

# Sintetički magnetizam za ultrahladne atomske plinove

---

**Jajtić, Tomislav**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:760265>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Tomislav Jajtić

Sintetički magnetizam za ultrahladne atomske  
plinove

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Tomislav Jajtić**

Diplomski rad

**Sintetički magnetizam za ultrahladne  
atomske plinove**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.

Zahvaljujem Hrvoju Buljanu na vodstvu i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada i na usmjeravanju u životu i karijeri. Također, zahvaljujem Dariju Jukiću na pomoći kod numeričkog rješavanja jednadžbi i Teni Dubček, i, opet, Dariju, na pomoći kod razumijevanja gradiva i kritičkom čitanju bez kojeg ovaj rad ne bi imao ni glavu ni rep.

## Sažetak

U ovom radu pokazali smo da je u sustav ultrahladnih atomskih plinova, ograničenog na dvije dimenzije (u xy ravnini), moguće upisati vektorski potencijal zavojnice koristeći lasersku zraku koja se propagira u z-smjeru. Prvo smo pokazali da sustav ultrahladnih atomskih plinova čije stanje ovisi o vanjskim parametrima  $\lambda$  i koji evoluira adijabatski dobiva geometrijsku fazu  $\oint \mathcal{A} \cdot d\lambda$ , gdje je  $\mathcal{A}$  sintetički vektorski potencijal istog oblika kao i vektorski potencijal zavojnice  $\mathbf{A} \sim \hat{\varphi}/r$ . Pokazali smo da je  $\mathcal{A}$  posljedica interakcije svjetlosti i atoma i da trebamo laserske zrake s vrtlozima koje imaju fazu  $e^{im\varphi}$  da bi dobili  $\mathcal{A}$  željenog oblika. Nakon toga pogledali smo kompozitne čestice u dvodimenzionalnom prostoru koje se sastoje od zavojnice i nabijene čestice. Te čestice zovu se anyoni i imaju necjelobrojnu statistiku, što zapravo znači da dobivaju fazu koja nije ni 0 (bozoni) ni  $\pi$  (fermioni) kada se jedan anyon zavrti oko drugog identičnog takvog. Pogledali smo dvije takve laserske zavojnice upisane u Bose-Einsteinov kondenzat koji se nalazi u vanjskom skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Na zamjenu pozicija zavojnica dobili smo fazu koja nije ni 0 ni  $\pi$ , ali vidjeli smo i da ta faza ovisi o udaljenosti među zavojnicama što znači da to nije topološka faza.

Ključne riječi: Geometrijska faza, Berryjeva faza, laserske zrake s vrtlozima, sintetički vektorski potencijal, anyoni

# Synthetic magnetism for ultracold atomic gases

## Abstract

Here we have shown it is possible to imprint a solenoidal vector field to a system of ultracold atomic gases confined to two dimensions in the xy plane using a laser beam propagating in the z-direction. First we have shown a system of ultracold atomic gases, whose state depends on external parameters  $\lambda$  and whose evolution is adiabatic, acquires a geometric phase  $\oint \mathcal{A} \cdot d\lambda$ , where  $\mathcal{A}$  is the synthetic vector potential of the same form as the solenoidal vector field  $A \sim \hat{\varphi}/r$ . We have also shown  $\mathcal{A}$  is a result of the light-matter interaction. Optical vortex laser beam, i.e. a laser beam with a phase  $e^{im\varphi}$ , is needed for  $\mathcal{A}$  to take the form that of a solenoidal vector field. Then we have introduced a composite particle in two dimensional space consisting of a flux tube (a solenoid) and a charged particle. These composite particles are called anyons and have non-integer statistics. Non-integer statistics here (and elsewhere as per the author's knowledge) meaning they acquire a phase that is neither 0 (like bosons) or  $\pi$  (like fermions) when one anyon comes a full circle around another identical one. We have put 2 such laser flux tubes imprinted in a Bose-Einstein condensate in an external scalar potential that of a harmonic oscillator and spun them around. Turns out, the phase we get actually is non-integer, but it shows dependence on the distance between the flux tubes and is, therefore, not topological.

Keywords: Geometric phase, Berry phase, optical vortex, synthetic vector potential, anyon

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Beskonačno tanka i beskonačno dugačka zavojnica . . . . .	1
1.2	Aharonov-Bohm efekt . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Geometrijske faze</b>	<b>5</b>
2.1	Berryjeva faza . . . . .	5
2.2	Adijabatska evolucija obučenih stanja . . . . .	7
2.3	Sustav s dva nivoa . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Laserske zrake s vrtlozima</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Sintetički vektorski potencijal za ultrahladne atome</b>	<b>16</b>
4.1	Rabijeva frekvencija i detuning . . . . .	16
4.2	Sintetički vektorski potencijal . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Anyoni</b>	<b>19</b>
5.1	Bose-Einsteinov kondenzat u harmoničkom oscilatoru i laserska zavoj- nica . . . . .	20
5.2	Slučaj dvije zavojnice . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>26</b>
	<b>Literatura</b>	<b>27</b>

# 1 Uvod

Magnetski efekti poput Aharonov-Bohm efekta vrlo su zanimljivi problemi kvantne fizike [1]. Ti efekti posljedica su sprege elektromagnetskih polja i nabijenih čestica. Za česticu mase  $m$  i naboja  $q$  koja se giba brzinom  $v$ , interakciju s magnetskim poljem  $B$  opisujemo Lorentzovom silom  $F = qv \times B$  ili hamiltonijanom

$$\hat{H} = \frac{[\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})]^2}{2m}, \quad (1.1)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{p}}$  operator impulsa, a  $\mathbf{A}$  vektorski potencijal čija rotacija nam daje magnetsko polje  $B = \nabla \times A$ . Proučavanje magnetskih efekata obično se svodi na sintetički magnetizam [2]. Sintetička magnetska polja dobivamo tako da ultrahladne atome obasjavamo laserskom svjetlošću. Interakcija svjetlosti i atoma je ta koja nam daje baždarno polje, označimo ga s  $\mathcal{A}$ . Atomi su neutralni pa se onda kod sintetičkog magnetizma ne pojavljuje naboj  $q$ . Baždarno polje  $\mathcal{A}$  zvat ćemo sintetičkim vektorskim potencijalom i ono igra ulogu vektorskog potencijala pomnoženog s nabojem  $q$  kod pravog magnetizma. Hamiltonijan poput onog iz jednadžbe (1.1), za sintetički magnetizam je

$$\hat{H} = \frac{[\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}})]^2}{2m}. \quad (1.2)$$

Dakle, zamijenili smo  $qA$  s  $\mathcal{A}$ . Isto vrijedi i za sve ostale jednadžbe gdje se pojavljuju vektorski potencijali. Naravno, po analogiji s pravim magnetizmom, imamo i sintetičko magnetsko polje  $B = \nabla \times \mathcal{A}$  za koji vrijede ista pravila.

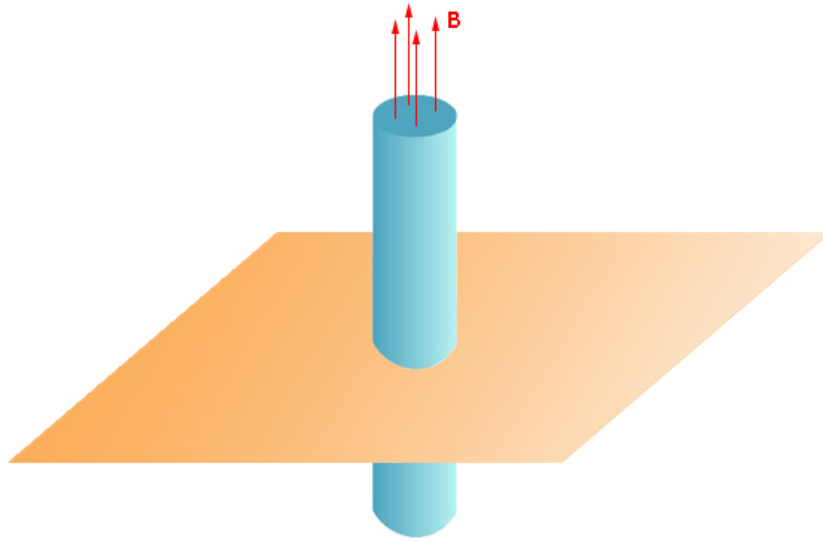
## 1.1 Beskonačno tanka i beskonačno dugačka zavojnica

U ovom radu najviše će nas zanimati beskonačno dugačka i beskonačno tanka zavojnica. Jedna takva zavojnica magnetskog toka  $\Phi$  postavljena duž z-osi stvara vektorski potencijal

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{r}. \quad (1.3)$$

Ovdje treba odmah primjetiti da je vektorski potencijal u  $\hat{\phi}$  smjeru. Kroz xy ravninu





Slika 1.1: Zavojnica postavljena duž z-osi stvara magnetsko polje u z smjeru. Magnetsko polje izvan zavojnice je 0, a različito od 0 unutra. Kada je zavojnica beskonačno dugačka i beskonačno tanka, magnetsko polje je delta funkcija; beskonačno tamo gdje je zavojnica i nula svugdje ostalo.

ukupni tok je  $\Phi$  pa je onda magnetsko polje

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} \hat{z}, \quad (1.4)$$

da bi imali

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi. \quad (1.5)$$

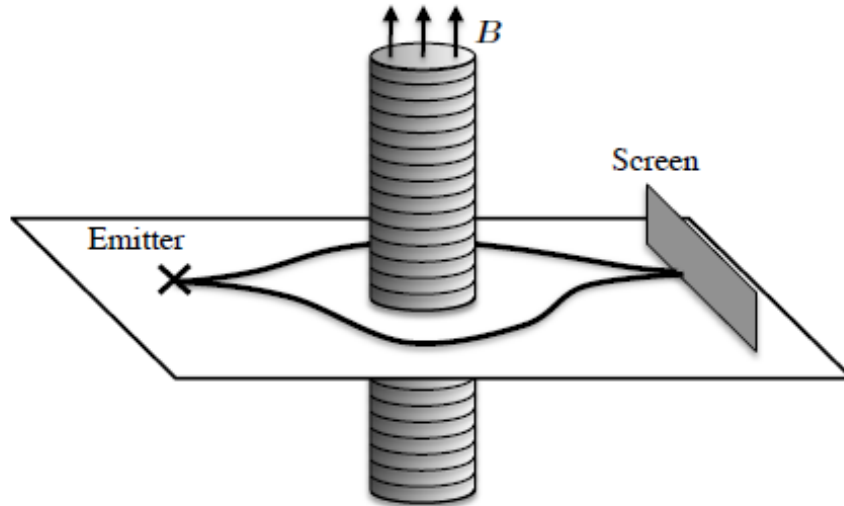
Na slici 1.1 vidimo jednu sličnu zavojnicu. Ta zavojnica nije ni beskonačno dugačka ni beskonačno tanka jer bi to bilo malo nezgodno za nacrtati, ali korisna je da ilustriramo par stvari, kao, na primjer, Aharonov-Bohm efekt. Magnetsko polje je 0 izvan zavojnice i različito od nule unutra.

## 1.2 Aharonov-Bohm efekt

Zamislimo onda jednu zavojnicu kao na slici 1.1 i nabijene čestice koje se gibaju oko nje. Ta zavojnica može, ali i ne mora biti beskonačno tanka. Bitno je jedino da u takvom sustavu postoji područje gdje je magnetsko polje nula i područje gdje nije nula. Radi jednostavnosti, zamislimo da je zavojnica konačno tanka. Izvan zavoj-

nice, magnetsko polje je 0, dok unutra nije 0. Mjerenjima na česticama koje nikad ne prodru u područje gdje polje nije 0, možemo detektirati prisutnost magnetskog polja. Taj efekt zovemo *Aharonov-Bohm efekt* [1].

Za ilustraciju pogledajmo interferometrijski eksperiment kao na slici 1.2. Nabit-



Slika 1.2: Interferometrijski eksperiment za ilustraciju Aharonov-Bohm efekta. Nabijene čestice gibaju se oko zavojnice od izvora do zaslona u području gdje nema magnetskog polja. Unutar zavojnice postoji magnetsko polje i ono uzrokuje pomak u interferencijskoj slici na zaslonu. Slika preuzeta iz [2].

jene čestice idu oko zavojnice od izvora do zaslona i stvaraju interferencijsku sliku. Kada kroz zavojnicu ne teče struja, ništa se posebno ne događa; imamo samo standardnu sliku interferencije. Zanimljive se stvari počnu događati kada pustimo struju kroz zavojnicu; magnetsko polje unutra više nije nula, a slika interferencije se pomakne. Taj pomak odgovara pomaku u fazi između čestica koje idu s jedne strane zavojnice i čestica koje idu s druge strane zavojnice. Taj pomak u fazi je [1], [2]

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (1.6)$$

gdje je  $\Phi$  magnetski tok kroz zavojnicu, a  $\Phi_0 = h/q$  kvant magnetskog toka. Aharonov-Bohm faza je geometrijska faza; ne ovisi o brzini čestice ni o vremenu koje joj treba da dođe od izvora do zaslona. Ta faza je i topološka faza; ne ovisi o putu kojim čestice idu, barem sve dok putanje na slici 1.2 ostanu svaka sa svoje strane. Ako želimo Aharonov-Bohm fazu napisati pomoću lokalnih veličina, onda nam za to treba

vektorski potencijal  $\mathbf{A}$ ,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \iint B_z(x, y) dx dy = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.7)$$

gdje je  $\mathcal{C}$  zatvorena krivulja koja se sastoji od dva puta kojim čestica može ići.

Sada kada znamo kako izgledaju potencijal i polje i kakve faze trebamo dobivati, zanima nas možemo li isti takav vektorski potencijal upisati u sustav ultrahladnih atomskih plinova, ograničenog na gibanje u dvije prostorne dimenzije (u  $xy$  ravnini), koristeći lasersku zraku koja se propagira u  $z$ -smjeru. Interakcija svjetlosti i atoma stvarat će neki sintetički vektorski potencijal i ovdje ćemo pokazati kakav točno sustav atoma i laser trebamo da bi taj sintetički vektorski potencijal bio istog oblika kao i vektorski potencijal zavojnice u jednadžbi (1.3). Da bismo to napravili, prvo ćemo u poglavlju 2.1 promotriti kvantni sustav koji ovisi o vanjskim parametrima koji evoluiraju adijabatski. Pokazat ćemo da se u takvim sustavima pojavljuju geometrijske faze, poput Aharonov-Bohm faze, u kojima se pojavljuje baždarno polje  $\mathcal{A}$  koje igra ulogu vektorskog potencijala pomnoženog s nabojem  $q\mathcal{A}$ . U poglavlju 2.2 promotrit ćemo atome koji se sporo gibaju u monokromatskom laserskom polju i kod njih primijeniti ideju geometrijske faze. U poglavlju 2.3 pogledat ćemo atome s dva nivoa (ili s tri nivoa koji se mogu efektivno svesti na dva nivoa) i odrediti kako  $\mathcal{A}$  ovisi o laserskom detuningu  $\Delta$  i Rabijevoj frekvenciji  $\kappa$ . U poglavlju 3 riješit ćemo valnu jednadžbu i proučit ćemo optičke vrtloge jer će nam oni trebati da odredimo kakva to laserska zraka treba biti da bismo dobili željeni  $\mathcal{A}$ . U poglavlju 4.1 odredit ćemo onda kakve parametre laser treba imati da bi dobili polje željenog oblika, a u poglavlju 4.2 konačno i izvodimo sintetički vektorski potencijal zavojnice. U poglavlju 5 predstaviti ćemo anyone i u poglavljima 5.1 i 5.2 pogledat ćemo kakve veze naše zavojnice imaju s anyonima.

## 2 Geometrijske faze

Pogledajmo sustav čije stanje ovisi o nekim vanjskim parametrima. Neka ti parametri, označimo ih s vektorom  $\lambda$ , evoluiraju po zatvorenoj krivulji i neka je ta evolucija adijabatska, tj.  $\lambda$  evoluiraju sporo od vremena 0 do vremena  $T$  i isti su u 0 i  $T$ :

$$\lambda(0) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow \lambda(T) = \lambda(0). \quad (2.1)$$

Prirodno je onda pretpostaviti i da će stanje sustava u vremenu  $T$  biti isto kao i stanje sustava u vremenu 0, ali to ne mora nužno biti tako.

Primjer jednog takvog sustava je Foucaultovo njihalo. Vanjski parametar u tom slučaju je ovjesište njihala. Kada se Zemlja okrene oko svoje osi, ovjesište se opet nađe na istom mjestu, ali ravnina njihanja njihala zakrene se za neki kut koji ovisi o geografskoj širini na kojoj se njihalo nalazi. Dakle, vanjski parametar, ovjesište, je na istom mjestu i na početku i na kraju, ali stanje sustava nije isto; ravnina se zakrenula. Kažemo da je Foucaultovo njihalo dobilo geometrijsku fazu.

Ideja je sada dobiti sličnu takvu geometrijsku fazu u kvantnom sustavu.

### 2.1 Berryjeva faza

U radu [2], J. Dalibard dao je pregled kako se dolazi do Berryjeve faze [3] u kvantnom sustavu koji evoluira adijabatski, tj. sporo, a mi ćemo ovdje ponoviti to isto jer ćemo onda naučiti otkud ta faza dolazi i kako se računa.

Zamislimo kvantni sustav čiji hamiltonijan ovisi o nekom parametru  $\lambda$ . Označimo s  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  svojstvena stanja hamiltonijana i s  $E_n(\lambda)$  pripadne energije:

$$\hat{H}(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle. \quad (2.2)$$

Pretpostavimo da je  $\{|\psi_n(\lambda)\rangle\}$  ortogonalna baza Hilbertovog prostora za svaki  $\lambda$  i pogledajmo evoluciju vektora stanja

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle \quad (2.3)$$

kada  $\lambda$  sporo evoluira u vremenu. Pretpostavimo da je sustav početno pripremljen u stanju  $|\psi_l\rangle$ ;

$$c_l(0) = 1, \quad c_n(0) = 0, \quad \forall n \neq l, \quad (2.4)$$

i evolucija adijabatska. Evoluciju koeficijenta  $c_l$  dobivamo iz Schrödingerove jednadžbe:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_l &= [E_l(t) - i\hbar\dot{\lambda} \cdot \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle] c_l \\ &= [E_l - \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_l(\lambda)] c_l. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Član

$$\mathcal{A}_l(\lambda) = i\hbar \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle \quad (2.6)$$

zovemo *Berryjevom vezom* i ona će igrati ulogu vektorskog potencijala i zato ćemo  $\mathcal{A}$  zvati još i *sintetičkim vektorskim potencijalom*. Preciznije, u elektromagnetizmu, na mjestu  $\mathcal{A}$  stajao bi vektorski potencijal pomnožen s nabojem, tj.  $q\mathbf{A}$  pa  $\mathcal{A}$  igra ulogu  $q\mathbf{A}$ . Budući da se naš  $\mathcal{A}$  ne množi s nabojem u jednadžbama, možemo raditi i s neutralnim česticama.

Pogledajmo sada kako to točno dobijemo geometrijsku fazu. Pretpostavimo da parametar  $\lambda$  evoluira po zatvorenoj krivulji  $\mathcal{C}$  u parametarskom prostoru tako da  $\lambda(T) = \lambda(0)$ . Integriranjem jednadžbe (2.5) dobivamo

$$c_l(T) = e^{i\Phi^{dyn.}(T)} e^{i\Phi^{geom.}(T)} c_l(0), \quad (2.7)$$

gdje smo uveli *dinamičku fazu*

$$\Phi^{dyn.}(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_l(t) dt \quad (2.8)$$

i *geometrijsku fazu*

$$\Phi^{geom.} = \frac{1}{\hbar} \int_0^T \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_l(\lambda) dt = \frac{1}{\hbar} \oint \mathcal{A}_l(\lambda) \cdot d\lambda. \quad (2.9)$$

Dinamička faza je ista ona faza koja se pojavljuje u vremenski neovisnom problemu. Geometrijska faza, koju još zovemo *Berryjevom fazom*, ovisi samo o putanji parametra  $\lambda$ . Članovi  $\exp(i\Phi^{dyn.})$  i  $\exp(i\Phi^{geom.})$  baždarno su invarijantni; ne mijenjaju se ako svojstvena stanja  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  pomnožimo s proizvoljnim faznim faktorom [2].

Ako se ograničimo na slučaj kada parametar  $\lambda$  evoluiru u dvodimenzionalnom (ili trodimenzionalnom prostoru), onda možemo uvesti *Berryjevu zakrivljenost* koja igra ulogu magnetskog polja:

$$\mathcal{B}_l = \nabla \times \mathcal{A}_l. \quad (2.10)$$

Berryjeva zakrivljenost je realno, baždarno invarijantno, vektorsko polje. Geometrijsku fazu tada možemo napisati kao

$$\Phi^{geom.}(T) = \frac{1}{\hbar} \iint_S \mathcal{B}_l \cdot d^2S, \quad (2.11)$$

gdje je  $S$  površina definirana krivuljom  $C$ .

## 2.2 Adijabatska evolucija obučenih stanja

Ideju geometrijske faze možemo primjeniti kod ultrahladnih atoma ( $T \lesssim \mu K$ ). Ultrahladni zapravo znači jako spori [4], što pak znači da im se centar mase sporo giba. Dakle, položaj centra mase  $\mathbf{r}$  je vanjski parametar koji evoluiru adijabatski.

Postoje dva stupnja slobode. Jedan je gibanje centra mase atoma koje opisujemo operatorima položaja  $\hat{\mathbf{r}}$  i impulsa  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$ , a drugi je unutarnja dinamika atoma; prijelazi između elektronskih stanja inducirani laserom. Cijeli sustav opisujemo hamiltonijanom  $H_{tot}$ , a taj drugi, unutarnji, stupanj slobode opisujemo vremenski neovisnim hamiltonijanom  $\hat{H}_{int}(\mathbf{r})$ :

$$\hat{H}_{tot} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \hat{H}_{int}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.12)$$

Obučena stanja  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$  definiramo kao svojstvena stanja unutarnjeg hamiltonijana:

$$\hat{H}_{int}(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle = E_n(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (2.13)$$

U svakoj točki  $\mathbf{r}$ , skup  $\{|\psi_n(\mathbf{r})\rangle\}$  čini bazu Hilbertovog prostora koji odgovara unutarnjim stupnjevima slobode pa ukupno stanje sustava razvijemo u toj bazi:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (2.14)$$

Ako je sustav početno pripremljen u stanju  $|\psi_l\rangle$ , kao u jednadžbi (2.4), onda uvrštavajući jednadžbu (2.14) u Schrödingerovu jednadžbu,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}_{tot} \Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} + \hat{H}_{int}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

dobivamo jednadžbu za amplitudu vjerojatnosti  $\psi_l$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_l(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_l(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_l(\mathbf{r}) \right] \psi_l(\mathbf{r}, t), \quad (2.16)$$

gdje je

$$\mathcal{A}_l(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle \quad (2.17)$$

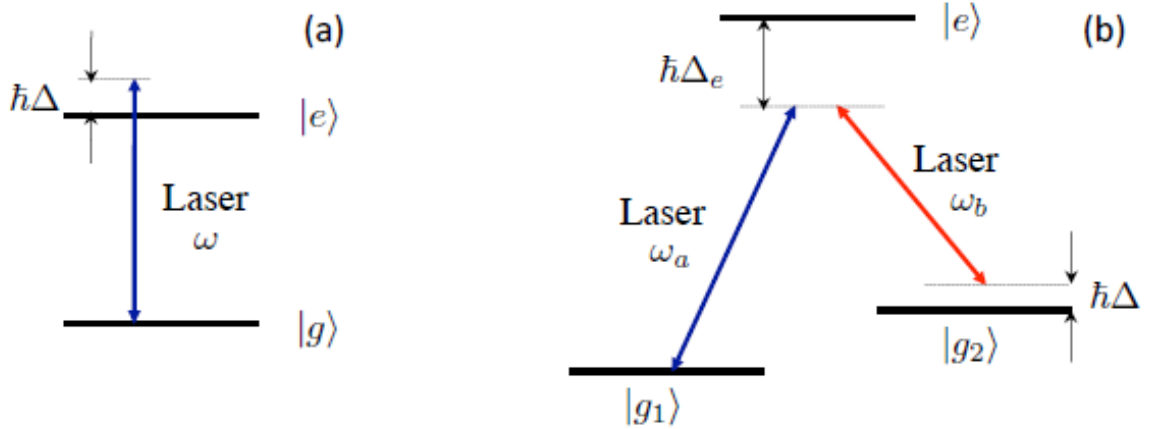
Berryjeva veza koja igra ulogu vektorskog potencijala;  $\nabla$  je gradijent u realnom koordinatnom prostoru,  $E_l(\mathbf{r})$  energija obučenog stanja, a

$$\mathcal{V}_l(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq l} |\langle \nabla \psi_l | \psi_n \rangle|^2 \quad (2.18)$$

dotatni skalarni potencijal. Nas zanima  $\mathcal{A}_l$  i izračunat ćemo ga za slučaj sustava s dva nivoa.

### 2.3 Sustav s dva nivoa

Pogledajmo sustav s dva nivoa kao na slici 2.1a. Kada je vrijeme života pobuđenog stanja puno duže od vremenskih skala na kojima se provodi eksperiment (npr. ako koristimo atome magnezija, stroncija ili iterbija), možemo zanemariti procese vezane uz spontanu emisiju fotona. Tada interakcija atoma i lasera ovisi samo o *Rabijevoj frekvenciji*  $\kappa$  i razlici frekvencija lasera i atomskog prijelaza koju zovemo *detuning*  $\Delta$ . Isti



Slika 2.1: (a) Atom s dva nivoa. (b) Ramanov prijelaz između dva podnivoa osnovnog stanja atoma. Slika preuzeta iz [2].

formalizam možemo primijeniti i za sustav kao na slici 2.1b s Ramanovim prijelazom između dva podnivoa osnovnog stanja atoma. Takav sustav imamo kod alkalijskih metala i kod erbija i disprozija. Ako je detuning  $\Delta_e$  dovoljno velik, pobuđeno stanje  $|e\rangle$  možemo eliminirati iz jednadžbi i problem se svodi na sustav s dva nivoa u bazi  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  s Ramanovim *detuningom*  $\Delta$  i *Rabijevom frekvencijom*

$$\kappa = \frac{\kappa_a \kappa_b^*}{2\Delta_e} \quad (2.19)$$

gdje su  $\kappa_j$  jednofotonske Rabijeve frekvencije [5] za prijelaze  $g_j \leftrightarrow e$ . Jednofotonska Rabijeva frekvencija za prijelaz  $i \leftrightarrow j$  dana je jednadžbom

$$\kappa_{i,j} = \frac{\mathbf{d}_{i,j} \cdot \mathbf{E}}{\hbar}, \quad (2.20)$$

gdje je  $\mathbf{d}_{i,j}$  prijelazni dipolni moment, a  $\mathbf{E}$  električno polje koje stvara laserska zraka. Primjetimo da će onda dvoatomska Rabijeva frekvencija u jednadžbi (2.19) biti proporcionalna umnošku  $\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b^*$  s naglaskom na zvijezdicu kod  $\mathbf{E}_b$ ; to će nam biti važno kasnije.

I u slučaju atoma s dva nivoa i atoma s tri nivoa koji se svodi na ovaj s dva nivoa, unutarnji hamiltonijan  $\hat{H}_{int}$  možemo napisati kao  $2 \times 2$  matricu u bazi  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  ili



bazi  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ :

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Definiramo poopćenu Rabijevu frekvenciju  $\Omega$ , kut miješanja  $\theta$  i fazni kut  $\phi$ :

$$\Omega = (\Delta^2 + |\kappa|^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa|e^{i\phi}. \quad (2.22)$$

Unutarnji hamiltonijan tada postaje

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.23)$$

gdje je  $\mathbf{n}$  jedinični vektor određen sferičnim kutovima  $\theta$  i  $\phi$ , a  $\hat{\sigma}_j$  su Paulijeve matrice. Svojstvene vrijednosti ove matrice su  $\pm\hbar\Omega/2$ , a pripadna svojstvena stanja su

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Sada možemo izračunati Berryjevu vezu (u ulozi vektorskog potencijala) koristeći jednadžbu (2.17), a onda i Berryjevu zakrivljenost (u ulozi magnetskog polja) koristeći jednadžbu (2.10):

$$\mathcal{A}_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} (\cos \theta - 1) \nabla \phi, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{B}_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} \nabla (\cos \theta) \times \nabla \phi. \quad (2.26)$$

Predznake  $\pm$  biramo ovisno o tome u kojem smo svojstvenom stanju pripremili sustav pa bez gubitka općenitosti možemo izabrati  $+$  i više ne moramo pisati  $\pm$  u jednadžbama.

Do ovdje razvijen matematički formalizam je manje-više ponovljen račun iz [2]. Dva su razloga za to; prvi je da provjerimo sam račun, a drugi je da naučimo odakle dolazi sintetički vektorski potencijal. Ovaj dio s provjerom računa zapravo je jako bitan; u izvodu Berryjeve veze u (2.25) iz svojstvenih stanja u (2.24) koja su pak došla iz (2.23), implicitno se pretpostavlja da Rabijeva frekvencija ne ovisi o radijal-

noj koordinati pa ćemo u jednom trenutku morati pretpostaviti da je laserska zraka jako široka da bi promjene na prostornoj skali u radijalnom smjeru na kojoj se sve događa bile zanemarive.

Sintetički vektorski potencijal posljedica je interakcije atoma i laserske svjetlosti. Sada, u principu, možemo tražiti kakvi  $\Delta$  i  $\phi$  moraju biti da bi dobili  $\mathcal{A}$  koji je  $\sim \hat{\phi}/r$ . Međutim, da odredimo kakav laser treba biti, trebamo naučiti što su to optički vrtlozi pa ćemo prvo to napraviti u idućem poglavlju.

### 3 Laserske zrake s vrtlozima

Laserske zrake s vrtlozima detaljno su obrađene u [7]. Proći ćemo ovdje kroz izvod jedne takve. Promotrimo valnu jednadžbu

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, z, t) = 0, \quad (3.1)$$

gdje je sada  $\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  vektor položaja u cilindričnom koordinatnom sustavu. Separacijom varijabli,

$$u(\mathbf{r}, z, t) = R(\mathbf{r}, z) e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

i uvrštavanjem u jd. (3.1) dobivamo jednadžbu za  $R(\mathbf{r}, z)$ :

$$(\nabla^2 - k^2) R(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (3.3)$$

gdje je  $k = \omega/c$  valni broj. Daljnjom separacijom,

$$R(\mathbf{r}, z) = U(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \quad (3.4)$$

i paraksijalnom aproksimacijom  $\partial^2 U / \partial z^2 \ll k \partial U / \partial z$  dobivamo paraksijalnu valnu jednadžbu

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\mathbf{r}, z) = 0. \quad (3.5)$$

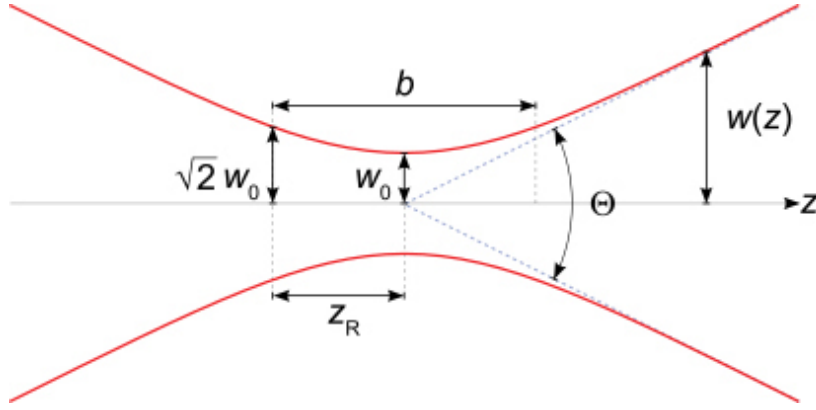
$U(\mathbf{r}, z)$  možemo dalje separirati:

$$U(\mathbf{r}, z) = Z(z) F(u, v) \text{GB}(r, q), \quad (3.6)$$

gdje su  $\boldsymbol{\rho} \equiv (u, v) = (x, y) / \chi(z)$  skalirane koordinate s faktorom skaliranja  $\chi(z)$  koji tek treba odrediti, a  $\text{GB}(r, q)$  je gausijan

$$\text{GB}(r, q) = \frac{q_0}{q_0 + z} \exp \left( \frac{ikr^2}{2q(z)} \right), \quad (3.7)$$

s kompleksnim parametrom  $q = z + q_0$ . *Struk zrake* definiramo kao širinu zrake tamo gdje joj je intenzitet najjači, u  $z = 0$ ;  $w_0 = w(0)$ , kao na slici 3.1. Parametar



Slika 3.1: Laserska zraka i njezin struk  $w_0$ .

$q(z=0) = q_0$  i struk  $w_0$  povezani su;  $q_0 = i\pi w_0^2/\lambda$ ;  $\lambda$  je valna duljina laserske zrake. Uvrštavajući jednadžbu (3.6) u jednadžbu (3.5) dobivamo jednadžbe za  $F(u, v)$ ,  $\chi(z)$  i  $Z(z)$ :

$$[\tilde{\nabla}^2 - i\boldsymbol{\rho} \cdot \tilde{\nabla} - \gamma - i]F = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\chi^2}{q^2} \right) = \frac{1}{kq^2}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{i\gamma - 1}{2k\chi^2}, \quad (3.10)$$

gdje je  $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ , a  $\gamma$  je separacijska konstanta. Rješavanjem (3.9) dobivamo parametar skaliranja:

$$\frac{1}{\chi^2(z)} = k \left( \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{q} \right), \quad (3.11)$$

gdje je  $\tilde{q} = z + \tilde{q}_0$ , a  $\tilde{q}_0$  je integracijska konstanta. Iz jednadžbe (3.10) dobivamo

$$Z(z) = \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2-1/2}, \quad (3.12)$$

$Z(0) = 1$ .  $F(\rho) = F(u, v)$  napišemo u obliku:

$$F(\rho) = G(\rho) e^{im\varphi} e^{i\rho^2/4} / \rho, \quad (3.13)$$

gdje su  $\rho = r/\chi(z)$ , a  $m$  cijeli broj i uvrstimo u jednadžbu (3.8) da bismo, uz promjenu varijable  $\varrho = i\rho^2/2$ , dobili:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{i\gamma/2}{\varrho} + \frac{1/4 - (m/2)^2}{\varrho^2} \right) G(\varrho) = 0. \quad (3.14)$$

Jednadžba (3.14) je kanonska forma Whittakerove diferencijalne jednadžbe [6] čija su rješenja dana Whittakerovim funkcijama  $M_{i\gamma/2, m/2}(\varrho)$ . Kada skupimo sve članove zajedno, rješenje paraksijalne valne jednadžbe je

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, z) = \text{CiB}_\gamma^m(\mathbf{r}; q, \tilde{q}) &= \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right)^{-1/2} \\ &\times M_{i\gamma/2, m/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right) e^{im\varphi} \\ &\times [\text{GB}(r, q)\text{GB}(r, \tilde{q})]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Whittakerove funkcije  $M_{i\gamma/2, \mu}(\varrho)$  povezane su s konfluentnom hipergeometrijskom funkcijom  ${}_1F_1(a, b; x)$  [6] pa jednadžbu (3.15) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \text{CiB}_\gamma^m(\mathbf{r}; q, \tilde{q}) &= \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2-1/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right)^{m/2} \\ &\times {}_1F_1 \left( \frac{1+m-i\gamma}{2}, m+1; \frac{ir^2}{2\chi^2} \right) \\ &\times \text{GB}(r, q)e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

CiB ovdje stoji za *circular beams*, u slobodnom prijevodu; zrake s vrtlozima. Specijalan slučaj kada su konstante  $\gamma = -i(p+m+1)$  i  $\tilde{q}_0 = 0$  zovemo *hipergeometrijski gausovski modovi*, skraćeno, HyGG modovi, koji su detaljnije obrađeni u [8]. Rješenje u obliku jednadžbe (3.16) vrlo je nezgodno zbog konfluentne hipergeometrijske funkcije koja se u njoj pojavljuje. Kao i uvijek, spašavaju nas svojstva specijalnih funkcija, kao npr. ovaj limes iz [6]:

$${}_1F_1(a, b; x) \sim x^{-a}, \text{ za } x \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

$a$  i  $b$  su  $-p/2$  i  $m + 1$ , a  $x = ir^2/2\chi^2$ . Da bismo primijenili taj limes u jednadžbi (3.16), dovoljno je pogledati član  $1/\chi^2$  koji je za HyGG ( $\tilde{q}_0 = 0$ ) jednak

$$\frac{1}{\chi^2} = k \frac{q_0}{(z + q_0)z}. \quad (3.18)$$

$1/\chi^2 \rightarrow \infty$  kada  $z \rightarrow 0$  ili kada  $z \rightarrow q_0$ , ali zanimljiv nam je samo prvi slučaj jer točno znamo gdje je to; u struku zrake ( $a$  i  $q_0$  je puno manji od  $e$  laserske zrake pa možemo uzeti  $q_0 \approx 0$  i opet se svodimo na prvi slučaj). Tada se, za  $z \rightarrow 0$ , HyGG svodi na

$$\begin{aligned} \text{HyGG}_p^m(\rho, \varphi) &= \text{CiB}_{-i(p+m+1)}^m(\mathbf{r}; q_0, 0) \\ &= C_{pm} r^{|m|+p} e^{-\rho^2} e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdje je  $C_{pm}$  konstanta koja se može odrediti normiranjem, ali to nam ovdje nije potrebno; bitno je jedino da je konstanta,  $\rho = r/w_0$ , a modove  $p = -|m|$  možemo generirati tako da fazu  $e^{im\varphi}$  dodamo na TEM<sub>00</sub> mod lasera. Takva laserska polja postoje i zovu se *optički vrtlozi*, a dobivaju se, na primjer, propuštanjem laserske zrake kroz masku koja je kompjuterski generirani hologram (CGH) kao u [8]. Električno polje takvog lasera koji se propagira u z-smjeru je; ne smijemo zaboraviti dio koji se tiče propagacije same zrake;

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.20)$$

## 4 Sintetički vektorski potencijal za ultrahladne atome

Sada možemo odrediti kakav to laser treba biti, tj. kakav detuning  $\Delta$  i Rabijeva frekvencija  $\kappa$  moraju biti, tj. kakvi  $\cos\theta$  i  $\phi$  moraju biti da bi naš sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A}$  bio istog oblika kao i vektorski potencijal zavojnice  $A \sim \hat{\varphi}/r$ .

### 4.1 Rabijeva frekvencija i detuning

Prilično je jednostavno pogoditi rješenje. Ako je  $\cos\theta$  konstantan, a  $\phi$  proporcionalna cilindričnoj koordinati  $\varphi$ , onda jednačba (2.25) odmah daje  $\mathcal{A} \sim \hat{\varphi}/r$  i  $\mathcal{B} = 0$ , za  $r \neq 0$ ; točno kako i treba biti za beskonačnu zavojnicu. Budući da je Rabijeva frekvencija  $\sim \kappa_a \kappa_b^* \sim e^{2i\phi}$ , a  $\kappa_{a,b} \sim \mathbf{E}$ , električno polje  $\mathbf{E}$  mora biti oblika  $e^{im\varphi}$ , gdje je  $m$  cijeli broj.

Član oblika  $e^{im\varphi}$  imamo u jednačbi (3.20) pa možemo koristiti laser s električnim poljem

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.1)$$

tj. laser koji stvara optičke vrtloge. Magnetsko polje je, naravno,  $\mathbf{B} = (1/c)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$ , polarizacija je linearna, laserska zraka je u struku široka  $w_0$ .

Ovdje je važno naglasiti da električno polje ima ovaj oblik samo u struku zrake (u  $z = 0$ , tj. u  $xy$  ravnini); tamo kamo zraku fokusiramo, tj. tamo gdje je njezin intenzitet najjači. Dakle, naše ultrahladne atome moramo staviti u struk zrake u  $xy$  ravninu da bi cijela stvar funkcionirala.

Svaka realna laserska zraka ima neku raspodjelu intenziteta u radijalnom smjeru pa član  $e^{-r^2/w_0^2}$  ne možemo izbjeći. Međutim, taj nam član neće stvarati probleme ako je laserska zraka dovoljno široka, tj.  $w_0$  dovoljno velika. Također, član  $e^{ikz - i\omega t}$  ne možemo izbjeći jer se laserska zraka mora nekako propagirati.  $kz$  dio nije problematičan jer ćemo ga se moći riješiti baždarnom transformacijom, a  $i\omega t$  dio nestane prilikom kompleksne konjugacije.

### 4.2 Sintetički vektorski potencijal

Sustav s kojim radimo je onaj na slici 2.1b. Imamo dva lasera,  $\omega_a$  i  $\omega_b$ . Oba imaju polja istog oblika, ali se propagiraju u suprotnim smjerovima. Laserska zraka prvog

lasera propagira se u  $+z$  smjeru i njezino električno polje ima oblik

$$\mathbf{E}_a = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.2)$$

a laserska zraka drugog lasera propagira se u  $-z$  smjeru i njezino električno polje ima oblik

$$\mathbf{E}_b = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{-im\varphi} e^{-ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.3)$$

Rabijeva frekvencija je, koristeći jednadžbu (2.19),

$$\kappa = \kappa_0 e^{2im\varphi + 2ikz} e^{-2r^2/w_0^2}, \quad (4.4)$$

tj. faza je

$$\phi = 2kz + 2m\varphi, \quad (4.5)$$

a gradijent koji se pojavljuje u  $\mathcal{A}$  u jednadžbi (2.25) je

$$\nabla\phi = 2k\hat{\mathbf{z}} + 2m\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r}. \quad (4.6)$$

Kut miješanja  $\cos\theta$  je, koristeći jednadžbu (2.22),

$$\cos\theta = \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}}, \quad (4.7)$$

i konstantan je za konstantni detuning  $\Delta$  i veliku širinu struka  $w_0$ . Sintetički vektorski potencijal tada je

$$\mathcal{A}' = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right] (2m\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r} + 2k\hat{\mathbf{z}}), \quad (4.8)$$

gdje smo kod  $\mathcal{A}'$  stavili crticu da bi nam iduća jednadžba ljepše izgledala jer ćemo baždarnom transformacijom  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' - 2k\hat{\mathbf{z}}$  eliminirati konstantni član  $2k\hat{\mathbf{z}}$  koji nam prilikom integriranja po zatvorenoj petlji u jednadžbi (2.9) ionako daje 0. Dobivamo:

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right] 2m\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r} \quad (4.9)$$



Ako definiramo *sintetički magnetski tok*  $\Sigma$  kao

$$\Sigma = 2\pi\hbar m \left( \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right), \quad (4.10)$$

koji je približno konstantan za dovoljno širok struk;

$$\Sigma = 2\pi\hbar m \left( \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2)^{1/2}} - 1 \right), \quad (4.11)$$

sintetički vektorski potencijal zavojnice za ultrahladne atome tada je

$$\mathcal{A} = \frac{\Sigma}{2\pi} \frac{\hat{\varphi}}{r}, \quad (4.12)$$

a sintetičko magnetsko polje je  $\mathcal{B} = (\Sigma/2\pi)[\delta(r)/r]\hat{z}$  u potpunoj analogiji s vektorskim poljem beskonačne zavojnice  $\mathbf{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\varphi}/r)$  i magnetskim poljem  $\mathbf{B} = (\Phi/2\pi)[\delta(r)/r]\hat{z}$ .

Jednadžba (4.12) najvažniji je rezultat u ovom radu.

Dimenzija sintetičkog magnetskog toka  $\Sigma$  je  $J_s$ , a običnog magnetskog toka  $\Phi$  je  $J_s C^{-1}$ , gdje je  $C$  jedinica naboja Coulomb, tj. primjetimo da smo naboj u sintetičkom slučaju izgubili kao što smo i spomenuli već par puta u tekstu.

## 5 Anyoni

Kada imamo dvije identične čestice i zamjenimo im mjesta, njihova dvočestična valna funkcija ostane ista do na predznak. Ako valna funkcija dobije predznak minus, te čestice zovemo fermioni, a ako ostane predznak plus, zovemo ih bozoni. Međutim, to vrijedi samo u tri dimenzije. U dvije dimenzije priča je drugačija.

Počnimo s tri dimenzije; s dvije identične čestice kojima ćemo zamijeniti mjesta. Neka je početna dvočestična valna funkcija  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Budući da su čestice identične, nakon što im zamijenimo mjesta, sve vjerojatnosti moraju ostati iste, tj. mora vrijediti  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2$  [10]. To znači da se valne funkcije prije i poslije zamjene mogu razlikovati samo do na fazu:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\phi}\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (5.1)$$

Ako ih onda opet zamijenimo, dobivamo još jedan isti takav fazni faktor pa je konačna valna funkcija  $e^{2i\pi\phi}\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ . Ali to znači da smo se vratili u isto stanje s početka i onda nam početna i krajnja valna funkcija moraju biti iste:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{2i\pi\phi}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (5.2)$$

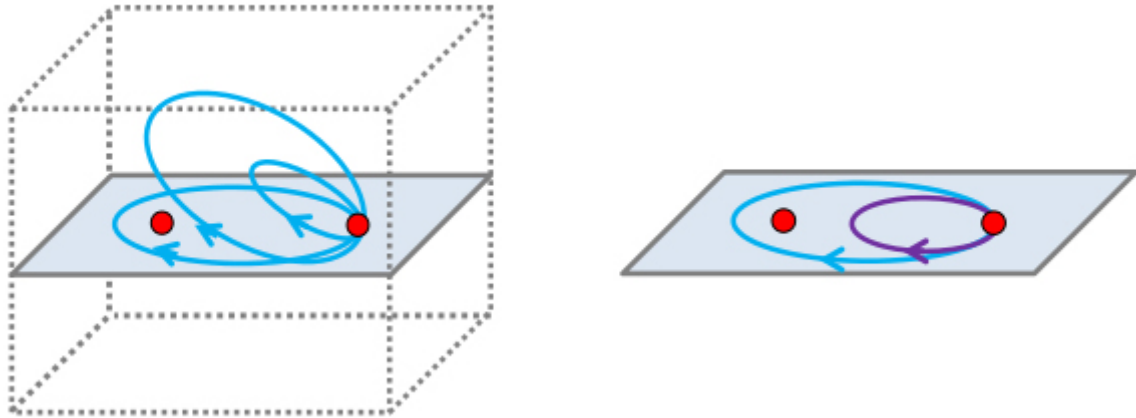
što nam onda daje uvjet

$$e^{2i\pi\phi} = 1. \quad (5.3)$$

Ako je  $\phi = 0$ , tj. faza je 0, imamo bozone, a ako je  $\phi = 1$ , tj. faza je  $\pi$  (kod jedne zamjene), imamo fermione.

Što se mijenja kada smo u dvije dimenzije? Pa, razlika je u topologiji. Prvo, primjetimo da ako zamijenimo dvije čestice jednom i onda još jednom kao gore, zapravo smo samo jednu česticu zavrtjeli oko druge. Pogledajmo sada sliku 5.1. Vidimo da u tri dimenzije putanju kojom jedna čestica kruži oko druge možemo kontinuirano deformirati u jednu točku pa nam vrijedi tvrdnja da su početna i konačna valna funkcija iste, tj. da je faza koju valna funkcija dobiva jednaka  $e^{2i\pi\phi} = 1$ .

U dvije dimenzije, pak, putanju ne možemo kontinuirano deformirati u točku bez da pokupimo drugu česticu. To znači da valne funkcije prije i poslije rotacije ne



Slika 5.1: Prikaz dviju čestica u tro- i dvodimenzionalnom prostoru. Put kojim jednu česticu vrtimo oko druge u tri dimenzije možemo kontinuirano deformirati u točku, dok u dvije dimenzije to ne možemo bez da skupimo drugu česticu. Slika preuzeta iz [10].

moraju biti iste, tj. da ne vrijedi nužno da je  $e^{2i\pi\phi} = 1$  i onda  $\phi$  može biti bilo što između 0 i 1. Takve čestice zovemo *anyoni*.

Kompozitna čestica koja se sastoji od beskonačno dugačke i beskonačno tanke zavojnice magnetskog toka  $\Phi$  i čestice naboja  $q$  zove se *Wilczekov anyon* [11]. Takve čestice nisu nekakva posebna vrsta anyona, nego je fizika sustava takvih zamišljenih kompozitnih čestica (zbog Aharonov-Bohm faze nabijene čestice u vektorskom potencijalu zavojnica) ista kao i fizika sustava anyona [11].

U idućem potpoglavlju pogledat ćemo beskonačne laserske zavojnice, koje stvaraju sintetički vektorski potencijal, provučene kroz Bose-Einsteinov kondenzat (ultra-hladni atomi) u skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Pogledat ćemo problem s jednom i s dvije zavojnice. Problem s jednom zavojnicom je pitanje pronalaska rješenja za valnu funkciju (analitičkog i numeričkog), a problem s dvije zavojnice pokazuje kako doći do Berryjeve faze u takvom sustavu.

## 5.1 Bose-Einsteinov kondenzat u harmoničkom oscilatoru i laserska zavojnica

Pogledajmo skalarnu (spin 0) česticu naboja  $q$  i mase  $M$  u vektorskom potencijalu jedne zavojnice i skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Ovaj naboj  $q$  je efektivni naboj koji dolazi od sintetičkog magnetizma koji za atome stvara laserska

zavojnica. Dakle, imamo jednu zavojnicu koja stvara vektorski potencijal

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\varphi} \quad (5.4)$$

i dodatni vanjski skalarni potencijal

$$V = \frac{1}{2} M \omega^2 \mathbf{r}^2. \quad (5.5)$$

Kao i uvijek, rješavamo problem

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

Hamiltonijan je

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \mathbf{r}^2 \quad (5.7)$$

ili, napisan u polarnim koordinatama;

$$H = \frac{\hbar^2}{2M} \left( -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2i \frac{qA}{\hbar r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{q^2}{\hbar^2} A^2 + \frac{M^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 \right). \quad (5.8)$$

Valna funkcija koja rješava ovu jednadžbu je

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (5.9)$$

gdje je  $m \in \mathbb{Z}$ . Ovdje je korisno prijeći na bezdimenzionalne varijable. Uvodimo novu bezdimenzionalnu radijalnu koordinatu  $\rho = \kappa r$ , gdje je

$$\kappa = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}, \quad (5.10)$$

bezdimenzionalni tok  $\alpha = q\Phi/(2\pi\hbar)$  i enegiju  $\epsilon = 2E/(\hbar\omega)$ .  $l = \kappa^{-1}$  je oscilatorska duljina, tj.  $\rho$  mjerimo u jedinicama duljine harmoničkog oscilatora. Uvrštavajući (5.9) u (5.8), dobivamo jednadžbu za  $R(\rho)$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left( \epsilon - \frac{|m - \alpha|^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) R = 0, \quad (5.11)$$

čije je rješenje

$$R(\rho) = \rho^{|m-\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\rho} U\left(\frac{1+|m-\alpha|}{2} - \frac{\epsilon}{4}, 1+|m-\alpha|, \rho^2\right), \quad (5.12)$$

gdje je  $U(a, b, z)$  konfluentna hipergeometrijska funkcija druge vrste [6]. Konfluentna hipergeometrijska funkcija druge vrste postaje generalizirani Laguerrov polinom ako joj je prvi parametar  $a = -n_r$  negativan cijeli broj:

$$U(-n_r, b, z) = (-1)^{n_r} n_r! L_{n_r}^{b-1}(z). \quad (5.13)$$

To nam onda daje dozvoljene energije

$$\epsilon = 2 + 2|m - \alpha| + 4n_r \quad (5.14)$$

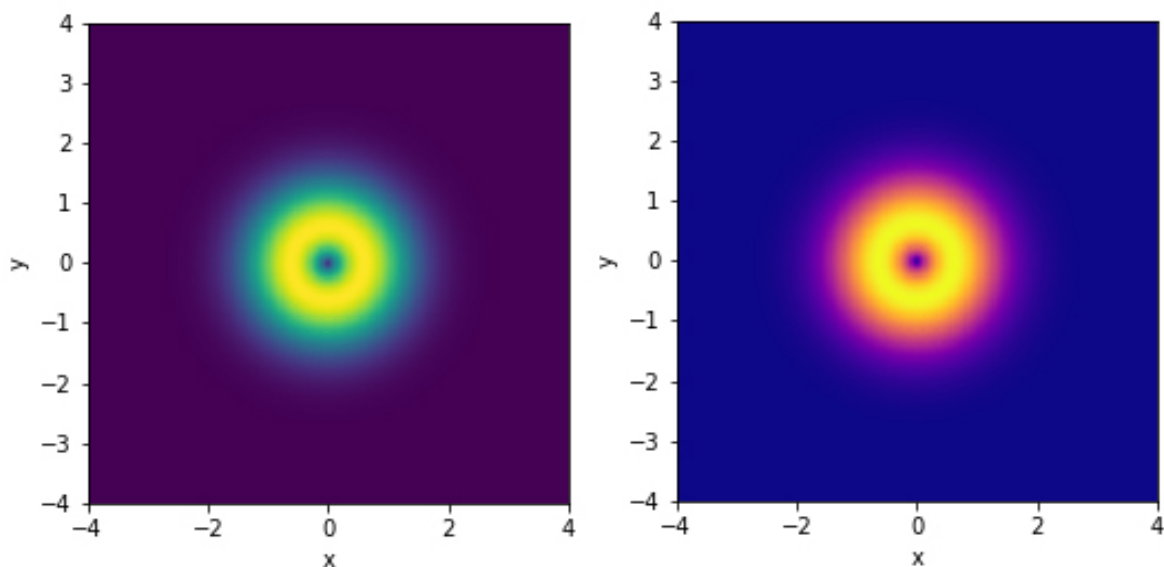
i radijalni dio valne funkcije

$$R(\rho) = \sqrt{\frac{2n_r!}{\Gamma(n_r + |m - \alpha| + 1)}} \rho^{|m-\alpha|} L_{n_r}(\rho^2) e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \quad (5.15)$$

koji se za osnovno stanje ( $n_r = 0, m = 0$ ) svodi na

$$R(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}} \rho^\alpha e^{-\frac{1}{2}\rho^2}. \quad (5.16)$$

Ukupna valna funkcija je  $\psi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1/2} R(\rho) e^{im\varphi}$ . Dobiveno rješenje može se usporediti i s rezultatima dobivenim numeričkim rješavanjem Schrödingerove jednadžbe, što ćemo i prikazati za slučaj  $\alpha = 0.4$ . Na slici 5.2 vidimo dvodimenzionalni prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti valne funkcije osnovnog stanja nabijene čestice u potencijalu jedne zavojnice i potencijalu harmoničkog oscilatora, a na slici 5.3 presjek po dijagonali da bi bolje vidjeli usporedbu analitike i numerike.



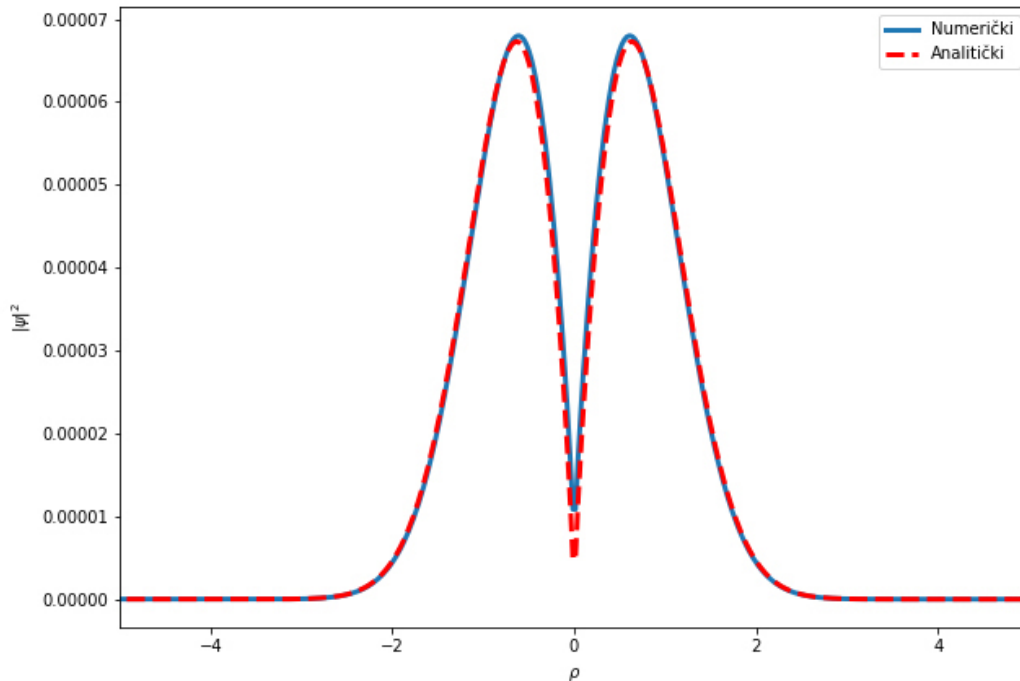
Slika 5.2: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije osnovnog stanja nabijene čestice u vektorskom potencijalu jedne zavojnice i skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Lijevo je numeričko rješenje, a desno je analitičko.  $x$  i  $y$  mjerimo u jedinicama oscilatorske duljine  $l = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$ .

## 5.2 Slučaj dvije zavojnice

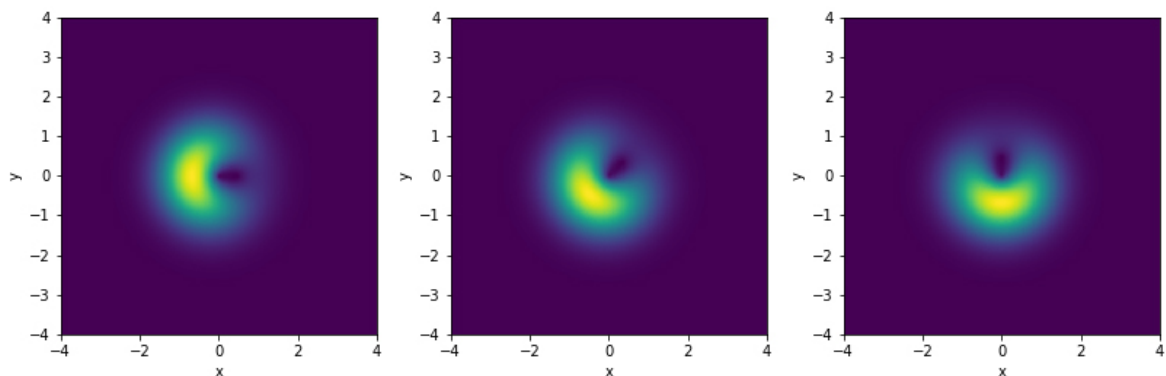
Sada možemo pogledati što se događa kada imamo dvije zavojnice; jednu u centru i drugu koja se oko nje vrti na udaljenosti  $r_2$ . Nezgodno je što za taj slučaj nemamo analitičko rješenje, ali možemo pogledati numeričko; znamo da nam numerika dobro radi iz prethodnog slučaja s jednom zavojnicom. Na slici 5.4 vidimo valne funkcije za 3 različita položaja druge zavojnice. Za takav sustav, kada se jedna zavojnica zavrti oko druge, valna funkcija nabijene čestice koja se nalazi u prostoru oko zavojnica dobiva Berryjevu fazu. Berryjeva faza dobije se integriranjem Berryjeve veze, a onda se za numerički slučaj može, iz izraza koji sadrži gradijente, prijeći na izraz koji je (u granici malih pomaka) produkt puno skalarnih produkata valnih funkcija za susjedne položaje zavojnice [12]:

$$\Phi = -\arg(\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_3 \rangle \dots \langle \psi_{N-1} | \psi_N \rangle \langle \psi_N | \psi_1 \rangle), \quad (5.17)$$

gdje su  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , valne funkcije za  $i$ -ti položaj zavojnice. Konkretno, neka se druga zavojnica vrti oko prve na udaljenosti  $r_2$  u  $N = 36$  koraka od po  $10^\circ$ ; dakle, zavrtimo ju za puni krug. Na slici 5.5 vidimo Berryjevu fazu u ovisnosti o udaljenosti druge zavojnice od prve. Dobivena Berryjeva faza nije ni 0 ni  $\pi$ , ali ovisi o udaljenosti

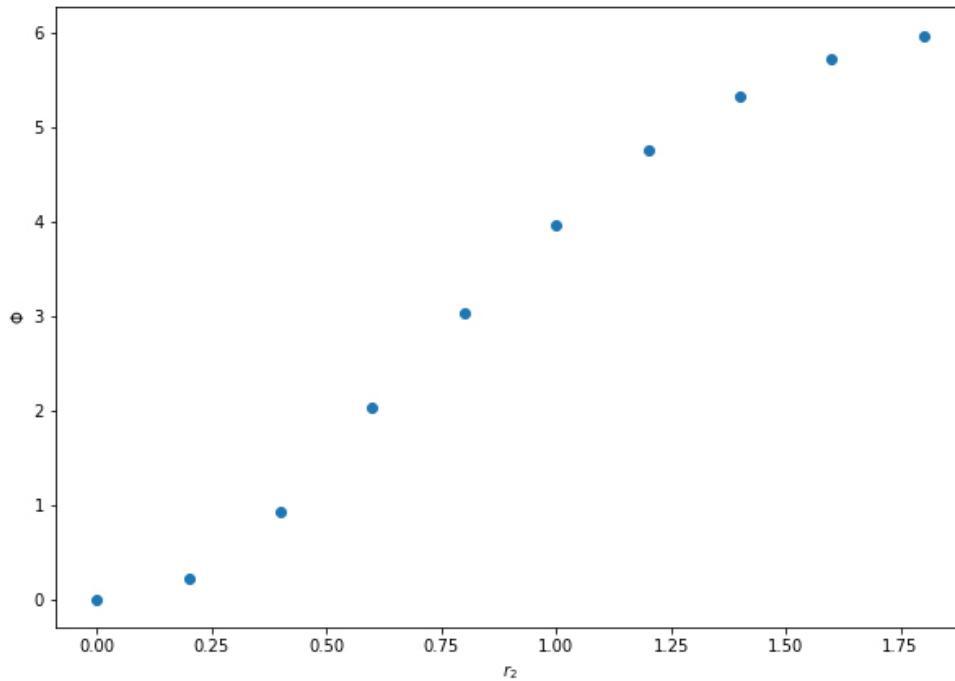


Slika 5.3: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije osnovnog stanja nabijene čestice u vektorskom potencijalu jedne zavojnice i skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora; presjek po dijagonali.  $\rho$  mjerimo u jedinicama oscilatorske duljine  $l = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$ .



Slika 5.4: Valna funkcija osnovnog stanja nabijene čestice u vektorskom potencijalu dviju zavojnica i skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Jedna zavojnica je u ishodištu koordinatnog sustava, a druga na udaljenosti  $r_2 = 0.5$  od prve.  $r_2$ ,  $x$  i  $y$  mjerimo u jedinicama oscilatorske duljine  $l = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$ . Na lijevoj slici, druga zavojnica je na pozitivnoj strani osi  $x$ , na srednjoj slici druga zavojnica je pod kutem od  $45^\circ$  stupnjeva u odnosu na os  $x$ , a na desnoj slici je na pozitivnoj strani osi  $y$ .

među zavojnicama pa ta faza nije topološka. U ovom trenutku, ne možemo tvrditi



Slika 5.5: Berryjeva faza  $\Phi$  za sustav s dvije zavojnice. Jedna zavojnica kruži oko druge na udaljenosti  $r_2$  u jedinicama oscilatorske duljine  $l = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$ .

da valna funkcija osnovnog stanja pokazuje anyonsko ponašanje na zamjenu dvije zavojnice jer ne znamo što se to tu točno zapravo događa jer nemamo analitiku.

Idući korak bio bi sve ovo ponoviti kada nema potencijala harmoničkog oscilatora, ali tamo nemamo nikakvu analitiku pa ćemo ovdje stati.



## 6 Zaključak

Beskonačno dugačka i beskonačno tanka zavojnica stvara vektorski potencijal  $\mathbf{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ . Mi smo predložili kvantni sustav; ultrahladne atome, koji u interakciji s laserskom svjetlošću stvaraju polje istog oblika.

Prvo smo promotrili sustav koji ovisi o nekom vanjskom parametru  $\lambda$  koji se sporo mijenja (adijabatski). Uveli smo Berryjevu vezu  $\mathcal{A}_l = i\hbar \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle$  koja igra ulogu vektorskog potencijala i našli smo geometrijsku fazu koju dobiva valna funkcija nakon jedne takve adijabatske promjene;  $\Phi^{geom.} = (1/\hbar) \oint \mathcal{A}_l \cdot d\lambda$ . To smo primjenili na sustav s dva nivoa (formalno dva, sustav zapravo ima 3 nivoa ali se matematički formalizam svodi na dva nivoa) i pokazali smo da je Berryjeva veza (sintetički vektorski potencijal) u tom slučaju jednaka  $\mathcal{A} = (\hbar/2)(\cos\theta - 1)\nabla\phi$ , gdje su  $\cos\theta$  i  $\phi$  povezane s laserskim detuningom i Rabijevom frekvencijom.

Nakon toga, pokazali smo da jedno od rješenja paraksijalne valne jednadžbe ima oblik  $\sim \exp(-r^2/w_0 + im\varphi - ikz - i\omega t)$  u struku laserske zrake. Rabijeva frekvencija tada ima fazu  $\phi \sim 2m\varphi$ , a  $\cos\theta$  je konstantan ako je struk zrake dovoljno širok. To nam odmah daje sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A} = (\Sigma/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ , gdje je  $\Sigma$  sintetički magnetski tok. Sintetički vektorski potencijal je istog oblika kao vektorski potencijal beskonačne zavojnice  $\mathbf{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ .

Ukratko smo opisali i što su to anyoni; kompozitne čestice u dvije dimenzije koje se sastoje od zavojnice i nabijene čestice i imaju necjelobrojnu statistiku. Necjelobrojna statistika je samo način na koji se pametnije kaže da kada jednu takvu česticu zavrtimo oko druge, njihova ukupna valna funkcija dobije fazu koja nije ni 0 ni  $\pi$ , tj. da nije ni bozon ni fermion. Pogledali smo što se događa kada imamo dvije zavojnice upisane u Bose-Einsteinov kondenzat u skalarnom potencijalu harmoničkog oscilatora. Pokazali smo da takav sustav dobiva fazu koja nije ni 0 ni  $\pi$ , ali ta faza ovisi o udaljenosti između zavojnica pa nije topološka. Još ne znamo kako točno ta faza ovisi o udaljenosti jer nemamo analitiku, samo numeriku.

## Literatura

- [1] Aharonov, Y.; Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory. // *Physical Review*. Vol. 115, (1959), str. 485-491.
- [2] Dalibard J. Introduction to the physics of artificial gauge fields. Lecture notes, Varenna: The International School of Physics Enrico Fermi, 2014.
- [3] Berry, M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. // *Proceedings of the Royal Society A*. Vol. 392 1802(1984), str. 45-57.
- [4] Metcalf, J.H.; van der Straten, P. Laser cooling and trapping. 1st ed. New York : Springer, 1999.
- [5] Agarwal, G.S. Vacuum-field Rabi oscillations of atoms in a cavity. // *Journal of the Optical Society of America B*. Vol. 2, 3(1985), str. 480-485.
- [6] Olver, F.W.J.; Lozier, D.W.; Boisvert, R.F.; Clark, C.W. NIST handbook of mathematical functions. 1st ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
- [7] Bandres, M.A.; Gutierrez-Vega, J.C. Circular beams. // *Optics Letters*. Vol. 33, 2(2008), str. 177-179.
- [8] Karimi, E.; Zito, G.; Piccirillo, B.; Marrucci, L.; Santamato, E. Hypergeometric-Gaussian modes // *Optics Letters*. Vol. 32, 21(2007), str. 3053-3057.
- [9] Stern, A. Anyons and the quantum Hall effect-A pedagogical review. // *Annals of Physics*. Vol. 323, 1(2007), str. 204-249.
- [10] Kustura, K. Slobodna ekspanzija anyona iz osnovnog stanja u potencijalu harmoničkog oscilatora. Seminarski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2015.
- [11] Wilczek, F. Quantum mechanics of fractional-spin particles. // *Physical Review Letters*. Vol. 49, 14(1982), str. 957-959.
- [12] Mukunda, N.; Simon, R. Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism. // *Annals of Physics*. Vol. 228, 2(1993), str. 205-268.