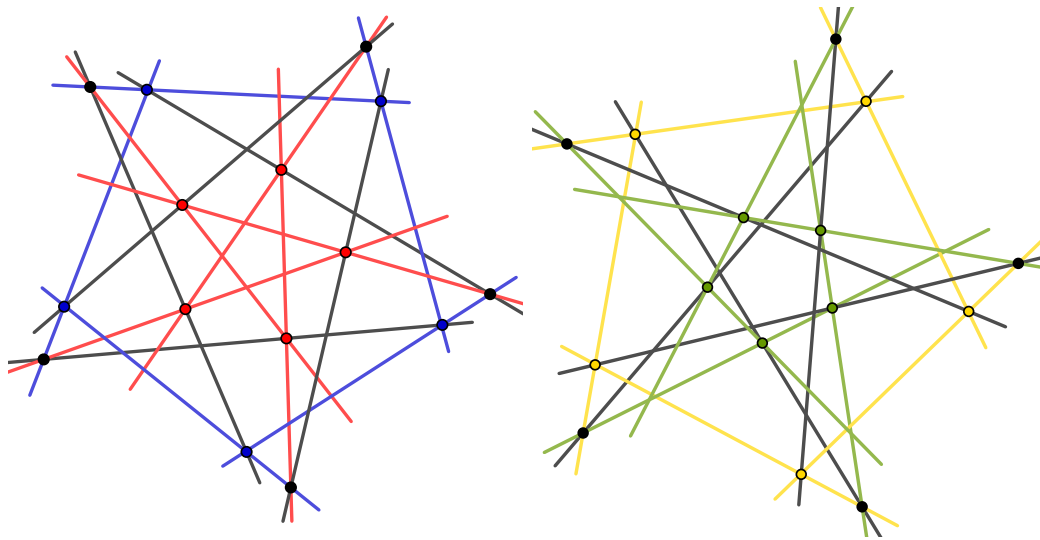


Slika 9: Konfiguracija  $(25_4)$ .

**Definicija 3.11.** *Ako konfiguracija ima  $h_1$  orbita točaka i  $h_2$  orbita pravaca, kažemo da je  $[h_1, h_2]$  - zvjezdasta.*

Na slici 8 prikazana je konfiguracija  $(30_4)$  koja je  $[3, 3]$  - zvjezdasta. Grupa simetrija konfiguracije je diedralna grupa  $D_{10}$  i sve orbite točaka i pravaca su veličine 10 (na slici obojane različitim bojama).

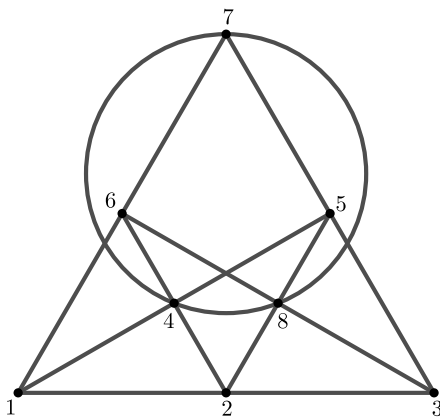
Na slici 9 prikazana je konfiguracija  $(25_4)$  koja je  $[3, 4]$  - zvjezdasta. Konfiguracija za grupu simetrija ima diedralnu grupu  $D_5$ . Od tri orbite točaka dvije su veličine 10, a jedna veličine 5 te od četiri orbite pravaca jedna je veličine 10, a tri veličine 5 (na slici obojane različitim bojama).



Slika 10: Konfiguracije  $(15_3)$  koje su  $[3, 3]$ -zvjezdaste s grupom simetrija  $C_5$ , sve orbite točaka i pravaca su veličine 5.

## 4 Konfiguracije $v_3$

U ovom poglavlju bavit ćemo se geometrijskim ( $v_k$ ) konfiguracijama za  $k = 3$ , dotaknut ćemo se i egzistencije takvih konfiguracija. Konfiguracije  $v_3$  su od sredine 19. stoljeća opsežno proučavane te imamo mnogo rezultata o njima te ćemo navesti neke od njih. Uz već spomenute Fanovu ( $7_3$ ), Papusovu ( $9_3$ ) konfiguraciju tu je i konfiguracija ( $8_3$ ) poznata kao Möbius-Kantorova konfiguracija. Prvi ju je opisao Möbius 1828. godine te pokazao kako se ne može geometrijski realizirati u euklidskoj ravnini. Konfiguraciju je 1881. godine opisao i Kantor [4].



Slika 11: Möbius-Kantorova ( $8_3$ ) konfiguracija.

Pitanje koje se postavlja za ( $v_k$ ) konfiguracije, u našem slučaju kada je  $k = 3$  ali i za  $k > 3$ , je za koje  $v$  konfiguracije ( $v_3$ ) postoje? Odgovor nam daju sljedeći teoremi.

**Teorem 4.1.** *Kombinatorna konfiguracija ( $v_3$ ) postoji ako i samo ako je  $v \geq 7$ .*

**Teorem 4.2.** *Geometrijska konfiguracija ( $v_3$ ) postoji ako i samo ako je  $v \geq 9$ .*

Uočavamo iz teorema da postojanje geometrijske ( $v_3$ ) konfiguracije povlači postojanje kombinatorne ( $v_3$ ) konfiguracije za  $v \geq 9$ .

U ovom dijelu ćemo prikazati poznate rezultate o broju neizomorfnih konfiguracija  $(v_3)$ , za neke vrijednosti  $v$ . Označimo s  $c(v)$  i  $g(v)$  broj neizomorfnih kombinatornih i geometrijskih  $(v_3)$  konfiguracija.

**Teorem 4.3.** *Lista poznatih vrijednosti  $c(v)$  i  $g(v)$  je dana u tablici 5.*

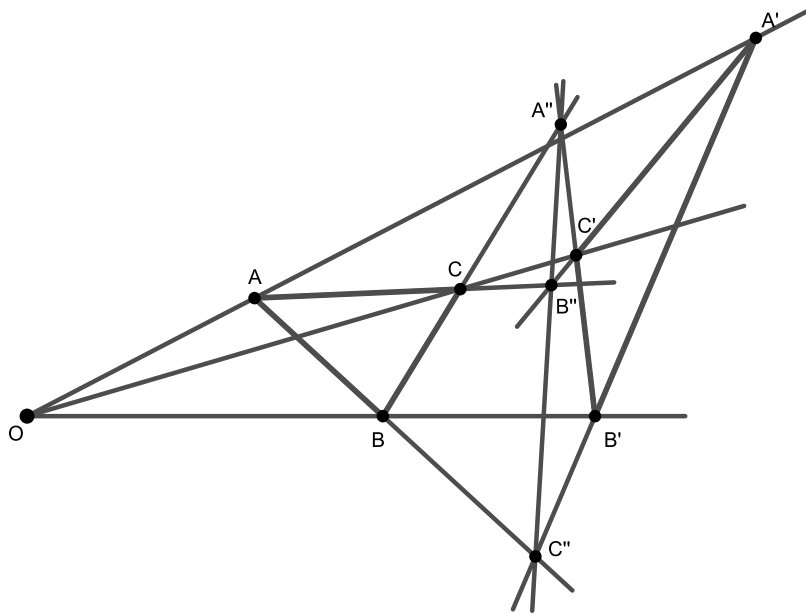
$v$	$c(v)$	$g(v)$
$\leq 6$	0	0
7	1	0
8	1	0
9	3	3
10	10	9
11	31	31
12	229	229
13	2 036	
14	21 399	
15	245 342	
16	3 004 881	
17	38 904 499	
18	530 452 205	
19	7 640 941 062	

Tablica 5

Iz tablice 5 vidimo da je  $c(v) = g(v)$  za  $v = 11, 12$ , ali ne i za  $v = 10$ . Općenito vrijedi  $c(v) \neq g(v)$  za sve  $v \geq 14$ . Gropp je pokazao da za svaki  $v \geq 14$  postoji kombinatorna  $(v_3)$  konfiguracija koja se ne može realizirati kao geometrijska konfiguracija. Konfiguracijske tablice za tri kombinatorne konfiguracije  $(9_3)$  prikazane su u tablicama 2, 3 i 4. Sve tri konfiguracije moguće je geometrijski realizirati, kao što smo vidjeli u prethodnoj cjelini. To je prvi dokazao Kantor, a puno detaljnije analizirao Schröter.

Iz tablice 5 vidimo da postoji deset neizomorfnih kombinatornih konfiguracija  $(10_3)$ , pri čemu se konfiguracija  $(10_3)_1$  naziva još i Desarguesovom konfiguracijom.

**Teorem 4.4** (Desargues). *Ako su dva trovrha  $ABC$  i  $A'B'C'$  perspektivna s obzirom na neku točku  $O$ , tada su oni perspektivni i s obzirom na neki pravac  $p$  (na slici 12 pravac  $A''B''C''$ ), i obrnuto. Točku  $A''$  dobijemo kao presjek pravaca  $BC$  i  $B'C'$ , točku  $B''$  kao presjek pravaca  $AC$  i  $A'C'$  i točku  $C''$  kao presjek pravaca  $AB$  i  $A'B'$ .*



Slika 12: Desarguesova  $(10_3)_1$  konfiguracija.

Trovrši  $ABC$  i  $A'B'C'$  su centralno perspektivni s obzirom na točku  $O$ , a osno perspektivni s obzirom na pravac  $A''B''C''$ . Međutim, za Desarguesovu konfiguraciju vrijedi i da ako odaberemo neku drugu točku konfiguracije kao centar perspektiviteta u toj konfiguraciji uvijek postoje dva trovrha perspektivna baš s obzirom na taj centar. Oni su tada perspektivni i s obzirom na neki pravac konfiguracije. Postoji deset različitih načina na koji možemo konfiguraciju  $(10_3)_1$  prikazati kao Desarguesovu figuru. Pogledajmo na slici 12 jedan takav način, promatramo dva trovrha  $A''C'C'$  i  $C''AA'$ , točka  $B''$  je centar perspektiviteta, a pravac  $OB B'$  os perspektiviteta.

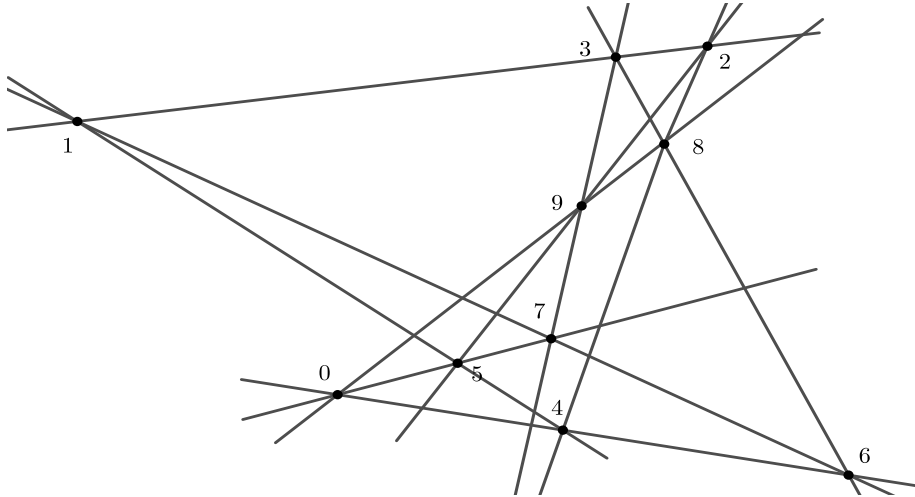
Desarguesova konfiguracija ima istaknutu ulogu u projektivnoj geometriji jer teorem 4.4 karakterizira projektivni prostor  $PG(n, F)$  nad tijelom  $F$  (poljem u kojem množenje nije nužno komutativno). Slično, teorem 2.10 karakterizira  $PG(n, F)$  nad komutativnim poljem  $F$ .

Devet  $(10_3)$  konfiguracija je moguće geometrijski realizirati. Od njih se samo Desarguesova konfiguracija može realizirati tako da točke i pravce odabiremo po volji, u skladu s uvjetima Desarguesova teorema. Preostalih osam se mogu konstruirati, ali samo ako su točke i pravci u nekim posebnim međusobnim položajima.

Na slikama od 14 do 21 imamo prikaz ostalih osam  $(10_3)$  konfiguracija, u knjizi [4] prema Schröteru opisan je postupak crtanja svake od njih. Jedino se konfiguracija  $(10_3)_4$  dana u tablici 6 ne može geometrijski realizirati.

1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
2	4	6	9	4	6	5	7	6	7
3	5	7	0	8	8	9	9	0	0

Tablica 6: Konfiguracijska tablica za  $(10_3)_4$ .

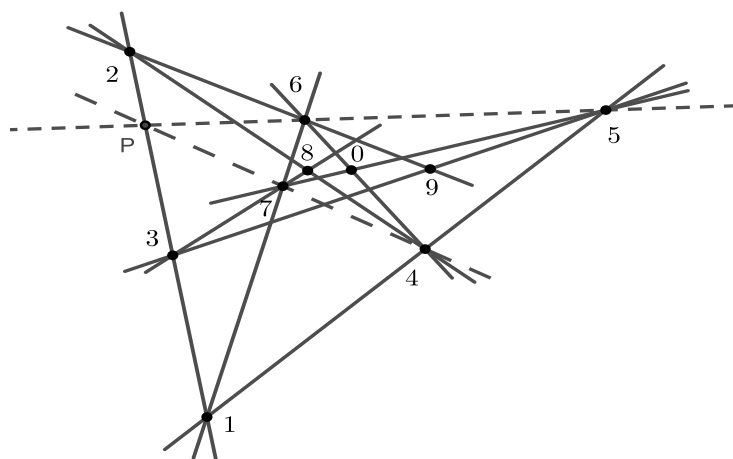


Slika 13: Pokušaj geometrijske realizacije konfiguracije  $(10_3)_4$ . Neki “pravci” konfiguracije su blago zakrivljeni.

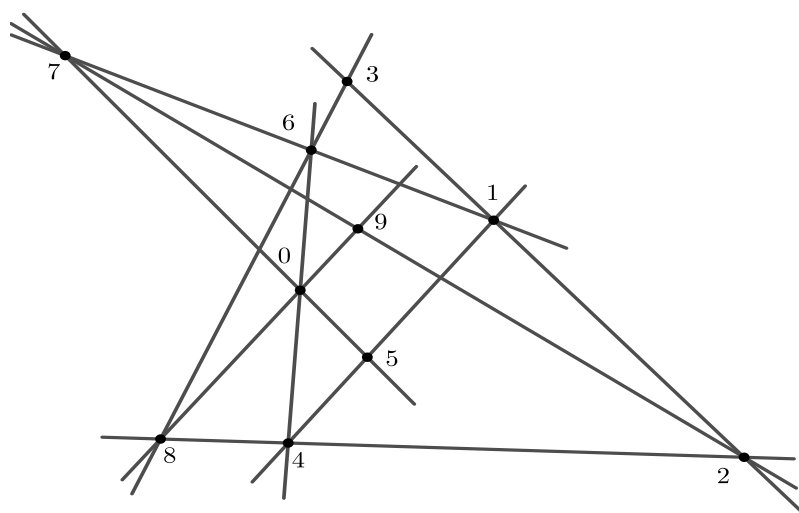
Promotrimo dva potpuna četverovrha 2389 i 6790 na slici 13. Napomenimo da četverovrh 6790 promatramo u  $E^3$ , ne u samoj konfiguraciji (točke 6 i 9 nisu kolinearne u konfiguraciji). Po definiciji četverovrha, potpuni četverovrh 2389 ima tri para suprotnih stranica, a to su 23 i 89, 28 i 39, 29 i 38. Tri para suprotnih stranica potpunog četverovrha 6790 su 67 i 90, 60 i 97, 70 i 96. Tri para suprotnih pravaca svakog četverovrha sijeku pravac 145 u tri para pridruženih točaka neke involucije. Budući da je involucija jednoznačno određena s dva para pridruženih točaka, u našem slučaju parovi su 1 i  $890 \cap 145$  te 4 i  $379 \cap 145$ , slijedi da se involucija podudara za naše četverovrhe 2389 i 6790. Tada točka uparena s točkom 5 mora biti presječna točka triju pravaca 145, 368 i 96. Ta točka ne može biti točka 6, jer bi tada pravac 145 sadržavao četiri točke konfiguracije. Druga mogućnost je da se pravci 368 i 96 podudaraju, ali bi tada pravac 368 sadržavao četvrtu točku, točku 9. Slijedi da se konfiguracija  $(10_3)_4$  ne može geometrijski realizirati.

Opišimo postupak konstrukcije konfiguracije  $(10_3)_2$ . Za početak proizvoljno odaberemo točke 2, 3, 4, 5 i 6, tako da nisu kolinearne. Zatim točku 9 dobijemo kao presjek pravaca 26 i 35, točku 1 kao presjek pravaca 23 i 45. Po-

trebna nam je pomoćna točka, označit ćemo je s  $P$ , dobijemo je kao presjek pravaca 23 i 56. Presjek pravaca 16 i  $4P$  nam daje točku 7. Dvije preostale točke su  $8 = 37 \cap 24$  i  $0 = 57 \cap 46$ . Točke 8, 9 i 0, presjeci stranica trovrha 246 i 357, su kolinearne točke. Prema Desargusovu teoremu trovrši 246 i 357 su perspektivni obzirom na neku točku, u ovom slučaju to je točka  $P$  koja nije točka konfiguracije.

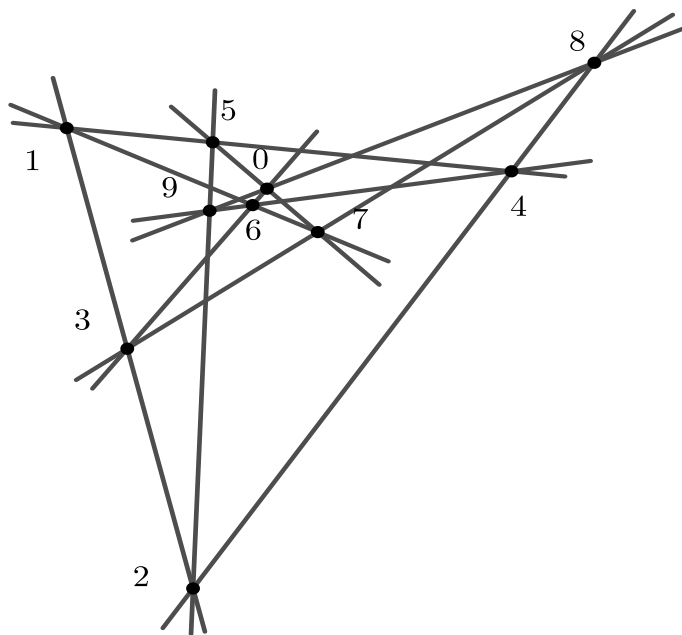


Slika 14: Konfiguracija  $(10_3)_2$ .

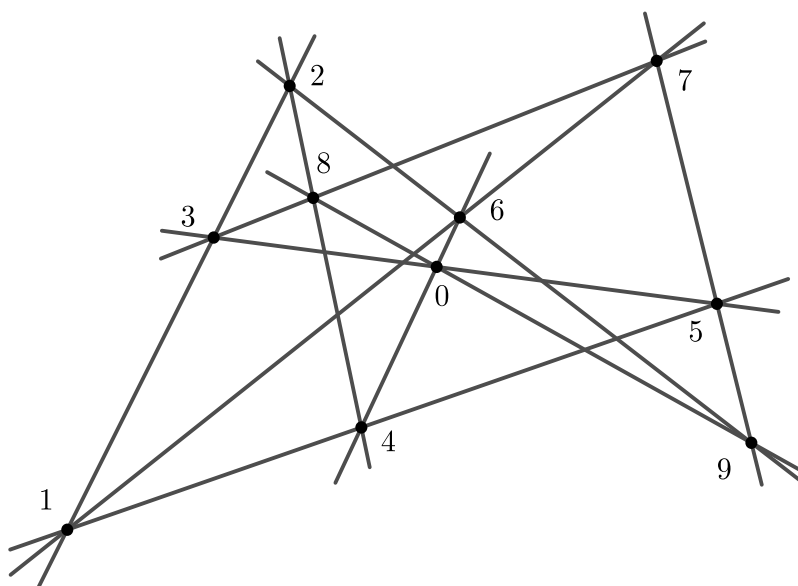


Slika 15: Konfiguracija  $(10_3)_3$ .

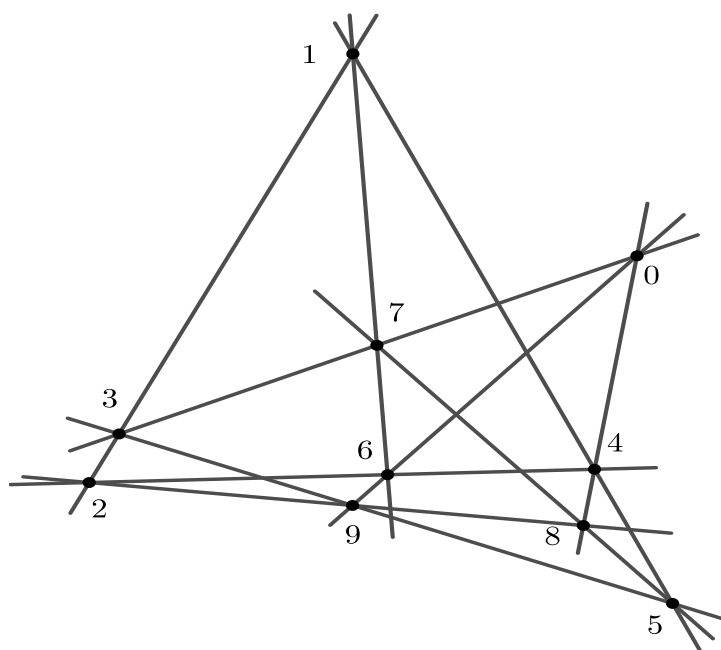




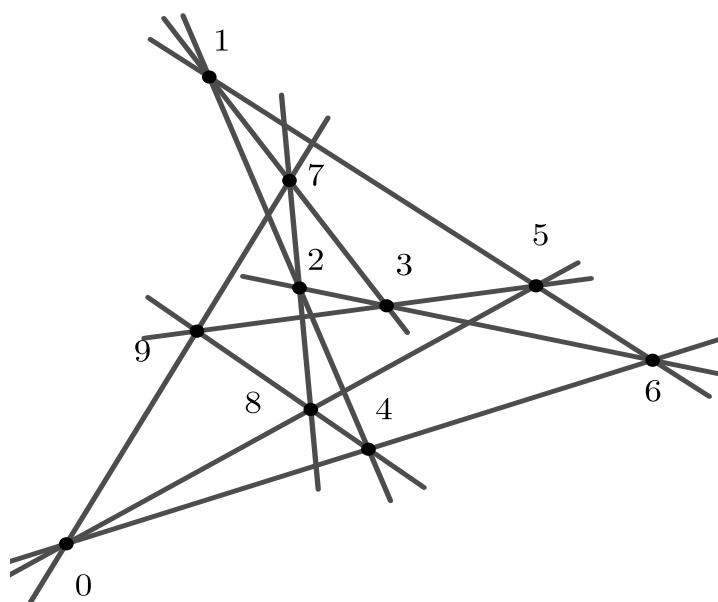
Slika 16: Konfiguracija  $(10_3)_5$ .



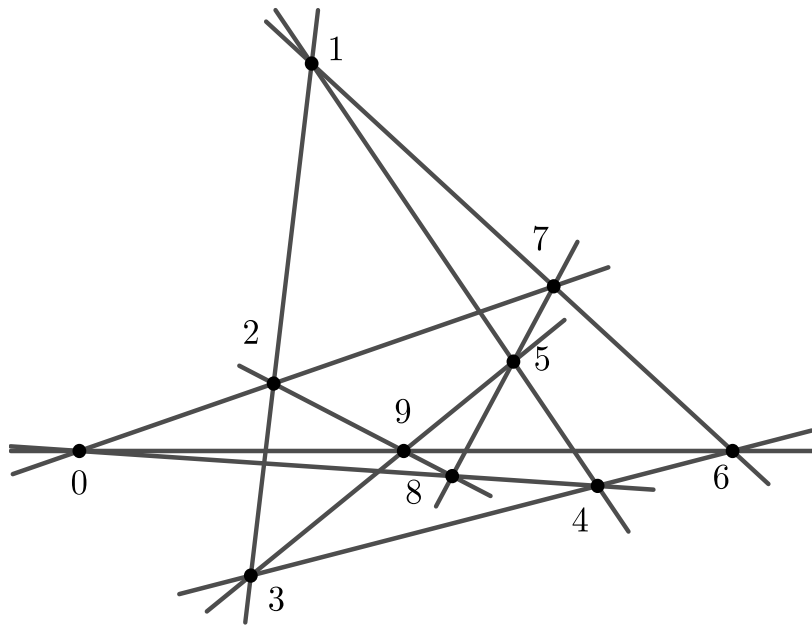
Slika 17: Konfiguracija  $(10_3)_6$ .



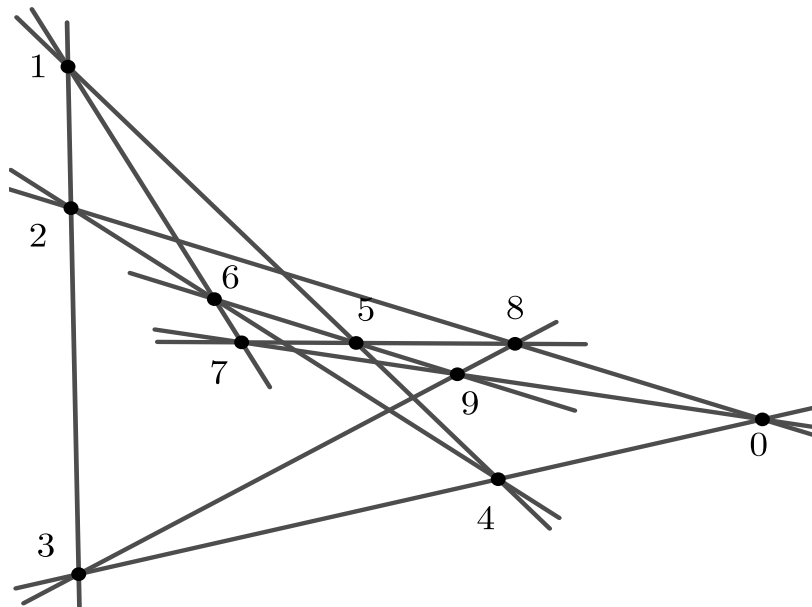
Slika 18: Konfiguracija  $(10_3)_7$ .



Slika 19: Konfiguracija  $(10_3)_8$ .



Slika 20: Konfiguracija  $(10_3)_9$ .



Slika 21: Konfiguracija  $(10_3)_{10}$ .

Martinetti je 1887. godine otkrio da neizomorfnih kombinatronih  $(11_3)$  konfiguracija ima 31. Za konfiguraciju  $(12_3)$  prvi je Daublesky 1895. godine odredio njihov broj, smatrao je da ih ima 228. Tek je Gropp 1990. godine pokazao da je Daublesky izostavio jednu, odnosno da ih je 229. Broj  $c(v)$  kombinatornih konfiguracija za  $13 \leq v \leq 19$  određen je pomoću kompjutorskih programa. Gropp je odredio vrijednosti za  $12 \leq v \leq 14$ , Betten i Betten za  $v = 15$ , za  $16 \leq v \leq 18$  Betten, Brinkman i Pisanski, a vrijednost  $c(19) = 7,640,941,062$  Boben, Pisanski, Zitnik i Grünbaum.

Od 245342  $(15_3)$  konfiguracija, najpoznatija je Cremona-Richmondova konfiguracija, prva od konfiguracija prikazanih na slici 10. Slika te konfiguracije pripada Pisanskom. Cremona-Richmondova konfiguracija s 15 točaka i pravaca je najmanja  $(v_3)$  konfiguracija bez trokuta u svom geometrijskom prikazu.

## 5 Konfiguracije $v_k$ za $k \geq 4$

Povijest proučavanja  $(v_4)$  konfiguracija je mnogo kraća od one  $(v_3)$  konfiguracija. Prvi je ovaj tip konfiguracija spomenuo Felix Klein 1879. godine. Za mnoge parametre  $v$  geometrijske  $(v_4)$  konfiguracije ne postoje ili nisu poznate. Neke nove informacije o egzistenciji geometrijskih  $(v_4)$  konfiguracija otkrivene su nedavno, kao idući teoremi.

**Teorem 5.1** (Bokowski i Schewe). *Za  $v \leq 17$  ne postoji geometrijska  $(v_4)$  konfiguracija.*

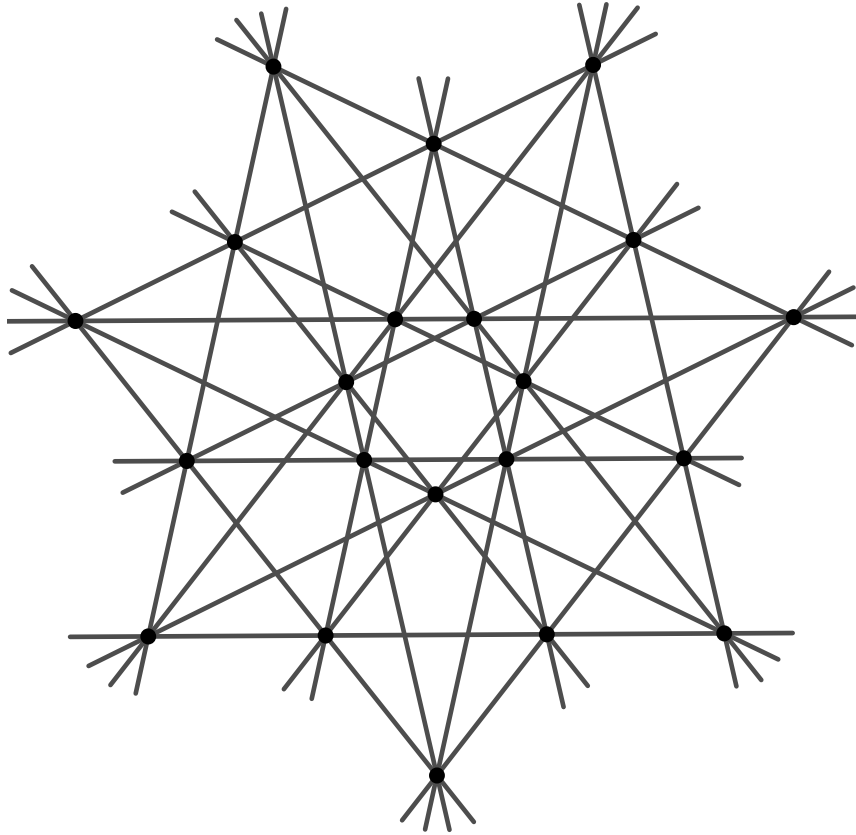
**Teorem 5.2** (Bokowski i Schewe). *Za svaki  $v \geq 18$  postoji geometrijska  $(v_4)$  konfiguracija, osim eventualno za  $v = 19, 22, 23, 26, 37, 43$ .*

Teoremi 5.1 i 5.2 pokazuju koliko se razumijevanje  $(v_4)$  konfiguracija razvilo tijekom zadnja dva desetljeća. U tablici 7 prikazana je kombinatorna  $(17_4)$  konfiguracija.

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	8	9	10	10
2	5	8	11	5	6	7	5	6	7	5	6	7	13	13	11	12
3	6	9	12	8	9	11	12	8	9	11	10	12	15	14	14	16
4	7	10	13	14	15	16	15	16	17	17	13	14	17	16	15	17

Tablica 7: Kombinatorna  $(17_4)$  konfiguracija.

Za konstrukciju geometrijskih  $(v_4)$  konfiguracija postoji nekoliko metoda. U većini slučajeva konstrukcija počinje od neke poznate konfiguracije i dovodi do  $(v_4)$  konfiguracije. U knjizi [4] opisane su metode konstrukcija geometrijskih  $(v_4)$  konfiguracija za  $v \leq 304$ , osim za one  $v$  za koje ne znamo postoji li  $(v_4)$  konfiguracija i za one  $v$  za koje je geometrijska realizacija nemoguća.



Slika 22: Konfiguracija  $(21_4)$ .

Unatoč proučavanju konfiguracija više od desetljeća, malo je poznatih rezultata o  $(v_k)$  konfiguracijama za  $k \geq 5$ .

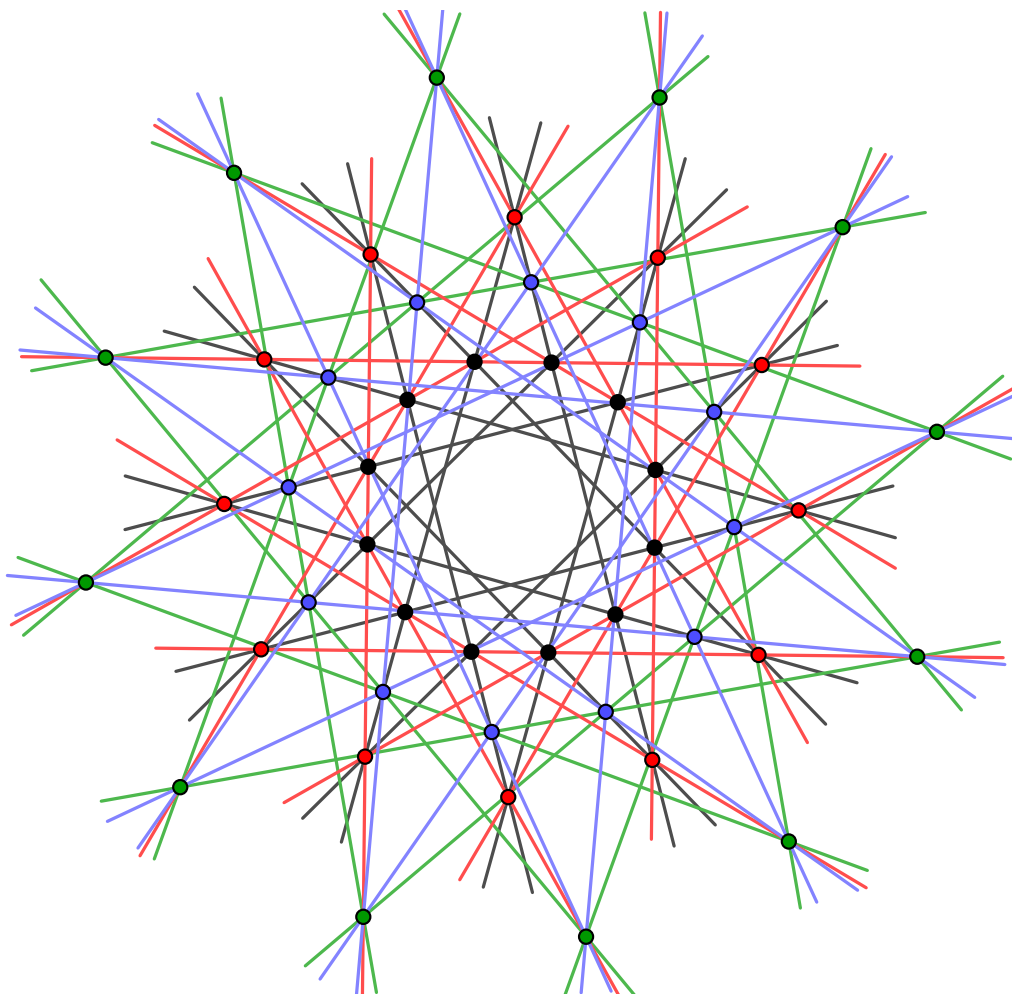
Iz propozicije 2.4 slijedi da  $(v_5)$  konfiguracija mora zadovoljavati  $v \geq 21$ . Kombinatorna  $(21_5)$  konfiguracija, prikazana u tablici 8, je ciklička konfiguracija s baznim pravcem  $\{0, 3, 4, 9, 11\}$ . Gropp je prvi otkrio da je pravac  $\{0, 1, 4, 9, 11\}$  bazni pravac sa sve  $(v_5)$  konfiguracije kada je  $v \geq 23$ .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tablica 8: Kombinatorna  $(21_5)$  konfiguracija.

Zanimljiv slučaj za  $v_5$  konfiguracije je konfiguracija  $(22_5)$  koja ne postoji

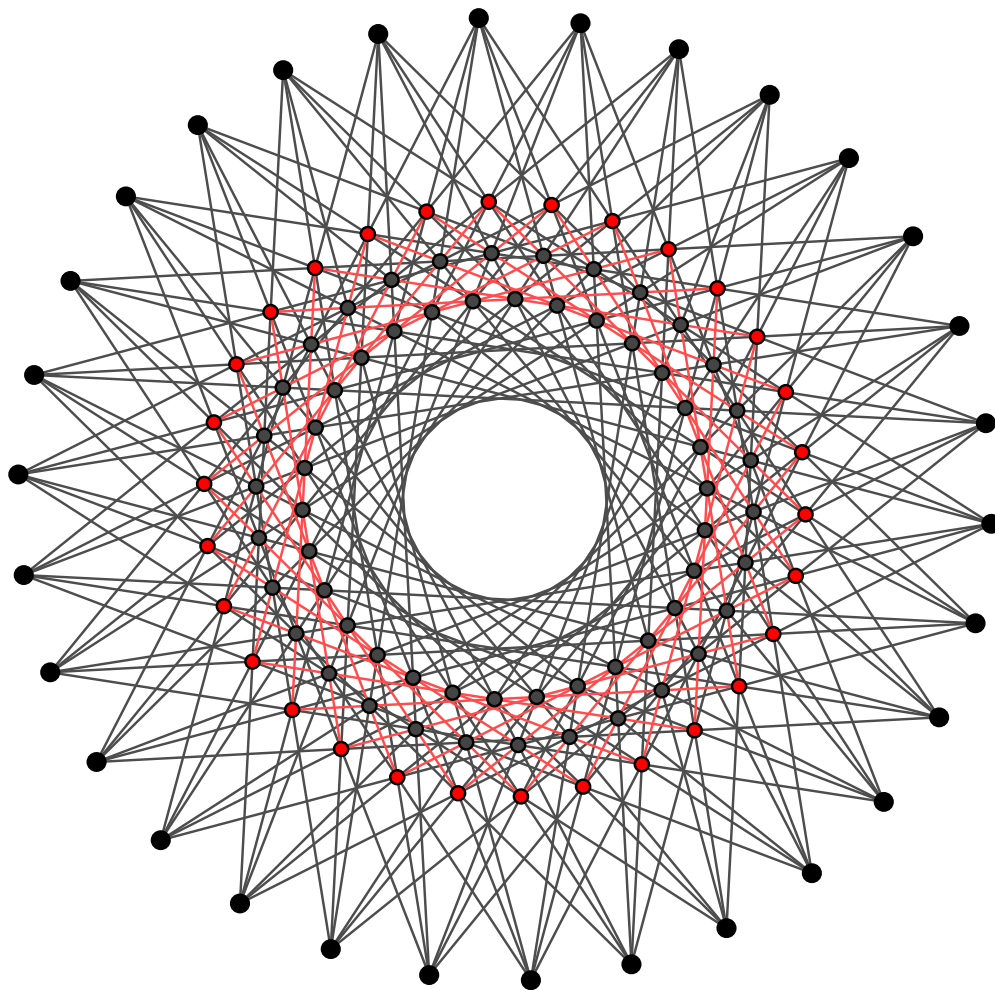
čak ni kao kombinatorna konfiguracija. Najmanja geometrijska  $(v_5)$  konfiguracija otkrivena dosad je konfiguracija  $(48_5)$  prikazana na slici 23, otkrio ju je L.Berman. Konfiguracija  $(48_5)$  je  $[4, 4]$ -zvjezdasta, a za grupu simetrija ima cikličku grupu reda 12.



Slika 23: Konfiguracija  $(48_5)$ .

Na slici 24 prikazana je geometrijska  $(120_6)$  konfiguracija. Konfiguracija je  $[4, 4]$  ili kraće 4-zvjezdasta, za grupu simetrija ima diedralnu grupu  $D_{12}$ .

Jedno od otvorenih pitanja o  $(v_k)$  konfiguracijama za  $k = 5$  je pitanje postoje li geometrijske  $(v_5)$  konfiguracije za sve  $v$  veće od neke fiksne granice? Poznato je da to vrijedi za  $(v_3)$  i  $(v_4)$  konfiguracije.



Slika 24: Konfiguracija  $(120_6)$ .



## 6 Zvezdaste konfiguracije

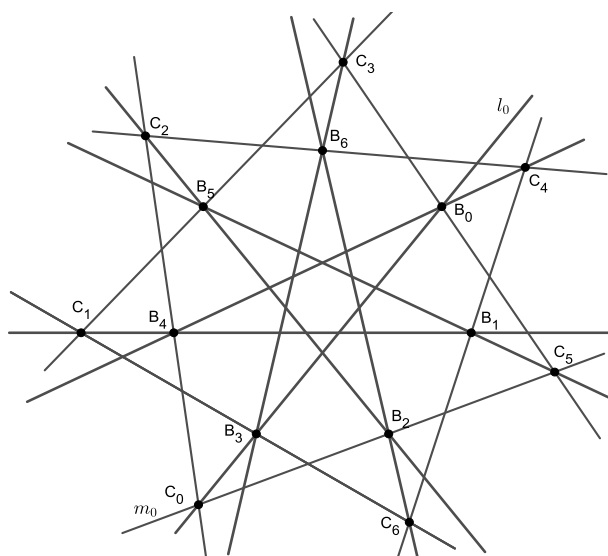
U poglavlju 3 smo spomenuli i definirali zvezdaste konfiguracije. U ovom poglavlju ćemo se fokusirati na 2-zvezdaste ( $v_3$ ) konfiguracije s cikličkom grupom simetrija. Navest ćemo vrste zvezdastih konfiguracija s diedralnom grupom simetrija te ćemo definirati zvezdaste ( $v_4$ ) konfiguracije. Slučaj kada je  $h = 2$  je jednostavniji i drugačiji od slučaja  $h \geq 3$ , kada pravci konfiguracije mogu sadržavati točke iz dvije ili tri različite orbite točaka.

$h$ -zvezdaste ( $v_3$ ) konfiguracije u euklidskoj ravnini  $E^2$  s cikličkom grupom simetrija nazivaju se  $h$ -kiralne zvezdaste konfiguracije.

U ovom dijelu bavit ćemo se  $h$ -kiralnim zvezdastim konfiguracijama kada je  $h = 2$ . Točke 2-kiralne zvezdaste ( $v_3$ ) konfiguracije su vrhovi dva koncentrična pravilna  $m$ -terokuta, svaki s  $m = \frac{v}{2}$  vrhova. Kiralne ( $v_3$ ) konfiguracije označavat ćemo simbolom  $m\#(b, c; d)$ .

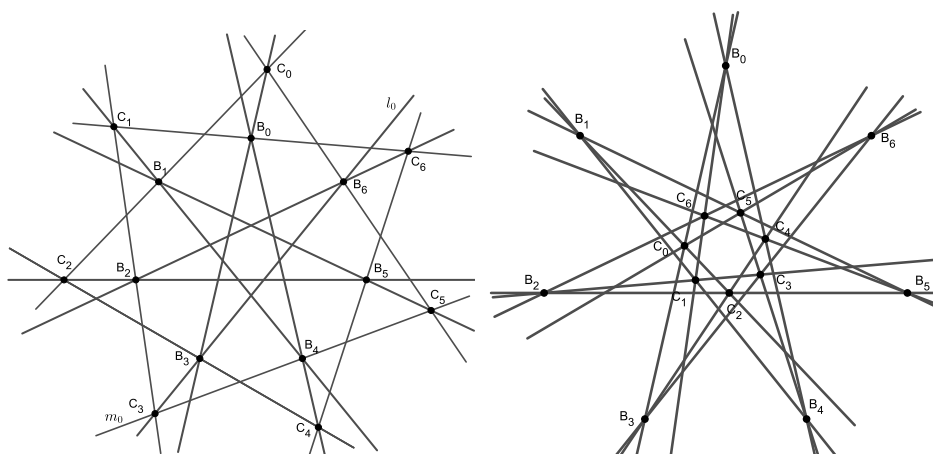
Pravci jedne orbite su dijagonale jednog  $m$ -terokuta, a pravci druge orbite su dijagonale drugoga  $m$ -terokuta. Svaki pravac konfiguracije sadrži dvije točke jednoga  $m$ -terokuta i jednu točku drugoga  $m$ -terokuta. Dijagonala  $m$ -terokuta spaja dva nesusedna vrha, a ovisno o tome koje vrhove spaja određujemo brojeve  $b$  i  $c$ . Npr. ako dijagonala spaja određeni vrh s drugim po redu vrhom, broj  $b$  bit će 2.

Odgovarajuće vrhove ćemo zvati  $B$ -točkama,  $C$ -točkama, a pravce  $b$ -pravcima i  $c$ -pravcima. Počinjemo od proizvoljne  $B$ -točke koju označimo s  $B_0$  te nastavljajući dalje, u pozitivnom smjeru, točke označavamo s  $B_1, \dots, B_{m-1}$ . Svaki  $b$ -pravac tada je oblika  $l_i = B_i B_{i+b}$  i sadrži  $C$ -točku s oznakom  $C_i$ . Pravac  $c$  koji prolazi kroz  $C_0$  određuje način na koji ćemo označavati  $c$ -pravce.  $C$ -točke označavamo u istom onom smjeru u kojem smo označili i  $B$ -točke. Prvu točku na pravcu smo označili s  $C_0$  te će druga točka na tom pravcu biti  $C_c$ . Samim time  $c$ -pravce označavat ćemo s  $m_i = C_i C_{i+c}$ . Za simbol  $d$  uzimamo indeks  $B$ -točke koja je incidentna s pravcem  $m_0 = C_0 C_c$ . Pogledajmo primjer sa slike 25,  $b = 3, c = 2$ , a indeks točke  $B$  na pravcu  $m_0$  je  $d = 4$ . Točke  $B_i$  i točke  $C_i, (i = 0, \dots, 6)$  su označene u istom smjeru. Prema navedenom, simbol konfiguracije sa slike 25 je  $7\#(3, 2; 4)$ .



Slika 25: Zvezdasta konfiguracija sa simbolom  $7\#(3, 2; 4)$ .

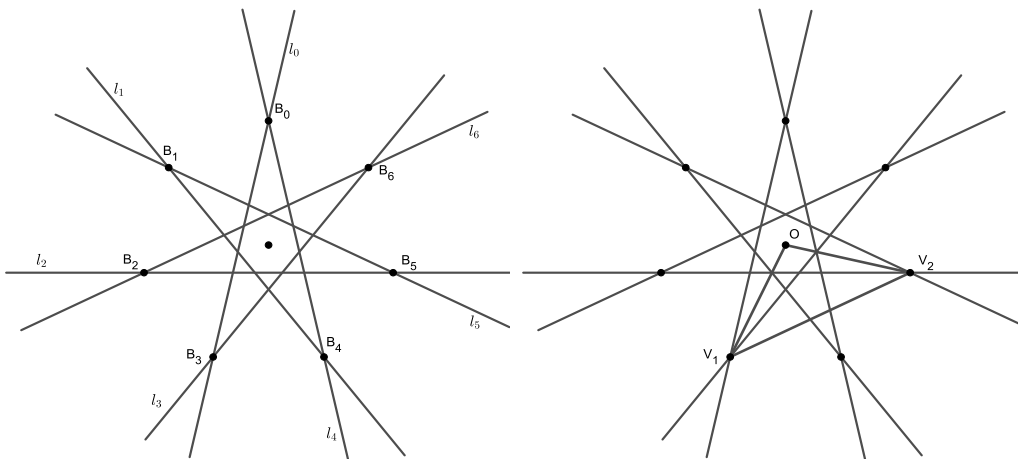
Svaka zvezdasta ( $v_3$ ) konfiguracija ima jedinstvenu oznaku, ali obrat ne vrijedi. Dvije konfiguracije mogu imati istu oznaku  $m\#(b, c; d)$ , što možemo vidjeti na slici 26. Konfiguracije na slici 26 su izomorfne kao kombinatorne konfiguracije.



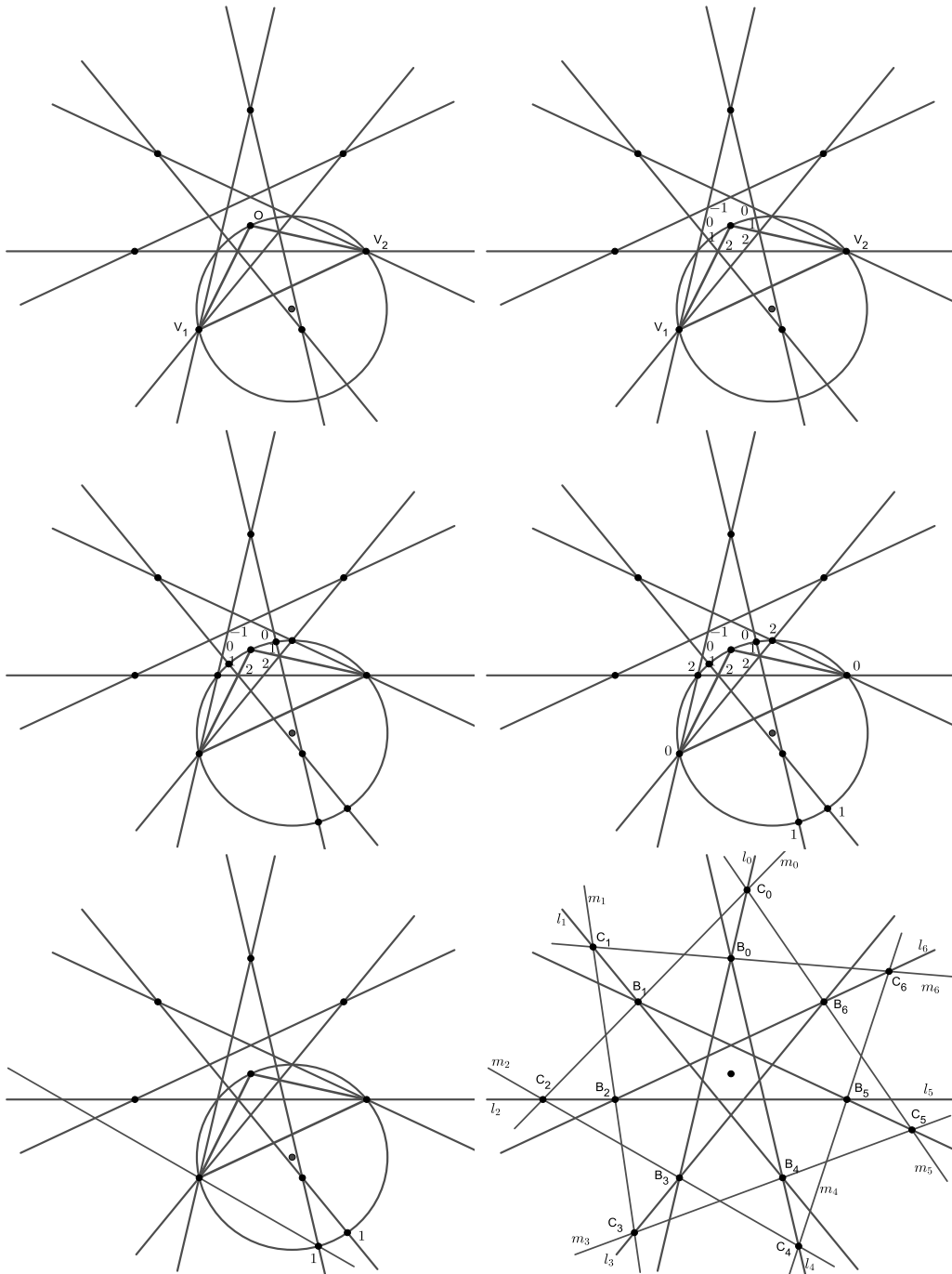
Slika 26: Dvije zvezdaste konfiguracije s zajedničkim simbolom  $7\#(3, 2; 1)$ .

Sada ćemo prateći navedene korake konstruirati konfiguraciju  $m\#(b, c; d) = 7\#(3, 2; 1)$  prikazanu na slici 26.

1. Konstruiramo pravilni  $m$ -terokut  $P$ , u ovom slučaju sedmerokut, te povežemo vrhove dijagonalama tako da svaki vrh povežemo s trećim ( $b = 3$ ) vrhom po redu.
2. Konstruiramo jednakokračni trokut  $T$  s vrhovima  $V_1$  i  $V_2$  sedmerokuta, tako da su vrhovi udaljeni za  $c = 2$ , treći vrh trokuta je središte  $O$  sedmerokuta.
3. Konstruiramo opisanu kružnicu  $k$  trokuta  $T$ .
4. Označimo strane sedmerokuta. S "0" označimo dva pravca od  $P$  koja dodiruju  $T$  u točkama  $V_1$  i  $V_2$ , ali ne prolaze kroz unutrašnjost od  $T$ . Ostali pravci od  $P$  su numerirani tako da oni koji su bliži centru kružnice  $k$  su označeni s "1", "2", ..., a oni dalji od centra s "-1", "-2", .....
5. Odredimo točke presjeka pravaca od  $P$  i kružnice  $k$ .
6. Označimo točke presjeka s oznakom pravca iz 4. koraka.
7. Izaberemo jednu od točaka označenu s  $d = 1$  te ju spojimo s jednom od točaka  $V_1$  ili  $V_2$ .
8. Rotiramo izabranu točku i pravac oko središta sedmerokuta za  $\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{7}$ , a zatim ponovimo sa svim novonastalim rotiranim pravcima i točkama. Konstrukcija konfiguracije je završena.



Slika 27: Koraci u crtanju  $7\#(3,2;1)$  konfiguracije, prvi dio.



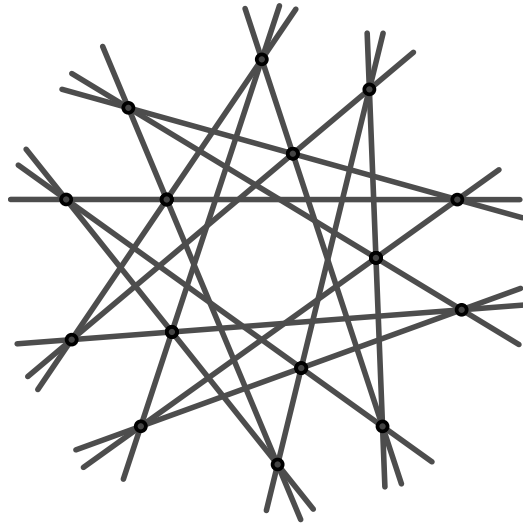
Slika 28: Koraci u crtanju  $7\#(3, 2; 1)$  konfiguracije, drugi dio.

Zvezdaste ( $v_3$ ) konfiguracije s diedralnom grupom simetrija možemo podijeliti u nekoliko vrsta. Prva vrsta su tzv. EE zvezdaste konfiguracije.

Sastoje se od konfiguracija koje su zvjezdaste u proširenoj euklidskoj ravnini (projektivnoj), ali ne i u samoj euklidskoj ravnini. Ovakve vrste konfiguracija sadrže jednu orbitu točaka u beskonačnosti, tada su druga orbita točaka vrhovi pravilnog poligona.

Druga vrsta diedralno zvjezdastih ( $v_3$ ) konfiguracija su DD konfiguracije koje podsjećaju na kiralne zvjezdaste konfiguracije. Takve konfiguracije se označavaju s  $m\#(b, c; d; \mu)$ .

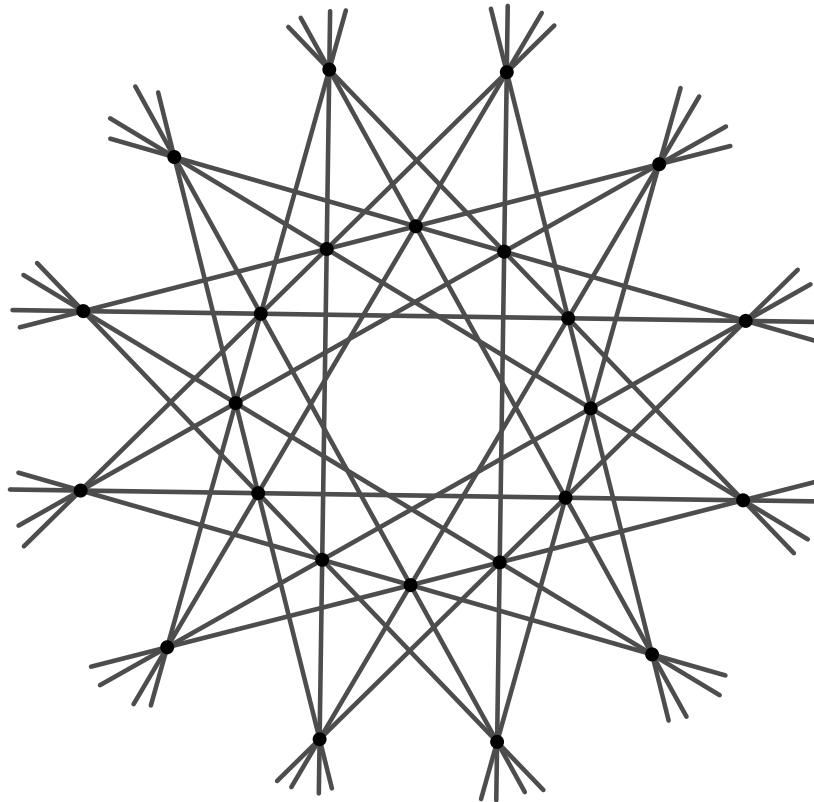
Treća vrsta diedralno zvjezdastih konfiguracija su BB konfiguracije, otkrili su ih J. Bokowski i L. W. Berman. Oznaka za BB ( $v_3$ ) konfiguraciju je  $BB(m; s, t)$ ,  $v = 3m$  za  $m \geq 5$ .



Slika 29: BB konfiguracija  $BB(5; 2, 2)$ .

**Definicija 6.1.** Konfiguracija ( $v_4$ ) je  $k$ -zvjezdasta ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

1.  $k \geq 2$  i  $v = k \cdot m$ , za neki  $m \geq 7$ .
2. Točke konfiguracije su vrhovi  $k$  regularnih konveksnih  $m$ -terokuta sa zajedničkim centrom i takvi da su svi kutovi, u različitim točkama konfiguracije, nasuprot centra višekratnici od  $\frac{\pi}{m}$ .
3. Konfiguracija ima grupu simetrija  $D_m$ , vrhovi svakog  $k$ -terokuta tvore orbitu.
4. Svaki pravac konfiguracije sadrži dvije točke iz svakoga od dva  $k$ -terokuta; svaka točka je incidentna s dva pravca iz dviju orbita pravaca.



Slika 30: Najmanja zvjezdasta ( $v_4$ ) konfiguracija. Konfiguracija  $(24_4)$  je 2-zvjezdasta.

## Literatura

- [1] M. M. Cohen, K. M. Pilgrim, *Groups and Geometry*, 2004. Dostupno na <http://www.math.cornell.edu/~marshall/book04-1.pdf>
- [2] The GAP Group, *GAP - Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.8.10, 2008. Dostupno na <http://www.gap-system.org>
- [3] Geogebra, Verzija 5.0, 2015. Dostupno na <https://www.geogebra.org>
- [4] B. Grünbaum, *Configurations of Points and Lines*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2009.
- [5] B. McKay, A. Piperno, *Nauty and Traces*, Version 2.6r10, 2011. Dostupno na <http://pallini.di.uniroma1.it/>
- [6] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [7] T. Pisanski, B. Servatius, *Configurations from a Graphical Viewpoint*, Springer Science + Business Media, New York, 2013.
- [8] T. Rowland, E. W. Weisstein, *Group Orbit*. Dostupno na <http://mathworld.wolfram.com/GroupOrbit.html>
- [9] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2012. Dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf>
- [10] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb. Dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/2007-08/predavanjeGRUPE.pdf>
- [11] E. W. Weisstein, *Configuration*. Dostupno na <http://mathworld.wolfram.com/Configuration.html>
- [12] E. W. Weisstein, *Pappus Configuration*. Dostupno na <http://mathworld.wolfram.com/PappusConfiguration.html>
- [13] Wikipedia, *Sylvester-Gallai theorem*. Dostupno na <https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester>

## Sažetak

U ovom radu bavimo se geometrijskim  $(v_k)$  konfiguracijama. Na samom početku definirane su kombinatorna i geometrijska konfiguracija te su opisani načini na koje prikazujemo te konfiguracije. Geometrijska konfiguracija je simetrična ako postoji netrivialna izometrija ravnine koja konfiguraciju preslikava u nju samu. Na primjerima smo odredili punu grupu automorfizama i grupu simetrija malih konfiguracija. U trećem poglavlju razmatramo egzistenciju kombinatornih i geometrijskih  $(v_3)$  konfiguracija za različite vrijednosti  $v$ , a u idućem poglavlju prikazujemo dosad poznate rezultate o  $(v_k)$  konfiguracijama za  $k \geq 4$ . Na kraju smo definirali zvjezdaste  $(v_3)$  konfiguracije te prikazali konstrukciju 2-zvjezdastih  $(v_3)$  konfiguracija s cikličkom grupom simetrija.



## Summary

This thesis deals with geometric  $(v_k)$  configurations. The beginning of the paper defines the combinatorial and geometric configuration. Furthermore there is a description of the methods how these configurations can be presented. A geometric configuration is symmetric if there is a nontrivial isometry of the plane mapping the configuration to itself. The full automorphism group and the group of symmetries of some small configurations are determined. In the third chapter the focus is on the analysis of the existence of combinatorial and geometric  $(v_3)$  configurations for various values of  $v$ . Additionally the paper presents known results about  $(v_k)$  configurations for  $v \geq 4$ . Lastly astral  $(v_3)$  configurations are defined and the procedure of constructing 2-astral configurations with cyclic symmetry group is shown.

## Životopis

Rođena sam 6. veljače 1993. godine u Grudama, Bosna i Hercegovina. Osnovnu i srednju školu sam pohađala u Grudama. Nakon završene osnovne škole upisujem Srednju školu Antuna Branka Šimića u Grudama, smjer opća gimnazija. Godine 2011. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Nakon završetka preddiplomskog studija upisujem isti smjer na diplomskom studiju.