

# Podrazumijevana volatilnost

---

**Horvatić, Blanka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:911996>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Blanka Horvatić

**PODRAZUMIJEVANA VOLATILNOST**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, travanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|  |            |
|--|------------|
| <b>Sadržaj</b>   | <b>iii</b> |
| <b>Uvod</b>  | <b>5</b>   |
| <b>1 Analiza podrazumijevane volatilnosti</b>          | <b>6</b>   |
| 1.1 Uvod . . . . .                                     | 6          |
| 1.2 Određivanje podrazumijevane volatilnosti . . . . . | 7          |
| 1.3 Dinamička analiza . . . . .                        | 8          |
| <b>2 Preciznost distribucije cijena IBT algoritmom</b> | <b>22</b>  |
| 2.1 IBT . . . . .                                      | 22         |
| <b>3 Procjena SPD-a neparametarskom regresijom</b>     | <b>34</b>  |
| 3.1 Uvod . . . . .                                     | 34         |
| 3.2 Određivanje SPD-a koristeći call opcije . . . . .  | 36         |
| 3.3 Poluparametarska procjena SPD-a . . . . .          | 39         |
| <b>Bibliografija</b>                                   | <b>55</b>  |

# Uvod

Volatilitnost je statistička mjera disperzije povrata vrijednosnog papira, tj. ona je pokazatelj rizika. Standardno se izražava kao standardna devijacija ili varijanca log povrata vrijednosnog papira. Razlikujemo povijesnu volatilitnost od podrazumijevane volatilitnosti. Dok je povijesna volatilitnost mjera volatilitnosti vezane imovine koja je poznata jer se bazira na stvarnim, nedavnim promjenama cijena, podrazumijevana volatilitnost je procjena budućih kretanja cijena i određuje se koristeći modele kretanja cijena opcija, poput Black-Scholesovog modela. Osnovni model na kojem se bazira čitavi rad je upravo Black-Scholesov (BS) model. Njime se modeliraju promjene cijena financijskih instrumenata, poput dionica, kroz vrijeme. Model pretpostavlja postojanje barem jedne rizične i jedne nerizične imovine na tržištu.

Neka je  $(W(t) : 0 \leq t \leq T)$  Brownovo gibanje s očekivanjem nula i varijancom  $t$ , te  $T$  neko fiksno završno vrijeme. Promatramo dionicu čija je cijena u difencijalnom obliku dana s:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

tj. u nediferencijalnom obliku:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \quad (2)$$

gdje je  $\mu$  stopa povrata na cijenu imovine  $S(t)$ , a  $\sigma$  volatilitnost, te se pretpostavlja da su oba parametra konstantna. Dakle, cijenu dionice modeliramo generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem. Pretpostavimo, nadalje, da je  $r$  kamatna stopa na tržištu novca. To znači da 1 kuna uložena u trenutku 0 vrijedi  $e^{rt}$  kuna u trenutku  $t$ . Iz jednadžbe (2) odredimo distribuciju povrata:

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \quad (3)$$

Iz činjenice da je  $W(t) \sim N(0, t)$  slijedi  $\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ , tj. pokazali smo da je distribucija log-povrata normalna s očekivanjem i varijancom:

$$E\left(\log \frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$$

$$\text{Var}\left(\log \frac{S(t)}{S(0)}\right) = \sigma^2 t$$

za početnu vrijednost  $S(0)$ . Također se pretpostavlja da nema isplate dividendi na dionice. Uzimaju se dodatne pretpostavke na tržište: nepostojanje arbitraže, tj. mogućnosti ostvarenja nerizičnog profita, nema ograničenja na posudbu novca po nerizičnoj stopi, nema ograničenja na kupovinu ili prodaju dionica, te nema dodatnih tržišnih troškova.

Kao što će se vidjeti, nama će od važnosti biti Black-Scolesove formule za call i put opcije, te činjenica da sve što se izvede za jednu vrstu opcije analogno se može izvesti i za drugu koristeći call-put paritet, [28]:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r\tau}$$

za  $C_t$  i  $P_t$  vrijednosti call i put opcija respektivo,  $S_t$  cijena dionice,  $K$  cijena izvršenja,  $r$  bezrizična kamatna stopa i  $\tau$  vrijeme do dospeljeća opcija.

U praksi je važno poznavati osjetljivost portfelja obzirom na :

- 1. promjene u cijeni primarne imovine (dionice)
- 2. promjene u modelima parametara

U prvom slučaju želimo naći mjeru izloženosti riziku, tj. kako se mijenja vrijednost portfelja u odnosu na promjenu vrijednosti dionice. Drugi slučaj se može činiti besmislenim, budući da je pretpostavka modela da su parametri konstantni. U tom slučaju misli se na osjetljivost modela na moguće krive specifikacije parametara. Neka je  $\chi$  funkcija vrijednosti portfelja s parametrima  $t$  i  $S(t)$ , te  $S(t) = x$ . Portfelj predstavlja skup financijske imovine pojedinca, sastavljen od različitih financijskih instrumenata, u našem slučaju su to dionice i opcije. Promatramo parcijalne derivacije funkcije  $\chi$  koje zajedničkim imenom

zovemo "Grci":

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{\partial \chi}{\partial x} && \text{delta} \\
 \Gamma &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} && \text{gama} \\
 \rho &= \frac{\partial \chi}{\partial r} && \text{ro} \\
 \theta &= \frac{\partial \chi}{\partial t} && \text{theta} \\
 \mathcal{V} &= \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} && \text{vega}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Za portfelj koji je neosjetljiv na male promjene u odnosu na neki od parametara kažemo da je neutralan, odnosno to znači da je odgovarajući "Grk" jednak nuli.

Diskretna aproksimacija BS modela je Cox-Ross-Rubinsteinov model (CRR). Opet pretpostavimo da želimo modelirati jednu nerizičnu imovinu i jednu rizičnu imovinu koje promatramo na neprekidnom intervalu  $[0, T]$ . Kako bismo diskretizirali vrijeme interval  $[0, T]$  dijelimo na  $k$  podintervala duljine  $\Delta t$ , gdje je  $k$  broj dana trgovanja imovinom. Pretpostavlja se da se trguje samo u trenucima  $t_j = j \cdot \Delta t$  za  $j = 0, \dots, k - 1$ . Kao i u BS modelu  $r$  je konstantna stopa povrata na nerizičnu imovinu za neprekidno ukamaćivanje (npr.  $1Kn \rightarrow e^{r\Delta t}$ ). Kretanje cijena dionice se modelira familijom slučajnih varijabli  $Z_i$   $i = 1, \dots, k$  koje poprimaju vrijednosti  $\{d, u\}$  te vrijedi:

$$P(Z_i = u) = p = 1 - P(Z_i = d)$$

za  $p \in (0, 1)$ . Uzima se da vrijedi, [28]:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad i \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

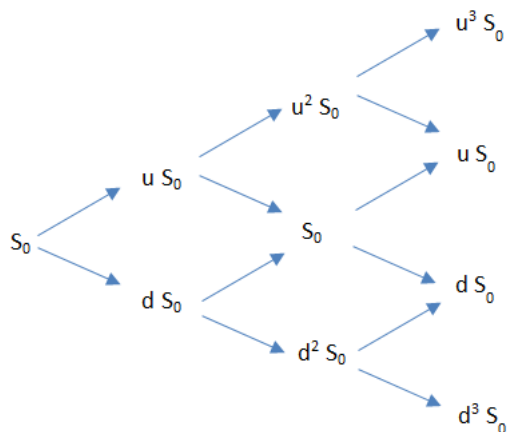
Slijedi da cijenu dionice u trenutku  $t_{n+1}$  možemo zapisati:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j)Z_{j+1} = S(0) \prod_{j=1}^{t_{j+1}} Z_j \tag{5}$$

Ovisno o vrijednosti koju poprima varijabla  $Z_j$  vrijedi:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j)e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad \text{odnosno} \quad S(t_{j+1}) = S(t_j)e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

Jedna od prednosti CRR modela je CRR binomno stablo, tj. grafički prikaz kretanja cijena dionica.



Gornja slika je upravo primjer jednog CRR binomnog stabla sa početnom cijenom dionice, tj. cijenom dionice u trenutku  $t=0$ ,  $S(0)=S_0$ . Stablo ima  $n \in \mathbb{N}_0$  nivoa koji predstavljaju trenutke trgovanja  $t_j$  za  $j = 0, \dots, n$ . Za stablo sa slike  $n = 3$ . Na  $n$ -tom nivou je  $n + 1$  čvorova stabla koji reprezentiraju moguću cijenu dionice u trenutku trgovanja  $t_n$ .

Kao što možemo vidjeti iz grafičkog prikaza CRR binomnog stabla slijedi da su vrijednosti dionica u centralnim čvorovima na nivoima s neparnim brojem čvorova jednake početnoj cijeni dionice. Također, za  $\Delta t = 1$  logaritamske udaljenosti između susjednih čvorova na  $n - tom$  i  $n + 1 - ovom$  nivou su konstante i jednake  $\sigma$  za  $n = 0, \dots, k - 1$ , tj.  $|\log \frac{u^{n+1}S(0)}{u^n S(0)}| = |\log(e^{\sigma \sqrt{\Delta t}})| = \sigma = |\log \frac{d^{n+1}S(0)}{d^n S(0)}| = |-\sigma|$

Jedan od pojmova s kojim ćemo se susretati u radu je tzv. "moneyness". Moneyness opisuje unutarnju vrijednost opcije u trenutnom stanju, tj. to je vrijednost koja pokazuje hoće li trenutno izvršenje opcije dovesti do profita. Ima nekoliko oblika:

- at-the-money - cijena izvršenja jednaka trenutnoj cijeni vezane imovine
- in-the-money - izvršenje opcije donosi zaradu vlasniku
- out-of-the-money - izvršenje je neprofitabilno za vlasnika opcije

Uvodimo i pojam Arrow-Debreuovih vrijednosnica. Usredotočimo se na  $n$ -ti nivo u binomnom stablu, tj. pretpostavimo da se nalazimo u trenutku  $t_n = t$ . Pogledajmo vrijednosnicu  $\lambda_i$  koja isplaćuje 1 u budućem trenutku  $t_{n+1} = T$ , tj. na  $n + 1$ -ovom nivou, ako je cijena dionice u čvoru  $i$  jednaka  $S_i$ , a 0 ako cijena dionice poprima bilo koju drugu vrijednost. Pretpostavimo da znamo tržišne cijene  $\lambda_i$  za svaku od tih vrijednosnica. Portfelj koji se



sastoji od svih  $\lambda_i$  je u stvari nerizična obveznica jer isplaćuje 1 u svakom budućem stanju i njegova vrijednost je dana s:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = e^{-r(T-t)} \quad (6)$$

za nerizičnu kamatnu stopu  $r$ .

Definiramo  $p_i^*$  kao:

$$p_i^* := e^{r(T-t)} \lambda_i \quad (7)$$

$\lambda_i \geq 0$  za svaki  $i$  te vrijedi  $\sum_i p_i^* = \sum_i e^{r(T-t)} \lambda_i = e^{r(T-t)} \sum_i \lambda_i = e^{r(T-t)} e^{-r(T-t)} = 1$ . Kao što vidimo  $p_i^*$  je vjerojatnost stanja  $i$ , ako Arrow-Debreuova vrijednosnica postoji za svako stanje  $i$ . Također, tada te vrijednosnice čine bazu za prostor budućih isplata, tj. možemo replicirati isplatu bilo kojeg vrijednosnog papira  $V$  sve dok znamo njegove isplate  $V_i$  za svaki čvor  $i$ . Replicirajući portfelj je tada:

$$V = \sum V_i \lambda_i, \quad (8)$$

a njegova trenutna vrijednost, tj. diskontirana očekivana vrijednost budućih isplata je:

$$V = e^{-r(T-t)} \sum_i p_i^* V_i \quad (9)$$

Za neprekidna stanja, vrijednost izvedenice  $V$  u trenutku  $t$ ,  $V(S, t)$ , zapisujemo u terminima konačnih isplata,  $V(S_T, T)$ , pritom se opet vodeći činjenicom da je sadašnja vrijednost jednaka diskontiranoj očekivanoj vrijednosti budućih isplata :

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty p(S, t, S_T, T) V(S_T, T) dS_T, \quad (10)$$

za  $p(S, t, S_T, T)$  vjerojatnost neutralnu na rizik.

Definiramo

$$\pi(S, t, S_T, T) := e^{-r(T-t)} p(S, t, S_T, T). \quad (11)$$

Tada je  $\pi(S, t, S_T, T) dS_T$  je cijena u trenutku  $t$  slučajnog zahtjeva koji ima isplatu 1 ako cijena dionice u trenutku  $T$  poprima vrijednost između  $S_T$  i  $S_T + dS_T$ .

# Poglavlje 1

## Analiza podrazumijevane volatilnosti

### 1.1 Uvod

Analiza volatilnosti na financijskim tržištima je postala jedan od najvažnijih problema u modernoj financijskoj teoriji i praksi. Bez obzira radi li se o upravljanju rizicima, hedgingu portfelja ili određivanju cijena opcija potrebna su nam precizna saznanja o tržišno očekivanim kretanjama volatilnosti. Napravljena su mnoga istraživanja o realiziranoj povijesnoj volatilnosti, primjerice ono Rolla [23]. No, kako se pokazalo da je krivo zaključivati o budućem ponašanju tržišta samo na temelju prošlih ponašanja fokus se prebacio na podrazumijevanu volatilnost. Kako bi se odredila podrazumijevana volatilnost Black-Scholesovu formulu riješimo za konstantnu volatilnost i poznate cijene opcija. To je prirodniji pristup jer su vrijednosti opcija određene tržišnim procjenama sadašnje i buduće volatilnosti. Stoga, na podrazumijevanu volatilnost možemo gledati kao na indikator tržišnih očekivanja do vremena do dospjeća opcije.

No, postoje i činjenice koje su kontradiktorne s pretpostavkama Black-Scholesovog modela, posebice pretpostavka konstantne volatilnosti. Volatilnosti određene iz učenih tržišnih cijena pokazuju uzorak koji se uvelike razlikuje od onog ravnog konstantnog koji se koristi u BS formuli; podrazumijevane volatilnosti at-the-money opcija su manje od podrazumijevanih volatilnosti in-the-money ili out-of-the-money opcija. Ta struktura je poznata pod nazivom "volatility smile" (ili rjeđe "volatility skew"). Jedno od objašnjenja ovog fenomena je da u stvarnosti volatilnost vezane imovine nije konstantna vrijednost za vrijeme trajanje opcije. Također će nam biti zanimljiva i vremenska struktura (engl. *term structure*) podrazumijevane volatilnosti koja prikazuje promjenu podrazumijevane volatilnosti obzirom na vrijeme dospjeća opcija s istom cijenom izvršenja.

Uobičajena praksa je da se direktno trguje s takozvanim "vega" definiranim u (4). Vega je mjera osjetljivosti promjene vrijednosti opcije obzirom na promjenu (podrazumijevane) volatilnosti. Mijenja se kada postoje velike promjene kretanja cijena (povećanje volatilnosti), a opada kada se bliži vrijeme dospjeća opcije. Kako bi se moglo trgovati obzirom na vega mjeru neke opcije investitori ovise o preciznim procjenama podrazumijevane volatilnosti i još važnije, njihovoj dinamici.

U procjeni rizika portfelja koji sadrži velik broj raznovrsnih opcija bitno je reducirati broj faktora koji utječu na rizik kako bi sama procjena bila što efikasnija, ali da pritom izbacimo samo "suvišne" informacije. Härdle i Schmidt [11] koriste analizu glavne komponente kako bi odredili maksimalni gubitak portfelja opcija. Dekomponiraju "term structure" podrazumijevane volatilnosti DAX-a u ortogonalne faktore. Vidjet ćemo da je maksimalni gubitak tada modeliran prvim dvama faktorima. Također ćemo objasniti i multivarijantnu metodu analize glavne komponente koja će nam dodatno omogućiti modeliranje dinamike kretanja podrazumijevane volatilnosti obzirom na cijenu izvršenja.

## 1.2 Određivanje podrazumijevane volatilnosti

Cijena Europske call opcije,  $C_t$ , bez isplate dividendi na dionice u trenutku  $t$  u Black-Scholesovom modelu je dana s:

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r\tau} \Phi(d_2), \quad (1.1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (1.2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \quad (1.3)$$

gdje  $\Phi$  označava funkciju distribucije standardne normalne razdiobe,  $S_t$  cijenu vezane imovine u trenutku  $t$ ,  $K$  cijenu izvršenja,  $r$  kamatnu stopu neutralnu na rizik, te  $\tau = T - t$  preostalo vrijeme do dospjeća opcije.

Jedini parametar u Black-Scholesovoj formuli koji ne može biti direktno uočen je stvarna volatilnost cijena vezane imovine, to jest volatilnost kretanja cijena dionice. No, možemo promatrati volatilnost koja proizlazi iz uočenih tržišnih cijena opcija, takozvana podrazumijeva volatilnost. Podrazumijevana volatilnost, ili Black-Scholes podrazumijevana volatilnost, je definirana kao parametar  $\sigma_t^{BS}$  čijim uvrštavanjem u BS formulu dobivamo vrijednost opcije jednaku upravo stvarnoj uočenoj tržišnoj vrijednosti opcije  $C_t^*(K, T)$ :

$$\exists! \sigma_t^{BS}(K, T) > 0, \\ C_{BS}(S_t, K, \tau, \sigma_t^{BS}) = C_t^*(K, T).$$

Postojanje i jedinstvenost podrazumijevane volatilnosti proizlazi iz činjenice da je funkcija cijene call opcije monotono preslikavanje s  $[0, +\infty)$  u  $[0, S_t - Ke^{-rt}]$  i globalno konkavna po  $\sigma$  [5]. Za fiksne  $(K, T)$ ,  $\sigma_t^{BS}$  je stohastični proces i za fiksno  $t$  njegova vrijednost ovisi o karakteristikama opcije kao što su vrijeme dospijeca  $T$  i cijena izvršenja  $K$ . Grubo govoreći, BS podrazumijevana volatilnost je procjena prosječne buduće volatilnosti vezane imovine za vrijeme trajanja opcije. I u ovom smislu, ona je globalna mjera volatilnosti. Funkcija

$$\sigma_t^{BS} : (K, T) \rightarrow \sigma_t^{BS}(K, T)$$

naziva se ploha podrazumijevane volatilnosti (eng. *implied volatility surface*) u trenutku  $t$ .

Kao suprotnost lokalnoj volatilnosti, koja je jedinstveno definirana kao trenutna volatilnost vezane imovine, velik je broj podrazumijevanih volatilnosti za danu vezanu imovinu, jedna za svaku opciju kojom se trguje. Baš zbog toga smo od samog početka suočeni s multivarijabilnim problemom. Gornje činjenice pokazuju da definiranje modela s podrazumijevanom, a ne lokalnom, volatilnosti bi moglo zakomplicirati modeliranje procesa kretanja cijena opcija. Ali, uzimanje u obzir podrazumijevane volatilnosti ima i neke bitne prednosti koje pojednostavljaju analizu.

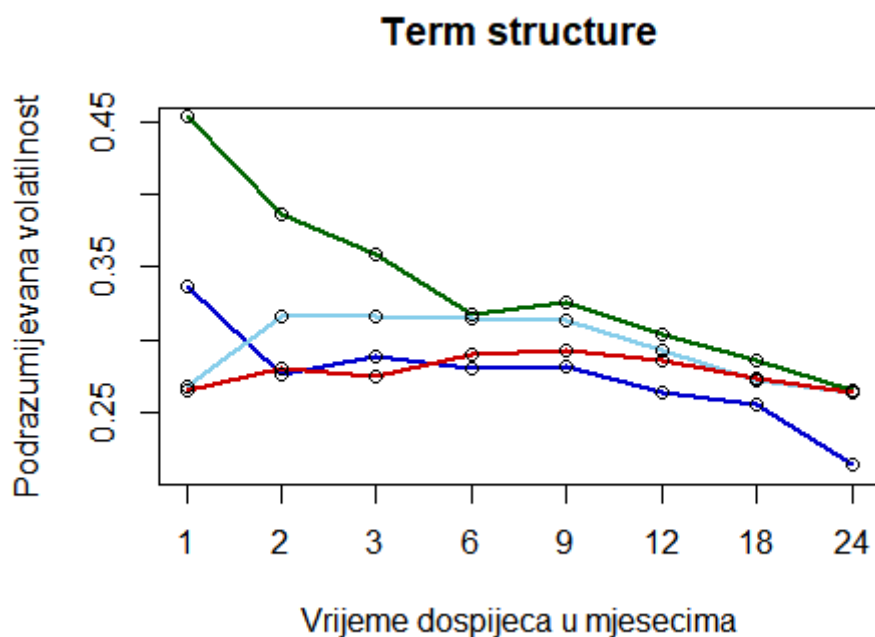
Kao prvo, podrazumijevane volatilnosti su uočljive: mogu se dobiti direktno iz tržišnih podataka bez uzimanja pretpostavki na sami proces. Suprotno tome, lokalna volatilnost ili uvjetna varijanca povrata se ne može dobiti direktno te se mora filtrirati iz podataka o cijeni koristeći model uvjetne varijance (npr. GARCH) ili procijeniti iz poznatih podataka za opcije. Drugo, podrazumijevane volatilnosti daju sliku stanja na tržištu opcija koja je stručnjacima poznata. Stanje na tržištu opisano u terminima veličina ili ponašanja podrazumijevane volatilnosti je jednostavnije za shvatiti nego isto opisano, na primjer, koristeći lokalnu volatilnost. Treće, vremenski pomaci podrazumijevane volatilnosti su visoko korelirani za cijene izvršenja i vremena do dospijeca, što sugerira da je njihova zajednička dinamika određena malim brojem faktora te omogućuje jednostavno modeliranje koje dobro objašnjava sami proces te iste dinamike. I posljednje, stručnjaci gledaju na podrazumijevanu volatilnost kao na referentnu vrijednost tržišnih kretnji i indikator tržišnog rizika.

### 1.3 Dinamička analiza

Opcije na burzovni indeks DAX su jedne od najtrgovanijih ugovora na tržištu derivata EUREX. Ugovori s različitim cijenama izvršenja i vremenima dospijeca tvore likvidno tržište u bilo kojem trenutku. Upravo ta likvidnost daje velik broj vrijednosti za podrazumijevane volatilnosti za različite parove  $(K, \tau)$ . Jedna od tema kojima ćemo se baviti u daljnjem tekstu vezana za dinamiku kretanja krivulje podrazumijevane volatilnosti je

podrazumijevana volatilnost izmjerena pomoću njemačkog podindeksa VDAX koji je dostupan na "Deutsche Börse AG".

Ti indeksi, koji predstavljaju različita dospijeća opcije od jednog do 24 mjeseca, mjere podrazumijevanu volatilnost at-the-money (ATM) call i put opcija. Izračuni VDAX-a su bazirani na Black-Scholesovoj formuli. Krivulje kretanja podrazumijevane volatilnosti at-the-money DAX opcija se mogu dobiti iz VDAX podindeksa za bilo koji dan trgovanja nakon 18. ožujka 1996. To je dan kada se počelo trgovati dugogodišnjim opcijama na EUREX-u. Pogledajmo podatke trgovanja na datume: 27. listopad 1997. (plava linija), 28. listopad 1997. (zeleno linija), 17. studeni 1997. (cijan linija) i 20. studeni 1997. (crvena linija), [11]: Uspoređivat ćemo strukture volatilnosti za trgovanja dan za danom, to jest



prvo pogledajmo odnos krivulja za 27. i 28. studenog. Odmah možemo uočiti preokonačni porast volatilnosti. Također je uočljiva i inverzija, to jest, volatilnost opcija kraćeg dospijeća je veća od volatilnosti onih dužeg dospijeća. Samo nekoliko tjedana kasnije, 17. i 20., vrijednosti su se vratile na niže nivoe. Očito je za vrijeme tržišnih prevrtanja dolazilo do značajnih promjena u kretanju volatilnosti ATM opcija.

## PCA podrazumijevane volatilnosti ATM opcije

Skup podataka za analizu varijacija podrazumijevane volatilnosti je skup krivulja kao što su one na grafu. Kako bismo odredili zajedničke faktore koristimo analizu glavnih komponenti (eng. Principal Components Analysis, PCA). Osnovni ciljevi analize glavnih komponenti su redukcija podataka te interpretacija dobivenog rezultata. Redukcija podataka se temelji na činjenici da je velik dio varijabiliteta početnih podataka moguće opisati manjim brojem varijabli koje su međusobno nekorelirane, takozvanih glavnih komponenti. Također, PCA otkriva povezanost među varijablama i stoga dozvoljava interpretacije do kojih se bez ovakve analize ne bi došlo.

Neka je matrica  $X$  dimenzija  $m \times n$  definirana s:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Pretpostavlja se da su stupci centrirani, tj.

$$\mu_i := E(X_i) = 0$$

gdje  $X_i$  označava  $i$ -ti stupac matrice  $X$ .

U našem slučaju elementi matrice će biti podrazumijevane volatilnosti te će svaki stupac predstavljati opcije s određenim dospjećem, tj. u svakom od  $n$  stupaca se nalaze podaci sa istim svojstvom.

Matrica kovarijanci je tada realna simetrična  $n \times n$  matrica:

$$C_X = \frac{1}{m} X^T X$$

**Teorem 1.3.1** (Glavna komponenta). *Neka je  $C$  realna simetrična matrica te neka  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označava standardni skalarni produkt.*

$$\lambda_{max} := \max_{\|v\|=1} \langle Cv, v \rangle$$

je maksimalna svojstvena vrijednost od  $C$ , a vektor

$$v := \operatorname{argmax}_{\|v\|=1} \langle Cv, v \rangle$$

je pripadni svojstveni vektor od  $C$ .

Gornje slijedi iz Courant-Fisherovog minimax teorema (Theorem 5.2., [7]).

Svojstveni vektor  $v$  iz teorema nazivamo vektor težina, označimo ga s  $v_1$ , te  $\lambda_1 = \lambda_{max}$ . Tada je prva glavna komponenta dana s  $Y_1 = Xv_1$ .  $i$ -ti vektor težina  $v$  se izračuna tako da se zahtjeva ortogonalnost traženog vektora  $v$  i prvih  $i - 1$  dobivenih vektora težina. Dobivene parove označimo s:

$$(\lambda_1, v_1), \dots, (\lambda_n, v_n)$$

za  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Sa  $Y_i$  definiramo  $i$ -tu glavnu komponentu:

$$Y_i := Xv_i$$

Tada

$$Y := [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n] = XV$$

gdje je  $V := [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ .

**Lema 1.3.2.**  $P_i := v_i v_i^T$  su ortogonalni projektori, tj.  $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ ,  $i, j = 1, \dots, p$  i vrijedi dekompozicija

$$C = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

Neka je  $V$  ortogonalna matrica svojstvenih vektora matrice  $C_X$ , te  $\Lambda$  pripadna dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti. Tada vrijedi dekompozicija:

$$C_X = V \Lambda V^T$$

Matrica kovarijanci za  $Y$  je dana s:

$$C_Y = \frac{1}{m} Y^T Y = \frac{1}{m} V^T X^T X V = V^T C_X V = \Lambda.$$

Drugim riječima, stupci od  $Y$  su nekorelirani.

**Teorem 1.3.3.**

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) (=:\sigma_X^2)$$

Teorem 1.3.3 iskazuje invarijantnost traga na transformacije sličnosti.

Za  $p < n$  broj

$$\frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sigma_X^2} * 100\%$$

naziva se postotkom objašnjene ukupne varijance, tj. to je mjera koliko dobro metoda glavnih komponenti opisuje početne podatke.

Redukcija dimenzije odnosi se na uzimanje prvih  $p$  glavnih komponenti, tj. umjesto matrice  $Y$  promatra se matrica:

$$Y^* := [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_p]$$

u kojoj je odbačeno posljednjih  $n - p$  stupaca. Grubo pravilo je da se  $p$  odabire tako da postotak objašnjenja ukupne varijance bude  $\geq 80\%$ .

Sada ćemo provesti analizu glavnih komponenti za 440 vrijednosti VDAX podindeksa za svako vrijeme dospjeća  $\tau \in \{30, 60, 90, 180, 270, 360, 540, 720\}$  mjereno u danima, gdje VDAX predstavlja podrazumijevanu volatilnost DAX indeksa u idućih 30 dana. Definiramo  $X = (x_{t,j})$  kao  $T - 1 \times J$  matricu povrata podrazumijevanih volatilnosti za podindekse  $j = 1, \dots, J$  u trenutcima  $t = 1, \dots, T - 1$ . U našem slučaju vrijedi  $J = 8$  i  $T = 440$ . Time dobivamo stacionarne podatke te matricu  $X$  centriranu po stupcima, tj. očekivanje svakog stupca jednako je 0. Zatim odredimo matricu kovarijanci te njene pripadne svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti.

```
podaci=read.table("VDAX.dat")
n=nrow(podaci)
X=(podaci[2:n,]-podaci[1:(n-1),])/podaci[1:(n-1),]
C=cov(X)
dekomp=eigen(C)
lambda=dekomp$values
sv_vektori=dekomp$vectors
postotak_var=rbind(0,8)
for(i in 1:8){
  postotak_var[i]=lambda[i]/sum(lambda)
}
postotak_var=postotak_var*100
kumul_postotak=rbind(0,8)
kumul_postotak[1]=postotak_var[1]
for(i in 2:8){
  kumul_postotak[i]=kumul_postotak[i-1]+postotak_var[i]
}

> postotak_var
[1] 73.481890  9.915004  5.751108  3.348912  2.707984  2.207865
1.562159  1.025078
```



Rezultat pokazuje da prva glavna komponenta objašnjava oko 73% ukupne varijance podataka, dok druga objašnjava dodatnih 10%. Kao što možemo vidjeti treća objašnjava značajno manji postotak ukupne varijance. Stoga, gledajući samo prve dvije glavne komponente imamo ukupno objašnjenje varijance od oko 83%. Uzimajući u obzir samo prva dva faktora, vremenski niz podrazumijevanih at-the-money volatilnosti može se zapisati kao reducirani model:

$$\hat{X} = [Y_1 \ Y_2] \begin{bmatrix} v_1^\top \\ v_2^\top \end{bmatrix} + \epsilon_t$$

$$X_j = Y_1 \cdot v_{j1} + Y_2 \cdot v_{j2} + \epsilon_t$$

$$x_{tj} = v_{j1}y_{t1} + v_{j2}y_{t2} + \epsilon_t$$

gdje je  $v_{jk}$  element u  $j$ -tom retku i  $k$ -tom stupcu matrice  $V$ , analogno  $y_{tk}$  element matrice  $Y$ , te  $\epsilon_t$  bijeli šum.  $v_j$  je osjetljivost vremenskog niza podrazumijevane volatilnosti na promjenu glavnih komponenti.

## Opća analiza glavnih komponenti

Podrazumijevane volatilnosti izračunate za različite cijene izvršenja i vremena dospijeća tvore plohu. Analiza glavne komponente, kao što je rečeno prije, ne uzima u obzir takve strukture jer gleda samo jednodimenzionalne presjeke, tj. gleda samo ovisnost o vremenu. U ovom dijelu ćemo objasniti tehniku koja omogućuje da analiziramo nekoliko takvih presjeka simultano. Kako opcije prirodno pripadaju različitim skupinama obzirom na vrijeme dospijeća možemo analizirati presjeke za različita vremena dospijeća. Predlaže se PCA tih različitih skupina, tj. svaka od skupina biti će reprezentirana jednom matricom gdje će stupci varirati po cijeni izvršenja. Sa statističke strane gledišta, simultana procjena PCA-a u različitim grupama rezultira redukcijom ukupne dimenzije. Takva vrsta PCA bazirana na više grupa naziva se opća analiza glavnih komponenti (eng. *common principal components analysis*, CPCA). Rezultat CPCA je skup svojstvenih vrijednosti po odabranim grupama.

CPCA se bazira na pretpostavci da matrice kovarijanci imaju sličnu strukturu u svim grupama. Osnovna pretpostavka CPCA je da je prostor razapet svojstvenim vrijednostima jednak kroz nekoliko grupa, dok je dozvoljeno razlikovanje varijanci komponentata. Takvim pristupom se analizira  $p$ -varijantan slučajni vektor u  $k$  grupa, tj.  $k$  vremena dospijeća.

Hipoteza CPCA se može zapisati [12]:

$$H_{CPCA} : \Psi_i = \Gamma \Lambda_i \Gamma^\top, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.4)$$

za  $\Psi_i$  pozitivno definitnu kovarijacijsku matricu dimenzija  $p \times p$ ,  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  ortogonalna matrica transformacije dimenzija  $p \times p$  i  $\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ip})$  matrica svojstvenih

vrijednosti. Pritom je matrica  $\Psi_i$  ona koju želimo odrediti iz poznatih podataka. Također se pretpostavlja da su  $\lambda_i$  međusobno različite.

Neka je  $S_i = \frac{1}{n_i} X_i^T X_i$  uzoračka kovarijacijska matrica slučajnih vektora  $X_i$ , za koje se pretpostavlja da dolaze iz  $p$ -varijantne normalne razdiobe  $N_p(\mu, \Psi_i)$ . Veličina uzorka je  $n_i > p$ . Tada je distribucija od  $n_i S_i$  Wishartova, sa  $n - 1$  stupnjeva slobode:

$$n_i S_i \sim W_p(\Psi_i, n_i - 1)$$

Funkcija gustoće Wishartove distribucije:

$$f(S) = \frac{1}{\Gamma_p\left(\frac{n-1}{2}\right) |\Psi|^{(n-1)/2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{p(n-1)}{2}} \exp\left[\operatorname{tr}\left(-\frac{n-1}{2}\Psi^{-1}S\right)\right] |S|^{(n-p-2)/2}, \quad (1.5)$$

za

$$\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(x - \frac{1}{2}(i-1)\right)$$

multivarijantnu funkciju gama, te oznaku  $|\cdot|$  za determinantu matrice.

Neka je sa  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_k) \in \Theta$  definiran nepoznati parametar te definiramo funkciju vjerodostojnosti  $L : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  sa:

$$L(\Psi) := f(S_1|\Psi_1) \cdots f(S_k|\Psi_k)$$

Vrijednost  $\hat{\Psi}$  za koju je

$$L(\hat{\Psi}) = \max_{\Psi \in \Theta} L(\Psi)$$

zovemo procjenitelj metodom maksimalne vjerodostojnosti ili kraće MLE. Za  $k$  Wishartovih matrica  $S_i$  funkcija vjerodostojnosti je:

$$L(\Psi_1, \dots, \Psi_k) = C \prod_{i=1}^k \exp\left[\operatorname{tr}\left(-\frac{1}{2}(n_i - 1)\Psi_i^{-1}S_i\right)\right] |\Psi_i|^{-\frac{1}{2}(n_i-1)} \quad (1.6)$$

gdje je  $C$  konstanta koja ne ovisi o parametrima  $\Psi_i$ .

Maksimizacija funkcije vjerodostojnosti je ekvivalentna minimizaciji funkcije  $g(\cdot)$ , jer vrijedi da je  $\ln(L(\cdot)) = \ln C - \frac{1}{2}g(\cdot)$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta.

$$g(\Psi_1, \dots, \Psi_k) = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \left[ \ln |\Psi_i| + \operatorname{tr}(\Psi_i^{-1} S_i) \right].$$

Uz pretpostavku da vrijedi (1.4) i iz unitarne invarijantnosti determinante i traga dobivamo:

$$\begin{aligned} \ln |\Psi_i| &= \ln |\Gamma \Lambda_i \Gamma^\top| = \ln |\Lambda_i| = \sum_{j=1}^p \ln \lambda_{ij} \\ \text{tr}(\Psi_i^{-1} S_i) &= \text{tr}(\Gamma \Lambda_i^{-1} \Gamma^\top S_i) = \text{tr}(\Lambda_i^{-1} \Gamma^\top S_i \Gamma) = \sum_{j=1}^p \frac{\gamma_j^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{i,j}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Znamo da je inverz dijagonalne matrice sa vrijednostima  $\lambda_{ij}$  na dijagonali opet dijagonalna matrica sa  $1/\lambda_{ij}$  na dijagonali. Neka je  $\gamma_j = [\gamma_{1j} \dots \gamma_{pj}]^\top$  vektor stupac matrice  $\Gamma$ . U konačnici dobivamo:

$$g(\Gamma, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k) = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \sum_{j=1}^p \left( \ln \lambda_{ij} + \frac{\gamma_j^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}} \right).$$

Također, želimo da su vektori  $\gamma_j$  u matrici  $\Gamma$  ortogonalni. To ćemo postići koristeći Lagrangeovu metodu. Imamo  $p(p-1)/2$  uvjeta ortogonalnosti oblika  $\gamma_h^\top \gamma_j = 0$  za  $h \neq j$  i  $p$  uvjeta za normiranost  $\gamma_j^\top \gamma_j = 1$ .

$$g^*(\Gamma, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k) = g(\cdot) - \sum_{j=1}^p \mu_j (\gamma_j^\top \gamma_j - 1) - 2 \sum_{h < j} \mu_{hj} \gamma_h^\top \gamma_j,$$

za Lagrangeove multiplikatore  $\mu_j$  i  $\mu_{hj}$ .

Uzimajući derivaciju funkcije  $g^*$  obzirom na  $\lambda_{ij}$  i izjednačavajući s nulom dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^*}{\partial \lambda_{ij}} &= \frac{1}{\lambda_{ij}} - \frac{\gamma_j^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}^2} = 0 \\ \lambda_{ij} &= \gamma_j^\top S_i \gamma_j \end{aligned} \quad (1.8)$$

Iz (1.7) i (1.8) slijedi:

$$\text{tr}(\Psi_i^{-1} S_i) = p \quad (1.9)$$

Uzmimo sada parcijalnu derivaciju obzirom na  $\gamma_j$ , što je ustvari gradijent funkcije  $g$  za vektor  $\gamma_j$ , i izjednačimo s nulom.

Prvo pogledajmo:

$$\nabla_{\gamma_j} g = \left[ \frac{\partial g}{\partial \gamma_{ij}} \right] = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{(S_i + S_i^\top) \gamma_j}{\lambda_{ij}} \quad (1.10)$$

Uz pretpostavku da je  $\mu_{hj} = \mu_{jh}$ , koja slijedi iz simetričnosti uvjeta  $\gamma_h^\top \gamma_j = \gamma_j^\top \gamma_h = 0$ , imamo:

$$\nabla_{\gamma_j} g^* = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{(S_i + S_i^\top) \gamma_j}{\lambda_{ij}} - 2\mu_j \gamma_j - 2 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^p \mu_{jh} \gamma_h = 0 \quad (1.11)$$

Zbog simetričnosti matrice  $S_i$  vrijedi  $S_i + S_i^\top = 2S_i$  pa uvrštavajući to u (1.11) i dijeleći s 2 dobivamo:

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}} - \mu_j \gamma_j - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^p \mu_{jh} \gamma_h = 0 \quad (1.12)$$

Sada pomnožimo (1.12) s lijeva s  $\gamma_j^\top$  te iskoristimo (1.8) i ortogonalnost  $\gamma_j^\top \gamma_h = 0$  za  $j \neq h$ :

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{\gamma_j^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}} - \mu_j \gamma_j^\top \gamma_j - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^p \mu_{jh} \gamma_j^\top \gamma_h = 0 \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \mu_j$$

Pa vrijedi:

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}} - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \gamma_j - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^p \mu_{jh} \gamma_h = 0 \quad (1.14)$$

Množeći (1.14) s lijeva s  $\gamma_l^\top$  za  $l \neq j$  dobivamo:

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{\gamma_l^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{ij}} = \mu_{jl} \quad (1.15)$$

Zamjenom indeksa  $j$  i  $l$  u prethodnoj jednadžbi te uočavajući da zbog simetričnosti vrijedi  $\gamma_l^\top S_i \gamma_j = \gamma_j^\top S_i \gamma_l$  te  $\mu_{jl} = \mu_{lj}$ :

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{\gamma_l^\top S_i \gamma_j}{\lambda_{il}} = \mu_{jl} \quad (1.16)$$

Uspoređujući (1.15) i (1.16) dobivamo:

$$\gamma_l^\top \left( \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \frac{\lambda_{il} - \lambda_{ij}}{\lambda_{il} \lambda_{ij}} S_i \right) \gamma_j = 0 \quad (1.17)$$

Ta jednažba se treba riješiti koristeći:

$$\lambda_{il} = \gamma_l^\top S_i \gamma_l \quad i=1, \dots, k \quad l=1, \dots, p$$

uz uvjete:

$$\gamma_l^\top \gamma_j = \begin{cases} 0 & l \neq j \\ 1 & l = j \end{cases}$$

Flury je dokazao postojanje i jedinstvenost maksimuma funkcije vjerodostojnosti, a Flury i Gautschi su osmislili algoritam, FG algoritam, za provedbu CPCA koji ćemo sada implementirati.

Promatramo podatke za povrate podrazumijevanih volatilnosti za vremena dospijeća  $\tau = 1, \tau = 2, \tau = 3$  mjeseca, te "moneyness" vrijednosti  $\kappa \in \{0.85, 0.90, 0.95, 1.00, 1.05, 1.10\}$ .

**Definicija 1.3.4.** Za  $S_1, \dots, S_k, k > 1$ , simetrične pozitivno definitne matrice kažemo da su istovremeno dijagonalizabilne ako postoji ortogonalna matrica  $B$  tako da:

$$B^\top S_i B = \Lambda_i \quad i = 1, \dots, k$$

gdje su  $\Lambda_i$  dijagonalne.

**Definicija 1.3.5.** Za  $k > 1$  simetrične pozitivno definitne matrice  $S_1, \dots, S_k$  definiramo funkciju

$$\Phi(S_1, \dots, S_k) = \prod_{i=1}^k \frac{\det(\text{diag}(S_i))^{n_i}}{\det(S_i)^{n_i}} \quad (1.18)$$

za  $n_i$  pozitivne konstante, kao mjeru istovremenog odstupanja matrica  $S_1, \dots, S_k$  od dijagonalnosti.

FG algoritam sačinjavaju dva algoritma, F algoritam i G algoritam, koji minimiziraju funkciju  $\Phi$ , tj. tražimo ortogonalnu matricu  $B$  tako da je  $\Phi(B^\top S_1 B, \dots, B^\top S_k B)$  minimalan. U F algoritmu, svaki par  $(b_i, b_j)$  vektora stupaca trenutne aproksimacije matrice  $B$  je rotiran tako da je jednažba (1.17) zadovoljena. Jedan korak iteracije F algoritma rotira svih  $\frac{p(p-1)}{2}$  parova matrice  $B$ . Dok u G algoritmu iterativno tražimo ortogonalnu  $2 \times 2$  matricu  $Q$  koja rješava dvodimenzionalni analogon formule (1.17). Ta matrica definira rotaciju para vektora koji su trenutno uzeti u F algoritmu.

Pogledajmo kod:

```
### učitajmo podatke
podaci1=read.table("volsurf01.dat")
podaci2=read.table("volsurf02.dat")
```

```

podaci3=read.table("volsurf03.dat")

### izracunajmo matrice kovarijanci
S1=cov(podaci1)
S2=cov(podaci2)
S3=cov(podaci3)

### dimenzije
p=nrow(S1)
n=nrow(podaci1)
k=3

epsilon_f=1e-15
epsilon_g=1e-15

### postavimo pocetnu aproksimaciju
B=diag(p)

while(1){
  Bf=B
  j=2
  while(j<=p){
    l=1
    while(l<j){
      H=cbind(B[,l],B[,j])
      T1=t(H)%*%S1%*%H
      T2=t(H)%*%S2%*%H
      T3=t(H)%*%S3%*%H
      Q=diag(2)
      g=0
      while(1){
        g=g+1
        Qg=Q
        delta1=diag(t(Q)%*%T1%*%Q)
        delta2=diag(t(Q)%*%T2%*%Q)
        delta3=diag(t(Q)%*%T3%*%Q)
        k1=(n-1)*(delta1[1]-delta1[2])/prod(delta1)
        k2=(n-1)*(delta2[1]-delta2[2])/prod(delta2)
        k3=(n-1)*(delta3[1]-delta3[2])/prod(delta3)

```

```

T=k1*T1+k2*T2+k3*T3
Q=eigen(T) ## svojstveni vektori
singularne=svd(Q%*%Qg)$d
ming=min(singularne)
kut_g=acos(ming)
if(kut_g<epsilon_g)break
}
H1=H%*%Q
B[,1]=H1[,1]
B[,j]=H1[,2]
l=l+1
}
j=j+1
}
singularne=svd(B%*%Bf)$d
minf=min(singularne)
kut_f=acos(minf)
if(kut_f<epsilon_f)break
}

###nadimo svojstvene vrijednosti

lambda1=cbind(diag(t(B)%*%S1%*%B))
lambda2=cbind(diag(t(B)%*%S2%*%B))
lambda3=cbind(diag(t(B)%*%S3%*%B))
lambda_ukupno=matrix(c(lambda1,lambda2,lambda3),p,k)

###sortirajmo svojstvene vektore td je
###prvi onaj koji ima najveću svojstvenu vrijednost

matrica=cbind(lambda_ukupno,t(B))
matrica=matrica[order(matrica[,1]),]
matrica=matrica[p:1,]
svojstveni_vektori=t(matrica[,4:9])

```

Pogledajmo najprije korake G algoritma. On rješava jednadžbu:

$$q_1^\top \left( (n_1 - 1) \frac{\delta_{11} - \delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{12}} T_1 + (n_2 - 1) \frac{\delta_{21} - \delta_{22}}{\delta_{21}\delta_{22}} T_2 + (n_3 - 1) \frac{\delta_{31} - \delta_{32}}{\delta_{31}\delta_{32}} T_3 \right) q_2 = 0$$

za  $T_1, T_2, T_3$  fiksne simetrične pozitivno definitne  $(2 \times 2)$  matrice,  $\delta_{ij} = q_j^\top T_i q_j$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ ) i ortogonalnu matricu  $Q = (q_1, q_2)$ .

Inicijaliziramo matricu  $Q$  kao jediničnu  $(2 \times 2)$ . Izračunamo pripadne  $\delta_{ij}$  te potom matricu  $T$  kao:

$$T = (n_1 - 1) \frac{\delta_{11} - \delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{12}} T_1 + (n_2 - 1) \frac{\delta_{21} - \delta_{22}}{\delta_{21}\delta_{22}} T_2 + (n_3 - 1) \frac{\delta_{31} - \delta_{32}}{\delta_{31}\delta_{32}} T_3$$

Potom izračunamo pripadne svojstvene vektore matrice  $T$  te definiramo novu matricu  $Q$  čiji stupci su upravo ti svojstveni vektori.

Algoritam ponavljamo sve dok norma razlike novoizračunate i početne matrice  $Q$  nije manja od  $\epsilon > 0$ .

Algoritam započinje definiranjem početne aproksimacije za  $B$  postavljanjem na jediničnu matricu. Zatim za svaki par vektora  $(b_l, b_j)$ ,  $1 \leq l < j \leq p$  provodimo sljedeće korake:

- Definiramo matricu  $H$  sa stupcima  $b_l$  i  $b_j$
- Definiramo matrice  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$T_i = \begin{bmatrix} b_l^\top S_i b_i & b_l^\top S_i b_j \\ b_j^\top S_i b_l & b_j^\top S_i b_j \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

- provedemo G algoritam na  $(T_1, T_2, T_3)$  kako bismo dobili ortogonalnu matricu  $Q$
- Rotiramo matricu  $H$  te novu matricu označimo s  $H^* = HQ$
- U matrici  $B$  stupce  $b_l$  i  $b_j$  zamijenimo pripadnim stupcima od  $H^*$

Te korake provodimo sve dok norma razlike početne i novodobivene matrice  $B$  nije dovoljno mala, tj. manja od  $\epsilon > 0$  za neki dovoljno mali  $\epsilon$ .

Kao i kod PCA izračunajmo postotke objašnjenja ukupne varijance, no sada to radimo za 3 grupe:

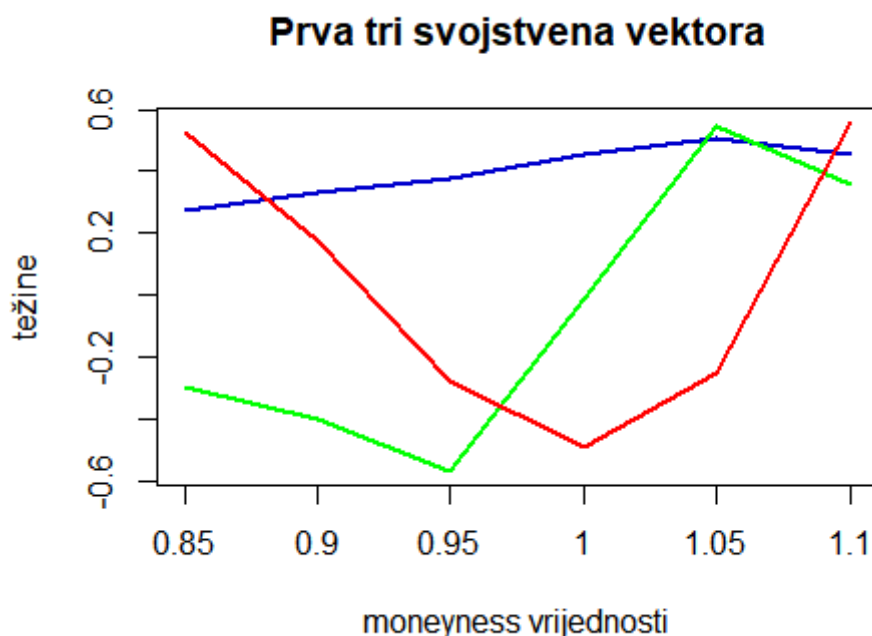
- za vrijeme dospijeća 1 mjesec:  
74.46%, 17.99%, 6.04%, 1.15%, 0.27%, 0.08%



- za vrijeme dospjeća 2 mjeseca:  
76.05%, 19.11%, 3.73%, 0.85%, 0.20%, 0.06%
- za vrijeme dospjeća 3 mjeseca:  
77.48%, 20.09%, 1.67%, 0.57%, 0.14%, 0.04%

Vidimo da u sve tri grupe prve tri glavne komponente opisuju više od 90% ukupne varijance.

Pogledajmo prva tri svojstvena vektora dobivena algoritmom:



Slika 1.1: Prvi svojstveni vektor je plave boje, drugi zelene, a treći crvene. Na x-osi su indexom redom označene vrijednosti za moneyness {0.85, 0.90, 0.95, 1.00, 1.05, 1.10}, a na y-osi težine (loadings).

Vidimo da su težine za prvu komponentu, tj. svi elementi prvog svojstvenog vektora, jednakog predznaka. Drugi svojstveni vektor ima oblik slova Z, tj. težine imaju različite predznake na svakoj strani "smile-a", što sugerira suprotni učinak na out-of-the-money put i out-of-the-money call opcije. Treći svojstveni vektor ima "twist" formaciju, pritom dajući velike težine povratima ATM podrazumijevanih volatilnosti i velike težine suprotnog predznaka vanjskim djelovima "smile"-a.

## Poglavlje 2

# Preciznost distribucije cijena IBT algoritmom

### 2.1 IBT

Dobro poznati model za određivanje cijena opcija je Geometrijsko Brownovo gibanje (GBG) s konstantnom volatilnošću, pri čemu je distribucija cijena log-normalna s gustoćom [28]

$$f(S_t, S_T, r, \tau, \sigma) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left[ -\frac{\{\ln(\frac{S_T}{S_t}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau\}^2}{2\sigma^2\tau} \right], \quad (2.1)$$

za vrijeme dospjeća opcije  $T$ , gdje je  $S_t$  vrijednost dionice u trenutku  $t$ ,  $r$  bezrizična kamatna stopa,  $\tau = T - t$  preostalo vrijeme do dospjeća, te  $\sigma$  volatilnost. Međutim, tržišno podrazumijevana volatilnost opcija na dionički indeks često ima "the volatility smile", koja se smanjuje sa cijenom izvršenja i raste s vremenom do dospjeća  $\tau$ . Postoje različita proširenja generaliziranog Brownovog gibanja koja uzimaju u obzir "smile". Jedan od pristupa je u model uključiti stohastični volatilni faktor, Hull i White [15], drugi dopušta skokove cijena dionica s prekidima, Merton [22]. No u ovakvim modelima se javljaju praktične poteškoće. Na primjer, krši se uvjet neutralnosti na rizik.

IBT tehnika predložena od Rubinsteina [27], Dermana i Kania [9], Dupirea [10], te Barlea i Cakicia [2] uključuje takve pojave. Njihovi radovi pretpostavljaju da je buduća cijena dionica generirana modificiranom slučajnom šetnjom gdje temeljna imovina ima varijabilnu volatilnost koja ovisi o cijeni dionice i vremenu  $t$ . Kako konstrukcija podrazumijevanih binomnih stabala (IBT) dopušta promjenjivu volatilnost  $\sigma = \sigma(S_t, t)$ , ona su samo proširenje originalnih Cox, Ross i Rubinsteinovih (CRR) binomnih stabala, [6]. Konstrukcija IBT-a koristi uočene tržišne cijene opcija kako bi se procijenila podrazumijevana distribucija, te je u prirodi neparametarska.

CRR binomno stablo je diskretna implementacija GBG procesa

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \quad (2.2)$$

gdje je  $Z_t$  standardno Brownovo gibanje,  $\mu$  očekivani prinos,  $\sigma$  volatilitnost cijene dionice, uz pretpostavku da su  $\mu$  i  $\sigma$  konstante. Slično, na IBT se može gledati kao na diskretizaciju sljedećeg modela u kojem generalizirani parametar volatilitnosti može biti funkcija vremena i cijene dionice,

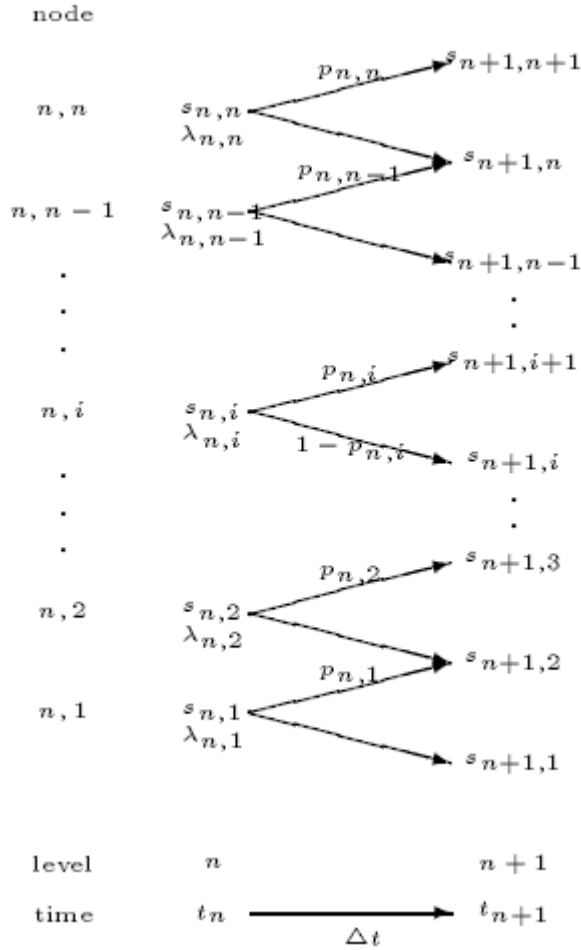
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(S_t, t) dZ_t, \quad (2.3)$$

gdje je  $\sigma(S_t, t)$  trenutna lokalna funkcija volatilitnosti. Cilj IBT-a je konstrukcija diskretne aproksimacije modela na temelju uočenih cijena opcija dovodeći do promjenjive volatilitnosti  $\sigma(S_t, t)$ . Nadalje, IBT može reflektirati nekonstantni drift  $\mu_t$ .

## Derman i Kani algoritam

Podrazumijevano binomno stablo (eng. Implied Binomial Tree, IBT) diskretan je model za računanja cijena opcija, slično kao što je CRR binomno stablo u Black-Scholesovom modelu. Pomoću njega možemo grafički prikazati moguće vrijednosti određene opcije u različitim čvorovima, tj. vremenskim trenucima. Vrijednost opcije u svakom čvoru ovisi o vrijednosti vezane imovine u tom čvoru te o vjerojatnosti da će cijena vezane imovine u danom čvoru padati, odnosno rasti, što se naziva vjerojatnost prijelaza ([18]). U modelu podrazumijevanog binomnog stabla, cijene dionica, prijelazne vjerojatnosti i Arrow-Debreu cijene, se računaju iterativno u svakom čvoru, nivo po nivo. Gdje Arrow-Debreu cijenu,  $\lambda_{n,i}$ , u svakom čvoru  $(n, i)$  definiramo kao vjerojatnost dolaska u čvor  $(n, i)$  iz čvora  $(1, 1)$  diskontirana faktorom  $e^{-r\Delta t}$  ([18]).

Indukcijom ćemo konstruirati IBT na vremenskom intervalu  $[0, T]$  sa promjenom  $\Delta t$ . Pretpostavimo da smo već konstruirali prvih  $n$  nivoa stabla. Za  $t=0$ ,  $S_0 = S$ , trenutna cijena vezane imovine, i na  $n$ -tom nivou stabla je  $n$  čvorova. Neka je  $s_{n,i}$  cijena dionice u  $i$ -tom čvoru na  $n$ -tom nivou, pa je  $s_{1,1} = S$ , te  $F_{n,i} = e^{r\Delta t} s_{n,i}$  forward cijena na nivou  $n+1$  od  $s_{n,i}$ , gdje je forward cijena dionice očekivana vrijednost dionice u budućem trenutku.  $p_{n,i}$  je vjerojatnost prijelaza s čvora  $(n, i)$  na čvor  $(n+1, i+1)$ .



Ima  $(2n + 1)$  parametara koji definiraju prijelaz od  $n$ -tog do  $(n + 1)$ -ovog nivoa stabla;  $(n + 1)$  cijena dionice u čvorovima na  $(n + 1)$ -ovom nivou i  $n$  prijelaznih vjerojatnosti. Pokažimo kako ih odrediti koristeći "smile". Koristimo stablo kako bismo izračunali teoretske vrijednosti od  $2n$  poznatih veličina, vrijednosti  $n$  forwarda i  $n$  opcija, s vremenom dospijeca  $n\Delta t$ , pritom zahtijevajući da te teoretske vrijednosti odgovaraju interpoliranim tržišnim vrijednostima. Time dobivamo  $2n$  jednažbi za tih  $2n + 1$  parametara. Jedan preostali stupanj slobode koristimo da se centar našeg stabla podudara s centrom standardnog CRR stabla s konstantom volatilnošću.

Zbog pretpostavke neutralnosti na rizik očekivana cijena dionice u idućem trenutku mora biti jednaka njenoj poznatoj forward cijeni  $F_{n,i}$ , tj. :

$$F_{n,i} = p_{n,i} s_{n+1,i+1} + (1 - p_{n,i}) s_{n+1,i} \tag{2.4}$$

Iz gornjeg uvjeta prijelazna vjerojatnost zadovoljava jednadžbu:

$$p_{n,i} = \frac{F_{n,i} - s_{n+1,i}}{s_{n+1,i+1} - s_{n+1,i}} \quad (2.5)$$

Arrow-Debreu cijena,  $\lambda_{n,i}$ , je cijena opcije koja isplaćuje jednu jedinicu isplate samo u jednom stanju  $i$  na  $n$ -tom nivou, a inače 0. Može se izračunati indukcijom kao suma, po svim putevima od korijena stabla do čvora  $(n, i)$ , produkta diskontiranih vjerojatnosti prijelaza za svaki čvor duž svih puteva. Definiramo je iterativnom formulom za  $\lambda_{1,1} = 1$  ([18]):

$$\begin{cases} \lambda_{n+1,1} = e^{-r\Delta t}\{(1 - p_{n,1})\lambda_{n,1}\} \\ \lambda_{n+1,i+1} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,i}p_{n,i} + \lambda_{n,i+1}(1 - p_{n,i+1})\}, 1 \leq i \leq n, \\ \lambda_{n+1,n+1} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,n}p_{n,n}\} \end{cases} \quad (2.6)$$

**Primjer 2.1.1.** Računanje Arrow-Debreu cijena u CRR binomnom stablu

Neka je trenutna cijena  $S=100$ , vrijeme dospijeća  $T=2$  godine,  $\Delta t = 1$ , konstantna volatilnost  $\sigma = 10\%$ , bezrizična kamatna stopa  $r=0.03$ .

Stablo Arrow-Debreu cijena se može izračunati iz stabla s cijenama dionice:

*cijena dionice*

|        |        |
|--------|--------|
|        | 122.15 |
| 110.52 |        |
| 100.00 | 100.00 |
| 90.48  |        |
|        | 81.88  |

*Arrow-Debreu cijena*

|      |      |
|------|------|
|      | 0.37 |
| 0.61 |      |
| 1.00 | 0.44 |
| 0.36 |      |
|      | 0.13 |

Na primjer, koristeći CRR metodu iz uvoda, (5), uz  $S(0) = s_{1,1}$

$$s_{2,1} = s_{1,1}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 100e^{-0.1} = 90.48$$

$$s_{2,2} = s_{1,1}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 110.52.$$

Također, znamo da vrijedi

$$F_{n,i} = e^{r\Delta t} s_{n,i} \implies F_{1,1} = e^{0.03} s_{1,1} = 103.04$$

Sada iz formule (2.5) znamo izračunati vjerojatnost prijelaza,  $p_{1,1}=0.63$ . Prema formuli (2.6) za Arrow-Debreuove cijene slijedi:

$$\begin{aligned} \lambda_{2,1} &= e^{-r\Delta t}(1 - p_{1,1})\lambda_{1,1} = 0.36 \\ \lambda_{2,2} &= e^{-r\Delta t}(p_{1,1})\lambda_{1,1} = 0.61. \end{aligned}$$

Na trećem nivou, računamo cijene dionica koristeći odgovarajuće čvorove drugog nivoa, na primjer:

$$\begin{aligned} s_{3,1} &= s_{2,1}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = s_{1,1}e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}} = 81.88 \\ s_{3,2} &= s_{1,1}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = s_{1,1}e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = s_{1,1} = 100 \\ s_{3,3} &= s_{2,2}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = s_{1,1}e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = 122.15. \end{aligned}$$

Kao i gore, prvo izračunamo  $F_{2,1}$  i  $F_{2,2}$  te potom vjerojatnosti prijelaza:

$$\begin{aligned} F_{2,1} &= 93.24 \\ F_{2,2} &= 113.89 \\ p_{2,1} &= 0.63 \\ p_{2,2} &= 0.63 \end{aligned}$$

Te opet iz formule (2.6) dobivamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{3,1} &= 0.13 \\ \lambda_{3,2} &= 0.44 \\ \lambda_{3,3} &= 0.37. \end{aligned}$$

Odredimo sada  $n$  jednadžbi za teoretske vrijednosti opcija s cijenom izvršenja  $s_{n,i}$  jednakoj cijeni dionice u svakom čvoru na  $n$ -tom nivou s dospijećem na  $(n + 1)$ -ovom nivou. Cijena izvršenja  $s_{n,i}$  dijeli čvorove na  $(n + 1)$ -ovom nivou na onaj s većom,  $s_{n+1,i+1}$ , i onaj s manjom vrijednosti,  $s_{n+1,i}$ , od cijene izvršenja. Ta činjenica osigurava da svi gornji (oni s većom vrijednosti) čvorovi pridonose vrijednosti call opcije, dok svi donji pridonose vrijednosti put opcije. Tih  $n$  jednadžbi, izvedenih niže, zajedno s (2.4) i odabirom centralnog čvora određuju traženih  $(2n + 1)$  parametara.

Cijena call i put opcije u Black-Scholesovom modelu je dana s [13]:

$$C(K, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^{+\infty} \max(S_T - K, 0) p(S_t, S_T, r, \tau) dS_T, \quad (2.7)$$

$$P(K, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^{+\infty} \max(K - S_T, 0) p(S_t, S_T, r, \tau) dS_T, \quad (2.8)$$

gdje su  $C(K, \tau)$  i  $P(K, \tau)$  cijene call i put opcija respektivno,  $K$  je cijena izvršenja, a  $p(S_t, S_T, r, \tau)$  funkcija gustoće neutralna na rizik za  $S_T \in (0, \infty)$ .

Prisjetimo se najprije vjerojatnosti neutralne na rizik definirane u uvodnom poglavlju u jednadžbi (7). Formulirajmo je koristeći trenutne oznake:

$$p_{n+1,i}^* := e^{r\Delta t} \lambda_{n+1,i} \quad (2.9)$$

U IBT-u, cijenu opcija u trenutku  $t_n$  sa cijenom izvršenja  $K$  i vremenom dospijeća  $t_{n+1}$  računamo uobičajeno, tj. kao diskontiranu očekivanu vrijednost budućih isplata, (9):

$$\begin{aligned} C(K, t_{n+1}) &= e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{n+1} p_{n+1,j}^* \max(s_{n+1,j} - K, 0) \\ P(K, t_{n+1}) &= e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{n+1} p_{n+1,j}^* \max(K - s_{n+1,j}, 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Iskoristimo definiciju vjerojatnosti iz (2.9):

$$\begin{aligned} C(K, t_{n+1}) &= e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{n+1} e^{r\Delta t} \lambda_{n+1,j} \max(s_{n+1,j} - K, 0) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{n+1,j} \max(s_{n+1,j} - K, 0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nadalje, iskoristimo formulu Arrow-Debreuovih cijena (2.6), analogno vrijedi i za put opciju:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^n \left\{ \lambda_{n,j} p_{n,j} + \lambda_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right\} \max(s_{n+1,j+1} - K, 0) \quad (2.12)$$

$$P(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^n \left\{ \lambda_{n,j} p_{n,j} + \lambda_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right\} \max(K - s_{n+1,j+1}, 0), \quad (2.13)$$

Kada je cijena izvršenja jednaka  $s_{n,i}$  izraz (2.12) možemo koristeći (2.4) raspisati na sljedeći način.

Prisjetimo se da samo gornji čvorovi pridonose vrijednosti call opcije, tj. za cijenu izvršenja  $s_{n,i}$  suma u (2.12) može krenuti od  $i$ :

$$\begin{aligned}
 C(s_{n,i}, t_{n+1}) &= e^{-r\Delta t} \sum_{j=i}^n \left\{ \lambda_{n,j} p_{n,j} + \lambda_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right\} (s_{n+1,j+1} - s_{n,i}) \\
 &= e^{-r\Delta t} \left\{ \lambda_{n,i} p_{n,i} (s_{n+1,i+1} - s_{n,i}) + \lambda_{n,i+1} (1 - p_{n,i+1}) (s_{n+1,i+1} - s_{n,i}) + \lambda_{n,i+1} p_{n,i+1} (s_{n+1,i+2} - s_{n,i}) \right. \\
 &\quad + \lambda_{n,i+2} (1 - p_{n,i+2}) (s_{n+1,i+2} - s_{n,i}) + \cdots + \lambda_{n,n-1} p_{n,n-1} (s_{n+1,n} - s_{n,i}) \\
 &\quad \left. + \lambda_{n,n} (1 - p_{n,n}) (s_{n+1,n} - s_{n,i}) + \lambda_{n,n} p_{n,n} (s_{n+1,n+1} - s_{n,i}) \right\} \\
 &= e^{-r\Delta t} \left\{ \lambda_{n,i} p_{n,i} s_{n+1,i+1} + \lambda_{n,i+1} (1 - p_{n,i+1}) s_{n+1,i+1} + \lambda_{n,i+1} p_{n,i+1} s_{n+1,i+2} + \lambda_{n,i+2} (1 - p_{n,i+2}) s_{n+1,i+2} \right. \\
 &\quad + \cdots + \lambda_{n,n-1} p_{n,n-1} s_{n+1,n} + \lambda_{n,n} (1 - p_{n,n}) s_{n+1,n} + \lambda_{n,n} p_{n,n} s_{n+1,n+1} \\
 &\quad \left. - s_{n,i} \left[ \lambda_{n,i} p_{n,i} + \lambda_{n,i+1} (1 - p_{n,i+1}) + \lambda_{n,i+1} p_{n,i+1} + \lambda_{n,i+2} (1 - p_{n,i+2}) + \cdots + \lambda_{n,n-1} p_{n,n-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_{n,n} (1 - p_{n,n}) + \lambda_{n,n} p_{n,n} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Iskoristimo sada (2.4):

$$\begin{aligned}
 e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) &= \lambda_{n,i} p_{n,i} s_{n+1,i+1} + \lambda_{n,i+1} F_{n,i+1} + \lambda_{n,i+2} F_{n,i+2} + \cdots + \lambda_{n,n} F_{n,n} \\
 &\quad - s_{n,i} \left[ \lambda_{n,i} p_{n,i} + \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} \right]
 \end{aligned}$$

Iz čega slijedi:

$$e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) = \lambda_{n,i} p_{n,i} (s_{n+1,i+1} - s_{n,i}) + \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - s_{n,i}) \tag{2.15}$$

Kako su nam i  $F_{n,i}$  i  $C(s_{n,i}, t_{n+1})$  poznati uvrštavanjem (2.5) u izraz (2.15) dobivamo:

$$\begin{aligned}
 e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) &= \lambda_{n,i} \frac{F_{n,i} - s_{n+1,i}}{s_{n+1,i+1} - s_{n+1,i}} (s_{n+1,i+1} - s_{n,i}) + \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - s_{n,i}) \\
 \left\{ e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - s_{n,i}) \right\} (s_{n+1,i+1} - s_{n+1,i}) &= \lambda_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i}) (s_{n+1,i+1} - s_{n,i}) \\
 s_{n+1,i+1} \left\{ e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - s_{n,i}) - \lambda_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i}) \right\} &= \\
 s_{n+1,i} \left\{ e^{r\Delta t} C(s_{n,i}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - s_{n,i}) \right\} - \lambda_{n,i} s_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i}) &
 \end{aligned} \tag{2.16}$$



Konačno,

$$s_{n+1,i+1} = \frac{s_{n+1,i}\{e^{r\Delta t}C(s_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u\} - \lambda_{n,i}s_{n,i}(F_{n,i} - s_{n+1,i})}{\{e^{r\Delta t}C(s_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u\} - \lambda_{n,i}(F_{n,i} - s_{n+1,i})}, \quad (2.17)$$

gdje je  $\rho$  definiramo sljedećom sumom

$$\rho_u = \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j}(F_{n,j} - s_{n,i}), \quad (2.18)$$

Koristeći gornju jednadžbu možemo izračunati vrijednosti u svim čvorovima iznad centralnog čvora. Preostaje odrediti centralni čvor.

Ako je  $n$  paran, definiramo  $s_{n+1,i} = s_{1,1} = S$ , za  $i = n/2 + 1$ , a za  $n$  neparan, kretnimo od dvaju centralnih čvorova  $s_{n+1,i}$  i  $s_{n+1,i+1}$  za  $i = (n + 1)/2$ , i pretpostavimo  $s_{n+1,i} = s_{n,i}^2/s_{n+1,i+1} = S^2/s_{n+1,i+1}$ , što omogućava da logaritamska udaljenost između  $s_{n,i}$  i  $s_{n+1,i+1}$  bude ista kao i udaljenost  $s_{n,i}$  i  $s_{n+1,i}$ . Uvrštavajući tu jednakost u formulu (2.17) dolazimo do formule za  $s_{n+1,i+1}$ .

Pogledajmo prvi red u (2.16), točnije član:

$$\frac{F_{n,i} - s_{n+1,i}}{s_{n+1,i+1} - s_{n+1,i}}(s_{n+1,i+1} - s_{n,i})$$

Sada umjesto  $s_{n+1,i}$  uvrstimo  $S^2/s_{n+1,i+1}$  i  $s_{n,i} = S$ :

$$\begin{aligned} \frac{F_{n,i} - \frac{S^2}{s_{n+1,i+1}}}{s_{n+1,i+1} - \frac{S^2}{s_{n+1,i+1}}}(s_{n+1,i+1} - S) &= \frac{F_{n,i}s_{n+1,i+1} - S^2}{s_{n+1,i+1}^2 - S^2}(s_{n+1,i+1} - S) \\ &= \frac{F_{n,i}s_{n+1,i+1} - S^2}{s_{n+1,i+1} + S} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Zamijenimo sada dobiveni izraz s početnim u (2.16) i izrazimo  $s_{n+1,i+1}$ :

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) &= \lambda_{n,i} \frac{F_{n,i}s_{n+1,i+1} - S^2}{s_{n+1,i+1} + S} + \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j}(F_{n,j} - S) \\ \left[ e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j}(F_{n,j} - S) \right] (s_{n+1,i+1} + S) &= \lambda_{n,i}(F_{n,i}s_{n+1,i+1} - S^2) \\ s_{n+1,i+1} \left[ e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j}(F_{n,j} - S) - \lambda_{n,i}F_{n,i} \right] \\ &= -S \left[ S\lambda_{n,i} + e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j}(F_{n,j} - S) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$s_{n+1,i+1} = \frac{S\{e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) + \lambda_{n,i}S - \rho_u\}}{\lambda_{n,i}F_{n,i} - e^{r\Delta t}C(S, t_{n+1}) + \rho_u}, \text{ za } i = (n+1)/2 \quad (2.21)$$

Jednom kada imamo cijene dionica u početnim čvorovima možemo nastaviti računati one na višim čvorovima  $(n+1, j)$ ,  $j = i+2, \dots, n+1$  i vjerojatnosti prijelaza jedno po jedno koristeći formulu (2.17) i (2.5).

Kako bismo odredili cijene u nižim čvorovima radimo analogno kao za više čvorove osim što sada koristimo put opciju te činjenicu da samo donji čvorovi pridonose vrijednosti put opcije.

$$P(s_{n,i}, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \lambda_{n,j} p_{n,j} + \lambda_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \right\} (s_{n,i} - s_{n+1,j+1}) \quad (2.22)$$

Raspišemo kao u (2.14) Formula kojom određujemo cijene u nižim čvorovima  $(n+1, j)$ ,  $j = i-1, \dots, 1$ :

$$s_{n+1,i} = \frac{s_{n,i+1} \{e^{r\Delta t} P(s_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_l\} - \lambda_{n,i} s_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i+1})}{\{e^{r\Delta t} P(s_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_l\} + \lambda_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i+1})}, \quad (2.23)$$

gdje je  $\rho_l$  označava sumu

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n,j} (s_{n,i} - F_{n,j}),$$

a  $P(K, t_{n+1})$  poznatu cijenu put opcije.

U konstrukciji Derman i Kani algoritma interpolirana cijena opcije koju koristimo u (2.17) je bazirana na CRR binomnom stablu s konstantnim parametrima  $\sigma = \sigma_{imp}(K, \tau)$ , gdje BS podrazumijevana volatilitnost  $\sigma_{imp}$  može biti izračunata iz poznatih tržišnih cijena opcije. Računanje interpolirajućih cijena opcije CRR metodom ima mana, računski je zahtjevno.

## Kompensacija

Kako bismo izbjegli mogućnost arbitraže postavljamo sljedeći uvjet na buduću cijenu dionice:

$$F_{n,i} < s_{n+1,i+1} < F_{n,i+1}. \quad (2.24)$$

Ako cijena dionica u nekom čvoru ne zadovoljava gornju nejednakost redefiniramo je koristeći pretpostavku da je razlika logaritama cijena dionica tog čvora i njemu susjednog

jednaka razlici odgovarajućih čvorova na prethodnom nivou, čime smo uklonili mogućnost arbitraže:

$$\log(s_{n+1,i+1}/s_{n+1,i}) = \log(s_{n,i}/s_{n,i-1}).$$

Katkad, dobivena cijena i dalje ne zadovoljava nejednakost (2.24), tada procijenimo  $s_{n+1,i+1}$  s prosjekom od  $F_{n,i}$  i  $F_{n,i+1}$ .

Nakon konstrukcije IBT-a znamo sve cijene dionica, prijelazne vjerojatnosti i Arrow-Debreuove cijene u svakom čvoru stabla. Stoga možemo izračunati podrazumijevanu lokalnu volatilitnost  $\sigma_{loc}(s_{n,i}, m\Delta t)$ , koja opisuje strukturu drugog momenta temeljnog procesa, na bilo kojem nivou  $m$  kao diskretnu aproksimaciju sljedeće uvjetne varijance za  $s = s_{n,i}$ ,  $\tau = m\Delta t$ . Pod pretpostavkom neutralnosti na rizik (pogledati [17])

$$\begin{aligned} \sigma_{loc}^2(s, \tau) &= \text{Var}(\log S_{t+\tau} | S_t = s) \\ &= \int (\log S_{t+\tau} - E \log S_{t+\tau})^2 p(S_{t+\tau} | S_t = s) dS_{t+\tau} \\ &= \int (\log S_{t+\tau} - E \log S_{t+\tau})^2 p(S_t, S_{t+\tau}, r, \tau) dS_{t+\tau}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Izračunajmo volatilitnost cijene dionice u čvoru stabla  $s_{n,i}$ . Kako se volatilitnost definira kao korijen uvjetne varijance logaritma cijene, tj. za  $S_t = s_{n,i}$  iz definicije varijance slijedi:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\log S_{t+1} | S_t = s_{n,i}) &= \mathbb{E}[(\log S_{t+1})^2 | S_t = s_{n,i}] - (\mathbb{E}[\log S_{t+1} | S_t = s_{n,i}])^2 \\ &= p_{n,i} \log^2(s_{n+1,i+1}) + (1 - p_{n,i}) \log^2(s_{n+1,i}) - [p_{n,i} \log(s_{n+1,i+1}) + (1 - p_{n,i}) \log(s_{n+1,i})]^2 \\ &= p_{n,i} \log^2(s_{n+1,i+1}) + (1 - p_{n,i}) \log^2(s_{n+1,i}) - p_{n,i}^2 \log^2(s_{n+1,i+1}) - \\ &\quad 2p_{n,i} \log(s_{n+1,i+1})(1 - p_{n,i}) \log(s_{n+1,i}) - (1 - p_{n,i})^2 \log^2(s_{n+1,i}) \\ &= (1 - p_{n,i})p_{n,i} \log^2(s_{n+1,i+1}) + (1 - 1 + p_{n,i})(1 - p_{n,i}) \log^2(s_{n+1,i}) \\ &\quad - 2p_{n,i} \log(s_{n+1,i+1})(1 - p_{n,i}) \log(s_{n+1,i}) \\ &= (1 - p_{n,i})p_{n,i} [\log^2(s_{n+1,i+1}) + \log^2(s_{n+1,i}) - 2 \log(s_{n+1,i+1}) \log(s_{n+1,i})] \\ &= (1 - p_{n,i})p_{n,i} [\log(s_{n+1,i+1}) - \log(s_{n+1,i})]^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pa je izraz za lokalnu volatilitnost u čvoru  $s_{n,i}$  dan s:

$$\sigma_{loc}(s_{n,i}) = \sqrt{p_{n,i}(1 - p_{n,i})} \left| \log \left( \frac{s_{n+1,i+1}}{s_{n+1,i}} \right) \right|. \quad (2.27)$$

Analogno, možemo izračunati podrazumijevanu volatilitnost u različitim trenutcima. Općenito, ako smo izračunali prijelazne vjerojatnosti  $p_j, j = 1, \dots, m$  od čvora  $(n, i)$  do čvora  $(n + m, i + j), j = i, \dots, m$ , onda s (pogledati [17])

$$\begin{aligned} \text{mean} &= E(\log(S_{(n+m-1)\Delta t}) | S_{(n-1)\Delta t} = s_{n,i}) = \sum_{j=1}^m p_j \log(s_{n+m,i+j}), \\ \sigma_{loc}(s_{n,i}, m\Delta t) &= \sqrt{\sum_{j=1}^m p_j (\log(s_{n+m,i+j}) - \text{mean})^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uočimo da se BS podrazumijevana volatilitnost  $\sigma_{imp}(K, \tau)$  (koja se barem lokalno zasniva na Black-Scholesovom modelu) i podrazumijevana lokalna volatilitnost  $\sigma_{loc}(s, \tau)$  razlikuju, imaju različite parametre i opisuju različite karakteristike drugog momenta.

## Barle i Cakici algoritam

Barle i Cakici [2], su predložili poboljšanu verziju Derman i Kanijeve konstrukcije. Najveća razlika je u izboru cijene dionica centralnih čvorova u stablu: njihov algoritam uzima u obzir i nerizičnu kamatnu stopu. Analogno kao u Derman i Kanijevom algoritmu samo sada uz cijenu izvršenja  $F_{n,i}$  vrijedi:

$$e^{r\Delta t} C(F_{n,i}, t_{n+1}) = \sum_{j=i}^n \{ \lambda_{n,j} p_{n,j} + \lambda_{n,j+1} (1 - p_{n,j+1}) \} (s_{n+1,j+1} - F_{n,i}) \quad (2.29)$$

Raspisom (2.29) analogno kao i (2.14) dobivamo cijena u čvorovima  $(n + 1, j), j = i + 2, \dots, n + 1$ :

$$s_{n+1,i+1} = \frac{s_{n+1,i} \{ e^{r\Delta t} C(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u \} - \lambda_{n,i} F_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i})}{\{ e^{r\Delta t} C(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u \} - \lambda_{n,i} (F_{n,i} - s_{n+1,i})}, \quad (2.30)$$

gdje je  $C(K, \tau)$  definiran kao u Derman i Kani algoritmu, a  $\rho_u$  je

$$\rho_u = \sum_{j=i+1}^n \lambda_{n,j} (F_{n,j} - F_{n,i}). \quad (2.31)$$

Opet kao i u Derman i Kanijevom algoritmu krećemo od centralnih čvorova na svakom nivou. Ako je  $(n + 1)$  neparan, onda  $s_{n+1,i} = s_{1,1} e^{rn\Delta t} = S e^{m\Delta t}$  za  $i = n/2 + 1$ , ako je  $(n + 1)$  paran, onda krenemo od dvaju centralnih čvorova  $s_{n+1,i}$  i  $s_{n+1,i+1}$  za  $i = (n + 1)/2$  i mora vrijediti  $s_{n+1,i} = F_{n,i}^2 / s_{n+1,i+1}$ .

$$s_{n+1,i} = F_{n,i} \frac{\lambda_{n,i} F_{n,i} - \{ e^{r\Delta t} C(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u \}}{\lambda_{n,i} F_{n,i} + \{ e^{r\Delta t} C(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_u \}} \quad \text{za } i = (n + 1)/2, \quad (2.32)$$

Analogno kao kod Dermana i Kanija, izračunajmo parametre za niže čvorove  $(n + 1, j)$ ,  $j = i - 1, \dots, 1$  iterativno formulom:

$$s_{n+1,i} = \frac{\lambda_{n,i} F_{n,i} (s_{n+1,i+1} - F_{n,i}) - s_{n+1,i+1} \{e^{r\Delta t} P(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_l\}}{\lambda_{n,i} (s_{n+1,i+1} - F_{n,i}) - \{e^{r\Delta t} P(F_{n,i}, t_{n+1}) - \rho_l\}}, \quad (2.33)$$

gdje je  $\rho_l$  definiran sumom  $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n,j} (F_{n,i} - F_{n,j})$ . Uočimo da u (2.21) i (2.23),  $C(K, \tau)$  i  $P(K, \tau)$  označavaju Black-Scholes cijenu call i put opcije.

Nejednakost (2.24) i redefinicija iste se koriste i u Barle i Cakici algoritmu kako bi se izbjegla arbitraža: algoritam koristi prosjek  $F_{n,i}$  i  $F_{n,i+1}$  za procjenu od  $s_{n+1,i+1}$ .

## Poglavlje 3

# Procjena SPD-a neparametarskom regresijom

### 3.1 Uvod

Jedan od najvažnijih napredaka u teoriji ekonomije investiranja pod utjecajem neizvjesnosti je Arrow-Debreuov model koji uvodi pojam elementarnih izvedenica, isplaćuje se jedan dolar ako se dogodi određeno stanje i nula u ostalim slučajevima. Danas poznate kao Arrow-Debreuove izvedenice, temelj su za daljnje razumijevanje ekonomske ravnoteže u nepredvidivom okruženju. U slučaju neprekidnih stanja, cijene Arrow-Debreuovih izvedenica definirane su SPD-om (engl. *state-price density*).

**Definicija 3.1.1.**  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor sa skupom svih stanja svijeta  $\Omega$ , pripadnom filtracijom  $\mathbb{F} = \{F_t : 0 \leq t \leq T^*\}$ . Pretpostavlja se da za  $0 \leq t \leq T \leq T^*$  postoji pozitivan SPD proces  $\{\zeta(t, T)\}$  tako da je sadašnja vrijednost zahtjeva  $V(t)$  u trenutku  $t$  jednaka:

$$V(t) = \mathbb{E}_t[\zeta(t, T)V(T)]$$

Gdje je  $\mathbb{E}_t$  uvjetno očekivanje uz dane informacije  $F_t$  poznate do trenutka  $t$ , obzirom na vjerojatnost  $\mathbb{P}$ .

Postojanje i karakterizacija SPD-a može se izvući iz ravnotežnih modela baziranih na preferencama, poput onog Lucasa [19] ili Rubinsteina [25], ili arbitražnih ravnotežnih modela Black i Scholesa ([3]) i Mertona ([21]).

U ravnotežnim okolnostima SPD se može izraziti u terminima stohastičnog diskontnog faktora. Tada vrijedi da su cijene vezane imovine nakon množenja stohastičnim diskontnim faktorom martingali obzirom na stvarnu distribuciju. SPD se često naziva i distribucija neutralna na rizik, bazirano na analizama Cox i Rossa koji su prvi uočili da se Black-Scholesova formula može dobiti pod pretpostavkom neutralnosti na rizik, implicirajući da

sve financijske imovine, a onda i opcije, donose očekivani prinos jednak nerizičnoj kamatnoj stopi.

Postoje brojne metode za određivanje SPD-a empirijski. Možemo ih podijeliti u dvije skupine:

- metode koje koriste cijene opcija kao uvjet za identifikaciju
- metode koje koriste drugu derivaciju funkcije određivanja cijena call opcija u ovisnosti o cijeni izvršenja

U prvu skupinu spadaju metode koje uključuju procjenu parametara log-normalnih gustoća kako bi odgovarali uočenim cijenama opcija, [20]. Drugi popularan pristup u ovoj skupini je primjena podrazumijevanih binomnih stabala (*Pogledati* [27], [8] i *Poglavlje 2*). Također je zanimljiva tehnika bazirana na mrežama učenja Hutchinsona, Loa i Poggia [16], neparametarski pristup korištenja umjetnih neuronskih mreža. Druga skupina metoda je bazirana na rezultatu Breedena i Litzenbergera [4]. Ta metoda je bazirana na Europskim opcijama s istim vremenom dospijeća, stoga je primjenjiva na manji broj slučajeva u odnosu na metode iz prve skupine. Također, pretpostavlja neprekidnost cijena izvršenja na  $\mathbb{R}^+$  što se ne može naći niti na jednoj burzi dionica. Doista, cijene izvršenja su diskretno raspoređene na konačnom intervalu oko stvarne cijene vezane imovine. Stoga, kako bismo riješili taj problem možemo provesti interpolaciju funkcije određivanja cijena call opcije unutar tog intervala i ekstrapolaciju izvan istog. Kako bismo proveli interpolaciju objasniti ćemo poluparametarsku tehniku koristeći neparametarsku regresiju plohe podrazumijevane volatilnosti.

Koncept Arrow-Debreu vrijednosnih papira je obrazac za analizu tržišne ravnoteže pod neizvjesnostima. Rubinstein [25] i Lucas [19] su iskoristili taj koncept kao bazu za konstrukciju dinamičkih općih ravnotežnih modela s ciljem određivanja cijena imovine u nekoj ekonomiji. Temeljna ideja ove metodologije, kao što je već rečeno, jest da je cijena financijske vrijednosnice jednaka očekivanoj sadašnjoj vrijednosti budućih isplata s vjerojatnosnom funkcijom gustoće neutralnom na rizik. Sadašnja vrijednost se računa koristeći kamatnu stopu neutralnu na rizik, a očekivanje je uzeto obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru. Cijena  $P_t$  vrijednosnog papira u trenutku  $t$  s vremenom dospijeća  $T$  i isplatom  $Z(S_T)$  dana je s:

$$P_t = e^{-r_{t,\tau} \tau} E_t^*[Z(S_T)] = e^{-r_{t,\tau} \tau} \int_{-\infty}^{\infty} Z(S_T) f_t^*(S_T) dS_T \quad (3.1)$$

gdje je  $E_t^*$  uvjetno očekivanje ekvivalentne martingalne mjere u odnosu na vrijeme  $t$ ,  $r_{t,\tau}$  je nerizična kamatna stopa u trenutku  $t$  i vremenom do dospijeća  $\tau$ , a  $f_t^*(S_T)$  je SPD u trenutku  $t$  s isplatom u  $T$ . Ovaj pristup demonstrira ogroman informacijski sadržaj koji

SPD nosi i veliku redukciju informacija koju dopušta. Na primjer, ako postoje restrikcije na kretanje cijena vezane imovine pomoću informacija koje nosi procijenjeni SPD mogu se odrediti preference reprezentativnog agenta u ravnotežnom modelu. Također, ako su poznate određene sklonosti, kao logaritamska korisnost, pomoću SPD možemo odrediti generirajući proces kretanja cijena imovine. Doista, Rubinstein [26] je pokazao da je dovoljno znati bilo koje dvije od dolje navedenih informacija da bi se znala i treća :

1. sklonosti reprezentativnog agenta
2. dinamika kretanja cijena vezane imovine
3. SPD.

Sa gledišta određivanja cijena SPD je "dovoljna statistika" u ekonomskom smislu, sadrži sve potrebne informacije o sklonostima i poslovnim uvjetima potrebnim za određivanje cijena financijskih izvedenica.

## 3.2 Određivanje SPD-a koristeći call opcije

Breeden i Litzenberger [4] su pokazali da se Arrow-Debreuove cijene mogu replicirati koristeći koncept "butterfly spread"-a na Europskim call opcijama. Kao što ćemo vidjeti u našem slučaju taj koncept povlači prodaju dviju call opcija s cijenom izvršenja  $K$ , kupovinu jedne call opcije s  $K^- = K - \Delta K$ , te druge s  $K^+ = K + \Delta K$ , gdje je  $\Delta K$  razlika dviju susjednih cijena izvršenja. Te četiri opcije tvore "butterfly spread" centriran u  $K$ . Pogledajmo vrijednosti call opcija za različite vrijednosti vezane imovine,  $S_T$ , naših opcija (pritom koristimo formulu  $C(K, T) = \max(S_T - K, 0)$ ):

|                       | $C(K - \Delta K, T)$ | $C(K, T)$   | $C(K + \Delta K, T)$ |
|-----------------------|----------------------|-------------|----------------------|
| $S_T = K - \Delta K$  | 0                    | 0           | 0                    |
| $S_T = K$             | $\Delta K$           | 0           | 0                    |
| $S_T = K + \Delta K$  | $2\Delta K$          | $\Delta K$  | 0                    |
| $\vdots$              | $\vdots$             | $\vdots$    | $\vdots$             |
| $S_T = K + N\Delta K$ | $(N + 1)\Delta K$    | $N\Delta K$ | $(N - 1)\Delta K$    |

(3.2)

Kako želimo replicirati Arrow-Debreuove cijene, tj. želimo da isplata našeg portfelja kojeg čine call opcije bude 1 u trenutku  $T$  za  $S_T = K$  iz tablice (3.2) vidimo da to možemo postići kupnjom jedne call opcije s cijenom izvršenja  $K^+$  i jedne s  $K^-$ , te prodajom dviju call opcija s cijenom izvršenja  $K$ :

$$C(K + \Delta K, T) + C(K - \Delta K, T) - 2C(K, T) \tag{3.3}$$



Pogledajmo vrijednosti jednadžbe (3.3) za tablicu (3.2):

|                       |  |            |
|-----------------------|--|------------|
|                       | $C(K + \Delta K, T) + C(K - \Delta K, T) - 2C(K, T)$ |            |
| $S_T = K - \Delta K$  |  | 0          |
| $S_T = K$             |  | $\Delta K$ |
| $S_T = K + \Delta K$  |  | 0          |
| $S_T = K + 2\Delta K$ |  | 0          |
| $\vdots$              |  | $\vdots$   |
| $S_T = K + N\Delta K$ |  | 0          |

(3.4)

Kao što možemo vidjeti samo za vrijednost  $S_T = K$  je isplata našeg portfelja različita od nula. No, mi želimo da ta isplata bude 1 te uzimamo portfelj koji ima  $\frac{1}{\Delta K}$  jedinica. Sada je isplata našeg portfelja jednaka:

$$Z(S_T, K; \Delta K) = P(S_{T-\tau}, \tau, K; \Delta K)|_{\tau=0} = \frac{u_1 - u_2}{\Delta K} \Big|_{S_T=K, \tau=0} = 1 \quad (3.5)$$

za

$$\begin{aligned} u_1 &= C(S_{T-\tau}, \tau, K + \Delta K) - C(S_{T-\tau}, \tau, K), \\ u_2 &= C(S_{T-\tau}, \tau, K) - C(S_{T-\tau}, \tau, K - \Delta K). \end{aligned}$$

$C(S, \tau, K)$  označava cijenu Europske call opcije s trenutnom cijenom vezane imovine  $S$ , vremenom do dospijeca  $\tau$  i cijenom izvršenja  $K$ . Također,  $P(S_{T-\tau}, \tau, K; \Delta K)$  je cijena vrijednosnog papira ( $\frac{1}{\Delta K}$  \* "butterfly spread"( $K; \Delta K$ )) u trenutku  $T - \tau$ .

Kako  $\Delta K$  teži u nulu, ovaj vrijednosni papir postaje Arrow-Debreu vrijednosni papir s isplatom 1 ako  $S_T = K$ , a nula inače. Zbog pretpostavke da je  $S_T$  neprekidno distribuirana na  $\mathbb{R}^+$  vjerojatnost poprimanja bilo koje vrijednosti je nula, te je stoga, u ovom slučaju, cijena Arrow-Debreuovog vrijednosnog papira nula. No, dijeleći još jednom s  $\Delta K$  određujemo cijenu od ( $\frac{1}{(\Delta K)^2}$  \* "butterfly spread"( $K; \Delta K$ )). Kako  $\Delta K$  teži u nulu ta cijena teži u  $f^*(S_T)e^{-r_{t,\tau}\tau}$  za  $S_T = K$ . Doista [4],

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left( \frac{P(S_t, \tau, K; \Delta K)}{\Delta K} \right) \Big|_{K=S_T} = f^*(S_T)e^{-r_{t,\tau}\tau}. \quad (3.6)$$

Može se pokazati da jednadžba (3.6) vrijedi tako da prvo odredimo vrijednost isplate  $Z_1$  portfelja s  $\frac{1}{(\Delta K)^2}$  jedinica "butterfly spread"-a.

|                             |                        |           |                      |
|-----------------------------|------------------------|-----------|----------------------|
|                             | $C(K - \Delta K, T)$   | $C(K, T)$ | $C(K + \Delta K, T)$ |
| $S_T \in [K - \Delta K, K]$ | $S_T - (K - \Delta K)$ | 0         | 0                    |
| $S_T \in [K, K + \Delta K]$ | $S_T - (K - \Delta K)$ | $S_T - K$ | 0                    |
| inače                       | 0                      | 0         | 0                    |

(3.7)

U slučaju našeg portfelja imamo:

$$Z_1(S_T) = \frac{(S_T - K + \Delta K)\mathbf{1}_{[K-\Delta K, K]} + [S_T - K + \Delta K - 2(S_T - K)]\mathbf{1}_{[K, K+\Delta K]}}{(\Delta K)^2}$$

$$\frac{(S_T - K + \Delta K)\mathbf{1}_{[K-\Delta K, K]} + (K + \Delta K - S_T)\mathbf{1}_{[K, K+\Delta K]}}{(\Delta K)^2}$$

$$Z_1(S_T) = \frac{1}{(\Delta K)^2}(\Delta K - |S_T - K|)\mathbf{1}_{[K-\Delta K, K+\Delta K]}(S_T).$$

Također, uočimo da za  $\forall(\Delta K)$  vrijedi:

$$\int_{K-\Delta K}^{K+\Delta K} (\Delta K - |S_T - K|)dS_T = \int_{K-\Delta K}^K (\Delta K - K + S_T)dS_T + \int_K^{K+\Delta K} (\Delta K - S_T + K)dS_T = (\Delta K)^2 \quad (3.8)$$

Očito za  $\forall(\Delta K)$  vrijedi:

- $Z_1(S_T) \geq 0$
- iz (3.8) slijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_1(S_T)d(S_T) = 1 \quad (3.9)$$

Također,

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} Z_1(S_T) = \begin{cases} \infty, & S_T = K \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pa imamo uvrštavajući  $Z_1(S_T)$  u (3.1),

$$e^{-r_t \tau} \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(S_T) f^*(S_T) dS_T = e^{-r_t \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_K(S_T) f^*(S_T) dS_T = e^{-r_t \tau} f^*(K) \quad (3.11)$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je  $\delta_K(x)$  Diracova delta funkcija.

Ako se ti financijski instrumenti mogu konstruirati za neprekidna stanja (cijene izvršenja) tada se može u potpunosti definirati SPD. Štoviše, kako  $\Delta K$  teži u nulu, ta cijena će težiti drugoj derivaciji funkcije cijene call opcije po cijeni izvršenja  $K$  [4]:

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} \left( \frac{P(S_t, \tau, K; \Delta K)}{\Delta K} \right) = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{u_1 - u_2}{(\Delta K)^2} = \frac{\partial^2 C(S_t, \tau, K)}{\partial K^2} \quad (3.12)$$

Iz (3.1), (3.11) i (3.12) slijedi:

$$\left. \frac{\partial^2 C(S_t, \tau, K)}{\partial K^2} \right|_{K=S_T} = e^{-r_t \tau} f_t^*(S_T)$$

gdje  $r_{t,\tau}$  reprezentira kamatnu stopu neutralnu na rizik u trenutku  $t$  i vremenom do dospjeća  $\tau$ , a  $f_t^*(S_T)$  predstavlja PDF neutralnu na rizik ili SPD u trenutku  $t$ . Stoga je SPD definirana s:

$$f_t^*(S_T) = e^{r_{t,\tau}\tau} \frac{\partial^2 C(S_t, \tau, K)}{\partial K^2} \Big|_{K=S_T} \quad (3.13)$$

Ova metoda predstavlja nearbitražni pristup dobivanja SPD-a. Nema pretpostavki na dinamiku kretanja vezane imovine. Nema ograničenja na preference budući da nearbitražna metoda samo pretpostavlja neutralnost na rizik u odnosu na vezanu imovinu. Jedine pretpostavke ove metode su savršeno tržište, tj. nema ograničenja u prodaji, transakcijskih troškova ili poreza i agenti su u mogućnosti pozajmljivati po nerizičnoj kamatnoj stopi, i dva puta diferencijabilna funkcija cijene  $C(\cdot)$ .

### 3.3 Poluparametarska procjena SPD-a

#### Procijena funkcije cijene za call opciju

Korištenje neparametarske regresije kod određivanja SPD-a prvi su proučavali Ait-Sahalia i Lo [1]. Predložili su korištenje Nadaraya-Watsonovog procjenitelja za procjenu povijesnih cijena call opcije  $C(\cdot)$  kao funkciju varijabli  $(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau})^\tau$ , gdje je  $\delta$  dividendni prinos. Taj procjenitelj uzima jezgru kao težinsku funkciju i koristi se kod neparameter-skih tehnika procjenjivanja uvjetnog očekivanja. Te tehnike su poželjne jer nije potrebno definirati funkcionalnu formu i jedine potrebne pretpostavke na funkciju su glatkoća i diferencijabilnost, [14]. Kada je dimenzija regresora 5, procjenitelj je netočan u praksi. Stoga je potrebna redukcija dimenzije, tj. ekvivalentno, redukcija broja regresora. Jedna od mogućnosti je pozvati se na nearbitražni argument i izraziti cijenu forwarda koristeći varijable  $S_t$ ,  $r_{t,\tau}$  i  $\delta_{t,\tau}$  s  $F_{t,\tau} = S_t e^{(r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau})\tau}$ , te potom izraziti funkciju cijene call opcije kao:

$$C(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C(F_{t,\tau}, K, \tau, r_{t,\tau}). \quad (3.14)$$

Alternativna specifikacija pretpostavlja da je funkcija cijene call opcije homogena prvog stupnja u varijablama  $S_t$  i  $K$  (kao i u Black-Scholesovoj formuli) pa vrijedi:

$$C(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = KC(S_t/K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}). \quad (3.15)$$

Kombinirajući pretpostavke od (3.14) i (3.15) funkcija cijene call opcije može se dalje reducirati na funkciju tri varijable  $(\frac{K}{F_{t,\tau}}, \tau, r_{t,\tau})$ .

Drugi pristup je korištenje poluparametarske metode bazirane na Black-Scholesovoj podrazumijevanoj volatilnosti. U ovom slučaju je podrazumijevana volatilnost modelirana

kao neparametarska funkcija,  $\sigma(F_{t,\tau}, K, \tau)$  [1]:

$$C(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C_{BS}(F_{t,\tau}, K, \tau, r_{t,\tau}; \sigma(F_{t,\tau}, K, \tau)), \quad (3.16)$$

gdje je  $C_{BS}$  cijena call opcije u Black-Scholesovom modelu.

Funkcija podrazumijevane volatilnosti empirijski uglavnom ovisi o dva parametra: vremenu do dospijea  $\tau$  te odnosu cijene izvršenja i forward cijene (ili trenutne cijene) vezane imovine  $M = K/F_{t,\tau}$  (moneyness). Također, često se uzima i definicija  $M = \tilde{S}_t/K$  za  $\tilde{S}_t = S_t - D$ , a  $D$  je sadašnja vrijednost dividendi koja se mora isplatiti prije datuma dospijea. U slučaju dividendnog prinosa  $\delta_t$ , ukupan iznos dividende možemo zapisati kao  $D = S_t(1 - e^{-\delta_t\tau})$ . U slučaju diskretnih isplata dividendi imamo  $D = \sum_{t_i \leq t+\tau} D_{t_i} e^{-r_{t,\tau} t_i}$  za  $t_i$  vrijeme isplate  $i - te$  dividende i vremenom do dospijea  $\tau_i$ .

Stoga se dimenzija funkcije podrazumijevane volatilnosti može reducirati, dobivamo funkciju dviju varijabli,  $\sigma(K/F_{t,\tau}, \tau)$ . Funkcija cijene call opcije sada izgleda:

$$C(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C_{BS}(F_{t,\tau}, K, \tau, r_{t,\tau}; \sigma(K/F_{t,\tau}, \tau)). \quad (3.17)$$

Jednom kada smo procijenili  $\hat{\sigma}(\cdot)$ , lako je izračunati procjene za  $\hat{C}_t(\cdot)$ ,  $\hat{\Delta}_t = \frac{\partial \hat{C}_t(\cdot)}{\partial S_t}$ ,  $\hat{\Gamma}_t = \frac{\partial^2 \hat{C}_t(\cdot)}{\partial S_t^2}$  i  $\hat{f}_t^* = e^{r_{t,\tau}\tau} [\frac{\partial^2 \hat{C}_t(\cdot)}{\partial K^2}]$ .

## Redukcija dimenzije

U prethodnom poglavlju su predloženi poluparametarski procjenitelji za funkciju cijene call opcije te potrebni koraci za određivanje SPD-a. U ovom poglavlju bavit ćemo se daljnom redukcijom dimenzije na način kako je to predložio Rookley, [24]. Rookley koristi podatke unutar jednog dana s istim vremenom do dospijea kako bi procijenio funkciju podrazumijevane volatilnosti koja u ovom slučaju ovisi o dvama parametrima, razdoblju unutar jednog dana i "moneyness" vrijednosti opcije.

Pogledajmo malo drugačiju metodu koja koristi sve cijene namire ( prosječna cijena trgovanja ugovorom koja služi kao orijentir za procjenu mogućeg profita, odnosno gubitka toga dana) opcije u jednom danu trgovanja za različita vremena do dospijea kako bi procijenila funkciju podrazumijevane volatilnosti  $\sigma(K/F_{t,\tau}, \tau)$ . Ova metoda omogućava uspoređivanje SPD-a za različite dane zbog fiksiranja vremena do dospijea u prvom koraku. To je zanimljivo onima koji žele proučavati dinamiku i stabilnost tih gustoća. Fiksiranje vremena do dospijea nam također omogućava i eliminaciju varijable  $\tau$  iz funkcije podrazumijevane volatilnosti. U nadolazećem dijelu, kako bismo pojednostavili, "moneyness" vrijednost opcije definiramo s  $M = \tilde{S}_t/K$ , za  $\tilde{S}_t = S_t - D$ , a podrazumijevanu volatilnost označimo sa  $\sigma$ .  $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$  označava parcijalnu derivaciju funkcije  $f$  po varijabli  $x_i$ , a  $\frac{df(x)}{dx}$

označava totalni diferencijal funkcije  $f$  u odnosu na varijablu  $x$ .

Također, koristimo i skaliranu funkciju za cijenu call opcije :

$$c_{it} = \frac{C_{it}}{\tilde{S}_t}$$

$$M_{it} = \frac{\tilde{S}_t}{K_i}.$$

$C_{it}$  označava cijenu  $i$ -te call opcije u trenutku  $t$ , a  $K_i$  je njena cijena izvršenja.

Nova, skalirana cijena call opcije sada se može zapisati:

$$c_{it} = c(M_{it}; \sigma(M_{it})) = \frac{S_t e^{-\delta_{t,\tau}\tau} \Phi(d_1) - K e^{-r_{t,\tau}\tau} \Phi(d_2)}{S_t e^{-\delta_{t,\tau}\tau}} = \Phi(d_1) - \frac{e^{-r_{t,\tau}\tau} \Phi(d_2)}{M_{it}},$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t e^{\delta_{t,\tau}\tau}}{K}\right) + (r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau} + \frac{1}{2}\sigma(M_{it})^2)\tau}{\sigma(M_{it}) \sqrt{\tau}}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \delta_{t,\tau}\tau + (r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau} + \frac{1}{2}\sigma(M_{it})^2)\tau}{\sigma(M_{it}) \sqrt{\tau}}$$

$$= \frac{\log(M_{it}) + (r_{t,\tau} + \frac{1}{2}\sigma(M_{it})^2)\tau}{\sigma(M_{it}) \sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma(M_{it}) \sqrt{\tau}$$

Standardne mjere rizika su tada definirane sljedećim parcijalnim derivacijama (radi jednostavnosti notacije izostavljamo indekse te uzimamo  $C = c\tilde{S}$ ):

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{S}} = c(M, \sigma(M)) + \tilde{S} \frac{\partial c}{\partial \tilde{S}},$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{S}^2} = 2 \frac{\partial c}{\partial \tilde{S}} + \tilde{S} \frac{\partial^2 c}{\partial \tilde{S}^2},$$

za

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{S}} = \frac{dc}{dM} \frac{\partial M}{\partial \tilde{S}} = \frac{dc}{dM} \frac{1}{K},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \tilde{S}^2} = \frac{d^2 c}{dM^2} \left(\frac{1}{K}\right)^2.$$

SPD je onda druga derivacija funkcije cijene call opcije u odnosu na cijenu izvršenja [17], tj:

$$f^*(\cdot) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{r\tau} \tilde{S} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}. \quad (3.18)$$

Potrebna je pretvorba jer je procijenjena funkcija  $c(\cdot)$ , a ne  $C(\cdot)$ .

Izraz u (3.18) ovisi o:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} &= \frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{\partial c}{\partial K} \right) = \frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{dc}{dM} \frac{dM}{dK} \right) = \frac{\partial}{\partial K} \left( -\frac{\tilde{S}}{K^2} \frac{dc}{dM} \right) \\ &= 2 \frac{\tilde{S}}{K^3} \frac{dc}{dM} - \frac{\tilde{S}}{K^2} \left( -\frac{\tilde{S}}{K^2} \right) \frac{d^2 c}{dM^2} = \frac{d^2 c}{dM^2} \left( \frac{M}{K} \right)^2 + 2 \frac{dc}{dM} \frac{M}{K^2} \end{aligned}$$

Funkcijski zapisano  $\frac{dc}{dM}$  glasi:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dM} &= \Phi'(d_1) \frac{dd_1}{dM} - \frac{e^{-r\tau} \Phi'(d_2) \frac{dd_2}{dM} M - e^{-r\tau} \Phi(d_2)}{M^2} \\ &= \Phi'(d_1) \frac{dd_1}{dM} - e^{-r\tau} \frac{\Phi'(d_2)}{M} \frac{dd_2}{dM} + e^{-r\tau} \frac{\Phi(d_2)}{M^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Iz činjenice da vrijedi:

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}},$$

iz čega slijedi

$$\Phi''(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} \left( \frac{-2d}{2} \right) = -d\Phi'(d)$$

$\frac{d^2 c}{dM^2}$  glasi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c}{dM^2} &= \Phi''(d_1) \left( \frac{dd_1}{dM} \right)^2 + \Phi'(d_1) \frac{d^2 d_1}{dM^2} - e^{-r\tau} \frac{M\Phi''(d_2) \left( \frac{dd_2}{dM} \right)^2 + M\Phi'(d_2) \frac{d^2 d_2}{dM^2} - \Phi'(d_2) \frac{dd_2}{dM}}{M^2} \\ &\quad + e^{-r\tau} \frac{M^2 \Phi'(d_2) \frac{dd_2}{dM} - 2M\Phi(d_2)}{M^4} \\ &= \Phi'(d_1) \left[ \frac{d^2 d_1}{dM^2} - d_1 \left( \frac{dd_1}{dM} \right)^2 \right] - \frac{e^{-r\tau} \Phi'(d_2)}{M} \left[ \frac{d^2 d_2}{dM^2} - \frac{2}{M} \frac{dd_2}{dM} - d_2 \left( \frac{dd_2}{dM} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{2e^{-r\tau} \Phi(d_2)}{M^3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Raspišimo detaljnije izraze iz jednadžbi (3.19) i (3.20):

$$\begin{aligned}\frac{dd_1}{dM} &= \frac{\partial d_1}{\partial M} + \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial M}, \\ \frac{dd_2}{dM} &= \frac{\partial d_2}{\partial M} + \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial M}, \\ \frac{\partial d_1}{\partial M} &= \frac{\partial d_2}{\partial M} = \frac{1}{M\sigma\sqrt{\tau}}, \\ \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} &= -\frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{2}, \\ \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} &= -\frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} - \frac{\sqrt{\tau}}{2}.\end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}V &= \sigma(M), \\ V' &= \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M}, \\ V'' &= \frac{\partial^2 \sigma(M)}{\partial M^2}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Izrazi u jednadžbama (3.19) i (3.20) također ovise i o sljedećim drugim derivacijama funkcija:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 d_1}{dM^2} &= \frac{d}{dM} \left( \frac{\partial d_1}{\partial M} + \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} V' \right) = \frac{d}{dM} \left( \frac{1}{M\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} V' + \frac{\sqrt{\tau}}{2} V' \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\tau}} \left( \frac{1}{M^2\sigma} + \frac{V'}{M\sigma^2} \right) + \frac{\sqrt{\tau}}{2} V'' - \frac{\frac{\sigma^2}{M} - 2\sigma V' (\log(M) + r\tau)}{\sigma^4\sqrt{\tau}} V' \\ &\quad - V'' \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} \\ &= -\frac{1}{M\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \frac{1}{M} + \frac{V'}{\sigma} \right] + V'' \left( \frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} \right) \\ &\quad + V' \left[ 2V' \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^3\sqrt{\tau}} - \frac{1}{M\sigma^2\sqrt{\tau}} \right],\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 d_2}{dM^2} &= \frac{d}{dM} \left( \frac{\partial d_2}{\partial M} + \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} V' \right) = \frac{d}{dM} \left( \frac{1}{M\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} V' - \frac{\sqrt{\tau}}{2} V' \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\tau}} \left( \frac{1}{M^2\sigma} + \frac{V'}{M\sigma^2} \right) - \frac{\sqrt{\tau}}{2} V'' - \frac{\frac{\sigma^2}{M} - 2\sigma V'(\log(M) + r\tau)}{\sigma^4\sqrt{\tau}} V' \\
&\quad - V'' \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} \\
&= -\frac{1}{M\sigma\sqrt{\tau}} \left[ \frac{1}{M} + \frac{V'}{\sigma} \right] - V'' \left( \frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^2\sqrt{\tau}} \right) \\
&\quad + V' \left[ 2V' \frac{\log(M) + r\tau}{\sigma^3\sqrt{\tau}} - \frac{1}{M\sigma^2\sqrt{\tau}} \right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Kako bismo procijenili funkciju podrazumijevane volatilnosti u ovisnosti o cijeni izvršenja i prve dvije derivacije iste funkcije iz (3.21) koristi se lokalna polinomijalna procjena koju ćemo ukratko objasniti u idućem poglavlju.

### Lokalna procjena polinomom

Najprije objasnimo pojam jezgrene funkcije ("kernel function") koja se koristi kod neparametarskih metoda za zaglađivanje. Jezgrena funkcija  $K(x)$  zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned}
K(x) &\geq 0 \\
\int K(z) dz &= 1
\end{aligned}$$

Često se jezgrena funkcija reskalira koristeći parametar  $h > 0$ , kojeg nazivamo širina opsega ("bandwidth"):

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K(x/h)$$

Parametar  $h$  utječe na dobivenu procjenu. Ako je  $h$  malen, tada jezgrena funkcija pridaje težine samo nekolicini točaka u okolini promatrane točke, a u slučaju velikog  $h$  težine će biti raspoređene na široj okolini.

Neke od najučestalije korištenih jezgrenih funkcija:

- uniformna

$$K(u) = \frac{1}{2} \quad \text{za } |u| \leq 1$$



- trokutasta

$$K(u) = 1 - |u| \quad \text{za } |u| \leq 1$$

- parabolična

$$K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) \quad \text{za } |u| \leq 1$$

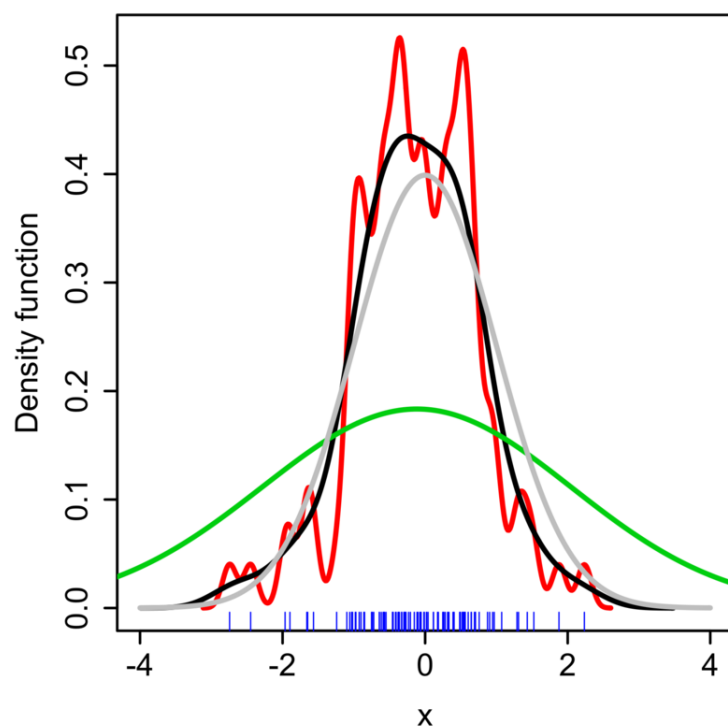
- Gaussova

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

- kosinus

$$K(u) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) \quad \text{za } |u| \leq 1$$

Pogledajmo primjer jezgrene funkcije za različite izbore za  $h$  kod procjene standardne normalne razdiobe:



Sivom bojom je označena stvarna normalna razdioba, crvenom procjena za  $h = 0.05$ , crnom za  $h = 0.337$ , a zelenom procjena za  $h = 2$ . Kao što možemo vidjeti crvena krivulja nije dovoljno glatka što je rezultat premalog  $h$ , dok je zelena prezaglađena zbog odabira prevelike vrijednosti za  $h$ . Također, vidimo da za vrijednost  $h = 0.337$  krivulja optimalno opisuje stvarnu.

Razmotrimo generirajući proces za podrazumijevanu volatilitnost:

$$\sigma = g(M, \tau) + \sigma^*(M, \tau)\varepsilon,$$

tako da vrijedi  $E(\varepsilon)=0$ ,  $\text{Var}(\varepsilon)=1$ . Također,  $M$ ,  $\tau$  i  $\varepsilon$  su nezavisne i  $\sigma^*(m_0, \tau_0)$  je uvjetna varijanca za  $\sigma$  uz dane  $M=m_0$  i  $\tau = \tau_0$ , tj.  $\sigma^*(m_0, \tau_0) = \text{Var}(\sigma|M = m_0, \tau = \tau_0)$ .

Uz pretpostavku da postoje sve treće derivacije funkcije  $g$  možemo je pomoću Taylorovog razvoja aproksimirati u okolini točke  $(m_0, \tau_0)$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned} g(m, \tau) \approx & g(m_0, \tau_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial M} \right|_{m_0, \tau_0} (m - m_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial M^2} \right|_{m_0, \tau_0} (m - m_0)^2 \\ & + \left. \frac{\partial g}{\partial \tau} \right|_{m_0, \tau_0} (\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} \right|_{m_0, \tau_0} (\tau - \tau_0)^2 \\ & + \left. \frac{\partial^2 g}{\partial M \partial \tau} \right|_{m_0, \tau_0} (m - m_0)(\tau - \tau_0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Jednadžba (3.24) sugerira lokalnu aproksimaciju funkcije polinomom. Stoga, kako bismo procijenili podrazumijevanu volatilitnost u točki  $(m_0, \tau_0)$  iz opaženih  $\sigma_j$  želimo minimizirati sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{ \sigma_j - [ \beta_0 + \beta_1(M_j - m_0) + \beta_2(M_j - m_0)^2 + \beta_3(\tau_j - \tau_0) \\ + \beta_4(\tau_j - \tau_0)^2 + \beta_5(M_j - m_0)(\tau_j - \tau_0) ] \}^2 K_{h_M, h_\tau}(M_j - m_0, \tau_j - \tau_0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdje je  $n$  broj opaženih vrijednosti (opcija),  $h_M$  i  $h_\tau$  definiraju okolinu koju promatramo, a  $K_{h_M, h_\tau}$  je dobivena funkcija jezgre.

Zbog pojednostavljenja koristimo sljedeće matrične definicije:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & M_1 - m_0 & (M_1 - m_0)^2 & (\tau_1 - \tau_0) & (\tau_1 - \tau_0)^2 & (M_1 - m_0)(\tau_1 - \tau_0) \\ 1 & M_2 - m_0 & (M_2 - m_0)^2 & (\tau_2 - \tau_0) & (\tau_2 - \tau_0)^2 & (M_2 - m_0)(\tau_2 - \tau_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_n - m_0 & (M_n - m_0)^2 & (\tau_n - \tau_0) & (\tau_n - \tau_0)^2 & (M_n - m_0)(\tau_n - \tau_0) \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}, W = \text{diag}\{K_{h_M, h_\tau}(M_j - m_0, \tau_j - \tau_0)\} \text{ i } \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_5 \end{pmatrix}.$$

Sada, jednadžbu problema najmanjih kvadrata (3.25) možemo zapisati kao:

$$\min_{\beta} (\sigma - X\beta)^\top W (\sigma - X\beta), \quad (3.26)$$

a rješenje je dano s:

$$\hat{\beta} = (X^\top W X)^{-1} X^\top W \sigma. \quad (3.27)$$

Jedna od prednosti lokalne procjene polinomom je lako dobivanje, u jednom koraku, procijenjene podrazumijevane volatilnosti i prvih dviju derivacija iste. Zaista, gledajući jednadžbe (3.24) i (3.25) dobivamo:

$$\left. \frac{\partial \hat{g}}{\partial M} \right|_{m_0, \tau_0} = \hat{\beta}_1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial M^2} \right|_{m_0, \tau_0} = 2\hat{\beta}_2.$$

### Primjer određivanja SPD-a

U ovom poglavlju dajemo primjer poluparametarske procjene SPD-a za različita vremena do dospijeca ( $\tau=0.125, 0.25, 0.375$ ). Potrebni su nam dnevni podaci o cijeni dionice, tipu i vrijednosti opcije, vremenu do dospijeca, cijeni izvršenja te kamatnoj stopi za dano vrijeme do dospijeca. Prvo definirajmo potrebne funkcije, a zatim u glavnom dijelu programa učitajmo podatke te procijenimo tražene vrijednosti.

Funkcija *fspd* računa empirijsku vrijednost SPD-a kao drugu derivaciju funkcije cijene call opcije obzirom na terminalnu vrijednost dionice pritom koristeći procijenu funkcije podrazumijevane volatilnosti obzirom na cijenu izvršenja, te njene pripadne derivacije.

```
fspd<-function(M, sigma, sigma1, sigma2, S, r, tau){
##izracun SPD-a
```

```
st = sqrt(tau)
```

```
e = exp(r*tau)
```

```
K = S/M ##cijena izvršenja
```

```

d1 = (log(M)+tau*(r+0.5*sigma^2))/(sigma*st)
d2 = d1-sigma*st
c = pnorm(d1)-pnorm(d2)/(e*M)

#derivacija izraza d1 po M
d11 = (1/(M*sigma*st))-(1/(st*(sigma^2)))*((log(M)+tau*r)*sigma1)
      +0.5*st*sigma1

#derivacija izraza d2 po M
d21 = d11-sigma1*st

#druga derivacija izraza d1 po M, formula (3.22)
d12 = -(1/(st*(M^2)*sigma))-sigma1/(st*M*(sigma^2))
      +sigma2*(0.5*st-(log(M)+r*tau)/(st*(sigma^2)))
      +sigma1*(2*sigma1*(log(M)+r*tau)/(st*sigma^3)-1/(st*M*sigma^2))

#druga derivacija izraza d2 po M, formula (3.23)
d22 = d12-st*sigma2

#prva i druga derivacija funkcije cijene call opcije c po M
#formule (3.19) i (3.20)
c1_M = dnorm(d1)*d11-1/(e*M)*(dnorm(d2)*d21-1/M*pnorm(d2))
c2_M = dnorm(d1)*(d12-d1*d11^2)-dnorm(d2)/(e*M)*(d22-2/M*d21-d2*d21^2)
      -2*pnorm(d2)/(e*M^3)

#druga derivacije funkcije c po K
c2 = M/K^2*(2*c1_M-M*c2_M)

spd = e*S*c2
return (spd)
}

```

Funkcija *BS* računa vrijednost Europske put ili call opcije Black-Scholesovom formulom. Pritom, ako je vrijednost varijable *opcija* jednaka 1 tada se radi o call opciji, a inače o put.

```

BS = function(S,K,r,sigma,tau,opcija)
{
  S = c(S)           #vrijednost dionice
  K = c(K)           #cijena izvršenja
  tau = c(tau)       #vrijeme do dospijeca opcije

```

```

sigma = c(sigma)    #volatilnost
r = c(r)           #kamatna stopa

y = (log(S/K)+(r-sigma^2/2)*tau)/(sigma*sqrt(tau))

if (opcija==1){
  vr_opcije = S*pnorm(y+sigma*sqrt(tau))-K*exp(-r*tau)*pnorm(y)
}

else{
  vr_opcije = K*exp(-r*tau)*pnorm(-y)-S*pnorm(-y-sigma*sqrt(tau))
}

vr_opcije = (vr_opcije > 0)*vr_opcije
return(vr_opcije)
}

```

*ImplVola* računa Black-Scholesovu podrazumijevanu volatilnost pritom koristeći metodu bisekcije. Ulazni parametri funkcije su redom cijena dionice, cijena izvršenja, vrijeme do dospijea, kamatna stopa za pripadno vrijeme do dospijea, poznata tržišna cijena opcije i tip opcije, tj. vrijednosti 0 ili 1 ovisno o tome radi li se o call ili put opciji.

```

ImplVola = function(S,K,t,r,cijena_tr,opcija){

  f=function(sigma){
    return (BS(S,K,r,sigma,t,opcija)-cijena_tr)
  }

  sigma = 0.20      # pocetna vrijednost
  u = 1            # gornja granica
  d = 0.001        # donja granica
  br = 0           # broj iteracija

  greska = f(sigma)

  while(abs(greska) > 0.00001 && br < 1000){
    if(greska*f(u) < 0){
      d = sigma
      sigma = (u + sigma)/2
    }
    else{

```

```

        u = sigma
        sigma = (d + sigma)/2
    }
    greska= f(sigma)
    br=br+1
}
if ( br ==1000){
    return (NA)
}
else {
    return (sigma)
}
}

```

Slijedi glavni dio programa u kojem najprije definiramo sve potrebne varijable, odredimo podrazumijevane volatilnosti opcija i procijenimo plohu podrazumijevane volatilnosti pritom koristeći jezgrenu funkciju  $K(u)$  koja u programu  $R$  ima naziv *QuartK*, a definirana je s:

$$K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2.$$

Zatim procijenimo vrijednosti dionica korigiranih za dividendu i pripadne kamatne stope za vremena do dospijeca  $\tau \in \{0.125, 0.25, 0.375\}$  linearnom aproksimacijom. Koristeći dane podatke odredimo pripadne funkcije gustoće ovisno o vremenu do dospijeca te iste grafički prikazemo.

```

#ucitamo dnevne podatke
podaci=read.table("dnevni_podaci.txt")

opcija=podaci[,4]          # tip opcije (call ili put)
dospijece=podaci[,5]     # dospijece u danima
K=podaci[,6]             # cijena izvršenja
cijena_op=podaci[,7]     # cijena opcije
S=podaci[,8]             # cijena dionice korigirana za buduće
                          # dividende
R=podaci[,9]             # kamatna stopa za dano vrijeme do dospijeca

d_god=dospijece/365      #dospijece u godinama
M=K/(S*exp(R*d_god))    #moneyness

n=length(S)

```

```

##izracunajmo podrazumijevanu volatilnost

iv=rep(0,n)

for(i in 1:n){
  iv[i]=ImplVola(S[i],K[i],d_god[i],R[i],cijena_op[i],opcija[i])
}

pM=0.8
kM=1.2

pt=0
kt=1

g=c(0.01,0.025)      #0.01 je udaljenost izmedu procjenjenih
                     #tocaka za moneyness,
                     #a 0.025 za vrijeme dospijeca

g1=seq(pM,kM,by=g[1]) ##mreza za moneyness
g2=seq(pt,kt,by=g[2]) ##mreza za dospijece

g12=expand.grid(g2,g1)

gm=g12[[1]]
gt=g12[[2]]

data=data.frame(iv=iv,M=M,d_god=d_god)

h=c(0.15,0.3)      # bandwidth

#odredivanje plohe podrazumijevane volatilnosti lokalnom
#procjenom polinomom koristeci funkciju jezgre QuartK

lin_fit=locLinSmootherC(x=cbind(M,d_god),y=cbind(iv,iv),bw=h,
                      xeval=cbind(gm,gt),kernel=QuartK)

IV=lin_fit[1:(nrow(lin_fit)/2),3]

```

```

##ploha podrazumijevane volatilnosti
IVSurface=cbind(c(gm),c(gt),c(IV))

i=1
k=0
##izracun pripadnih vrijednosti za tau=0.125,0.25,0.375

while(i<=3){
tau=i*0.125

#linearna aproksimacija vrijednosti cijene dionice i kamatne stope

data1=subset(cbind(S,R,d_god),d_god<=tau)
data2=subset(cbind(S,R,d_god),d_god>tau)

SR_inf=subset(cbind(data1[,1],data1[,2],data1[,3]),
  round(data1[,3],8)==round(tau-min(abs(tau-data1[,3])),8))
SR_sup=subset(cbind(data2[,1],data2[,2],data2[,3]),
  round(data2[,3],8)==round(tau+min(abs(tau-data2[,3])),8))

a=(mean(SR_sup[,1])-mean(SR_inf[,1]))/(SR_sup[,3]-SR_inf[,3])
b=mean(SR_inf[,1])
x=tau-SR_inf[,3]
s=a*x+b

a=(mean(SR_sup[,2])-mean(SR_inf[,2]))/(SR_sup[,3]-SR_inf[,3])
b=mean(SR_inf[,2])
r=a*x+b

#uzmimo podatke samo za trenutni tau
pom=subset(IVSurface,IVSurface[,2]==tau)
pom1=cbind(1/(pom[,1]*exp(r*tau)),pom[,2:3])

#dobivena procjena "smile-a"
smile=cbind(pom1[,1],pom1[,3])
smile=smile[order(smile[,1]),]
sT=data.frame(S=smile[,1],t=smile[,2])

```



```

#procjena derivacija podrazumijevane volatilnosti obzirom na cijenu
#izvršenja
dersmile=locpol(t~S, data=sT, bw=0.4, kernel=QuartK, deg=2,
                xevalLen=nrow(smile))$lpFit

#odredimo SPD za trenutni tau
spd_f=fspd(smile[,1], smile[,2], dersmile[,3], dersmile[,4], s, r, tau)

if(k==0){
spd=cbind(1/(smile[,1]/s), spd_f)
}
else {
spd=cbind(spd, (1/(smile[,1]/s)), spd_f)
}
k=k+1
i=i+1
}

spd1=spd[,1:2]

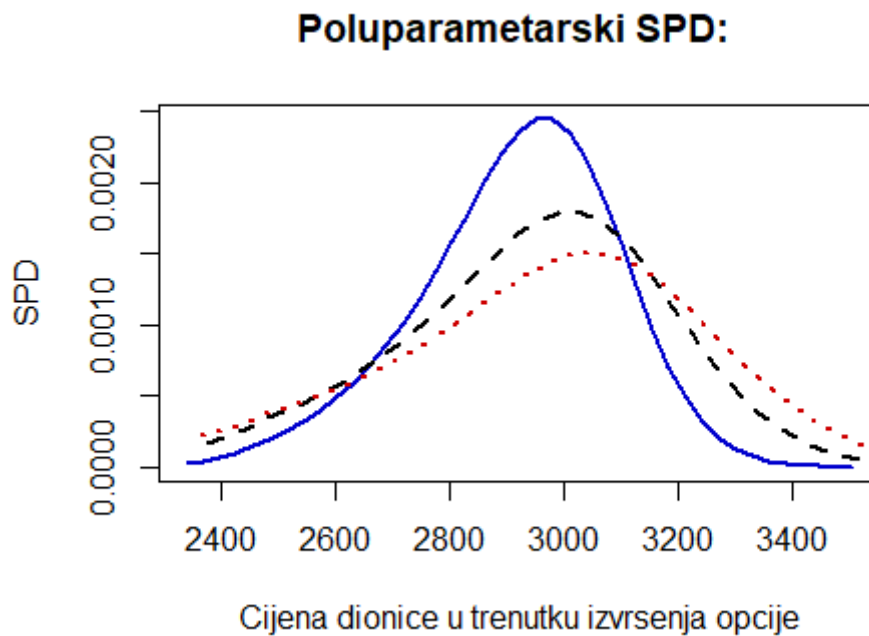
spd2=spd[,3:4]

spd3=spd[,5:6]

# Grafovi

plot(spd1[,1:2], col="blue3", type="l", lwd=2, xlab="Cijena _opcije _kod
      _izvršenja", ylab="SPD")
lines(spd2[,1:2], col="black", lty="dashed", lwd=2)
lines(spd3[,1:2], col="red3", lty="dashed", lwd=2)
title(paste("Poluparametarski _SPD: _", sep=""))

```



Slika 3.1: Lokalna procjena SPD-a za  $\tau = 0.125$  (plava),  $\tau = 0.25$  (crna),  $\tau = 0.375$  (crvena)

Gornji graf prikazuje procjenu SPD za različita vremena do dospjeća sa vrijednostima dionica,  $S_T$ , u trenutku isteka opcije na x-osi. Kao što možemo vidjeti iz grafa, što je vrijeme do dospjeća kraće to je i funkcija gustoće manje spljoštena, tj. veća vjerojatnost odgovara manjem intervalu cijena dionice, što je i očekivano.

# Bibliografija

- [1] Yacine Aït-Sahalia i Andrew W Lo, *Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices*, The Journal of Finance **53** (1998), br. 2, 499–547.
- [2] Stanko Barle i Nusret Cakici, *How to grow a smiling tree*, The Journal of Financial Engineering **7** (1998), br. 2.
- [3] Fischer Black i Myron Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy **81** (1973), br. 3, 637–654.
- [4] Douglas T Breeden i Robert H Litzenberger, *Prices of state-contingent claims implicit in option prices*, Journal of business **51** (1978), 621–651.
- [5] Rama Cont, José Da Fonseca et al., *Dynamics of implied volatility surfaces*, Quantitative finance **2** (2002), br. 1, 45–60.
- [6] John C Cox, Stephen A Ross i Mark Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of financial Economics **7** (1979), br. 3, 229–263.
- [7] James W Demmel, *Applied numerical linear algebra*, sv. 56, Siam, 1997.
- [8] E. Derman i I. Kani, *Riding on the smile*, Journal of Mathematical Finance **7** (1994), 32–39.
- [9] E Derman i I Kani, *The Volatility Smile and Its Implied Tree*, <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/hk/derman-kani.pdf>.
- [10] Bruno Dupire, *Pricing and hedging with smiles*, Mathematics of derivative securities **1** (1997), br. 1, 103–111.
- [11] Matthias Fengler, Wolfgang Härdle i Peter Schmidt, *Common factors governing VDAX movements and the maximum loss*, Financial Markets and Portfolio Management **16** (2002), br. 1, 16–29.

- [12] Bernhard Flury, *Common principal components & related multivariate models*, John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [13] Wolfgang K Härdle, Nikolaus Hautsch i Ludger Overbeck, *Applied quantitative finance*, sv. 2, Springer, 2008.
- [14] Wolfgang Härdle, *Applied nonparametric regression*, br. 19, Cambridge university press, 1990.
- [15] John Hull i Alan White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, *The journal of finance* **42** (1987), br. 2, 281–300.
- [16] James M Hutchinson, Andrew W Lo i Tomaso Poggio, *A nonparametric approach to and hedging derivative securities via learning networks*, *The Journal of Finance* **49** (1994), br. 3, 851–889.
- [17] Kim Huynh, Pierre Kervella i Jun Zheng, *Estimating state-price densities with non-parametric regression*, *Applied Quantitative Finance*, sv. 2, Springer, 2002, str. 171–196.
- [18] George Levy, *Computational finance: numerical methods for pricing financial instruments*, Butterworth-Heinemann, 2003.
- [19] Robert E Lucas Jr, *Asset prices in an exchange economy*, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **46** (1978), 1429–1445.
- [20] William R Melick i Charles P Thomas, *Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during the Gulf crisis*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **32** (1997), br. 1, 91–115.
- [21] Robert C Merton, *Theory of rational option pricing*, *The Bell Journal of economics and management science* **4** (1973), 141–183.
- [22] Robert Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, *Journal of financial economics* **3** (1976), br. 1-2, 125–144.
- [23] Richard Roll, *A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory*, *Journal of financial economics* **4** (1977), br. 2, 129–176.
- [24] Cameron Rookley, *Fully exploiting the information content of intra day option quotes: Applications in option pricing and risk management*, University of Arizona (1997).

- [25] Mark Rubinstein, *The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options*, *The Bell Journal of Economics* **7** (1976), br. 2, 407–425.
- [26] Mark Rubinstein, *Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978*, *The Journal of Finance* **40** (1985), br. 2, 455–480.
- [27] M Rubinstein, *Implied binomial trees*, *The Journal of Finance* **49** (1994), br. 3, 771–818.
- [28] Zoran Vondraček, *Financijsko modeliranje 2*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm17-predavanja.html>.

# Sažetak

U diplomskom radu bavimo se temom podrazumijevane volatilnosti i njenom primjenom u financijama. U uvodnom poglavlju su pregledi modela i njihovih osnovnih značajki potrebnih za daljnji rad, npr. Black-Scholesov model, te Cox-Ross-Rubinsteinov model binomnih stabala. Prvo poglavlje daje kratki uvod u podrazumijevanu volatilnost, procjenjenu volatilnost cijene vrijednosnih papira, najčešće korištenu kod određivanja cijena opcija. Kako bi se odredila, potrebno je riješiti Black-Scholesovu formulu koristeći uočene cijene opcija za konstantnu volatilnost  $\sigma$ . Značajka podrazumijevane volatilnosti je njena promjena obzirom na cijene izvršenja, takozvani "smile". Na kraju poglavlja se koriste dvije varijante glavnih komponenti. To su analiza glavnih komponenti za određivanje glavnih komponenti kod kretanja volatilnosti obzirom na vrijeme do dospjeća, te opća analiza glavnih komponenti koja omogućuje istovremeno modeliranje podrazumijevane volatilnosti obzirom na vrijeme do dospjeća i cijenu izvršenja.

Zatim se uvodi pojam podrazumijevanih binomnih stabala (IBT), metode koja ne ignorira "smile" efekt. Empirijska činjenica da podrazumijevana volatilnost pada s cijenom izvršenja, te raste s vremenom do dospjeća opcija bolje je opisana ovom strukturom nego standardnim CRR stablom. Osnovna upotreba IBT je u zaštiti od rizika te određivanju podrazumijevane vjerojatnosne distribucije (eng. *state price density*, SPD). Dana su dva algoritma za konstrukciju IBT-a. Prvo se upoznajemo s algoritmom Dermana i Kanija, a potom s onim Barlea i Cakicia.

U posljednjem poglavlju govorimo o SPD-u te načinima određivanja istog. Osnovna ideja je da je cijena vrijednosnog papira jednaka očekivanoj sadašnjoj vrijednosti budućih isplata, a pritom je očekivanje uzeto obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik. Govorimo o nearbitražnom pristupu određivanja SPD-a. Prednost je što nema pretpostavki na kretanje vezane imovine. Prvo dajemo ideje za poluparametarsku procjenu funkcije cijene call opcije te potom predlažemo načine određivanja SPD-a i prezentiramo primjerom poluparametarsku procjenu istog.

# Summary

This master's thesis deals with implied volatility and its usage in financial mathematics. First, in introduction we give some basic informations about models used in this paper, e.g. the Black and Scholes model and Cox-Ross-Rubinstein model of binomial tree. First section gives introduction to implied volatility, estimated volatility of a security's price, most commonly used when pricing options. To derive implied volatilities the Black and Scholes formula is solved for the constant volatility parameter  $\sigma$  using observed option prices. It appears to be non flat across strikes, a stylized fact which has been called "smile" effect. In the end of this chapter we use two variants of principal components, standard principal component analysis to identify the dominant factor components driving term structure movements of options, and the common principal components approach that enables modeling not only term structure movements of implied volatilities but the dynamics of the "smile" as well.

Then we introduce the implied binomial tree (IBT) method which constructs a numerical procedure consistent with the volatility smile. The empirical fact that the market implied volatilities decrease with the strike level, and increase with the time to maturity of options is better reflected by this construction than standard CRR trees. The basic purpose of the IBT is its use in hedging and calculations of implied probability distributions (or state price density (SPD)), and volatility surfaces. Two algorithms for construction of IBT for a liquid European option are given. Firstly, we follow the Derman and Kani algorithm, discuss its possible shortcomings, and then present the Barle and Cakici construction.

In the last chapter we talk about state price density and ways of obtaining it. The central idea is that the price of a financial security is equal to the expected net present value of its future payoffs under the risk-neutral probability density function. This method constitutes a no-arbitrage approach to recover the SPD. No assumption on the underlying asset dynamics are required. First, we propose ways for semiparametric estimation of the call pricing function and the necessary steps to recover the SPD. Then, in the end, an numerical example is given.

# Životopis

Rođena sam 30.06.1993. godine u Karlovcu. Završila sam Osnovnu školu Dragojle Jarnević u Karlovcu, a godine 2008. upisujem prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Karlovac. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja bila sam članica Folklornog ansambla Matija Gubec i aktivno se bavila tenisom. Godine 2012. upisujem preddiplomski studij inženjerske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2015. nastavljam školovanje na diplomskom studiju Financijske i poslovne matematike na istom odsjeku.