Eulerova formula i primjene

Habulan, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Habulan

EULEROVA FORMULA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Kazalicki

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami, tati, bratu, sestri, baki i Tomislavu ... Hvala što ste vjerovali u mene i bili mi podrška ...

Sadržaj

Uvod

Stereometrija zaokuplja matematičarima pažnju već od davnina. Jedan od tih matematičara bio je i Leonhard Euler. Leonhard Euler ostavio je trag u mnogim matematičkim područjima. Njegova postignuća postoje u teoriji brojeva, matematičkoj analizi, teoriji redova, geometriji, topologiji, teoriji grafova i drugim. Bio je jedan od najproduktivnijih matematičara u povijesti, naime napisao je više od 900 radova, od kojih su samo 473 objavljena tijekom njegova života. Jedan od njih je rad o poliedrima, rad u kojem objavljuje danas nama znanu *Eulerovu formulu*, koja je ujedno i tema ovog diplomskog rada. Eulerova formula je formula koja vrijedi za konveksne poliedre, točnije pravilne i polupravilne poliedre, ali i za neke konkavne poliedre. Zanimljivo je to, što je ta veza između broja vrhova, bridova i stranica nekog poliedra usko vezana za granu matematike pod nazivom *teorija grafova.*

U nastavku diplomskog rada najprije ćemo upoznati Leonharda Eulera, matematičara kojem možemo zahvaliti na spomenutoj formuli. Zatim upoznajemo općenito poliedre, te kako pronaći njihovu ravninsku mrežu. Nakon toga iskazujemo i dokazujemo samu *Eulerovu formulu*, te upoznajemo poliedre za koje ona vrijedi. Na samom kraju ovog diplomskog rada pokazat ćemo neke od primjena ove veoma zanimljive formule.

Poglavlje 1

Život Leonharda Eulera

Slika 1.1: Leonhard Euler (Jakob Emanuel Handmann, 1753.)

Leonhard Euler bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom, rođen u Baselu 15. travnja 1707. godine. Leonhard je bio sin protestantskog svećenika Paula Eulera i Marguerite Brucker. Nedugo nakon Leonhardovog rođenja, zajedno s roditeljima i dvije mlađe sestre, Annom Marijom i Marijom Magdalenom, seli u obližnji gradić Riehen. Svoje školovanje započinje u Baselu i već s 14 godina upisuje fakultet. Studij završava disertacijom u kojoj uspoređuje Descartesov i Newtonov rad. Kako je Johann Bernoulli, tada istaknuti europski matematičar, bio bliski prijatelj obitelji Euler, Leonhard ga je tražio privatne poduke. Johann Bernouli tada je uočio Eulerov talent za matematiku, te je uvjerio njegovog oca kako je matematika put kojim Euler treba krenuti. Euler završava svoju doktorsku disertaciju o širenju zvuka (*De Sono*) 1727. godine.

Nakon što je Daniel Bernoulli, sin Johanna Bernoullia, napustio svoje radno mjesto profesora matematike na Ruskoj carskoj akademiji znanosti u St. Peterburgu i vratio se u Basel, Euler ga nasljeđuje na mjestu voditelja matematičkog odjela. U to vrijeme, 1734. godine Euler se ženi Katharinom Gsell. Zajedno su živjeli na obali rijeke Neve, te su imali trinaestero djece, od kojih je samo petero preživjelo djetinjstvo, a samo je troje živjelo duže od oca. Sin Johann Albrecht jedino je Eulerovo dijete koje se bavilo matematikom i koji je bio član *Akademije*. Euler je jako volio djecu i jednom je prilikom rekao kako je do svojih najvećih otkrića došao dok je držao dijete u rukama, te kad su se ostala djeca igrala oko njega.

19. lipnja 1741. obitelj seli u Berlin, gdje Euler prihvaća ponudu pruskog kralja Frederika II. za radno mjesto voditelja matematičkog odjela na berlinskoj Akademiji znanosti. U 25 godina, koliko je Euler proveo u Berlinu, napisao je preko 380 znanstvenih članaka. Tijekom rada na Berlinskoj akademiji Euler počinje imati problema s vidom, te osljepljuje na desno oko 1738. godine. Nedugo nakon toga osljepljuje i na lijevo oko. Usprkos tome, Euler ne prestaje s radom u matematici, upravo suprotno, u tom je razdoblju nastalo više od polovice njegovih radova.

Euler se 1766. vraća u Rusiju, u St. Peterburg, gdje provodi ostatak svog života. 1771. veliki požar zahvaća i njegovu kuću, u kojem je navodno Euler spasio samo sebe i svoje matematičke spise. Dvije godine kasnije umire mu žena. Zbog izljevi krvi u mozak, 18. rujna 1783. Euler umire. Sahranjen je u Pskovu na Lazarevskom groblju.

Euler je bio jedan od najznamenitijih i najproduktivnijih matematičara u povijesti. Dugo se vremena bavio matematičkom analizom, iz kojeg potječe njegovo najznačajnije djelo *Uvod u analizu beskonačnosti*. Promatra eksponencijalnu funkciju na skupu kompleksnih brojeva te ih povezuje s trigonometrijskim funkcijama, čija je posljedica poznata Eulerova formula:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.1}$$

Iz Eulerove formule slijedi i Eulerov identitet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{1.2}$$

koji se smatra jednom od najljepših jednakosti cijele matematike.

Euleru dugujemo i čitav niz današnjih modernih oznaka u matematici, neke od njih su: i za imaginarnu jedinicu, e za Eulerov broj, *f(x)* standardni zapis realne funkcije, oznake $\Delta, \sin, \cos$.

Neki od Eulerovih doprinosa jesu Eulerova funkcija, Eulerovi brojevi, Eulerov pravac, Eulerova formula za homogene funkcije, Eulerova formula zakrivljenosti plohe, Eulerov integral druge vrste ili gama-funkcija, Eulerov integral prve vrste ili beta-funkcija.

Euler je svoje doprinose dao i topologiji. Riješio je problem Königsberških mostova, te je općenito naveo kad su slični problemi rješivi, dao pojmove *Eulerova tura* i *Eulerova staza*. Osim toga značajan Eulerov doprinos bila je i *Eulerova poliedarska formula*, koja je ujedno i tema ovog diplomskog rada. Oba termina vezana su za područje matematičke topologije pod imenom *teorija grafova*. *Teorija grafova* se bavi problemima koji se mogu analizirati preko određenog broja točaka (vrhova) i spojnica među njima (bridova).

Poglavlje 2

Poliedri

Tema ovog diplomskog rada usko je vezana za poliedre. Prije nego što iskažemo i dokažemo *Eulerovu formulu* potrebno je definirati i objasniti pojmove kojima ćemo se kasnije služiti.

Definicija 2.0.1. *[Jednostavni poligon] Jednostavni poligon je unija jednostavne zatvorene poligonalne linije i njegove unutrašnjosti.*

Definicija 2.0.2. *[Poligon] Poligon je zbroj konačno mnogo jednostavnih poligona.*

Definicija 2.0.3. *[Tijelo] Tijelo u trodimenzionalnom realnom prostoru je kompaktan, povezan skup s nepraznim interiorom (unutrašnjosti).*

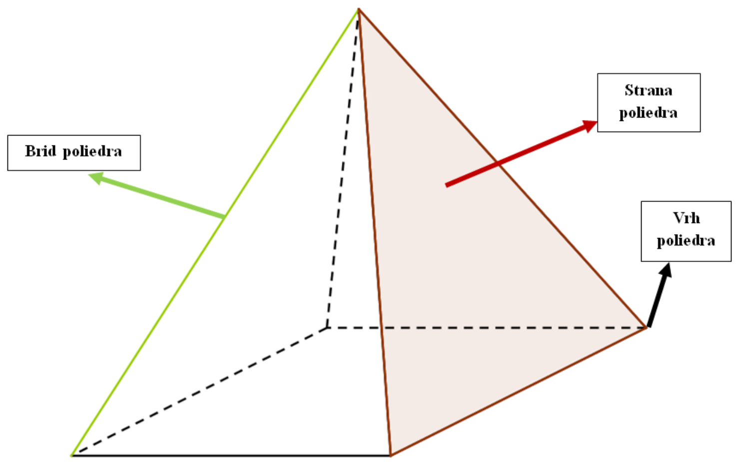
Definicija 2.0.4. *[Poliedar] Poliedar je tijelo čija je unutrašnjost povezana, te čiji je rub povezan skup koji se sastoji od konačno mnogo (jednostavnih ravninskih) poligona, pri čemu se svaka dva od tih poligona ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednu zajedničku stranicu, a svaka stranica nekog od tih poligona je zajednička stranica točno dvaju od tih poligona. Unija svih tih poligona zove se rubna ploha ili rub poliedra.*

Svaki se poligon rubne plohe poliedra zove **strana poliedra**, stranica svakog od tih poligona zove se **brid poliedra**, a vrh svakog od tih poligona zove se **vrh poliedra**.

Drugim riječima, poliedar je tijelo čiji rub čini konačno mnogo poligona ("uglatih tijela").

Definicija 2.0.5. *[Jednostavni poliedar] Jednostavni poliedar je poliedar čija je rubna ploha homeomorfna sferi. Njegova se rubna ploha zove poliedarska sfera.*

Definicija 2.0.6. *[Konveksni poliedar] Poliedar je konveksan ako se čitav nalazi s iste strane ravnine svakog poligona njegovog ruba.*



Slika 2.1: Primjer poliedra: Četverostrana piramida

2.1 Rastezanje poliedra u ravninu. Graf poliedra

Definicija 2.1.1. *[Graf] Graf G=(V, E) je uređeni par koji se sastoji od skupa V=V(G) vrhova (ili čvorova) i skupa E=E(G) bridova, spojnica među vrhovima.*

Svaki brid koji spaja dva vrha je incidentan s tim vrhovima, a oni su susjedni. Graf G je konačan ako su V i E konačni skupovi, inače je beskonačan.

Dva grafa G i H su **izomorfna** ako postoje bijekcije među vrhovima i bridovima tako da susjedni vrhovi prelaze u susjedne. Pišemo $G \approx H$.

Graf je **jednostavan** ako su svaka dva vrha spojena s najviše jednim bridom i ako nema petlji.[1]

Graf je **povezan** ako su svaka dva vrha povezana nekim putem. Povezani graf bez ciklusa se zove stablo.

Definicija 2.1.2. *[Planarni grafovi] Graf je planaran ako se može smjestiti u ravninu R^2 tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.*

To znači da postoji funkcija f koja svakom vrhu od G pridružuje točku u ravnini R^2, a svakom bridu b jednostavnu krivulju $f(b) \subset \mathrm{R}^2$ tako da se $f(b_1)$ i $f(b_2)$ sijeku u točki T ako i samo ako je $T = f(v)$, za neki vrh incidentan s b_1 i b_2 u G. Tako smješten graf u ravninu zove se ravninski. Ravninski graf je uređeni par (G, f), gdje je G planarni graf, a f smještanje u ravninu.

Augustin Louis Cauchy, francuski matematičar je uočio da se svakom konveksnom poligonu može pridružiti njegova ravninska mreža ili ravninski povezan graf. To je graf u

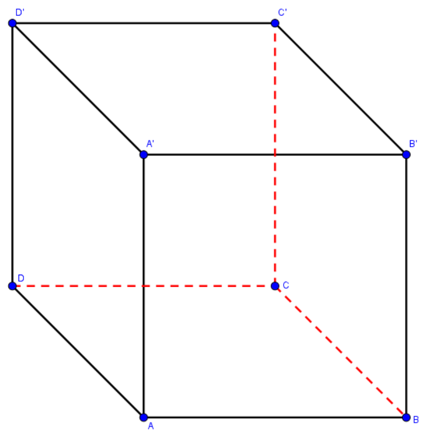
[1] U grafu postoji petlja ako postoje bridovi koji spajaju vrh sa samim sobom.

ravnini u kojem se rubovi sijeku samo u vrhovima. Takva ravninska mreža ima isti broj vrhova i bridova kao i pripadni mu poliedar, te onoliko strana na koliko je područja ravnina podijeljena tom mrežom, uključujući i vanjsko, neograničeno područje.

Vizualno si to preslikavanje prostora na ravninu možemo predočiti tako da zamislimo da najprije izrežemo jednu od stranica poligona duž brida koji je dio te stranice, te zamislimo ostatak poligona kao rastezljivu gumu. Sada rastežemo taj poligon (bez jedne stranice koju smo izrezali) tako da padne u ravninu i postane dvodimenzionalan. Tako "izrezana" stranica postaje neograničeno vanjsko područje tog grafa.

Radi lakšeg shvaćanja tog procesa pokazati ćemo navedeno "rastezanje" na primjeru kocke.

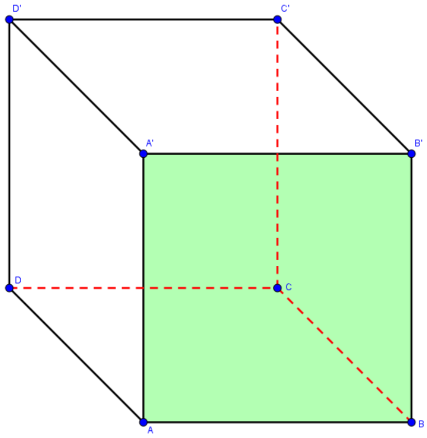
Primjer: Promatramo kocku *ABCDA'B'C'D'* kakva je dana na slici (2.2). Crvenom isprekidanom linijom označili smo skrivene bridove.



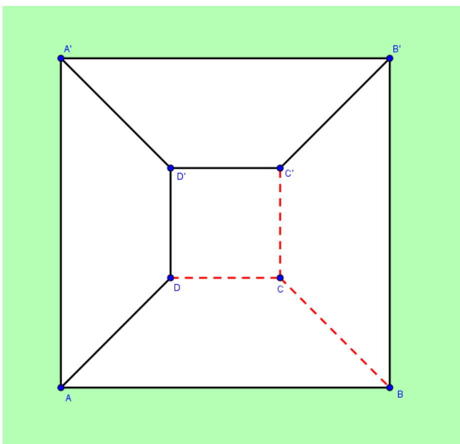
Slika 2.2: Kocka *ABCDA'B'C'D'*

Sada ćemo iz dane točke izrezati stranicu ABA'B', koja je na slici (2.3) osjenčana zeleno.

Zamislimo da je ostatak kocke načinjen od rastezljive gume. Sada, rastezanjem bridova *AB*, *BB'*, *B'A'* i *A'A* do ravnine *DCC'* dobivamo ravninsku mrežu ili graf koji predstavlja kocku *ABCDA'B'C'D'*. Izrezana stranica (zeleno osjenčani dio (2.4)) koji je u kocki bilo ograničeno područje sada postaje vanjsko, neograničeno područje. Pomoću slike možemo vidjeti da takvo preslikavanje trodimenzionalnog poliedra u dvodimenzionalnu mrežu ne mijenja broj stranica, niti broj bridova i vrhova.



Slika 2.3: Kocka s izrezanom stranicom



Slika 2.4: Ravninski graf kocke ABCDA'B'C'D'

Poglavlje 3

Eulerova formula

3.1 Ideja i otkriće

Euler je svoju hipotezu o poliedrima postavio na temelju uočenih zajedničkih svojstava dvaju objekata, metodom analogije, gdje je pretpostavio da ti objekti moraju imati još nekih podudaranja. Euler se počeo baviti poliedrima kako bi došao do formule za zbroj kutova u njemu. Znajući da je zbroj kutova u konveksnom n-terokutu dan formulom $(n-2)\pi$, tj. konstantan je, slutio je da isti slučaj mora biti i u poliedrima. Svoje je istraživanje započeo s tetraedrom. Promatrao je njegove prostorne kutove uz bridove, ali je uočio da im zbroj nije konstantan. Na posljetku je promatrao kutove na stranicama poliedra i došao do zanimljivih zaključaka. Promatrao je kocku, tetraedar, oktaedar, peterostranu prizmu i toranj, koji je bio spoj uspravne prizme i pripadne piramide. Promatrao im je broj stranica, S, broj vrhova, V i zbroj kutova sa stranama kod danog poliedra, te podatke možemo vidjeti u tablici:

Poliedar	S	$\sum\alpha$	V	$\boldsymbol{2\pi V}$
Kocka	6	12π	8	16π
Tetraedar	4	4π	4	8π
Oktaedar	8	8π	6	12π
Peterostrana prizma	7	16π	10	20π
Toranj	9	14π	9	18π

Slika 3.1: Tablica promatranih svojstava poliedara

Euler je u početku promatrao samo broj strana poliedra i zbroj kutova, tek je naknadno tablicu nadopunio sa zadnja dva stupca. Uočio je da je $\sum \alpha < 2\pi V$, jer je zbroj kutova na stranama pri vrhu u kojem se one spajaju manji od 2π. Kada je Euler nadopunio tablicu drugim poliedrima kao što je dodekaedar, ikosaedar i n-terostrana prizma, uočio je da se gornja nejednakost približava jednakosti, iz čega proizlazi da je:

$$2\pi V - \sum \alpha = 4\pi \tag{3.1}$$

Formula (3.1) bila je Eulerova prva hipoteza iz koje će doći do druge hipoteze, koja je nama poznata kao *Eulerova formula*.

Euler je do druge hipoteze došao promatrajući zbroj brojeva bridova na svakoj strani poliedra: $b_1 + b_2 + ... + b_S$. Kako dvije stranice poliedra imaju zajednički brid, tada smo svaki od njih u danoj sumi brojili dva puta. Uzevši to u obzir dobivamo jednakost:

$$b_1 + b_2 + ... + b_S = 2B \tag{3.2}$$

Zatim Euler po svakoj stranici poliedra zbraja kutove. Zaključuje da je na prvoj stranici zbroj kutova jednak $(b_1 - 1)\pi$, na drugoj stranici $(b_2 - 1)\pi$, a na S-toj stranici $(b_S - 1)\pi$. Iz toga zaključuje da je ukupna suma kutova jednaka:

$$\sum \alpha = \sum_{i=1}^{S} (b_i - 1)\pi \tag{3.3}$$

Primjenjujući svojstva sume dobivamo:

$$\sum \alpha = \pi \sum_{i=1}^{S} (b_i) - 2S\pi (3.4)$$

Uzevši u obzir (3.2) dobivamo:

$$\sum \alpha = 2B\pi - 2S\pi \Rightarrow \sum \alpha = 2\pi(B - S) \tag{3.5}$$

Kad u (3.5) uvrstimo Eulerovu prvu hipotezu (3.1) dobijemo Eulerovu drugu hipotezu, tj. dobijemo *Eulerovu poliedarsku formulu*:

$$2\pi V - 2\pi(B - S) = 4\pi \Rightarrow V - B + S = 2 \tag{3.6}$$

3.2 Iskaz i dokazi

Iako se otkriće *Eulerove poliedarske formule* pripisuje Euleru, vjeruje se da su matematičari već i ranije za nju znali. Naime, po nekim izvorima smatra se da je René Descartes otkrio poliedarsku formulu prije Eulera. Razlog tome je vjerojatno taj što je Descartes dao razne činjenice o trodimenzionalnim poliedrima koje bi vodile ka otkriću poliedarske formule, ali nikad nije učinio taj zadnji korak. Euler je svoje otkriće, putem pisma, 1750. godine najprije spomenuo Christianu Goldbachu. Tek je kasnije objavio dva rada u kojima daje teorem o poliedarskoj formuli za konveksne poligone i pokušaj njegovog dokaza. Kažemo samo pokušaj dokaza jer Euler nije dao precizan dokaz. Eulerov problem, kao i problem mnogih matematičara prije njega, koji su se bavili poliedrima, je bio taj što poliedre nisu promatrali kao strukture s vrhovima, bridovima i stranama. Sam Euler je pod vrh poliedra smatrao čvrsti kut ili dio poliedarskog konusa koji počinje u vrhu.

Kako se upravo Eulera smatra ocem *teorije grafova*, zbog njegovog rješenja problema Königsberških mostova, očekivali bismo da i poliedre poveže s *teorijom grafova*. Taj će korak tek kasnije učiniti Cauchy. Euler je pokušao dokazati poliedarsku formulu rastavljajući poliedar na jednostavnije poliedre. Svi njegovi argumenti nisu bili točni, niti je dokaz zadovoljavao moderne standarde, ali se kasnije ispostavilo da je moguće dati ispravan dokaz njegovom metodom.

Teorem 3.2.1. *[Eulerova poliedarska formula] Za svaki konveksan poliedar u kojem je V broj vrhova, B broj bridova i S broj strana vrijedi:*

$$V - B + S = 2 \tag{3.7}$$

Već smo spomenuli da Euler nije dao ispravan i precizan dokaz poliedarske formule. Prvi koji je dokazao Eulerovu poliedarsku formulu bio je francuski matematičar Adrien Marie Legendre 1794. godine. Dokaza *Eulerove poliedarske formule* ima mnogo. David Eppstein je uspio sakupiti 17 različitih dokaza *Eulerove formule*. Mi ćemo navesti tri. Prvi od njih je prilično elementaran dokaz, 1811. godine prvi ga je dao francuski matematičar Augustin Louis Cauchy.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti preslikavanje poliedara u ravninu, odnosno koristiti ćemo ravninske mreže poliedara, za koje znamo da imaju isti broj vrhova i bridova kao i početni poliedar, te onoliko strana na koliko je dijelova podijeljena ravnina tim grafom, uključujući vanjsko, neograničeno područje. Sada vršimo triangulaciju te mreže, vučemo dijagonale unutar danih četverokuta. Tako se broj bridova i broj strana poveća za jedan, dok broj vrhova ostaje isti. Pogledajmo kako to utječe na poliedarsku formulu:

$$V - (B + 1) + (S + 1) = V - B - 1 + S + 1 = V - B + S \tag{3.8}$$

Zaključujemo da proces triangulacije ne utječe na poliedarsku formulu. Dakle, sada imamo povezan planaran graf[1], čija su sva unutrašnja područja trokuti.

Također moramo pretpostaviti da se svake dvije unutarnje točke mogu povezati putem koji nema zajedničkih točaka s rubom[2].

Sada promatramo jedan "rubni" trokut unutar ravninske mreže. Svaki takav trokut na rubu ravninske mreže ima jedan ili dva vanjska brida. Taj ćemo trokut ukloniti. Ako je to trokut koji ima jedan vanjski brid, broj bridova i stranica se umanjuje za jedan, a broj vrhova ostaje isti. Ako je pak to "rubni" trokut koji ima dva vanjska brida, njegovim uklanjanjem broj vrhova i broj strana u mreži će se umanjiti za jedan, dok će se broj bridova umanjiti za dva. Pogledajmo kako to uklanjanje "rubnih" trokuta utječe na poliedarsku formulu:

1. "rubni" trokut ima jedan vanjski brid:

$$V - (B - 1) + (S - 1) = V - B + 1 + S - 1 = V - B + S \tag{3.9}$$

2. "rubni" trokut ima dva vanjska brida:

$$(V - 1) - (B - 2) + (S - 1) = V - 1 - B + 2 + S - 1 = V - B + S \tag{3.10}$$

Uočavamo da u oba slučaja vrijednost Eulerove poliedarske formule ostaje ista. Nastavimo li s uklanjanjem "rubnih" trokuta, graf će stalno biti povezan, te će na kraju ostati samo jedan trokut, s tri vrha, tri brida i dva područja, brojeći i vanjsko, neograničeno.

Dakle,

$$V - B + S = 3 - 3 + 2 = 2 \tag{3.11}$$

Kako smo pokazali da se triangulacijom iznos izraza

$$V - B + S$$

nije mijenjao, možemo zaključiti da je vrijednost tog izraza jednaka 2 i za početnu ravninsku mrežu, pa tako i za početni poliedar.

Da uvijek postoje dva "rubna" trokuta u ravninskoj mreži, koje možemo ukloniti, dokazujemo indukcijom po broju trokuta. Uklanjanje trokuta ne narušava pretpostavku koju smo ranije spomenuli, a ta je da se svake dvije unutarnje točke mogu povezati putem koji nema zajedničkih točaka s rubom. □

---

[1] Graf je planaran ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi ne sijeku.

[2] To je ispunjeno za svaku mrežu nastalu od konveksnog poliedra na opisani način

Drugi dokaz *Eulerove formule*.

Dokaz. Drugi dokaz *Eulerove formule* koji ćemo navesti je dokaz matematičkom indukcijom. Dokaz matematičkom indukcijom može se provesti po stranicama, po bridovima ili pak po vrhovima.

Neka je G povezan ravninski graf nekog poliedra. Dokaz indukcije provest ćemo po broju bridova unutar grafa, tj. po b. Broj vrhova pripadnog ravninskog grafa označit ćemo sa v, a broj strana grafa sa s.

Baza indukcije: Ako je $b = 0$, graf se sastoji samo od jednog vrha, onda je $v = 1$ i $s = 1$, pa formula vrijedi $v - b + s = 1 - 0 + 1 = 2$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da formula vrijedi za sve poliedre čiji se pripadni ravninski graf sastoji od $b - 1$ bridova, (neka je to broj veći ili jednak 1). Korak indukcije: Želimo dokazati da formula vrijedi za poliedre čiji se planarni graf sastoji od b bridova, te neka imaju s strana i v vrhova. Dokaz dijelimo na dva slučaja. U prvom slučaju pretpostavimo da graf G nema ciklusa, tj. pripadni graf je stablo[3]. Po karakterizaciji stabla vrijedi da je $v = b + 1$ i $s = 1$ jer imamo samo jednu neomeđenu stranu. I po tome Eulerova formula vrijedi: $v - b + s = b + 1 - b + 1 = 2$. Drugi slučaj ovog dokaza je slučaj kada u grafu G postoji ciklus. Neka je brid b_1 brid nekog ciklusa unutar grafa G. Uklonimo li taj brid, graf će još uvijek biti povezan i planaran (jer nije stablo). Kako smo na taj način broj bridova umanjili za jedan, tj. broj bridova iznosi $b - 1$, broj vrhova ostaje isti, v, a broj strana se također umanjuje za jedan, (jedna se stranica spaja s neograničenim vanjskim područjem), pa prema pretpostavci indukcije vrijedi:

$$v - (b - 1) + (s - 1) = 2 \Rightarrow v - b + 1 + s - 1 = 2 \Rightarrow v - b + s = 2 \tag{3.12}$$

Čime je dokaz gotov. □

Pokažimo još i treći dokaz *Eulerove formule*.

Dokaz. Neka je $T \subseteq G$ razapinjuće stablo[4] od G. Neka je G^* dualni graf[5] od G. Tada je i G^* povezan, ravninski graf, te označimo s T^* njegovo razapinjuće stablo.

Broj vrhova u grafu T jednak je broju vrhova u grafu G, tj. $v_G = v_T$. Kako je T stablo, po karakterizaciji stabla vrijedi da vrhova ima za jedan više od bridova, tj. $v_T = b_T + 1$. Iz toga slijedi $v_G = b_T + 1$.

S druge pak strane vrijedi da je broj strana u grafu G jednak $s_G = v_{G^*} = v_{T^*} = e_{T^*} + 1$. Zbrajanjem broja vrhova i strana u grafu G dobivamo $v_G + s_G = b_T + 1 + b_{T^*} + 1 = b_G + 2$, jer

[3] Povezani graf bez ciklusa (zatvorenih puteva).

[4] Razapinjuće stablo grafa G je razapinjući podgraf (sadrži sve vrhove) koji je stablo. Svaki povezani graf ima razapinjuće stablo.

[5] Ravninskom grafu G na prirodan je način pridružen njegov dualni graf G^*, gdje su strane od G vrhovi od G^*, dok su dva vrha od G^* spojena bridom b^* akko su pripadne strane iz G incidentne sa zajedničkim bridom b.

imamo bijekciju sa skupa bridova iz razapinjućeg stabla T^* na skup bridova od G bez skupa bridova od T. Ta bijekcija postoji jer niti T niti T^* nemaju ciklusa i skup bridova unutar T i skup bridova unutar T^* su međusobno disjunktni. Pokazali smo da vrijedi: $v_G + s_G = b_G + 2$, tj. $v_G - b_G + s_G = 2$, čime je dokaz gotov. $\square$

Poglavlje 4

Pravilni i polupravilni poliedri

4.1 Pravilni poliedri

Definicija 4.1.1. *[Pravilni poliedri] Pravilni poliedri su poliedri kome su sve strane i svi bridovi sukladni (čije su strane pravilni mnogokuti).*

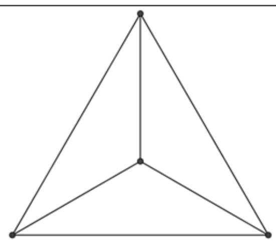
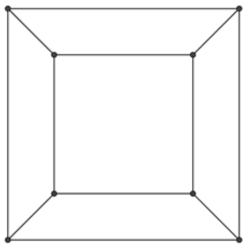
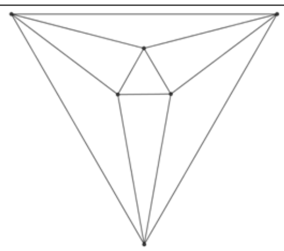
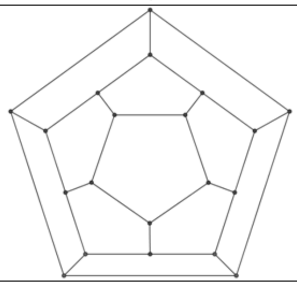
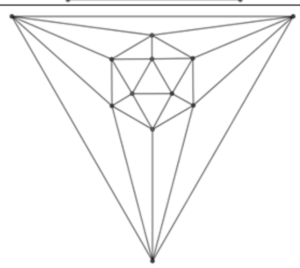
Postoji 5 vrsta pravilnih konveksnih poliedara:

1. *Tetraedar (Strane su mu 4 trokuta, ima 6 bridova i 4 vrha)*
2. *Kocka (Strane su mu 6 kvadrata, ima 12 bridova i 8 vrhova)*
3. *Oktaedar (Strane su mu 8 trokuta, ima 12 bridova i 6 vrhova)*
4. *Dodekaedar (Strane su mu 12 peterokuta, ima 30 bridova i 20 vrhova)*
5. *Ikosaedar (Strane su mu 20 trokuta, ima 30 bridova i 12 vrhova)*

Pravilni poliedri još se nazivaju i Platonova tijela po matematičaru Platonu koji se njima bavio u svom dijalogu *Timej*. Za pravilne poliedre znalo se i prije Platonova doba, te su bili česta tema starih matematičara, vjerojatno zbog njihove savršenosti. Platonov suvremenik Teetet iz Atene matematički je definirao pojam pravilnog poliedra te je dao prvi poznati dokaz da ih ima točno pet.

Zanimljivo je da svakom pravilnom poliedru možemo pridružiti tri sfere. Prva od njih je opisana sfera, na njoj leže vrhovi pravilnog poliedra. Druga je upisana sfera, na njoj leže središta stranica pravilnog poliedra. Posljednja sfera je sfera na kojoj leže polovišta bridova pravilnih poliedara.

Možemo se uvjeriti da za sve pravilne poliedre vrijedi Eulerova formula. Pogledajmo tablicu (4.1):

Poliedar	Ravninska mreža	Br. vrhova	Br. bridova	Br. stranica	V-B+S
Tetraedar		4	6	4	4-6+4=2
Kocka		8	12	6	8-12+6=2
Oktaedar		6	12	8	6-12+8=2
Dodekaedar		20	30	12	20-30+12=2
Ikosaedar		12	30	20	12-30+20=2

Slika 4.1: Tablica pravilnih poliedara

4.2 Polupravilni poliedri

Eulerova formula vrijedi i za sve polupravilne poliedre.

Definicija 4.2.1. *[Polupravilni poliedri] Polupravilni poliedri su konveksni poliedri čiji su svi vrhovi međusobno ekvivalentni*[1]*, a sve strane pravilni mnogokuti, ne nužno svi sukladni.*

Polupravilni poliedri uključuju:

1. Uspravne istobridne n-terostrane prizme, čije su baze pravilni n-terokuti, te je visina jednaka duljini stranice baze
2. Istobridne antiprizme, poliedre omeđene s dva sukladna pravilna n-terokuta koji leže u paralelnim ravninama i s $2n$ pravilnih sukladnih trokuta
3. Arhimedova tijela

   Prva grupa, pet poliedara koji nastaju odsijecanjem vrhova Platonovih tijela te čine grupu krnjih poliedara (krnji tetraedar, krnji heksaedar, krnji oktaedar, krnji dodekaedar, krnji ikosaedar).

   Druga grupa je grupa od četiri polupravilna poliedra koja se može jednostavno povezati s kockom i oktaedrom, naziva se grupa kubokta poliedara (kuboktaedar, rombokuboktaedar, veliki rombokuboktaedar, skošena kocka).

   Treća grupa, grupa od četiri polupravilna poliedra koja se može povezati s dodekaedrom i ikozaedrom, naziva se grupa ikosadodeka poliedara (ikosadodekaedar, rombikosadodekaedar, veliki rombikosadodekaedar, skošeni dodekaedar).

Primjer 4.2.2. *[Nogometna lopta]*

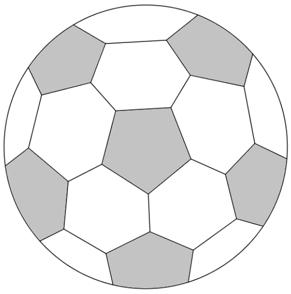
Nogometna lopta, slika (4.2), tipičan je primjer polupravilnog poliedra. Složena je u obliku krnjeg ikosaedra, jednog od trinaest Arhimedovih tijela. Polupravilni je poliedar jer se sastoji od dvije različite vrste pravilnih poligona. Točnije sastoji se od pravilnih peterokuta i šesterokuta.

Znajući činjenicu da se u svakom vrhu lopte sastaju jedan peterokut i dva šesterokuta možemo odrediti ukupan broj vrhova lopte. Ako broj peterokutnih stranica označimo sa k, a broj šesterokutnih stranica označimo sa l, tada imamo ukupan broj stranica $S = k + l$, broj bridova iznosi $B = \frac{5k+6l}{2}$ (dijelimo s 2 jer smo svaki brid brojali dva puta), dok je broj vrhova jednak $V = \frac{5k+6l}{3}$. Koristeći činjenicu da polupravilni poliedri zadovoljavaju *Eulerovu formulu* lako možemo izračunati nepoznanice.

$$V - B + S = 2 \Rightarrow \frac{5k+6l}{3} - \frac{5k+6l}{2} + (k+l) = 2 \Rightarrow k = 12 \tag{4.1}$$

[1]U poliedru dva su vrha ekvivalentna ako postoji simetrija, rotacija ili refleksija, tog poliedra koja ga preslikava u samog sebe, pri čemu se jedan vrh poliedra preslikava u drugi.

Kako znamo da svaki vrh pripada točno jednom peterokutu, ukupan broj vrhova je $5k$, tj.60 i znamo da se u svakom vrhu sastaju dva šesterokuta pa je broj vrhova također jednak $\frac{6l}{2} = 3l$, iz čega zaključujemo da je $l = 20$. Dakle, dobili smo da nogometna lopta ima 12 peterokutnih stranica, 20 šesterokutnih stranica, 60 vrhova i 90 bridova.



Slika 4.2: Nogometna lopta

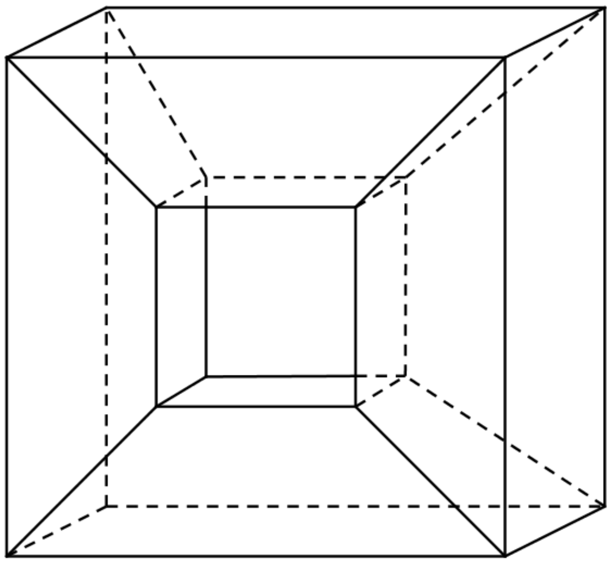
4.3 Generalizacija Eulerove formule

Brojni matematičari bavili su se pitanjem za koje sve poliedre vrijedi *Eulerova formula*, te da li ona vrijedi samo za konveksne poliedre. Uvjerili su se da ona ne vrijedi za, kako ih Imre Lakatos[2] naziva, čudovišta. A to su npr. poliedar okvir slike (Primjer 4.3.1) ili mali zvjezdasti dodekaedar, poznat pod nazivom "Jež" (Primjer 4.3.2). Drugim pitanjem kojim su se matematičari bavili je kako transformirati formulu da ona vrijedi za sve poliedre. Jedan od odgovora na to pitanje dao je švicarski matematičar Simon Antoine Jean L'Huilier 1812. godine. On je otkrio da ako k predstavlja broj "rupa" kroz poliedar, a m broj njegovih prstenastih strana, tada za taj poliedar vrijedi formula:

$$V - B + S = 2 - 2k + m \tag{4.2}$$

Primjer 4.3.1. *[Okvir slike]*

Poliedar "Okvir slike" primjer je poliedra koji ne zadovoljava *Eulerovu formulu*. Naime, uvrstimo li broj vrhova, bridova i stranica u *Eulerovu formulu* dobit ćemo nulu: $V - B + S = 16 - 32 + 16 = 0$.



Slika 4.3: Poliedar "Okvir slike"

[2]Britanski filozof matematike i znanosti, autor knjige *Dokazi i opovrgavanja*.

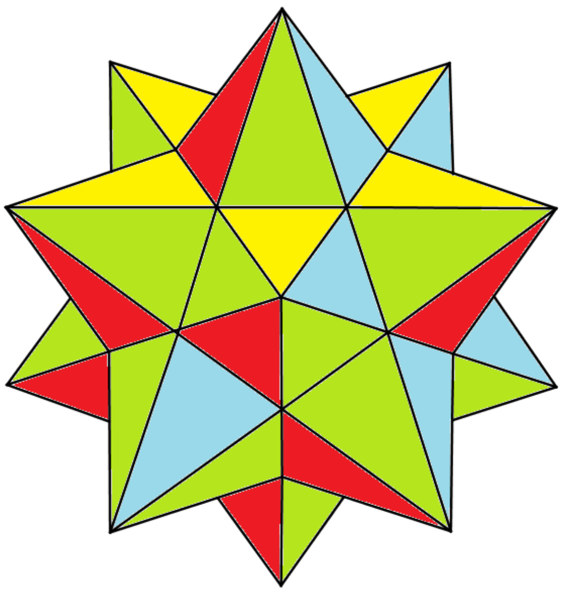
Zvjezdasti poliedri

Osim pravilnih konveksnih poliedara, matematičarima su bili zanimljivi i pravilni zvjezdasti poliedri. Njemački matematičar, fizičar i astronom, Johan Kepler 1619. godine pronašao je dva tipa, mali i veliki zvjezdasti dodekaedar (Slike: 4.4, 4.5). Louis Poinsot, francuski matematičar i fizičar otkrio je 1809. godine druga dva tipa, veliki ikosaedar i veliki dodekaedar (Slike: 4.6, 4.7). Tri godine kasnije, Augustin Luis Cauchy, također francuski matematičar je dokazao da ne postoje drugi tipovi pravilnih zvjezdastih poliedara. U primjerima ćemo provjeriti koji tipovi zvjezdastih poliedara zadovoljavaju *Eulerovu formulu.*

Primjer 4.3.2. *[Mali zvjezdasti dodekaedar]*

Keplerov zvjezdasti poliedar, mali zvjezdasti dodekaedar (Slika: 4.4), u knjizi Imre Lakatosa nazvan "Jež" sastoji se od 12 zvjezdastih peterokuta, ima 12 vrhova, 30 bridova i 12 strana. *Eulerova formula* za ovaj poliedar ne vrijedi:

$$V - B + S = 12 - 30 + 12 = -6 \tag{4.3}$$

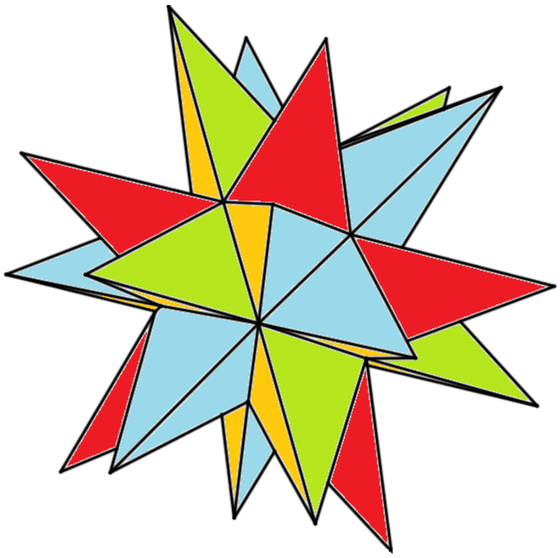


Slika 4.4: Poliedar "Jež"

Primjer 4.3.3. *[Veliki zvjezdasti dodekaedar]*

Veliki zvjezdasti dodekaedar (Slika: 4.5) sastoji se od zvjezdastih peterokuta. Sadrži 12 stranica, 30 bridova i 20 vrhova. Uvrstimo li to u *Eulerovu formulu*, možemo vidjeti da je zadovoljava, tj.

$$V - B + S = 20 - 30 + 12 = 2 \tag{4.4}$$



Slika 4.5: Veliki zvjezdasti dodekaedar

Primjer 4.3.4. *[Veliki ikosaedar]*

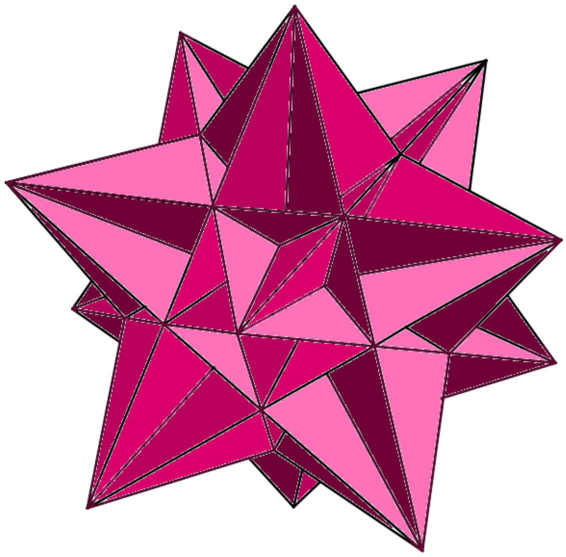
Veliki ikosaedar (Slika: 4.6) ima 12 vrhova, 30 bridova i 20 stranica. Možemo se uvjeriti da za ovaj zvjezdasti poliedar vrijedi *Eulerova formula*:

$$V - B + S = 12 - 30 + 20 = 2 \tag{4.5}$$

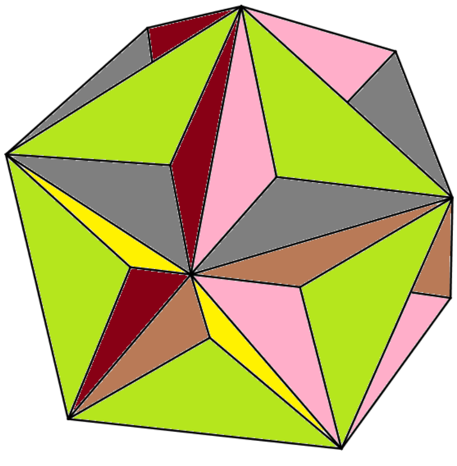
Primjer 4.3.5. *[Veliki dodekaedar]*

Veliki dodekaedar (Slika: 4.7) ima 12 vrhova, 30 bridova i 12 stranica. Možemo se uvjeriti da za ovaj zvjezdasti poliedar ne vrijedi *Eulerova formula*:

$$V - B + S = 12 - 30 + 12 = -6 \tag{4.6}$$



Slika 4.6: Veliki ikosaedar



Slika 4.7: Veliki dodekaedar

Poglavlje 5

Primjena Eulerove formule

5.1 Dokaz da postoji samo pet pravilnih poliedra

Dokaz. Označimo s m broj bridova na svakoj strani poliedra. Označimo s n broj bridova koji se sastaju u jednom vrhu pravilnog poliedra. Znamo da jedan brid pripada dvjema stranicama te da svaki brid spaja dva vrha. Ako sa v označimo broj vrhova, sa b broj bridova, a sa s broj strana u poliedru, prethodna zapažanja možemo zapisati kao:

$$ms = 2b \tag{5.1}$$

$$nv = 2b \tag{5.2}$$

Sada iz dobivenih jednadžbi, (5.1) i (5.2), izrazimo broj vrhova i broj strana, kako bi ih mogli uvrstiti u *Eulerovu formulu* (za koju znamo da vrijedi za pravilne poliedre).

$$ms = 2b \Rightarrow s = \frac{2b}{m} \tag{5.3}$$

$$nv = 2b \Rightarrow v = \frac{2b}{n} \tag{5.4}$$

$$v - b + s = 2 \Rightarrow \frac{2b}{n} - b + \frac{2b}{m} = 2 \tag{5.5}$$

$$2b\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) = 2 / : (2b) \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{b} \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \tag{5.8}$$

Možemo primijetiti da je jednadžba (5.8) simetrična s obzirom na veličine m i n. Također možemo primijetiti, kako je $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$, da m i n ne mogu istovremeno biti veći od 4. BSO u spomenutu nejednakost možemo staviti da je $m = 3$ pa dobivamo:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6 \tag{5.9}$$

Dakle kad je $m = 3$, n mora iznositi 3, 4 ili 5. Slučaj kad je $m = 2$ i $n = 2$ možemo odbaciti jer je tada broj bridova na stranici poliedra veći od 2, ali je ujedno i broj bridova koji se sastaju u jednom vrhu veći od 2. Vodeći se time razlikujemo 5 slučajeva:

1. slučaj: Uvrštavajući $m = 3$ i $n = 3$ u jednadžbe (5.1), (5.2) i (5.8) dobivamo: $b = 6$, $v = 4$ i $s = 4$, što je karakteristika pravilnog tetraedra.

2. slučaj: Uvrštavajući $m = 3$ i $n = 4$ u jednadžbe (5.1), (5.2) i (5.8) dobivamo: $b = 12$, $v = 6$ i $s = 8$, što je karakteristika pravilnog oktaedra.

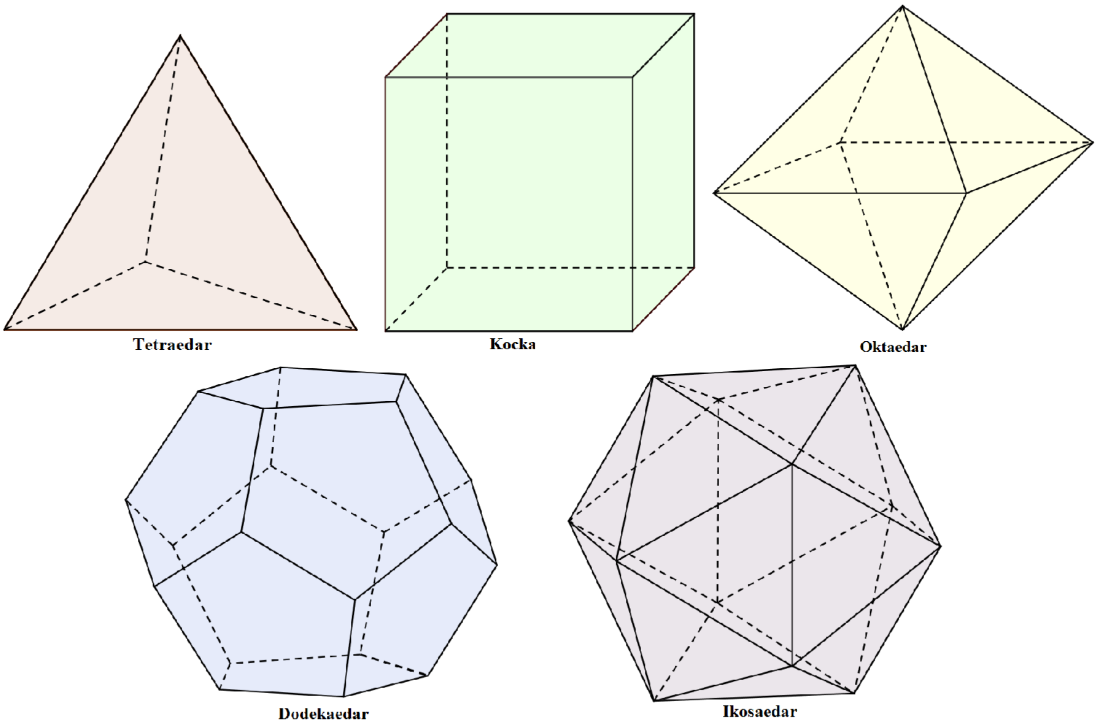
3. slučaj: Uvrštavajući $m = 3$ i $n = 5$ u jednadžbe (5.1), (5.2) i (5.8) dobivamo: $b = 30$, $v = 12$ i $s = 20$, što je karakteristika pravilnog ikosaedra.

   Preostala dva slučaja dobit ćemo koristeći već spomenutu činjenicu simetričnosti jednadžbe (5.8).

4. slučaj: Uvrštavajući $m = 4$ i $n = 3$ u jednadžbe (5.1), (5.2) i (5.8) dobivamo: $b = 12$, $v = 8$ i $s = 6$, što je karakteristika kocke.

5. slučaj: Uvrštavajući $m = 5$ i $n = 3$ u jednadžbe (5.1), (5.2) i (5.8) dobivamo: $b = 30$, $v = 20$ i $s = 12$, što je karakteristika pravilnog dodekaedra.

□



Slika 5.1: Pet pravilnih poliedara

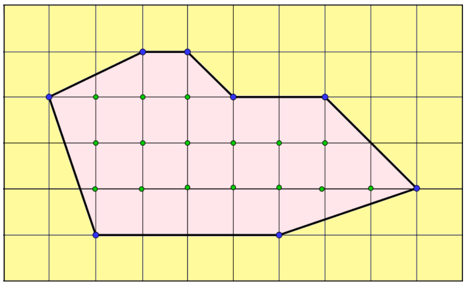
5.2 Pickova formula

Teorem 5.2.1. *Neka je Q jednostavni poligon u koordinatnoj ravnini čiji su vrhovi smješteni u cjelobrojnu rešetku. Tada se površina poligona Q računa po formuli:*

$$P(Q) = N(IntQ) + \frac{1}{2}N(\partial Q) - 1, \tag{5.10}$$

gdje je $N(A)$ broj cjelobrojnih točaka u skupu A. $IntQ$ unutrašnjost od Q, a ∂Q rub od Q.

Primjer 5.2.2.



Slika 5.2: Poligon u koordinatnoj ravnini

Neka je zadan poligon u koordinatnoj ravnini kao na slici. Crvenom je bojom označena unutrašnjost poligona, dok je žutom označena vanjština. Rub poligona označen je debljom crnom linijom. Plave točke su cjelobrojne točke na rubu poligona. Zelene točke su cjelobrojne točke u unutrašnjosti. Izračunajmo površinu danog poligona uz pomoć *Pickove formule*.

Broj zelenih točaka, u unutrašnjosti: $N(IntQ) = 16$.

Broj plavih točaka, na rubu: $N(\partial Q) = 8$.

Prema Pickovoj formuli imamo da je površina danog poligona jednaka: $P(Q) = 16 + 4 - 1 = 19$.

Dokaz. Dokaz započinjemo triangulacijom poligona Q koristeći sve točke na rubu i u unutrašnjosti poligona. Tom triangulacijom dobivamo ravninski graf koji dijeli ravninu na jedan neomeđeni dio i omeđeni koji se sastoji od $s - 1$ trokuta. Neka v predstavlja broj vrhova, a b broj bridova. Tada vrijedi: $v = N(IntQ) + N(\partial Q)$ i $b = b(IntQ) + b(\partial Q)$.

Možemo uočiti da svaki trokut, nakon triangulacije ravninskog grafa ima površinu $\frac{1}{2}$. Kako takvih trokuta ima $s - 1$ tada ukupna površina poligona tada iznosi

$$P(Q) = \frac{1}{2}(s - 1) \tag{5.11}$$

Svaki taj trokut ima tri stranice i svaka od tih stranica (koje su zapravo bridovi $b(IntQ)$) graniči s dva trokuta. Svaka pak stranica (brid) koji je na rubu grafa ($b(\partial Q)$) leži u točno jednom trokutu. Uzevši to u obzir zaključujemo da vrijedi:

$$3(s - 1) = 2b(IntQ) + b(\partial Q) \Rightarrow s = 2(b - s) - b(\partial Q) + 3 \tag{5.12}$$

Kako rubnih stranica ima isto koliko i vrhova vrijedi $b(\partial Q) = N(\partial Q)$. Sada povezujemo sve dobivene relacije stranica, bridova i vrhova s *Eulerovom formulom*:

$$s = 2(b - s) - b(\partial Q) + 3 = 2(v - 2) - N(\partial Q) + 3 = 2N(IntQ) + N(\partial Q) - 1 \tag{5.13}$$

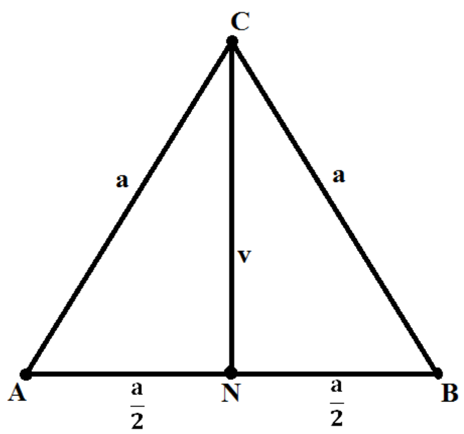
Uvrštavajući dobiveno, (5.13) u (5.11) dobivamo:

$$P(Q) = \frac{1}{2}(s - 1) = N(IntQ) + \frac{1}{2}N(\partial Q) - 1, \tag{5.14}$$

što smo i trebali pokazati. □

Navest ćemo i jedan teorem u kojem ćemo primijeniti Pickovu formulu:

Teorem 5.2.3. *Nemoguće je upisati jednakostraničan trokut u pravokutnu mrežu.*



Slika 5.3: Trokut ABC

Dokaz. Pretpostavimo da je ABC jednakostraničan trokut, koji je upisan u kvadratnu mrežu (vrhovi mu se nalaze u sjecištima te mreže). Neka su stranice tog trokuta duljine a i neka je visina na tu stranicu duljine v.

Primjenjujući Pitagorin teorem na pravokutan trokut NBC (N je nožište visine v na stranicu AB) dobivamo:

$$a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{5.15}$$

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} \tag{5.16}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a \tag{5.17}$$

Tada površina jednakostraničnog trokuta ABC po formuli

$$P = \frac{a \cdot v}{2} \tag{5.18}$$

iznosi:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \tag{5.19}$$

Možemo primijetiti da je površina trokuta po toj formuli iracionalan broj, jer je umnožak racionalnog i iracionalnog broja ponovo iracionalan broj. S druge pak strane, ako je trokut smješten u pravokutnu mrežu, površinu trokuta možemo izračunati uz pomoć Pickove formule. Tada je:

$$P = N(IntABC) + \frac{1}{2}N(\partial ABC) - 1, \tag{5.20}$$

gdje je $N(IntABC)$ broj cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti trokuta ABC, a $N(\partial ABC)$ broj cjelobrojnih točaka na rubu trokuta ABC.

Možemo primijetiti da prema Pickovoj formuli ispada da je površina trokuta ABC racionalan broj. Ovdje dolazimo do kontradikcije, jer neki broj (površina u našem slučaju), ne može istovremeno biti i racionalan i iracionalan broj. Stoga zaključujemo da ne postoji jednakostraničan trokut koji se može upisati u kvadratnu mrežu. □

5.3 Erdös-Gallai-Sylvesterov teorem

U ovoj sekciji biti će nam potrebna lema koja je ujedno i posljedica Eulerove formule:

Lema 5.3.1. *Neka je G jednostavan planaran graf sa više od dva vrha, $v > 2$. Tada vrijedi:*
a) G ima najviše 3v-6 bridova
b) G ima vrh stupnja najviše 5; tj. $\delta \leq 5$
c) Ako su bridovi u grafu G obojani dvjema bojama, tada postoji vrh u tom grafu sa najviše dvije promjene boje

Dokaz. a) Neka je G povezan graf, smješten u ravninu. Koristimo činjenicu da je u svakom jednostavnom grafu stupanj stranice uvijek veći ili jednak 3 i da je u svakom grafu G zbroj svih stupnjeva vrhova tog grafa (d(v)) jednak dvostrukom broju bridova. Pa dobivamo:

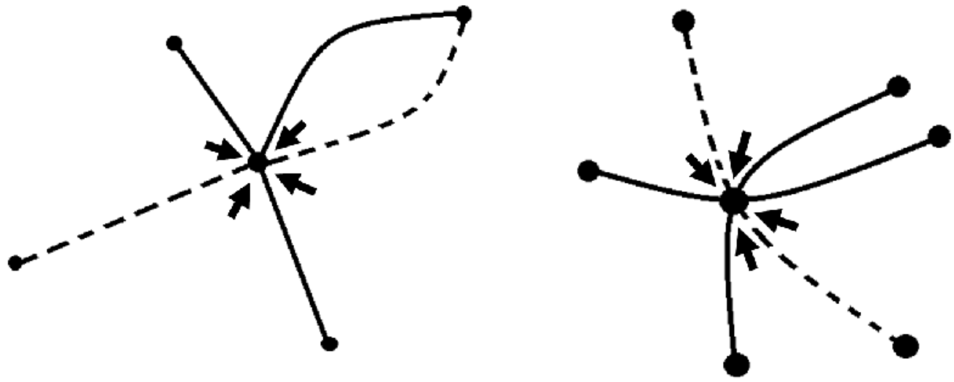
$$2b = \sum d_s \Rightarrow 2b \geq 3s \Rightarrow 2 = v - b + s \leq v - b + \frac{2}{3}b = v - \frac{1}{3}b \Rightarrow b \leq 3v - 6 \quad (5.21)$$

b) Neka je v broj vrhova planarnog grafa G. Ako je $v \geq 2$ tvrdnja je trivijalna. A u slučaju kad je $v \geq 3$, koristimo tvrdnju propozicije pod a), tj. da jednostavan planarni graf, za koji vrijedi $v \geq 3$, ima najviše $3v - 6$ bridova, tj.

$$\delta v \leq \sum d(v) = 2b \leq 6v - 12 \Rightarrow \delta \leq 6 - \frac{12}{v} \Rightarrow \delta \leq 5 \quad (5.22)$$

c) Neka je c broj kornera (uglova) gdje dolazi do promjene boje. Da bi dokazali tvrdnju pretpostavimo suprotno, da tvrdnja ne vrijedi.

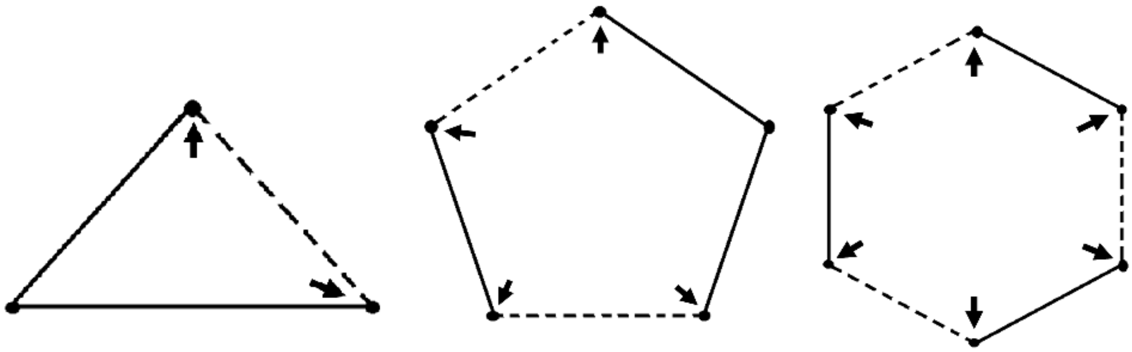
Kornere kod kojih dolazi do promjene boje možemo prebrojavati na dva načina. Prvi način je taj da prebrojavamo promjenu boje bridova oko nekog vrha.



Slika 5.4: Prvi način prebrojavanja

Na slikama strelice pokazuju u kornere kod kojih dolazi do promjene boje bridova. Puna crta označava jednu boju, dok isprekidana drugu. Kako smo pretpostavili da tvrdnja ne vrijedi, u ovakvom prebrojavanju imamo barem 4 kornera kod kojih dolazi do promjene boje, tj. $c \geq 4v$.

Drugi način prebrojavanja kornera koji mijenjaju boju je taj da promatramo strane nekog grafa, te nas zanima koliko najviše ima kornera koji mijenjaju broju.



Slika 5.5: Drugi način prebrojavanja

Graf može biti parnog ili neparnog stupnja. Kod grafa s parnim brojem vrhova svi korneri mogu mijenjati boju, a kod grafa s neparnim brojem vrhova barem jedan mijenja boju, što možemo vidjeti i na slici 5.5.

Zaključujemo da svaki graf sa 2k ili 2k+1 vrha (strana) ima najviše 2k kornera koji mijenjaju boju.

Neka je k-stranica stranica omeđena sa k bridova, te neka je s_k broj k-stranica.

Dakle imamo:

$$4v \leq c \leq 2s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 + 6s_7 + 8f_8 + ... \tag{5.23}$$

$$\leq 2s_3 + 4s_4 + 6s_5 + 8s_6 + 10s_7 + ... \tag{5.24}$$

$$= 2(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + 6s_6 + 7s_7 + ...) - 4(s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + ...) \tag{5.25}$$

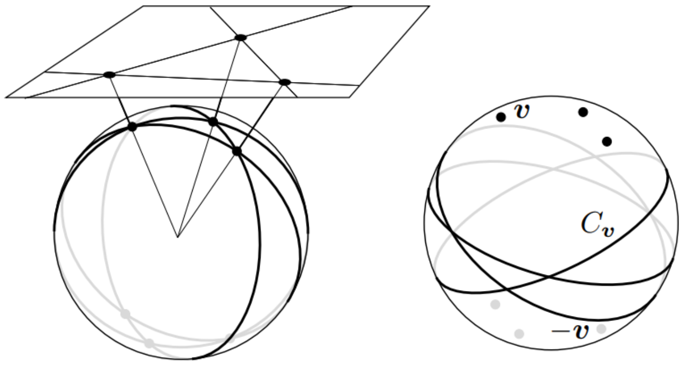
$$= 4b - 4s \tag{5.26}$$

Dobili smo da je $b \geq v + s$, što je u kontradikciji s *Eulerovom formulom*. Pošto smo došli do kontradikcije, početna pretpostavka je bila kriva. Time smo dokazali početnu tvrdnju. □

Teorem 5.3.2 (Erdös-Gallai-Sylvesterov teorem)**.** *Neka je u ravnini zadano $n \geq 3$ točaka, takve da nisu sve na jednom pravcu. Tada postoji pravac koji sadrži točno dvije od tih točaka.*

Dokaz. Na ravninu u kojoj je dano n točaka prislonimo jediničnu sferu S^2. Stereografskom projekcijom dan skup točaka preslikamo iz ravnine na tu sferu. Točka iz R^2 prelazi u točku iz sfere S^2 koja je određena jediničnim vektorom v, čime je određen i par antipodalnih točaka[1] $\pm v \in S^2$.

Pri tom preslikavanju pravci prelaze u velike kružnice na sferi (Slika: 5.6).



Slika 5.6: Preslikavanje točaka iz ravnine na sferu

Sada je početni teorem ekvivalentan sljedećoj tvrdnji:

(i.) Neka je na sferi dano $n \geq 3$ para antipodalnih točaka, koji nisu svi na jednoj velikoj kružnici. Tada postoji velika kružnica koja sadrži točno dva od danih n antipodanih parova točaka.

Da bi dokazali tu tvrdnju potrebno je dualizirati tu sliku tako da svaki par antipodalnih točaka zamijenimo jednom velikom "ekvatorijalnom" kružnicom, tj. zamijenimo par $\pm v \in S^2$ s velikom kružnicom $C_v = \left\{x \in S^2 \,|\, x \cdot v = 0\right\}$ ($x \cdot v = 0$ je skalarni produkt vektora x i v).

Tako dobivamo novu tvrdnju ekvivalentnu tvrdnji *(i.)*:

(ii.) Neka je na sferi S^2 dano $n \geq 3$ velikih kružnica tako da ne prolaze sve istom točkom sfere. Tada postoji točka sfere u kojoj se sijeku točno dvije od tih n velikih kružnica.

Da bi dokazali tu tvrdnju, potrebno je konfiguraciji od n velikih kružnica pridružiti jednostavni ravninski graf G na S^2. Tada će vrhovi od G biti svi presjeci od po dvije velike kružnice. Ti vrhovi, tj. sjecišta dijele velike kružnice na bridove grafa G. Stupanj svakog tog vrha od G je očito paran broj i barem 4, jer je tako G konstruiran. Zbog posljedice *Eulerove formule*, da svaki jednostavni planarni graf G ima vrh stupnja najviše 5, slijedi

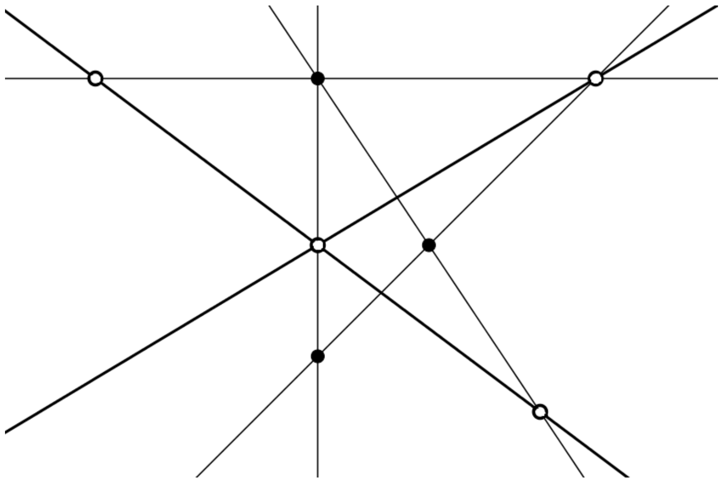
[1] Antipodalne točke glavne kružnice su njene dijametralno suprotne točke.

da postoji vrh točno stupnja 4. Time smo i dokazali tvrdnju (ii.), iz čega slijedi i dokaz teorema. □

5.4 Monokromatski pravac

Poseban slučaj prethodnog teorema:

Teorem 5.4.1. *Neka je u ravnini dano $n \geq 3$ crnih i bijelih točaka, takve da nisu sve na jednom pravcu. Tada postoji monokromatski (jednobojni) pravac, tj. pravac koji sadrži barem dvije od n točaka iste boje (i ni jednu druge boje).*



Slika 5.7: Monokromatski pravci

Dokaz. Isto kao i u prethodnom teoremu dokaz započinjemo preslikavanjem danog skupa točaka na sferu. Tako zapravo trebamo dokazati da ako je dana bilo kakva konačna konfiguracija bijelih i crnih velikih kružnica na sferi (kružnice koje prolaze parom antipodalnih točaka), koje ne prolaze sve istom točkom, tada uvijek postoji točka sjecišta koja leži ili samo na bijelim velikim kružnicama ili samo na crnim velikim kružnicama.

Dokaz te tvrdnje slijedi iz leme 5.3.1 pod c). Naime u svakom vrhu, gdje se velike kružnice različitih boja presijecaju, uvijek imamo barem 4 takva promjenjiva kornera (ugla). □

Bibliografija

[1] Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[2] Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika 2.*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] Imre Lakatos, *Dokazi i opovrgavanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[4] Franka Miriam Brückler, *Povijest matematike 2*, skripta, 2009.

[5] Mea Bombardeli, *Eulerova formula*, Časopis Miš, broj 19, 2003.

[6] Branimir Dakić, *Leonhard Euler*, Časopis Miš, broj 37 i 40, 2007.

[7] Joseph Malkevitch, *Euler's Polyhedral Formula*, Feature column, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-eulers-formula

[8] *Twenty Proofs of Euler's Formula*, http://www.ics.uci.edu/ eppstein/junkyard/euler/

[9] Martin Aigner, Günter Ziegler, *Three applications of Euler's formula*, http://www.math.leidenuniv.nl/ hfinkeln/seminarium/toepassingenEuler.pdf

[10] $https : //hr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_{E}uler$

[11] $http : //www.grad.hr/geomteh3d/posteri/polupravilni_{p}oster.pdf$

[12] $http : //www.gimnazija - izdijankoveckoga - kc.skole.hr/upload/gimnazija - izdijankoveckoga - kc/multistatic/609/Eulerova_{p}oliedarska_{f}ormula.pdf$

[13] $https : //en.wikipedia.org/wiki/Kepler$

[14] $http : //mathworld.wolfram.com/Kepler - PoinsotSolid.html$

[15] Matematčki panoptikum, Arhimedovi poliedri, Časopis Miš, Broj 47, 2008.

[16] Maths careers; Institute of mathematics and its applications: Pick's theorem ($http : //www.mathscareers.org.uk/article/picks - theorem/$)

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada Eulerova je formula. Otkriće *Eulerove formule* pripisuje se švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru. Euler je u toj formuli povezao broj vrhova, broj bridova i broj strana svakog konveksnog poliedra. Otkrio je ako V predstavlja broj vrhova, B broj bridova, a S broj strana konveksnog poliedra, tada vrijedi formula:

$$V - B + S = 2 \tag{5.27}$$

Dokaza Eulerove formule ima mnogo, njih čak 17 različitih. Eulerova formula vrijedi za pravilne i polupravilne poliedre, te za neke konkavne poliedre kao što je veliki zvjezdasti dodekaedar. Pravilnih poliedara ima samo pet, to su tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar, dok polupravilnih ima mnogo više. Eulerovu formulu primjenjujemo u dokazu da postoje samo pet pravilnih poliedra, u dokazu Pickove formule, u dokazu Erdös-Gallai-Sylvesterovog teorema i mnogih drugih. Matematičari su se bavili i dali nekoliko generalizacija Eulerove formule, kako bi ona vrijedila za sve poliedre. Zanimljivo je to da je Eulerova formula usko vezana uz teoriju grafova. Naime, svakom se poliedru može pridružiti njegova ravninska mreža, takozvanim rastezanjem poliedra u ravninu, čime broj vrhova, bridova i stranica, koji se javljaju u formuli, ostaje isti.

Summary

The theme of this graduate thesis is Euler's formula. The discovery of the Euler's formula is attributed to swiss mathematician Leonhard Euler. In this formula, Euler had associated with the number of vertices, the number of edges and the number of faces of each convex polyhedron. He found that if V is the number of vertices, the B number of edges, the S number of faces convex polyhedra, then the following formula is valid :

$$V - B + S = 2 \tag{5.28}$$

There are many proofs of the Euler formula, even 17 of them. Euler's formula is valid for regular and semiregular polyhedron, and for some concave polyhedron such as a great star dodecahedron. There is only five regular convex polyhedron, that is tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron and icosahedron, while there is much more semiregular. Euler's formula is used to prove that there are only five regular polyhedra, we also use it to prove the Pick's formula, Erdös-Gallai-Sylvesterovog theorem and many others. The mathematicians dealt with and gave a few generalizations of the Euler formula, so that it would apply to all polyhedra. It is interesting that Euler's formula is closely related to the graph theory. Each of the polyedra has its plane graph, by streching them into the plane, thus the number of vertices, edges and faces, appearing in the formulas, remain the same.

Životopis

Zovem se Martina Habulan i dolazim iz Varaždina. Nakon osnovne škole upisala sam 2. gimnaziju u Varaždinu. Tada sam se zaljubila u matematiku, zbog čega sam i 2011. godine upisala Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Nakon što sam završila preddiplomski studij matematike, smjera nastavnički, upisala sam i diplomski studij istog smjera, koji upravo završavam. Nadam se da će moj cijeli život biti obilježen matematikom, da ću, kao što sam i otpočetka željela, prenositi svoje matematičko znanje na buduće naraštaje.