Didaktički modeli i situacije u nastavi matematike

Kezerić, Dajana

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Matematički odsjek

Dajana Kezerić

DIDAKTIČKI MODELI I SITUACIJE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditeljica rada:
prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, veljača 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana __________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik/ca

2. ____, član

3. ____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____,

2. ____,

3. ____,

Zahvaljujem mentorici, prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji, na strpljenju i podršci tijekom pisanja diplomskog rada. Svaki profesoričin savjet omogućio mi je da vidim širu sliku poučavanja matematike i pokrenuo tok misli koje sam uz njenu pomoć pretočila u aktivnosti koje bih voljela vidjeti u nastavi matematike.

Zahvalu dugujem i svojim prijateljima i prijateljicama koji su mi pružili podršku tijekom studiranja i ohrabrivali me kada sam posustajala te svim svojim učiteljima, nastavnicima i profesorima koji su mi svo ovo vrijeme bili inspiracija. Hvala vam.

Posebno zahvaljujem svojim roditeljima. Bezuvjetna ljubav i razumijevanje koje su mi pružili doveli su me do pisanja ovih redaka. Velika vam hvala na pomoći pri svakom mom padu kao i pogledima punih ponosa na moj i najmanji uspjeh. Zbog vas sam tu gdje jesam.

SADRŽAJ

UVOD

Poznate riječi engleskog filozofa Herberta Spencera (1820. – 1903.): *„Cilj školovanja nije znanje nego akcija“* već više od stoljeća zaokupljaju misli brojnih umova koji su svoje vrijeme posvetili proučavanju i unaprijeđenju obrazovnog sustava. Ovo je jedan od citata koji su mijenjali način na koji se, u ne tako dalekoj prošlosti, gledalo na učenje i poučavanje. U prošlim vremenima, obrazovanje je u središte poučavanja smjestilo informacije, pojmove, činjenice i događaje. U svijetu koji konstantno raste i u kojem je zaista nemoguće pratiti količinu novih informacija, prioritet obrazovnog sustava se mijenja i u centar obrazovanja ulazi učenik koji dobivene informacije mora moći znati koristiti.

Svijet u kojem danas živimo razvijao se tijekom tisućljeća i svo znanje koje smo kao čovječanstvo skupili vrlo je lako dostupno širokom uporabom interneta. Dakle, informacije koje su nekoć bile teško dostupne i memorirane su kao vrlo važne, danas su udaljene tek klikom miša. No što to čini djeci koja tek počinju otkrivati svijet u kojem žive? Što je s radosti otkrivanja kroz uspjehe i pogreške? U želji da djeci omogućimo što više znanja radost otkrivanja nerijetko uskraćujemo i svi oni osjećaji, vještine i sposobnosti koje želimo da djeca osjete i razviju izgube se u moru informacija. U nastavi matematike želimo da djeca dožive radost istraživanja i otkrivanja koji ispunjavaju. Kako bismo to omogućili koristimo različite materijale, brojne modele i situacije osmišljene od strane stručnjaka kojima bismo trebali moći potaknuti djecu da vlastitim razmišljanjem donose zaključke i rješavaju matematičke probleme i probleme iz svakodnevnog života koje s njima mogu poistovjetiti.

Na početku rada, u poglavljima *Što su didaktički modeli?* i *Didaktičke situacije,* opisat ćemo što su didaktički modeli i situacije općenito te koja je uloga nastavnika u takozvanoj aktivnoj nastavi. U poglavljima koja zatim slijede opisat ćemo konkretne didaktičke modele. Redom ćemo opisivati Cuisenaireove štapiće, model vage, algebarske i mnogokutne pločice i geoploču. Uz prikladnu sliku i primjere aktivnosti, nadamo se predstaviti didaktičke modele kao korisne alate u nastavi matematike. Za svaku od aktivnosti predložit ćemo način rada, navesti potreban materijal, odrediti njeno trajanje i opisati tijek kojim se ona provodi. Sve to opisat ćemo u kontekstu odgovarajućeg matematičkog sadržaja, odnosno matematičke teme koju je praktično obraditi pomoću nekog od navedenih didaktičkih modela. Slike unutar aktivnosti izrađene su u programu *Geogebre*, a za ostale slike izvor je naveden u poglavlju *Literatura*. Prije nego prijeđemo na konkretne primjere didaktičkih modela, ukazat ćemo na njihovu potrebu u nastavi matematike.

1. DIDAKTIČKI MODELI I SITUACIJE

1.1 Što je didaktika?

Riječ *didaktika* je grčkog podrijetla i znači *poučavanje*. U 17. stoljeću češki filozof, pedagog i teoretičar Jan Komensky definirao ju je kao *vještinu o poučavanju bilo koga o bilo čemu*. Dugo su se pod istim pojmom skrivali odgoj i obrazovanje koji su u 19. stoljeću izdvojeni kao zasebni pojmovi. Danas se didaktika smatra granom pedagogije koja se bavi proučavanjem općih zakonitosti obrazovanja na način da promatra i zaključuje o stalnim uzročno – posljedičnim vezama i odnosima u procesu stjecanja znanja. Njen glavni zadatak je proučavanje i otkrivanje zakonitosti obrazovanja ličnosti. (Poljak, 1984.)

Didaktičke modele bismo intuitivno mogli definirati kao alate učenja i poučavanja. Ipak, ako želimo biti precizniji, didaktičke modele nećemo tek tako svesti na tri riječi jer oni nisu samo fizički opipljive stvari već mnogo više. Naravno, mnoge *stvari* možemo koristiti u nastavi kako matematike tako i drugih nastavnih predmeta, ali to ih ne čini istovremeno didaktičkim modelima. Didaktički modeli proizlaze iz nastavnikove sposobnosti da prepozna učenikovu potrebu da uči matematiku iz vlastitog iskustva. Izdvajamo tri vještine koje nastavnik mora posjedovati kako bi neku, naizgled običnu stvar, pretvorio u didaktički model. Prva vještina koju nastavnik matematike mora posjedovati je dobro poznavanje dubine i širine matematičkog sadržaja koje učenici promatraju, koje istražuju i koje će na kraju i sami moći primjenjivati. Primjerice, nastavnik ne može svoje učenike poučavati o sličnosti trokuta ako ne zna koristiti omjere ili poučavati o derivaciji funkcije, a ne razumije pojam limesa. Druga vještina koju nastavnik matematike mora posjedovati je razumijevanje načina na koji učenici uče matematiku i to na individualnoj razini. Nastavnik uvijek mora biti svjestan dobi, intelektualnih sposobnosti, predznanja i motivacije učenika koje poučava matematiku. Dakle, ukoliko nastavnik matematike počinje poučavati u prvom razredu srednje škole mora uzeti u obzir raznolikosti predznanja svojih učenika. Uz to, nastavnik mora potaknuti razvijanje učenika unutar njegovih mogućnosti koristeći znanja i sposobnosti koje je stekao u ranijim godinama obrazovanja, a ne ga poučavati isključivo načinom koji je njemu kao nastavniku *bliži*. Treća, no ne i najmanje važna vještina koju nastavnik matematike mora posjedovati je moći odabrati strategije i metode kojima će poboljšati i potaknuti učenje nastavnog sadržaja. Odnosno, nastavnik mora moći prilagoditi matematički sadržaj tako da učenici vlastitim razmišljanjem, vođeni nastavnikovim uputama i samostalnim istraživanjem analiziraju, povezuju i donose zaključke. Naravno, nastavnik mora imati mnogo drugih vještina koje proizlaze iz njegove ličnosti kao što su strpljivost, razumijevanje, kreativnost, objektivnost, snalažljivost te brojne matematičke kompetencije i komunikacijske vještine, no ove tri izdvojene vještine gotovo da obuhvaćaju sve ostale. Didaktički modeli su rezultat spajanja ovih izdvojenih triju vještina. Ti modeli su alati koje nastavnici koriste kako bi provodili takozvanu aktivnu nastavu, nastavu otkrivanja. (Van de Walle, Karp, Bay –Williams, 2010.)

1.2 Što je aktivna nastava?

Nastava kakvoj danas težimo jest nastava bazirana na što samostalnijem učenikovom radu korištenjem što više osjetila, na brojnim primjerima, u radnim skupinama, razmjenom ideja, suradnjom i donošenjem zaključaka iz vlastitog iskustva. Naglasak se stavlja na otkrivanje, a ne na uvježbavanje, memoriranje i reproduciranje. Za aktivnu nastavu potrebna je pozitivna i podupiruća okolina. To podrazumijeva da ćemo uz nastavu matematike vezati riječi poput istražiti, opravdati, razviti, potvrditi, opisati, objasniti, koristiti, riješiti, otkriti, predvidjeti i mnoge druge umjesto izračunati, odgovoriti ili raditi. Posebno, pozitivno nastavno okruženje podrazumijeva slobodno izražavanje i iznošenje ideja bez kritiziranja ili naglašavanja pogrešaka. Odnosno, opuštenu atmosferu u kojoj se učenici ne ustručavaju sudjelovati slušanjem, komentiranjem, iznošenjem ideja, argumentiranjem i kritičkim razmišljanjem. Pod podupirućom okolinom također možemo smatrati i uređenje prostora u kojem se nastava odvija. Primjerice: učionice oslikane matematičkim likovima, sat na kojem su umjesto prirodnih brojeva određeni racionalni brojevi, redovi i stupci klupa označeni brojevima kao svojevrsni koordinatni sustav i slično stvara poticajno radno okruženje i potiče učenike da matematiku žive, a ne samo uče. Dakle, didaktički modeli su aktivnosti kojima se postiže aktivna nastava u kojoj je u središtu pažnje učenik i njegova aktivnost, a ne nastavni sadržaj.

1.3 Didaktičke situacije

Kada govorimo o didaktičkim situacijama zapravo govorimo o osmišljenim aktivnostima koje gradimo oko didaktičkih modela. Nastavnik ili drugi edukacijski stručnjak osmislit će određenu situaciju, odnosno problemski zadatak koji će učenik (par učenika ili skupina učenika) riješiti na način da do rješenja dođe vođenim postupkom u kontroliranim uvjetima. Opisivanjem didaktičke situacije na ovaj način, cijeli proces zvuči poput kemijskog eksperimenta u laboratoriju što zapravo nije daleko od istine. Svaki nastavnik, kako matematike tako i drugih nastavnih predmeta, mora biti svjestan da svaka skupina učenika, svako područje proučavanja i svaki pristup nastavnom sadržaju zahtijevaju određenu pažnju. Baš kao i u laboratoriju kemičara, loša procjena može dovesti do vrlo neugodnih posljedica po znanju učenika. Iz tog razloga vrlo je važno dobro educirati nastavnike kako bi pažljivo birali didaktičke situacije u kojima će učenici ostvarivati zadane obrazovne ciljeve. Nastavnik će u osmišljavanju didaktičkih situacija brinuti o nekoliko čimbenika rada. Prvo će biti važno odrediti koje to ishode učenja učenik mora moći ispuniti po završetku aktivnosti. Ti ishodi moraju biti ostvarivi u toj didaktičkoj situaciji i moraju biti postupno uvođeni u učenikov proces otkrivanja novih saznanja. Pri određivanju ishoda moramo paziti da oni budu realizirani u vremenskom razdoblju koje odgovara vremenu u kojem se održava nastavni sat. Drugi važni čimbenik didaktičke situacije je odrediti koji će način rada najbolje odgovarati odabranim obrazovnim ishodima: samostalni rad, rad u parovima ili rad u skupinama. Svaki od ovih oblika rada ima svoje pozitivne i negativne strane, a ovisno o nastavnom sadržaju nastavnik odabire najprikladniji. Treći čimbenik koji kao nastavnici moramo osigurati jest materijal koji će učenici u otkrivanju ili uvježbavanju koristiti. Taj materijal obuhvaća didaktičke modele: štapiće, pločice i drugo, zatim radne listiće, pisaći pribor i slično. Prilikom izvođenja aktivnosti vrlo je važno voditi računa o predznanju učenika te odabrati didaktičku situaciju primjerenu učenikovoj dobi, iskustvu i sposobnostima. Didaktičke situacije su centar obrazovnog procesa u kojem učenici vlastitim iskustvom, istraživanjem, analiziranjem i zaključivanjem, ostvaruju obrazovne ishode. Izdvojimo 5 glavnih koraka na koje svodimo proces poučavanja matematike didaktičkim situacijama.

1.3.1 Matematika u 5 koraka

Koraci koje će učenici prelaziti na svojem putu učenja matematike uključuju:

1. Rješavanje problema
2. Analiziranje i zaključivanje
3. Komunikacija
4. Povezivanje
5. Reprezentiranje

Za učenike je najznačajniji način kojim otkrivaju matematiku *rješavanje problema*. Upravo se ono smatra najvažnijom metodom poučavanja koju nastavnici mogu provoditi. Rješavanjem problema učenici *analiziraju*: izdvajaju problem, nude različita rješenja, logički određuju koje informacije su ključne za rješavanje problema, izbacuju višak informacija, zaključuju o postojanju rješenja te o njihovoj smislenosti. Na ovaj način učenici uče važnost opravdavanja ideja i rješenja logičnim argumentiranjem i *zaključivanjem*. Sve to pridonosi komunikaciji, kako u matematici tako i izvan nje. U svrhu učenja matematike kao dijela svakodnevnog svijeta (integracija matematike u sve sfere života), *komunikacija* unutar matematike omogućava učenicima da se izražavaju usmeno, pismeno, opisivanjem i objašnjavanjem. Takav način učenja potiče suradnju, ali i toleranciju prema iskazanom suprotnom mišljenju. Verbalizacijom učenici jedni drugima učvršćuju ideje te se međusobno potiču na razmišljanje i uočavaju potrebu za argumentacijom. Od svega do sada navedenog dolazimo do *povezivanja* matematičkog sadržaja sa svijetom oko sebe, i unutar i izvan matematike. Nastavnicima matematike posebno je drago kada učenici povezuju sadržaje unutar matematike koristeći argumente iz već stečenog znanja, ali ono što je svakako cilj jest da se učenici ne boje zakoračiti i u svakodnevicu i svoje odgovore potražiti tamo. Posljednji, ali nikako ne manje važan korak u poučavanju matematike jest razviti učenicima osjećaj za organizaciju i vizualizaciju. Korištenje simbola, kartica, grafova, dijagrama, slika, boja, veličina i oblika služi lakšem učenju i razumijevanju sadržaja i postupaka koji se u matematici koriste. *Reprezentiranje* čini svakog učenika nastavnikom i ta zamjena uloga u učionici pridonosi učenikovom samopouzdanju i preuzimanju inicijative. (Van de Walle, Karp, Bay –Williams, 2010.)

1.4 Nastavnik kao prevoditelj

Ako matematiku shvatimo kao zaseban jezik, što je sasvim prirodno jer postoji cijeli niz znakova kojima se opisuju njeni pojmovi i zakoni, tada nastavnika matematike možemo shvatiti kao svojevrsnog prevoditelja. Matematički sadržaj je učenicima često vrlo teško razumljiv kada se s njim u koštac uhvate samostalno pa je zadaća nastavnika prevesti *neshvatljivu* matematičku simboliku u oblik koji je učenicima razumljiv. Dakle, uloga nastavnika je odabrani matematički sadržaj prilagoditi, prevesti ili transformirati u didaktički model pomoću kojeg će učenici savladati matematički sadržaj u pet koraka: rješavanjem problema, analiziranjem i zaključivanjem, komunikacijom, povezivanjem i reprezentiranjem. Ipak, nastavnik matematike pri održavanju nastave s didaktičkim modelima mora biti oprezan i obratiti pažnju kako vodi svoje učenike k određenom konceptu. Previše vođenja, odnosno previše uputa i demonstriranja može rezultirati oponašanjem. Nastavnikove riječi: „*radite kako ja radim*“ zapravo znače da učenik oponaša ili ponavlja nastavnikove radnje što ne potiče analiziranje, zaključivanje i povezivanje matematičkog sadržaja. Učenici će slijepo početi slijediti nastavnikovo ponašanje i neće doći do zaključaka koje želimo da sami istraže. S druge strane, premalo vođenja od nastavnika dovodi do neproduktivnog i nesistematičnog istraživanja što može uzrokovati pogreške u zaključivanju, neuspješno analiziranje te dovesti do nezainteresiranosti i odustajanja od matematičkog sadržaja. (Van de Walle, Karp, Bay –Williams, 2010.)

1.5 Tipovi didaktičkih modela

Ovisno o tome što poučavamo, didaktičke modele prilagođavamo bojom, oblikom, veličinom, količinom, načinom korištenja, kombiniranjem različitih osjetila i slično. Svrha raznolikosti didaktičkih modela jest potaknuti različita osjetila u učeniku kako bi matematiku povezao sa svijetom oko sebe. Tako na primjer učenik može učiti matematiku promatranjem, osluškivanjem, dodirivanjem, oblikovanjem, kretanjem... Učenje koje potiče korištenje više osjetila je učinkovitije, dugoročnije ostaje uz učenika i omogućuje razvoj različitih dijelova mozga.

Najvažnije osjetilo u čovjeka je osjetilo vida. Čovjek najviše doživljava promatranjem jer kao apstraktan mislioc može u svojem umu stvarati slike, analizirati i proučavati, odnosno može vizualizirati. Ipak, moramo voditi računa da u školi nemamo formiranu osobu koja lako barata informacijama i stvara jasne slike u glavi. U školi imamo djecu koja tek uče kako promatrati stvari, kako analizirati i proučavati te kako na kraju donositi zaključke. Iz tog razloga nastava matematike u školi trebala bi se oslanjati i na druga osjetila kao što su sluh, dodir i pokret. Slike i pisani simboli često će prevladavati u nastavi matematike kao didaktički modeli upravo zbog vizualne predodžbe matematičkog sadržaja. Ipak, ne zaboravimo da didaktički model ne prikazuje gotovi matematički koncept već stvara uvjete koji dovode do otkrivanja i povezivanja matematičkih pojmova i postupaka unutar učenikova uma. Navedimo nekoliko primjera vizualnih didaktičkih modela. Vizualne modele možemo podijeliti u nekoliko kategorija od kojih izdvojimo najčešće korištene: model mjernih jedinica, model površine i model skupine objekata.

Kao didaktički model mogu poslužiti različiti objekti i materijali, primjerice: različite duljine špage ili raznobojne trakice različitih duljina. Takve objekte svrstavamo u modele mjernih jedinica, odnosno konkretnije u modele duljine. Osim ovih modela, često se kao modeli mjernih jedinica koriste i modeli vremena, novca, zapremine i mase. Jedan od modela duljine su Cuisenaireovi štapići, tvornički izrađeni modeli za koje ćemo opisati nekoliko učeničkih aktivnosti. Cuisenaireovi štapići služe istraživanju matematičkih operacija i pojmova u nižim razredima osnovne škole. Od primjera modela površine, spomenimo algebarske pločice pomoću kojih učenici istražuju kako računati s algebarskim izrazima. Spomenimo i mnogokutne pločice izrađene u obliku pravilnih mnogokuta koje najčešće koristimo tijekom uvođenja pojma razlomka. Još jedan istaknuti model površine je geoploča. Bilo da je kružna ili kvadratna, geoploča je praktičan model jer njome učenici dobivaju osjećaj za duljinu, površinu, slične i sukladne oblike u prostornom razmještaju i slično. Kasnije ćemo se nešto više posvetiti ovim modelima i dati konkretne primjere aktivnosti u kojima ih možemo upotrijebiti. Modeli skupine objekata su didaktički alati kojima učenici uče dijeljenje, upoznaju vjerojatnost i statistiku u nižim razredima osnovne škole. U taj model ulaze različite figurice u raznim bojama koje možemo razvrstavati poput bombona ili špekula. *Slika 1.1* prikazuje nekoliko primjera didaktičkih modela. (Čižmešija, A.)

Slika 1.1: Cuisenaireovi štapići (lijevo), algebarske pločice (sredina), geoploča (desno)

Ne zaboravimo spomenuti primjenu tehnologije u nastavi, odnosno kalkulator i računalo kao vrlo važne alate koji imaju veliku ulogu u poučavanju. Mnogi računalni programi osiguravaju raznolikost prikaza matematičkog sadržaja. Osobito je to važno u geometriji i prostornom snalaženju koje učenici teže vizualiziraju. Variranje je vrlo važan pojam u učenju. Ono omogućuje uočavanje uzroka i posljedica, raznolikost uzoraka, međusobnu ovisnost likova, tijela, ravnina i slično. Učenike treba poticati da samostalno istražuju koristeći računalo jer znatiželja pomaže izgradnji jasne slike sadržaja koji se uči.

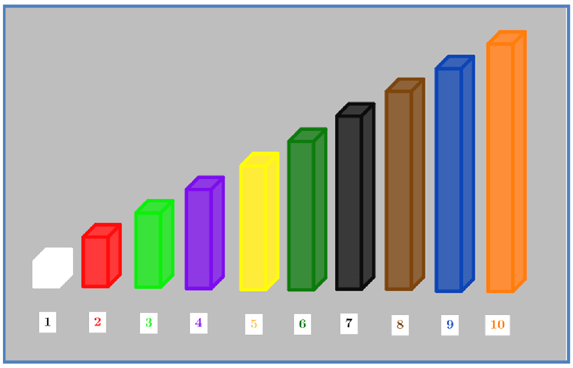
Prema teoriji o višestrukim inteligencijama američkog psihologa Howarda Gardnera najvažnija od devet inteligencija jest tjelesno – kinestetička inteligencija. Ova vrsta inteligencija očituje se upotrebom tijela, odnosno učenje *pokretom* smatra se najučinkovitijim oblikom učenja. Za ovakvu vrstu učenja kažu da je motivirajuća, zabavna i ispunjena emocijama, a poznato je da je učiti najlakše ako uz učenje vežemo osjećaje. Ovakvo učenje aktivira više senzornih područja te poboljšava koncentraciju i pažnju učenika što je vrlo važno u današnjim školama gdje se nastavnici sve češće susreću s učenicima koji imaju poremećaj pažnje ili hiperaktivni poremećaj (ADHD). U nastavi matematike *pokret* možemo iskoristiti na više načina ovisno o matematičkom sadržaju koji se poučava. Prilikom izvođenja različitih pokreta, čovjek koristi mnoge druge osjete primjerice vid, sluh ili dodir. Jedan od načina na koji možemo iskoristiti *pokret* jest koristiti ga u smislu izrađivanja, odnosno

učenici mogu rukama izrađivati, oblikovati, razvrstavati, preslagivati, crtati i konstruirati. Primjerice, učenici mogu preslagivati pločice koje predstavljaju konkretne brojeve ili varijable, izrađivati geometrijska tijela i likove, koristiti alate poput metra, šestara i trokuta; zaključivati o volumenu korištenjem tekućine i prelijevanjem, a kretanjem se mogu objašnjavati pojmovi poput vektora, simetrije, rotacije i sličnog. Naglasimo da unutar nastave matematike imamo satove ponavljanja i uvježbavanja na kojima također možemo koristiti pokret. Postoji verzija igre *dan – noć* koja je učenicima poznata još iz predškolskih dana, a koju možemo iskoristiti kada želimo da učenici odluče slažu li se ili ne s nekom izrečenom tvrdnjom. U nastavku ovakvog ponavljanja nastavnik može otvoriti raspravu s učenicima koji se s nekom izrečenom tvrdnjom slažu i s učenicima koji smatraju da izrečena tvrdnja nije točna. Uz argumentiranje svojih odgovora, ovakav način rada je vrlo produktivan.
Primijetimo da didaktički model sam ne može dovesti učenika do željenih zaključaka već ključnu ulogu u poučavanju ima nastavnik. Usmenom predajom, otvorenom komunikacijom i korištenjem matematičkog jezika te upotrebom odgovarajućeg didaktičkog modela, nastavnik je taj koji će učenika dovesti do željenog zaključka. Čovjek je društveno biće i ostvaruje se u komunikaciji pa stoga ne smijemo zanemariti osjet sluha, odnosno komunikaciju na razini učenik – učenik i učenik – nastavnik. (Butorac, Ž., 2010.)

U sljedećim poglavljima opisat ćemo nekoliko aktivnosti za neke od spomenutih didaktičkih modela. Započinjemo s Cuisenaireovim štapićima, jednim od modela duljine koji se često koriste u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. Pokazat ćemo kako se ovaj model može koristiti u različitim područjima matematike poput uvođenja pojmova poput najvećeg zajedničkog djelitelja ili najmanjeg zajedničkog višekratnika, istraživanja nejednakosti trokuta ili opsega geometrijskih likova i slično te navesti obrazovne ishode koje njime možemo ostvariti.

2. CUISENAIREOVI ŠTAPIĆI

Jedna od standardnih fizičkih realizacija modela duljine su i tzv. Cuisenaireovi štapići. To je niz od deset štapića oblika kvadra sukladnih osnovki. Najniži od njih oblika je kocke, a svaki sljedeći dvostruke, trostruke, ..., deseterostruke visine u odnosu na prvi štapić. Uzmemo li da je visina prvog štapića jedinične duljine, štapići svojim visinama redom predstavljaju prirodne brojeve 1, 2, 3, ..., 10. Lakše vizualno razlikovanje štapića postiže se i njihovim različitim bojama. Standardno obojeni Cuisenaireovi štapići prikazani su na *slici 2.1*.



Slika 2.1 Standardni set Cuisenaireovih štapića

Standardni set od deset Cuisenaireovih štapića osmislio je belgijski učitelj matematike i glazbe Emile-Georges Cuisenaire (1891. – 1975.). Iznenađen kako njegovi učenici zainteresirano uče glazbu, a matematika im djeluje teško i nezanimljivo, izradio je set drvenih štapića obojenih u različite boje kako bi olakšao učenje aritmetike. Ipak, svoju popularnost ovaj didaktički model duguje egipatskom metodičaru Calebu Gattegnou (1911. – 1988.) koji je pri prvom susretu sa šarenim štapićima bio impresioniran lakoćom kojom učenici pomoću njih računaju. Budući da se bavio matematikom i poučavanjem matematike te radio na poboljšanju izvedbe nastave matematike u svojoj sredini, prepoznao je vrijednosti ovih štapića te ih popularizirao i proširio po školama pod njihovim sadašnjim nazivom. Već šezdesetih i sedamdesetih godina dvadesetog stoljeća Cuisenaireovi štapići postali su nezaobilazno učilo u nastavi aritmetike širom svijeta.

Danas se najčešće koriste u primarnom matematičkom obrazovanju (niži razredi osnovne škole), kao model pomoću kojeg učenici otkrivaju temeljne računske operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja te razvijaju prostorni zor. Međutim, Cuisenaireovi štapići predstavljaju izvrsno didaktičko pomagalo i u različitim sadržajnim kontekstima, odnosno situacijama u predmetnoj nastavi matematike. Primjerice, u nastavi aritmetike pomoću njih učenici mogu vizualizirati pojam najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju ili više prirodnih brojeva, pojam razlomka, ekvivalentnih razlomaka, računskih operacija s razlomcima, kao i pojam omjera i postotka. U nastavi algebre Cuisenaireovi štapići važni su pri učeničkom otkrivanju svojstava algebarskih izraza i operacija s njima, a na različite se načine mogu upotrijebiti i u nastavi geometrije, pri osvještavanju i otkrivanju obilježja, svojstava i mjera ravninskih i prostornih oblika. Glavna prednost ovog učila u njegovoj je vizualnosti i opipljivosti, čime omogućava uključivanje svih učeničkih osjetila u proces učenja.

Učenicima je potrebno neko vrijeme dok se naviknu na štapiće, ali jednom kad se upoznaju s njima s lakoćom će prepoznavati duljinu prema boji štapića i obratno. U skladu s tim učenici će prikazivati matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja Cusenaireovim štapićima preko kojih će prijeći na prikaz riječima, slikama, crtežima, tablicama, brojevima, simbolima i misaono te prelaziti iz jednog prikaza u drugi ovisno o situaciji. Pomoću Cuisenarieovih štapića učenici će izražavati svoje ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom te saslušati i razmjenjivati ideje i objašnjenja surađujući u skupinama. Ovim načinom rada učenici će postavljati matematici svojstvena pitanja o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja te propitivati smislenost postupaka i rješenja matematičkih zadataka. Učenici će povezati matematiku s vlastitim iskustvom te primijeniti matematičke pojmove i postupke u različitim kontekstima.

Model Cuisenaireovih štapića učenicima je vrlo zanimljiv jer je opipljiv i vizualan. Mana ovog modela je što je teško provjeriti da li učenici na odgovarajući način upravljaju štapićima jer je vremenski teško svakom učeniku pojedinačno pomoći pri prikazu. Ipak, korištenjem tehnologije i ovaj problem možemo riješiti. Projiciranjem postupaka i rješenja zadataka uz pomoć računalnih programa koji dopuštaju prikaz štapića ili pločica koji imitiraju Cuisenaireove štapiće, svi učenici dobivaju pregled mogućih rješenja. Ukoliko nastavniku nisu dostupni štapići, nastavnik u nastavi može upotrijebiti trakice u boji. Ipak, što je fizički model opipljiviji to će učenicima biti jasnija slika onoga što proučavaju. Veličina štapića daje potrebnu prostornu dimenziju koja učenicima često nedostaje što se primjećuje prilikom poučavanja matematičkog sadržaja iz područja geometrije. Što se tiče broja štapića potrebnih za rad, on ovisi o nekoliko faktora kao što su broj učenika, veličina brojeva, nizova i likova/tijela koja upotrebljavamo u pojedinoj aktivnosti. Ukoliko nam je broj Cuisenaireovih štapića ograničen, učenike je dobro podijeliti u skupine gdje će zajedno istraživati te istovremeno diskutirati o danom problemu. Danas su Cuisenaireovi štapići lako dostupni kao proizvod tvrtki koje se bave isključivo izradom ovog didaktičkog pomagala. Naglasimo da su Cuisenaireovi štapići također vrlo korisni u radu s učenicima koji imaju disleksiju, diskalkuliju ili neku drugu teškoću koja im otežava napredak u matematici. Također, učenici koji teško pamte brojeve lakše će donositi zaključke proučavanjem oblika i vizualizacijom koristeći Cuisenaireove štapiće.

Na sljedećim stranicama navest ćemo nekoliko aktivnosti s Cuisenaireovim štapićima koje će nastavnicima poslužiti kao pomoć pri poučavanju novog matematičkog materijala ili poslužiti za formativno vrednovanje učenika.

2.1 Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva

Prema aktualnom Nastavnom planu i programu za osnovnu školu, s problemom najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika prirodnih brojeva učenici se prvi put susreću u petom razredu, i to u sklopu teme *Djeljivost prirodnih brojeva*. To je druga nastavna tema u petom razredu i slijedi temu *Prirodni brojevi* tijekom koje učenici utvrđuju osnovne koncepte koje povezujemo s prirodnim brojevima i dekadskim sustavom te računske operacije s prirodnim brojevima već obrađene u razrednoj nastavi (misaono i pisano zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje prirodnih brojeva). Po uspješno završenom procesu učenja djeljivosti prirodnih brojeva, od učenika se očekuje da:

- razlikuje djelitelje i višekratnike prirodnog broja
- određuje djelitelje i višekratnike prirodnog broja
- razlikuje proste i složene brojeve
- određuje rastav prirodnog broja većeg od dva na proste faktore
- određuje zajedničke djelitelje i višekratnike te najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik dvaju i više prirodnih brojeva
- primjenjuje djeljivost prirodnih brojeva u situacijama iz svakodnevnog života i matematike.

U sljedećim dvjema aktivnostima pokazat ćemo primjenu Cuisenaireovih štapića u aktivnostima uvođenja pojmova najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju prirodnih brojeva. Polazeći od učenicima bliske kontekstualizirane situacije iz svakodnevnog života, aktivnosti im omogućavaju da, radeći u skupinama, slaganjem štapića istražuju rješenja zadanog problema te postupnom matematizacijom otkriju njima nove matematičke pojmove. Na ovaj način učenicima će se novi pojmovi pojaviti prirodno i neće imati teškoća prilikom razumijevanja njihovog značenja. Obje aktivnosti prethode uvođenju rutinskog algoritma za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika prirodnih brojeva rastavom prirodnih brojeva na proste faktore. Potrebu za uvođenjem takvog postupka učenici će lakše razumjeti ukoliko se prethodno uvjere da postupak ispisivanja zajedničkih djelitelja, odnosno višekratnika za veće brojeve nije efikasan.

2.1.1 Aktivnost: *Najveći zajednički djelitelj*

Radeći u četveročlanim skupinama, modeliranjem i analizom kontekstualizirane situacije uz pomoć Cuiesnaireovih štapića, učenici će otkriti pojam zajedničkih djelitelja i najmanjeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva te istražiti njihova svojstva. Za svaku skupinu učenika potreban je komplet Cuisenaireovih štapića koji se sastoji od barem 20 štapića duljine 1, 10 štapića duljine 2, 10 štapića duljine 3, 10 štapića duljine 4, 10 štapića duljine 5, 5 štapića duljine 6, 5 štapića duljine 7, 5 štapića duljine 8, 5 štapića duljine 9 i 5 štapića duljine 10. Uz njih, svaki učenik na početku aktivnosti dobiva i odgovarajući radni listić s opisom situacije i zadacima za istraživanje. U nedostatku pravih štapića, nastavnici se pri izvođenju aktivnosti mogu poslužiti njihovim dvodimenzionalnim prikazom – papirnatim trakama pravokutnog oblika, dimenzija 1 cm × n cm, za n = 1, ... , 10 (traka dimenzija 1 cm × n cm predstavlja Cuisenaireov štapić duljine n).

Aktivnost započinje podjelom učenika u heterogene četveročlane skupine i najavom da će zajedničkim radom i promišljanjem pomoći Matku u nabavi materijala za obnovu povrtnjaka. Potom slijedi podjela radnih listića učenicima, pri čemu su radni listići jednaki za sve učenike u istoj skupini, a među skupinama se razlikuju samo u brojčanim podacima za duljine a i b dviju strana povrtnjaka. Na razini razrednog odjela pritom je potrebno obuhvatiti sva tri karakteristična slučaja međusobnog odnosa prirodnih brojeva a i b, gdje je $a < b$, čije je zajedničke djelitelje potrebno odrediti.

Slučajevi su:

- brojevi a i b su relativno prosti, tj. $M(a,b) = 1$,
- broj a je djelitelj broja b, tj. $M(a,b) = a$,
- brojevi a i b nisu ni relativno prosti, niti je prvi djelitelj drugoga, tj. $1 < M(a,b) < a$.

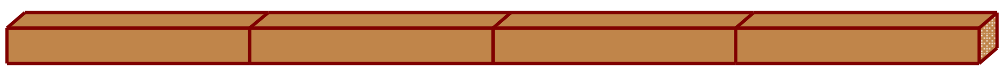
Radni listić 2.1 predstavlja primjer materijala na kojemu će raditi jedna četveročlana skupina učenika (npr. skupina A).

Radni listić 2.1: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.1.1. – prva stranica listića

Radni listić – skupina A

Pažljivo samostalno pročitaj tekst iznad slike pa ga prokomentiraj s ostalim članovima skupine.

Dvije strane svog povrtnjaka, duljina 6 m i 9 m, Matko želi obrubiti drvenim gredama jednake duljine, slažući ih jednu do druge kao na slici. Grede namjerava kupiti u najbližoj trgovini građevnim materijalom, u čijoj su ponudi grede duljina 1 m, 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m, 8 m, 9 m i 10 m. Pritom želi biti štedljiv pa u obzir dolaze samo grede za koje pri obrubljivanju neće ostati viška materijala i koje neće morati dodatno skraćivati.



Zadatak 1.
Radeći u skupini, uz pomoć štapića odgovori na sljedeća pitanja. Jedan štapić duljine 6 neka predstavlja rub povrtnjaka duljine 6 m, a jedan štapić duljine 9 rub povrtnjaka duljine 9 m. Svi ostali štapići neka predstavljaju grede odgovarajućih duljina.

a) Gredama kojih sve duljina Matko može obrubiti stranu povrtnjaka duljine 6 m?

____

b) Gredama kojih sve duljina Matko može obrubiti stranu povrtnjaka duljine 9 m?

____

c) Kupi li u trgovini sve grede jednake duljine, Matko će dobiti popust. Koje duljine greda odgovaraju za obrubljivanje i jedne i druge strane povrtnjaka?

____

d) Koja je najmanja duljina greda kojom Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka?

____

e) Koja je najveća duljina greda kojom Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka?

____

Radni listić 2.2: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.1.1. – druga stranica listića

Zadatak 2.
Pogledaj brojeve koji se pojavljuju u pitanjima i odgovorima u Zadatku 1 pa radeći u skupini odgovori i na sljedeća pitanja.

a) Što su broju 6 brojevi iz odgovora na pitanje a) iz Zadatka 1?

____

b) Što su broju 9 brojevi iz odgovora na pitanje b) iz Zadatka 1?

____

c) Što su brojevima 6 i 9 brojevi iz odgovora na pitanje c) iz Zadatka 1? Kako bi ih nazvao/la?

____

d) Što je brojevima 6 i 9 broj iz odgovora na pitanje d) iz Zadatka 1? Kako bi ga nazvao/la?

____

e) Što je brojevima 6 i 9 broj iz odgovora na pitanje e) iz Zadatka 1? Kako bi ga nazvao/la?

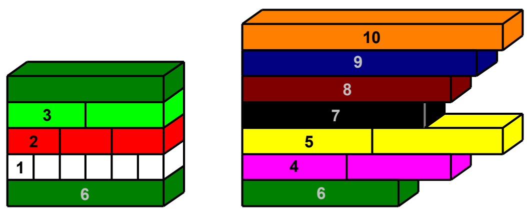
____

Radni listići za ostale učeničke skupine od ovog se listića razlikuju samo u brojčanim podacima a i b. Uvažavajući zastupljenost sva tri moguća odnosa brojeva a i b, za razredni odjel s 24 učenika oni mogu biti npr. kao u *tablici 2.1*. Pritom brojevi a i b ne bi smjeli biti veći od 10, kako to učeničkom istraživanju ne bi dodalo nepotreban kognitivni teret te kako bi Cuisenaireovi štapići mogli biti primijenjeni u punoj mjeri (najdulji Cuisenaireov štapić duljine je 10).

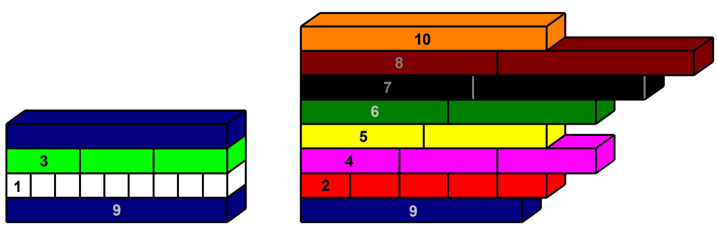
Tablica 2.1: Podaci za radne listiće za Aktivnost 2.1.1.

SKUPINA	BROJEVI *a* I *b*	SKUPINA	BROJEVI *a* I *b*
Skupina A	6 i 9	Skupina D	5 i 10
Skupina B	4 i 10	Skupina E	4 i 9
Skupina C	4 i 8	Skupina F	7 i 8

Rad na radnim listićima započinje čitanjem teksta sa situacijom. Svaki učenik najprije ga mora pročitati samostalno i potom svoje razumijevanje potvrditi u diskusiji s ostalim učenicima u skupini. Važno je da učenici uoče sve zadane brojčane podatke i povežu ih s Cuisenaireovim štapićima odgovarajućih duljina. Nakon toga slijedi rješavanje Zadatka 1, tj. istraživanje u kojem učenici metodom pokušaja i promašaja pokušavaju štapić duljine *a* i štapić duljine *b* popločati štapićima jednakih duljina, bez rezanja tih štapića. Svaki uspješni pokušaj zapisuju u radni listić. Nastavnik pritom nadzire rad skupina i osigurava uključenost u rad svakog učenika, navodeći ih na podjelu posla u skupini (npr. da dvoje po dvoje učenika rade na obrubljivanju jednog ruba povrtnjaka, odnosno na jednom broju) te sustavnost u istraživanju, tj. da redom istraže popločavanja štapićima svih duljina od 1 do 10. Sva uspješna i neuspješna popločavanja za skupinu A nalaze se na *slici 2.2* i *slici 2.3*.



Slika 2.2 Sva uspješna i neuspješna popločavanja štapića duljine 6



Slika 2.3 Sva uspješna i neuspješna popločavanja štapića duljine 9

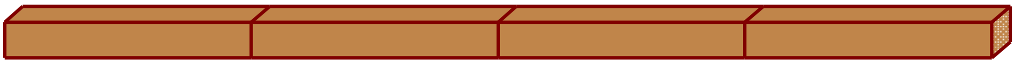
Po završetku istraživanja uz pomoć Cuisenaireovih štapića, učenici popunjavaju radni listić rješenjem Zadatka 1.

Radni listić 2.3: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 2.1.1. – prva stranica listića

Radni listić – skupina A

Pažljivo samostalno pročitaj tekst iznad slike pa ga prokomentiraj s ostalim članovima skupine.

Dvije strane svog povrtnjaka, duljina 6 m i 9 m, Matko želi obrubiti drvenim gredama jednake duljine, slažući ih jednu do druge kao na slici. Grede namjerava kupiti u najbližoj trgovini građevnim materijalom, u čijoj su ponudi grede duljina 1 m, 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m, 8 m, 9 m i 10 m. Pritom želi biti štedljiv pa u obzir dolaze samo grede za koje pri obrubljivanju neće ostati viška materijala i koje neće morati dodatno skraćivati.



Zadatak 1.

Radeći u skupini, uz pomoć štapića odgovori na sljedeća pitanja. Jedan štapić duljine 6 neka predstavlja rub povrtnjaka duljine 6 m, a jedan štapić duljine 9 rub povrtnjaka duljine 9 m. Svi ostali štapići neka predstavljaju grede odgovarajućih duljina.

a) Gredama kojih sve duljina Matko može obrubiti stranu povrtnjaka duljine 6 m?

Matko je može obrubiti gredama duljine 1 m ili duljine 2 m ili duljine 3 m ili gredom duljine 6 m.

b) Gredama kojih sve duljina Matko može obrubiti stranu povrtnjaka duljine 9 m?

Matko je može obrubiti gredama duljine 1 m ili duljine 3 m ili gredom duljine 9 m.

c) Kupi li u trgovini sve grede jednake duljine, Matko će dobiti popust. Koje duljine greda odgovaraju za obrubljivanje i jedne i druge strane povrtnjaka?

Za obrubljivanje obiju strana povrtnjaka odgovaraju grede duljine 1 m ili duljine 3 m.

d) Koja je najmanja duljina greda kojom Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka?

Najmanja duljina greda kojima Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka je 1 m.

e) Koja je najveća duljina greda kojom Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka?

Najveća duljina greda kojima Matko može obrubiti obje strane povrtnjaka je 3 m.

Potom slijedi faza matematizacije apstrahiranjem konkretnog nematematičkog konteksta. Odvija se suradničkim radom učenika u skupinama na rješavanju Zadatka 2 u kojem na temelju njima već poznatog pojma djelitelja prirodnog broja osvještavaju nove matematičke pojmove zajedničkih djelitelja te najmanjeg i najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva. Ove pojmove učenici samostalno pokušavaju i imenovati.

Radni listić 2.4: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 2.1.1. – druga stranica listića

Zadatak 2.
Pogledaj brojeve koji se pojavljuju u pitanjima i odgovorima u Zadatku 1 pa radeći u skupini odgovori i na sljedeća pitanja.
a) Što su broju 6 brojevi iz odgovora na pitanje a) iz Zadatka 1?
Brojevi 1, 2, 3 i 6 su svi djelitelji broja 6.
b) Što su broju 9 brojevi iz odgovora na pitanje b) iz Zadatka 1?
Brojevi 1, 3 i 9 su svi djelitelji broja 9.
c) Što su brojevima 6 i 9 brojevi iz odgovora na pitanje c) iz Zadatka 1? Kako bi ih nazvao/la?
Brojevi 1 i 3 su djelitelji i broja 6 i broja 9.
Oni su zajednički djelitelji brojeva 6 i 9.
d) Što je brojevima 6 i 9 broj iz odgovora na pitanje d) iz Zadatka 1? Kako bi ga nazvao/la?
Broj 1 je djelitelj i broja 6 i broja 9.
On je najmanji zajednički djelitelj brojeva 6 i 9.
e) Što je brojevima 6 i 9 broj iz odgovora na pitanje e) iz Zadatka 1? Kako bi ga nazvao/la?
Broj 3 je djelitelj i broja 6 i broja 9. On je najveći zajednički djelitelj brojeva 6 i 9.

Predviđeno trajanje rada u skupinama je oko 15 minuta, nakon čega slijedi ispisivanje dobivenih rezultata na ploči, njihovo uspoređivanje i vođena razredna diskusija čiji je cilj utvrditi nove pojmove i osvijestiti njihova osnovna svojstva. Nastavnik pritom na ploči formira tablicu u koju predstavnici skupina upisuju dobivene podatke. Zaglavlja tablice za početak su zapisana u terminima Zadatka 1 (duljine rubova povrtnjaka i greda).

Tablica 2.2: Rezultati rada u skupinama u Aktivnosti 2.1.1.

DULJINE RUBOVA POVRTNJAKA (m)		ODGOVARAJUĆE DULJINE GREDA (m)		DULJINE GREDA ODGOVARAJUĆE ZA OBA RUBA POVRTNJAKA (m)		
prvi rub	**drugi rub**	**prvi rub**	**drugi rub**	**oba ruba**	**najmanja**	**najveća**
6	9	1, 2, 3, 6	1, 3, 9	1, 3	1	3
4	10	1, 2, 4	1, 2, 5, 10	1, 2	1	2
4	8	1, 2, 4	1, 2, 4, 8	1, 2, 4	1	4
5	10	1, 5	1, 2, 5, 10	1, 5	1	5
4	9	1, 2, 4	1, 3, 9	1	1	1
7	8	1, 7	1, 2, 4, 8	1	1	1

Tijekom vođene diskusije učenici uočavaju da je u svim skupinama duljina najkraćih greda koje Matko može kupiti kako bi njima obrubio oba ruba povrtnjaka jednaka 1 m, dok se duljina najduljih takvih greda razlikuje od skupine do skupine, no nikad nije veća od duljine kraćeg ruba povrtnjaka. Konačno, zajedničkim osvrtom na

Zadatak 2 učenici zaključuju da duljine ruba povrtnjaka i duljine greda predstavljaju prirodne brojeve te da su zapravo tražili sve djelitelje svakog od zadanih dvaju prirodnih brojeva, a potom i zajedničke među njima, koje su tako i nazvali. Učenici uočavaju i da dva prirodna broja mogu imati samo konačno mnogo zajedničkih djelitelja. Konačno, uočavaju da je najmanji zajednički djelitelj svakih dvaju prirodnih brojeva broj 1 te da svaka dva prirodna broja imaju najvećeg zajedničkog djelitelja. On nikad nije veći od manjeg od tih brojeva, a može mu biti jednak ako je veći od tih brojeva višekratnik manjega od njih, odnosno može biti jednak broju 1 ako ta dva prirodna broja osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja. Aktivnost se na kraju može proširiti i pitanjima o broju drvenih greda koje će Matko trebati kako bi ogradio dvije strane povrtnjaka, čime učenici ponavljaju dijeljenje prirodnih brojeva, a zatim i osvrtom na izbor brojeva a i b koji označavaju duljine rubova povrtnjaka, kako bi se osvijestila sva tri moguća njihova odnosa. Na kraju aktivnosti nastavnik treba uvesti i simboličku oznaku za najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, $NZD(a, b)\ ili\ M(a, b)$ nakon čega učenici iz *tablice 2.2* očitavaju da je $NZD(6,9) = 3, NZD(4,10) = 2, NZD(4,8) = 4, NZD(5,10) = 5\ i\ NZD(4,9) = NZD(7,8) = 1$.

Nakon ove aktivnosti, slijede aktivnosti u kojima učenici određuju najveći zajednički djelitelj dvaju zadanih brojeva sustavnim ispisivanjem i uspoređivanjem djelitelja svakoga od njih. U nastavku rada s Cuisenaireovim štapićima, slično kao i s najvećim zajedničkim djeliteljem postupit ćemo s otkrivanjem pojma najmanjeg zajedničkog višekratnika.

2.1.2 Aktivnost: *Najmanji zajednički višekratnik*

Sljedećom aktivnosti učenici će otkriti kako za dva prirodna broja mogu odrediti njihov najmanji zajednički višekratnik koristeći Cuisenaireove štapiće. Za ovu aktivnost potrebni su nam radni listići koje ćemo po početku aktivnosti podijeliti učenicima i Cuisenaireovi štapići čiju količinu ćemo navesti u nastavku. Učenike podijelimo u parove u kojima će zajedno odgovarati na pitanja s radnog listića. Učenicima ćemo postaviti problem iz područja sporta. Dora i Ana skaču u dalj, a zadatak učenika je odrediti na kojim udaljenostima od starta će se djevojke naći rame uz rame uz postavljene uvjete. Napomenimo da Ana i Dora uvijek preskoče konstantnu udaljenost i da jedna od djevojaka skače sve dok ne prestigne onu drugu. Udaljenosti Dore i Ane od starta kada one stoje jedna uz drugu, određivat će zajedničke višekratnike brojeva koji predstavljaju duljine njihovih skokova. Najmanju takvu udaljenost zvat ćemo najmanji zajednički višekratnik. Kao i u aktivnosti koju smo provodili za najveći zajednički djelitelj dobro je unutar problemskog zadatka uzeti brojeve koji su u odnosu djelitelj – višekratnik, relativno proste brojeve i par brojeva koji nisu ni jedno ni drugo. Nakon što učenici odrade zadatak predviđen ovom aktivnosti, možemo s učenicima raspraviti o različitim izborima brojeva koji označavaju duljine Dorinog i Aninog skoka. U nastavku dan je primjer radnog listića na kojem će učenici otkriti pojam najmanjeg zajedničkog višekratnika.

Radni listić 2.5: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.1.2. – prva stranica listića

Radni listić – skupina A

<u>Pažljivo samostalno pročitaj tekst pa ga prokomentiraj sa svojim parom.</u>
Dora i Ana skaču u dalj. Dora je atletičarka i može skočiti 3 metra u dalj dok je Ana tek počela vježbati i može skočiti 2 metra u dalj. Kako bi što više vježbale, Dora i Ana odlučile su se natjecati. Na atletskoj stazi od označene startne točke Dora će skočiti u dalj prva, a Ana će nakon Dore skakati u dalj sve dok ju ne prestigne. Dora će zatim ponovno skočiti. Odlučile su da će skakati tako dok se obje ne nađu jedna pokraj druge, odnosno na istoj udaljenosti od startne točke.

<u>Zadatak 1:</u>
Radeći u paru i koristeći se štapićima odgovorite na sljedeća pitanja. Jedan štapić duljine 2 neka predstavlja Anine skokove u dalj, a štapić duljine 3 Dorine skokove u dalj.
Odredite:
a) Na kojim sve udaljenostima od startne točke će se naći Dora skakanjem u dalj?

____

b) Na kojim sve udaljenostima od startne točke će se naći Ana skakanjem u dalj?

____

c) Na kojim udaljenostima od startne točke će Dora i Ana stajati jedna pored druge?

____

d) Koja je najkraća udaljenost od startne točke na kojoj će Dora i Ana stati jedna pored druge?

____

Radni listić 2.6: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.1.2. – druga stranica listića

Radni listić – skupina A

<u>Zadatak 2:</u>
Promotrite brojeve dobivene u Zadatku 1 i odgovorite na sljedeća pitanja.
a) Što su brojevi iz a) dijela Zadatka 1 broju 3?

____

b) Što su brojevi iz b) dijela Zadatka 1 broju 2?

____

c) Što su brojevi iz c) dijela Zadatka 1 brojevima 2 i 3? Kako biste ih nazvali?

____

d) Što je brojevima 2 i 3 broj iz d) dijela Zadatka 1? Kako biste ga nazvali?

____

Na početku aktivnosti svaki učenik će pročitati zadatak i o njemu razmisliti, a zatim nastavnik odredi učenika koji će zadatak pročitati cijelom razredu i interpretirati ga vlastitim riječima. Želimo se uvjeriti da učenici razumiju postavljeni problem izvan matematičkog konteksta, odnosno prije nego u njemu ukažemo na matematički problem. U nastavku aktivnosti učenici će odrediti startnu točku na svojim klupama ili im možemo dati printanu verziju atletske staze sa startnom točkom što će učenicima biti vizualno zanimljivije. Učenike podsjetimo da se koriste Cuisenaireovim štapićima kako bi došli do zaključka. Želimo da učenici predstavljaju Dorin skok od 3 metra svijetlo zelenim štapićem, a Anin skok od 2 metra crvenim štapićem. Učenici će složiti dva niza štapića: jedan od štapića duljine dva i jedan od štapića duljine tri. Kada nizovi budu jednake duljine, zaključit će da se radi o mjestu na kojem se Dora i Ana susreću prvog puta. Paru učenika bit će dovoljno minimalno 9 crvenih štapića i 6 svijetlo zelenih da donesu potrebne zaključke, a poželjno je da ih imaju i više. Kao rješenje očekujemo sljedeće odgovore na radnom listiću.

Radni listić 2.7: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 2.1.2. – prva stranica listića

Radni listić – skupina A

Pažljivo samostalno pročitaj tekst pa ga prokomentiraj sa svojim parom.

Dora i Ana skaču u dalj. Dora je atletičarka i može skočiti 3 metra u dalj dok je Ana tek počela vježbati i može skočiti 2 metra u dalj. Kako bi što više vježbale, Dora i Ana odlučile su se natjecati. Na atletskoj stazi od označene startne točke Dora će skočiti u dalj prva, a Ana će nakon Dore skakati u dalj sve dok ju ne prestigne. Dora će zatim ponovno skočiti. Odlučile su da će skakati tako dok se obje ne nađu jedna pokraj druge, odnosno na istoj udaljenosti od startne točke.

Zadatak 1:

Radeći u paru i koristeći se štapićima odgovorite na sljedeća pitanja. Jedan štapić duljine 2 neka predstavlja Anine skokove u dalj, a štapić duljine 3 Dorine skokove u dalj.

Odredite:

a) Na kojim sve udaljenostima od startne točke će se naći Dora skakanjem u dalj?

Dora će se naći na udaljenostima: 3 m, 6 m, 9 m, 12 m, 15 m, 18 m.... od startne točke.

b) Na kojim sve udaljenostima od startne točke će se naći Ana skakanjem u dalj?

Ana će se naći na udaljenostima: 2 m, 4 m, 6m, 8 m, 10 m, 12 m, 14 m, 16 m, 18 m.... od startne točke.

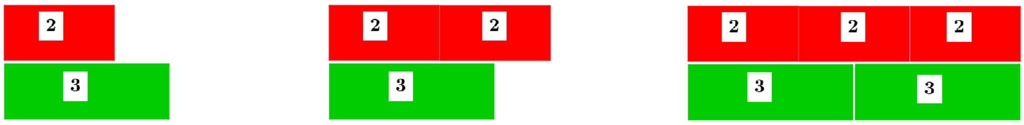
c) Na kojim udaljenostima od startne točke će Dora i Ana stajati jedna pored druge?

Dora i Ana stajat će jedna pored druge na udaljenostima: 6 m, 9 m, 12 m, 18 m.... od startne točke.

d) Koja je najmanja udaljenost od startne točke na kojoj će Dora i Ana stati jedna pored druge?

Dora i Ana će na udaljenosti 6 m od startne točke stati jedna pored druge.

Učenici će rješavanjem ovog radnog listića riješiti problem iz svakodnevnog života i u tom problemu možda neće odmah uočiti potrebu za matematikom. Iz tog razloga učenicima je na drugoj strani radnog listića dan niz pitanja na koja moraju odgovoriti kako bi rezultate dobivene istraživanjem preveli u matematički problem. Odnosno, kako bi otkrili nove matematičke pojmove iz primjera koji im je blizak i na koji ih u nekom budućem trenutku tijekom izvođenja vezanih nastavnih procesa možemo lako podsjetiti. Prije nego s učenicima krenemo na matematizaciju danog problema, učenici opisuju na koji način su slagali Cuisenaireove štapiće. *Slika 2.4* daje pogled na istraživanje rješenja danog problema jednog para učenika.



Slika 2.4: Istraživanje problema pomoću Cuisenaireovih štapića jednog para učenika

Od učenika želimo da verbaliziraju postupak i koriste odgovarajuće matematičke izraze za matematičke operacije te na taj način povezuju stare i nove pojmove. Učenici će nam opisati kako su nizali crvene štapiće za određivanje Anine udaljenosti od startne točke te kako su na isti način nizali svijetlo zelene štapiće za određivanje Dorine udaljenosti od startne točke. Nizanje će učenici povezati s množenjem i pojam *višekratnik* će se prirodno pojaviti prilikom njihovog opisivanja postupka kojim su došli do rješenja. U sljedećim minutama učenici mogu riješiti i drugu stranu radnog listića čija rješenja su dana u nastavku.

Radni listić 2.8: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 2.1.2. – druga stranica listića

Radni listić – skupina A

Zadatak 2:

Promotrite brojeve dobivene u Zadatku 1 i odgovorite na sljedeća pitanja.
a) Što su brojevi broju 3 iz a) dijela Zadatka 1?
Brojevi iz a) dijela Zadatka 1 su višekratnici broja 3.
b) Što su brojevi broju 2 iz b) dijela Zadatka 1?
Brojevi iz b) dijela Zadatka 1 su višekratnici broja 2.
c) Što su brojevi iz c) dijela Zadatka 1 brojevima 2 i 3? Kako biste ih nazvali?
Brojevi iz c) dijela Zadatka 1 su višekratnici brojeva 2 i 3. Nazvali bismo ih zajednički višekratnici brojeva 2 i 3.

d) Što je brojevima 2 i 3 broj iz d) dijela Zadatka 1? Kako biste ga nazvali?
Broj iz d) dijela Zadatka 1 je višekratnk brojeva 2 i 3. Nazvali bismo ga najmanji zajednički višekratnik brojeva 2 i 3.

Na ovom primjeru zadatka, učenici će zaključiti da je najkraća udaljenost od startne točke na kojoj će se djevojke naći rame uz rame jednaka broju 6. Broj 6 nazvat će najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 2 i 3 nakon što usporede sve Anine udaljenosti i sve Dorine udaljenosti od startne točke. Svaki sljedeći višekratnik brojeva 2 i 3 nazvat će zajedničkim višekratnikom danih broja. Pitanjima koje smo postavili u radnom listiću želimo da učenici uoče potrebu za pojmom namanjeg zajedničkog višekratnika. Istovremeno učenici mogu uočiti kako odrediti i druge zajedničke višekratnike dvaju brojeva poznavajući njihov najmanji zajednički višekratnik. Time možemo proširiti ovu temu. Učenici će lako uočiti da zajedničkih višekratnika ima beskonačno i da nema smisla tražiti najvećeg. Vrlo često učenici govore o najvećem zajedničkom višekratniku i najmanjem zajedničkom djelitelju pa je produžiti aktivnost dobar način za uklanjanje ove pogreške u izražavanju. Napomenimo da u razredu učenici iznose rješenja za svaki od različitih slučajeva koje smo ranije naveli. U skupinama želimo obuhvatiti sve tri mogućnosti:

- višekratnik danih brojeva je jedan od brojeva
- višekratnik danih prirodnih brojeva je umnožak danih brojeva
- višekratnik je broj između najvećeg od danih brojeva i umnoška danih brojeva.

Sljedeća tablica prikazuje koje primjere predlažemo po skupinama. Broj a predstavlja duljinu Aninog skoka, a broj b duljinu Dorinog skoka.

Tablica 2.3: Podaci za radne listiće za Aktivnost 2.1.2.

SKUPINA	BROJEVI a I b	SKUPINA	BROJEVI a I b
Skupina A	2 i 3	Skupina D	1 i 3
Skupina B	2 i 6	Skupina E	6 i 9
Skupina C	3 i 4	Skupina F	2 i 5

Pri odabiru brojeva moramo voditi računa o postupku koji učenici provode, tj. o ograničenost broja štapića koje učenik koristi i o njihovoj duljini. Učenike trebamo poticati na analiziranje dobivenih rješenja pa će tako iz rješenja skupina B i D učenici primijetiti da će najmanji zajednički višekratnik dvaju brojeva biti jednak jednom od danih brojeva ukoliko su dani brojevi u odnosu djelitelj – višekratnik. Iz skupina A, C i F učenici će uočiti da je višekratnik dvaju brojeva jednak njihovom umnošku ukoliko su dani brojevi relativno prosti, a iz skupine E najmanji zajednički višekratnik će po veličini biti između većeg od danih brojeva i njihovog umnoška ukoliko brojevi nisu u ranije navedenim odnosima. Ovakve rasprave su korisne za povezivanje prethodno naučenih pojmova i njihovu primjenu u novim situacijama. Ovako provedena aktivnost je dobar način za uvođenje postupka određivanja najmanjeg zajedničkog višekratnika iz rastava brojeva na proste faktore. Učenici će uočiti da je nizanje štapića zanimljivo i praktično kada su u pitanju manji brojevi, ali prilikom većih brojeva ovakav postupak bio bi spor i neučinkovit.

Osim za uvođenje novih pojmova, odnosno njihovo otkrivanje, Cuisenaireovi štapići mogu nam poslužiti i za istraživanje pravilnosti i formulacija koje se u udžbenicima iz matematike pojavljuju kao gotove formule. Ipak, za učenike je korisnije da samostalno istražuju pa u nastavku dajemo primjer aktivnosti kojom učenici mogu uočiti neke brojevne pravilnosti međusobnom suradnjom.

2.2 Istraživanje i prikazivanje brojevnih pravilnosti

U školskim udžbenicima nećete pronaći nastavnu cjelinu u kojoj se učenik posvećuje istraživanju i otkrivanju pravilnosti u brojčanim zapisima ili geometrijskim oblicima kao ni zapisivanjem istih. Ipak, u Nacionalnom okvirnom kurikulumu postoji niz obrazovnih ishoda koji upućuju da bi učenik trebao moći:

- postavljati matematici svojstvena pitanja (Postoji li...? Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja?)
- istraživati pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima.

Sljedećom aktivnosti želimo potaknuti ostvaranje izdvojenih obrazovnih ishoda u učenicima nižih razreda osnovne škole.

2.2.1 Aktivnost: *Istraživanje uzoraka i prikaz prirodnih brojeva kao sume*

Cilj ove aktivnosti je da učenici preslagivanjem Cuisenaireovih štapića uoče uzorke i pravilnosti u prikazu prirodnog broja kao sume te povezuju algebarske i druge zapise s fizičkim modelima. Zadatak koji pred učenike stavljamo je prikazivanje određenih duljina pomoću Cuisenaireovih štapića na što više načina. Želimo da učenici osjete permutacije i kombinacije pod vlastitim prstima i zapisuju (crtaju) svoja rješenja na njima razumljiv način. Naravno, pred učenike ne stavljamo pojmove poput *permutacije* i *kombinacije* jer su im one i kao pojmovi i kao riječi preteške, ali koristimo riječi poput *premještanje, razmještanje, kombiniranje* čime želimo u učenikovu podsvijest uvrstiti te riječi kao nešto što će povezivati s matematikom. Ovom aktivnosti učenici će naučiti kako prikazivati nove podatke na različite načine u skladu s problemom koji je pred njih postavljen. Izdvajamo tablični prikaz, prikaz didaktičkim materijalom koji uključuje Cuisenaireove štapiće, pisano prikazivanje i prikaz crtežom.

Aktivnost započinjemo izdvajanjem materijala koji će učenicima biti potreban. U četvrtom razredu osnovne škole možemo uzeti Cuisenaireove štapiće do duljine pet. Učenici će raditi u parovima, a za skupinu A u kojoj će učenici štapić duljine 5 (žuti štapić) prikazivati pomoću štapića kraćih duljina jednom paru učenika bit će dovoljno 12 bijelih štapića, 4 crvena, 2 svijetlo zelena, 1 ljubičasti i 1 žuti štapić. Uz pomoć ovog broja štapića par učenika može prikazati sve mogućnosti prikaza štapića duljine 5 istovremeno. Osim Cuisenaireovih štapića učenicima će trebati i bojice u crnoj, crvenoj, svijetlo zelenoj, ljubičastoj i žutoj boji kako bi dobivena rješenja mogli nacrtati te se tako kasnije lakše prisjetili na preslagivanje Cuisenaireovih štapića. Crna bojica će iz praktičnih razloga prikazivati bijeli štapić. U nastavku dan je radni listić koji će učenike uputiti u njihov zadatak.

Radni listić 2.9: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.2.1

Radni listić – Skupina A

Zadatak 1:

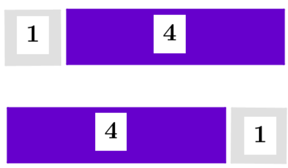
Tin je za rođendan dobio vlakić s vagonima različitih duljina. U setu vagona, Tin ima 12 vagona duljine jedan, 4 vagona duljine dva, 2 vagona duljine tri, 1 vagon duljine četiri i 1 vagon duljine pet. U igri s vlakićem, Tin je izgubio vagon duljine 5 i pokušava pomoću ostalih vagona složiti vagon te duljine. Pomozite Tinu otkriti sve načine na koje može presložiti preostale vagone u vagon duljine pet. Svoja rješenja prikažite na što više načina.

Svi učenici dobivaju isti tekst zadatka, a broj vagona možemo mijenjati kako nam odgovara. Poželjno je uzeti za različite slučajeve uzastopne prirodne brojeve. Za aktivnost u ovom razrednom odjeljenju predlažemo nestale vagone redom duljina 3, 4 i 5. Dovoljno je odrediti 3 skupine radnih listića, a učenike možemo podijeliti u više skupina i ponoviti neki od radnih listića. Na taj način možemo imati kontrolne skupine. U *tablici 2.4* dan je najmanji broj potrebnih štapića za odrađivanje ove aktivnosti za svaki od duljina izgubljenog vagona.

Tablica 2.4: Potreban broj štapića ovisno o duljini vagona

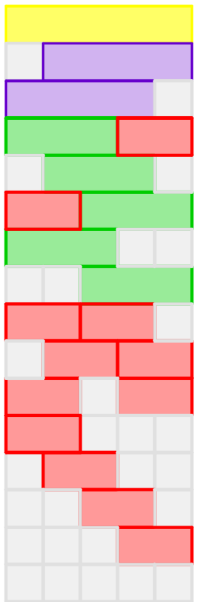
SKUPINA	DULJINA VAGONA					
Skupina A	**5**	**28**	**12**	**5**	**2**	**1**
Skupina B	**4**	**12**	**5**	**2**	**1**	**0**
Skupina C	**3**	**5**	**2**	**1**	**0**	**0**

Ne želimo u aktivnost uvrstiti prevelike brojeve jer želimo da učenici imaju dovoljno vremena da analiziraju svoja rješenja, a ne da većinu vremena provedu u određivanju samog broja rješenja. Uostalom, povećanjem duljine nestalog vagona povećava nam se broj potrebnih Cuisenaireovih štapića. Prije nego učenici započnu s rješavanjem ovog problemskog zadatka, nastavnik će zamoliti jednog od učenika da pročita i objasni zadatak svojim riječima. Učenici moraju potvrditi da razumiju da će Cuisenaireovi štapići odgovarati duljinama vagona i da će žuti štapić duljine pet odgovarati duljini izgubljenog vagona. Posebno, želimo da učenici razlikuju niz od jednog bijelog i jednog ljubičastog štapića kao dva moguća niza ovisno o tome koji štapić postavljaju prvi. Učenicima možemo kao kontekst dodati da vagone povezuju s vozačevom kabinom te tako učvrstiti razliku između prvog i drugog člana u nizu.



Slika 2.5: Prikaz štapića duljine 5 štapićima duljine 1 i 4

Sljedećih 20 minuta učenici će preslagivanjem štapića doći do svih mogućih nizova duljine pet. Napominjemo učenicima da svoje prikaze obilježe na neki način koji će kasnije moći samostalno interpretirati. Potičemo tablične prikaze, prikaze crtežom, pisani prikaz. Napomenimo učenicima da prilikom crtanja svojih rezultata ne ispunjavaju bojom unutrašnjosti pravokutnika koji će simbolizirati štapiće već samo njihov rub. Na taj način će uštedjeti na vremenu. U nižim razredima osnovne škole ovakve napomene koje se tiču organizacije je učenicima dobro spominjati dok učenici sami ne steknu potrebne organizacijske vještine. Na sljedećim slikama dana su dva različita prikaza traženih rješenja.



						Ukupan broj kombinacija
Prikaz štapića duljine pet	1	2	-	-	-	3
	2	-	1	-	-	3
	3	1	-	-	-	4
	5	-	-	-	-	1
	-	1	1	-	-	2
	1	-	-	1	-	2
	-	-	-	-	1	1
	12	4	2	1	1	16

Slika 2.6: Različiti prikaz popločavanja štapića duljine 5 pomoću štapića manje duljine

U tablici svaki stupac je u boji štapića koji su učenici koristili za prikazivanje svog vagona koji nedostaje, a broj unutar obojanih stupaca označava koliko štapića su pritom koristili. Sivom bojom označili smo inače bijeli štapić duljine jedan. Učenicima predlažemo da sve svoje prikaze zabilježe u svojim bilježnicama kako bi ih se kasnije mogli prisjetiti. Ono što je važno jest da na kraju aktivnosti učenici mogu pročitati svoje zapise te da su učenici zbilja fizički slagali nizove od svojih štapića. Ukoliko prilikom promatranja učenika kako nižu štapiće primijetimo da učenicima nedostaju određeni nizovi možemo im postavljati pitanja o grupi nizova koja nedostaje te predložiti učenicima da pokušaju presložiti određene nizove još nekoliko puta. Ne predlažemo nastavnicima da odmah pokažu učenicima koji nizovi im nedostaju već da ih usmjere kako bi oni sami došli do traženih nizova. Poželjno je učenicima postavljati pitanja o njihovoj strategiji prebrojavanja i preslagivanja štapića te na taj način dobiti uvid u njihov način razmišljanja. Na kraju aktivnosti učenicima možemo postavljati pitanja o strategiji, o iskoristivosti tablice i crtanog prikaza za štapiće različitih duljina. Od velike je važnosti da učenici svoja rješenja objašnjavaju jedni drugima pa svakako po završetku aktivnosti prozovemo nekoliko učenika koji će opisati svoje strategije, metode bilježenja rješenja kao i pristup problemu unutar svoje skupine. Učenike potičemo da govore i o teškoćama koje su u aktivnosti imali. Te informacije pomoći će nam da prilikom ponavljanja ove aktivnosti s drugim razrednim odjelom znamo na što trebamo obratiti pozornost. Aktivnost možemo proširiti tako da pokušamo odrediti na koliko načina bismo mogli prikazati štapić duljine 6 ako znamo broj načina na koji možemo prikazati štapić duljine 5. Učenici bi u tom slučaju promotrili prikaze za duljine štapića 3 i 4 te osmislili strategiju određivanja broja načina prikazivanja štapića duljine za jedan veće od već promotrenog.

Ovom aktivnosti završavamo s primjerima aktivnosti s Cuisenaireovim štapićima u području aritmetike i započinjemo s njihovom primjenom u području geometrije. U nekoliko sljedećih aktivnosti opisat ćemo kako Cuisenaireove štapiće možemo koristiti za razvijanje prostornog zora.

2.3 Geometrijski oblici u ravnini i prostoru

Do sada smo Cuisenaireove štapiće koristili isključivo u području aritmetike, ali oni nam također mogu poslužiti kao pomoćni alat u istraživanju geometrije.

Učenici pomoću njih mogu:

- izgrađivati svoj prostorni zor
- opisivati položaj i smjer upotrebom jednostavnog koordinatnog sustava
- prepoznavati, opisivati, imenovati i izgraditi dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike
- sastavljati i rastavljati ravninske i prostorne oblike
- lakše uključiti nove pojmove u svoj matematički rječnik i slično.

U nastavku dat ćemo primjere aktivnosti u kojima će učenici Cuisenaireove štapiće koristiti za otkrivanje matematičkih koncepata u geometriji.

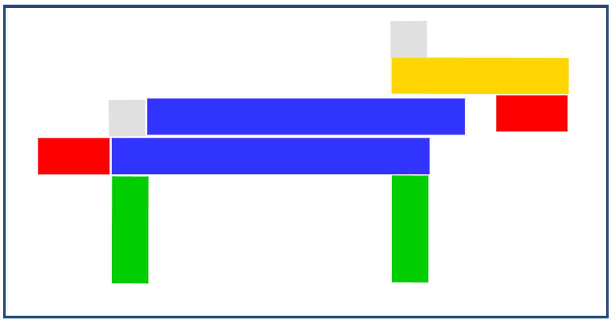
2.3.1 Aktivnost: *Geometrijski oblici u prostoru*

U petom razredu osnovne škole učenici se ponovno susreću s pojmovima poput *okomitost, paralelnost, dijagonala, pravac, dužina, trokut, kvadrat, pravokutnik* i drugo. Kako bismo provjerili kako učenici koriste dane pojmove možemo provesti aktivnost opisivanja i slaganja geometrijskih oblika.

Cilj ove aktivnosti jest uvid u sposobnost učenika da smješta objekte u prostor, ali i u njegovo korištenje matematičkog jezika pri opisivanju geometrijskih objekata u prostoru. Aktivnost ćemo provoditi u parovima, a učenicima su potrebni jedino Cuisenaireovi štapići. Broj Cuisenaireovih štapića po paru je proizvoljan. Ipak, kako učenici ne bi pretjerali u osmišljavanju svojih geometrijskih oblika ili možda oblikovali siromašne geometrijske oblike, broj štapića ćemo zadati. Prilikom svakog oblikovanja učenik mora koristiti najmanje 5 i najviše 10 štapića u barem tri različite boje. U svakom paru učenika određujemo jednog koji će voditi – *voditelj* i jednog koji će slijediti – *sljedbenik*. Učenici će u nekom trenutku zamijeniti uloge tako da se okušaju u obje uloge. Učenik kojeg zovemo *voditelj* osmislit će geometrijski oblik te ga izgraditi Cuisenaireovim štapićima, prekriti ga bilježnicom ili nekim drugim predmetom i riječima opisati učeniku *sljedbeniku*. Napominjemo učenicima da smiju koristiti isključivo matematički rječnik (bez sugeriranja rukama) te štapiće postavljati na način da se štapići dodiruju s barem jednim od već postavljenih štapića. Pravilo postavljanja štapića jest postavljati štapiće samo okomito i paralelno, odnosno bez koso postavljenih štapića za koje bi učenicima bilo otežano opisati njihov položaj na stolu. Drugi učenik, *sljedbenik*, slijedit će upute učenika *voditelja* i pokušati rekonstruirati osmišljeni geometrijski oblik. Za potrebe ove aktivnosti koristit ćemo dva bijela, jedan žuti, dva crvena, dva svijetlo zelena i dva plava štapića od kojih učenik *voditelj* mora izgraditi geometrijski oblik na stolu (samo u ravnini).

Sljedećih 15 minuta učenici *sljedbenici* postavljaju pitanja i slažu geometrijski oblik opisan matematičkim rječnikom učenika *voditelja*. Nastavnik ovom aktivnosti brzo može uočiti tko od učenika ima teškoća s pojmovima poput *biti okomit* ili *biti paralelan* te tko se ne snalazi u razmještaju štapića u ravnini. Korisno je što nastavnik može sagledati koje strategije učenici koriste pri otkrivanju nepoznatog prikaza, odnosno odakle kreću učenici koji svoj prikaz opisuju. Poželjno je da učenici prvo navedu koje štapiće koriste, kakve su boje ili duljine te zatim započnu s položajem prvog štapića. Učenicima *voditeljima* napomenemo da je cilj aktivnosti da učenici

sljedbenici što prije uspiju složiti traženi oblik. Time poručujemo da tijek opisivanja mora biti precizan i dobro planiran. Ukoliko se nalazimo u natjecateljskom razredu, možemo postaviti vremenski okvir u kojem učenici moraju dovršiti aktivnost. Ako primijetimo da učenici osmišljaju prejednostavne oblike ili u njima nema matematičkog sadržaja koji želimo obuhvatiti, možemo pripremiti kartice s gotovim prikazima koje će učenici *voditelji* onda samo opisati učenicima *sljedbenicima*. Naravno, tada moramo voditi računa o broju Cuisenaireovih štapića. Ipak, poželjno je da učenici sami osmišljaju svoje geometrijske oblike kako bi razvijali kreativnost.
U nastavku dan je primjer jednog prikaza geometrijskog oblika i diskusija para učenika kao uvid u komunikaciju koja se odvija unutar jednog para učenika za vrijeme ove aktivnosti.



Slika 2.7: Primjer geometrijskog oblika jednog para učenika

Ukoliko se učenici ne snalaze u svojim prikazima, možemo im postavljati pitanja kako bismo im pomogli. Učenicima postavljamo pitanja:

- *Koja vam je strategija opisivanja složenog geometrijskog oblika?*
- *Što ćete prvo otkriti učeniku sljedbeniku?*
- *Hoćete li krenuti odozgo ili odozdo, slijeva ili zdesna?*
- *Od kojeg dijela geometrijskog oblika koji ste izgradili je najlakše, a od kojeg najteže krenuti?*
- *Koje matematičke pojmove možete koristiti kako biste opisali položaje svojih štapića?*

Vrlo je važno da učenici uoče da na početku ovog problema, ali i svakog sljedećeg, prvo trebaju odrediti alat koji će koristiti pri izgradnji rješenja. Dakle, prvi korak pri opisivanju određenog oblika je prebrojavanje ukupnog broja korištenih štapića te izdvajanjem boje i/ili duljine korištenih štapića. Također, želimo skrenuti pozornost na štapiće čije odnose u zadanom geometrijskom obliku znamo. Tako primjerice bit će lakše krenuti od desnog svijetlo zelenog štapića ili donjeg plavog štapića nego od žutog štapića. U nastavku dan je dijalog jednog para učenika s učinkovitom strategijom za opisivanje geometrijskog oblika sa *slike 2.7* te dijalog jednog para učenika s neučinkovitom strategijom za isti geometrijski oblik. Uočimo razlike između dva pokušaja učenika *voditelja* da opiše dani geometrijski oblik.

Radni listić 2.10: Primjer učinkovite strategije opisivanja danog geometrijskog oblika

Koristit ću 2 bijela, 2 svijetlo zelena, 2 plava, 2 crvena i 1 žuti štapić. Postavi bijeli štapić horizontalno ispred sebe. Desno od bijelog štapića nasloni plavi štapić tako da se oni dodiruju u kraćem rubu. Ispod bijelog štapića nasloni drugi plavi štapić paralelno s gornjim retkom štapića. Lijevo od donjeg plavog štapića, s njim u liniji, postavi crveni štapić. Uzmi svijetlo zeleni štapić i nasloni ga okomito na donji plavi štapić tako da on bude točno ispod bijelog štapića. Sada uzmi drugi svijetlo zeleni štapić i nasloni ga na isti način kao i prvi svijetlo zeleni štapić samo na drugom kraju plavog štapića. Preostao nam je po jedan bijeli, žuti i crveni štapić. Uzmi žuti štapić i nasloni ga horizontalno iznad gornjeg plavog štapića tako da mu je lijevi rub u liniji s lijevim rubom desnog svijetlo zelenog štapića. Iznad žutog štapića postavi bijeli štapić na način da su im lijevi rubovi poravnati. Posljednji, crveni štapić, postavit ćeš horizontalno ispod žutog štapića tako da s žutim štapićem bude poravnat u desnom rubu.

Ovaj učenik *voditelj* krenuo je s informacijom o broju i bojama štapića koje koristi. Prvi štapić koji učenik *sljedbenik* postavlja je bijeli štapić oko kojeg je lako postaviti dva plava štapića. Učenik *voditelj* koristi pojmove: *horizontalan, paralelan, okomit* i *linija* kao pomoć pri postavljanju štapiće te koristi *lijevo, desno, rub štapića* kao pomoć pri orijentaciji. Primjer neučinkovite strategije dan je u nastavku.

Radni listić 2.11: Primjer neučinkovite strategije opisivanja danog geometrijskog oblika

Uzmi žuti štapić i postavi ga horizontalno ispred sebe. Iznad njega, u njegov lijevi rub, stavi bijeli štapić, a ispod, u njegov desni rub, crveni štapić.

U ovom trenutku učenik *voditelj* imao bi problem s opisivanjem položaja plavog štapića. Naime, plavi štapić ne stoji poravnat s nekim od rubova bijelog štapića niti je naslonjen na crveni štapić kojeg je učenik *voditelj* već spomenuo. Učenik *voditelj* bi se sada morao dosjetiti postaviti bijeli štapić u liniji lijevo od crvenog, a zatim (također u liniji) plavi lijevo do njega. Zatim bi učenik *voditelj* morao napomenuti učeniku *sljedbeniku* da premjesti donji bijeli štapić što bi moglo omesti učenika *sljedbenika* u rekonstrukciji danog geometrijskog oblika. Dobro je s učenicima raspraviti o različitim strategijama i potaknuti ih da razmisle zašto su neke strategije bolje od drugih te koliko je važno biti precizan u opisivanju. Aktivnost se nastavlja zamjenom uloga voditelja i sljedbenika. Učenici obično uživaju raditi u parovima ili skupinama i poželjno je poticati suradnju među učenicima te zajedničko istraživanje i rješavanje problema.

Pomoću Cuisenaireovih štapića učenici mogu na zanimljiv i zabavan način otkrivati i pravila koje povezujemo s geometrijskim likovima. Unutar teme *Nejednakost trokuta*, učenici će radeći u skupinama otkriti kada se trokut zadan duljinama svojih stranica može konstruirati.

2.4 Nejednakost trokuta

Prvi geometrijski likovi s kojima se učenici susreću prije dolaska u školu su krug i trokut. U sljedećoj aktivnosti bavit ćemo se trokutom. U nižim razredima osnovne škole učenici razlikuju trokute po duljinama stranica i veličinama kutova i ne dovode u pitanje je li trokut moguće nacrtati s bilo kojim duljinama stranica ili bilo kojim veličinama kutova. U šestom razredu, u skopu nastavne cjeline *Trokut*, od učenika očekujemo da će:

- primjenjivati formule za opseg, površinu i zbroj unutarnjih i vanjskih kutova u trokutu
- provoditi osnovne konstrukcije trokuta i kutova
- primjenjivati pravila za sukladnost trokuta.

Unutar nastavne jedinice konstruiranja trokuta zadanog duljinama stranica, željeli bismo da učenici dođu do zaključka da svaki trokut nije moguće nacrtati, odnosno konstruirati. Sljedećom aktivnosti učenici će otkriti pravilo nejednakosti trokuta diskusijom u četveročlanim skupinama.

2.4.1 Aktivnost: *Nejednakost trokuta*

Za aktivnost učenicima su potrebni radni listići sa zadacima koji će obuhvatiti sva tri slučaja ovisno o odabiru duljina stranica trokuta. Aktivnost će učenici provoditi u četveročlanim skupinama u kojima će Cuisenaireovim štapićima oblikovati trokute različitih duljina stranica, a zatim pokušati otkriti koje pravilo određuje da li postoji trokut zadan tim duljinama stranica. U nastavku dan je primjer radnog listića za jednu četveročlanu skupinu.

Radni listić 2.12: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.4.1

Radni listić - Skupina A

Zadatak 1: Dani su podaci o duljinama stranica trokuta:

a) 5 cm, 2 cm, 4 cm
b) 1 cm, 2 cm, 5 cm
c) 2 cm, 2 cm, 4 cm
d) 7 cm, 4 cm, 4 cm
e) 5 cm, 3 cm, 2 cm
f) 9 cm, 3 cm, 5 cm

Dopunite danu tablicu. Koristite Cuisenaireove štapiće pri donošenju zaključaka.

Duljina stranice a (u cm)	Duljina stranice b (u cm)	Duljina stranice c (u cm)	Postoji li trokut zadan stranicama a, b i c? (da ili ne)	Pravilo 1:	Pravilo 2:	Pravilo 3:

Za brojeve u zadatku odabrane u ovom radnom listiću, skupini od četiri učenika bit će potrebna četiri bijela štapića, osam crvenih, četiri svijetlo zelena, osam ljubičastih, četiri žuta, četiri crna i četiri tamno plava. Učenici će prvo popuniti tablicu duljinama stranica i odgovorom na pitanje o tome je li moguće sastaviti trokuta od danih duljina stranica za svaki od podzadataka. Zaključke će donijeti slaganjem Cuisenaireovih štapića. Duljine stranica traženog trokuta u svakom od zadataka su osmišljene na način da postoje dva jednakokračna trokuta od kojih se jedan može, a drugi ne može nacrtati (primjeri c) i d)), zatim raznostranični trokuti kojima je zbroj duljina dviju stranica jednak duljini treće (primjer e)) i primjer raznostraničnih trokuta koji se mogu zatvoriti Cuisenaireovim štapićima (primjer a), b) i f)). Dok aktivnost traje nastavnik promatra da li učenici pokušavaju sastaviti trokute koristeći Cuisenaireove štapiće. Ne bismo željeli da učenici pogađaju već da Cuisenaireovim štapićima istražuju rješenja danog problema. Ukoliko se učenici sami ne dosjete, možemo im predložiti da međusobno podijele podzadatke kako bi što prije popunili tablicu i pokušali otkriti tražena pravila.

U nastavku aktivnosti na učenicima je da u dijalogu jedni s drugima dođu do zaključka koji će opravdati trokute koje nisu mogli oblikovati štapićima. Učenicima možemo pomoći sa zaključivanjem predlaganjem da prvo postave Cuisenaireov štapić koji predstavlja najdužu stranicu u trokutu, a zatim proučavaju u kakvom je ona odnosu s drugim dvjema. Učenici će brzo uočiti da je zbroj drugih dviju stranica manji od duljine treće stranice. Učenici će ta pravila zatim napisati u odgovarajući prostor u tablici te zatim provjeriti vrijede li ona za svaki od trokuta koji su se mogli sastaviti od danih duljina trokuta. Preslagivanjem Cuisenaireovih štapića učenici bi trebali uočiti tri slučaja slaganja trokuta od danih mu stranica.

Slika 2.8: Tri pokušaja zatvaranja trokuta Cuisenaireovim štapićima

Slaganjem Cuisenaireovih štapića učenici manipuliraju duljinama trokuta što je na papiru vrlo ograničeno. Tako učenici mogu iz složenog trokuta odvojiti njegove stanice i usporediti duljine dviju stranica s duljinom jedne te sastaviti i rastaviti trokut više puta. Kako bi učenicima olakšali donošenje zaključaka, možemo im postavljati pitanja poput:

- *Što uočavate ako sastavljate trokut počevši od najdulje stranice?*
- *Kakve su druge dvije stranice trokuta ako nismo mogli zatvoriti trokut?*
- *Ako gledamo da su duljine dviju stranica trokuta u zbroju bile kraće od treće stranice, što možemo zaključiti? Hoćemo li takve stranice ikada moći spojiti?*
- *Što se dogodilo kada je zbroj duljina dviju stranica bio jednak trećoj? Jeste li tada mogli sastaviti trokut?*
- *Što zaključujete kada će biti moguće nacrtati/konstruirati neki trokut ovisno o duljinama njegovih stranica, a kada neće?*

Učenici će svoje odgovore najvjerojatnije pokušati prikazati rukama pokazujući položaj Cuisenaireovih štapića u svakom pojedinom slučaju. Kao nastavnici moramo potaknuti učenike da u svojim odgovorima koriste matematičke izraze i opisuju odnose između likova ili objekata riječima. U nastavku dan je primjer riješenog radnog listića jedne skupine učenika.

Radni listić 2.13: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 2.4.1

Radni listić - Skupina A

Zadatak 1: Dani su podaci o duljinama stranica trokuta:

a) 5 cm, 2 cm, 4 cm
b) 1 cm, 2 cm, 5 cm
c) 2 cm, 2 cm, 4 cm
d) 7 cm, 4 cm, 4 cm
e) 5 cm, 3 cm, 2 cm
f) 9 cm, 3 cm, 5 cm

Dopunite danu tablicu. Koristite Cuisenaireove štapiće pri donošenju zaključaka.

Duljina stranice a (u cm)	Duljina stranice b (u cm)	Duljina stranice c (u cm)	Postoji li trokut zadan stranicama a, b i c? (da ili ne)	Pravilo 1: $a+b>c$	Pravilo 2: $a+c>b$	Pravilo 3: $b+c>a$
5	2	4	DA	DA	DA	DA
1	2	5	NE	NE	DA	DA
2	2	4	NE	NE	DA	DA
7	4	4	DA	DA	DA	DA
2	5	3	NE	DA	NE	DA
9	3	5	NE	DA	DA	NE

Nakon što učenici iznesu svoje zaključke, koristeći računalo i projektor možemo demonstrirati još nekoliko slučajeva trokuta koji se mogu konstruirati i onih koji se ne mogu konstruirati kako bi se učenici uvjerili u točnost svojih zaključaka. Brojni računalni program dopuštaju nam manipulirati duljinama stranica trokuta što je praktično za demonstraciju raznih primjera većem broju učenika.

Osim u svrhu otkrivanja novih pojmova ili pravilnosti, učenici pomoću Cuisenaireovih štapića mogu istraživati kako bi pridonijeli razumijevanju određenih pojmova, poput pojma opsega. U nastavku dajemo primjer aktivnosti kojom će učenici vizualizirati pojam opsega i tako ga lakše uključiti u svakodnevni rječnik.

2.5 Pojam opsega

S pojmom opsega učenici se susreću u nižim razredima osnovne škole. Nerijetko riječ opseg učenicima zvuči zbunjujuće i dovodi do nerazumijevanja na konceptualnoj razini. Važno je učenicima vizualizirati pojam opsega jer se on unutar geometrije pojavljuje prilikom uvođenja svakog geometrijskog lika, a kasnijim uvođenjem geometrijskih tijela nije ga teško pomiješati s oplošjem. Iz tog razloga učenici šestog razreda osnovne škole pojam opsega proučavat će u sljedećoj aktivnosti. Po završetku *Aktivnosti 2.5.1* učenici će moći:

- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale
- usporediti i procijeniti duljinu te ju izmjeriti rabeći odgovarajuće mjerne uređaje
- izračunati opseg jednostavnih likova
- odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema.

Ovo je posljednja nastavna tema koju ćemo obraditi unutar poglavlja o modelu Cuisenaireovih štapića.

2.5.1 Aktivnost: *Razumijevanje pojma opsega*

Aktivnost ćemo provoditi uz radne listiće koji se po tekstu neće razlikovati. Cilj aktivnosti je učenicima omogućiti da preslagivanjem objekata, Cuisenaireovih štapića, osmišljaju oblike odgovarajućih opsega kako bi povezali opseg s vlastitim iskustvom. Aktivnost bismo započeli podjelom učenika u skupine. U jednu skupinu možemo uključiti do četiri učenika. U nastavku dan je primjer radnog listića za jednu skupinu učenika. Unutar svake skupine učenicima možemo zadati drugi opseg za koji moraju složiti odgovarajući geometrijski oblik pomoću Cuisenaireovih štapića.

Radni listić 2.14: Primjer radnog listića za Aktivnost 2.5.1

Radni listić - Skupina A

<u>Zadatak 1:</u> Koristeći Cuisenaireove štapiće: 1 duljine dva, 1 duljine tri i 2 duljine četiri, oblikujte geometrijske likove različitih opsega. Štapići se moraju dodirivati po jednom od rubova štapića.

Raspravite u skupini o odgovorima na sljedeća pitanja:

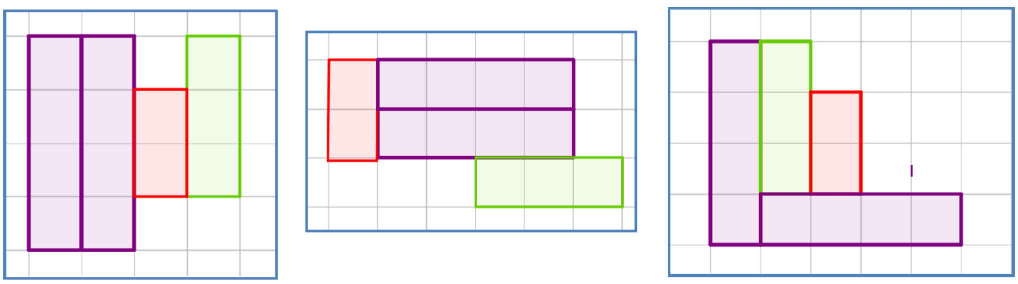
1. Koji je najveći opseg lika koji možete ostvariti slaganjem danih štapića?

2. Koji je najmanji opseg lika koji možete ostvariti slaganjem danih štapića?

3. Kako biste dobili opseg između najmanjeg i najvećeg lika? Razmislite o različitim strategijama.

4. Oblikujte geometrijski lik opsega 18. Opišite svoju strategiju otkrivanja takvog lika.

Kako bi učenicima bilo zahtjevnije ispuniti zadatak, ograničili smo broj Cuisenaireovih štapića koje učenici mogu koristiti u oblikovanju lika danog opsega. Pretpostavljamo da će učenici brzo povezati da najveći opseg dobivamo kada Cuisenaireove štapiće posložimo tako da jedan štapić prislonimo uz drugi po kraćem rubu te da ne prislanjamo uz jedan štapić više od dva štapića (jer ne želimo dva odvojena lika). Ovom aktivnosti nastavnik može promotriti kakve strategije učenici koriste u prikazivanju različitih oblika. U aktivnost se mogu uključiti pojmovi rotacije, simetrije i translacije. Ukoliko primijetimo da se učenici muče s određenim opsegom, predložimo strategiju postupnog smanjivanja najvećeg mogućeg opsega. Tijekom aktivnosti učenicima možemo ponuditi rješenje koje smo primijetili da nisu pronašli. Jednom kada učenik otkrije lik odgovarajućeg opsega može prebrojati koliko ima 'jedinica' koje bismo morali preklopiti. U nastavku su ponuđena rješenja za dani zadatak na radnom listiću prema prethodno opisanoj strategiji.



Slika 2.9: Primjeri likova opsega 18

Ako gledamo štapiće odvojeno, zbroj njihovih opsega je zbroj opsega pravokutnika dimenzija $1 \times 2, 1 \times 3$ i 1×4. Uzimamo u obzir da imamo dva štapića duljine četiri pa je ukupan zbroj opsega jednak 34. No to nije najveći mogući opseg jer nismo spajali štapiće. Budući da moramo spajati štapiće, pri svakom spajanju gubimo dvije *jedinice* opsega, po jednu od svakog štapića. Ako želimo načiniti oblik opsega 18, tada nam treba $34 - 18 = 16$ jedinica manje, odnosno potrebno nam je osam jedinica spajanja u stranicama štapića. Poželjno je da učenici svoje strategije iznose pred razredom te da svi zajedno procjenjujemo praktičnost pojedinih strategija. U nastavku dan je riješeni radni listić sa strategijom postupnog smanjivanja opsega. Posebno, učenici ovom aktivnosti mogu uočiti rotacije, osne i centralne simetrije te njihovo svojstvo očuvanja duljina, a time i opsega.

Radni listić 2.15: Riješeni radni listić za Aktivnost 2.5.1

Radni listić - Skupina A

Zadatak 1: Koristeći Cuisenaireove štapiće: 1 duljine dva, 1 duljine tri i 2 duljine četiri, oblikujte geometrijske likove različitih opsega. Štapići se moraju dodirivati po jednom od rubova štapića.

Raspravite u skupini o odgovorima na sljedeća pitanja:

1. Koji je najveći opseg lika koji možete ostvariti slaganjem danih štapića?

Najveći opseg lika dobivenog od danih štapića je 28.

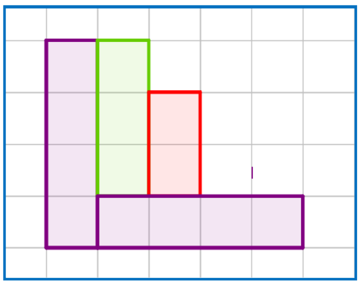
2. Koji je najmanji opseg lika koji možete ostvariti slaganjem danih štapića?

Najmanji opseg lika dobivenog od danih štapića je 16.

3. Kako biste dobili opseg između najmanjeg i najvećeg lika? Razmislite o različitim strategijama.

Opseg između najmanjeg i najvećeg lika dobili bismo postupnim preslagivanjem jednog od štapića iz položaja lika najvećeg opsega i promatranjem kako se tim preslagivanjem štapića mijenja opseg.

4. Oblikujte geometrijski lik opsega 18. Opišite svoju strategiju otkrivanja takvog lika.



Složili bismo štapiće na bilo koji način i odredili opseg, a zatim preslagivanjem jednog po jednog štapića odredili lik traženog opsega.

Ova aktivnost omogućuje učenicima da variraju, kombiniraju i istražuju unutar teme opsega. Time će razvijati svoje sposobnosti prikazivanja vlastitih ideja slikama, brojevima, didaktičkim modelima, misaono; uspostavljati odnose među objektima, idejama i pojmovima; povezivati matematiku s vlastitim iskustvom; postavljati matematici svojstvena pitanja (Postoji li...? Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja? i slično); postavljati problem, istraživati, analizirati i obrazlagati dobivena rješenja. Ovom aktivnosti završit ćemo s modelom Cuisenaireovih štapića i započeti s opisivanjem modela vage kojim pridonosimo razumijevanju pojma jednakosti u šestom razredu osnovne škole.

3. MODEL VAGE

Već u prvom razredu osnovne škole, učenici se suočavaju sa znakom jednakosti „=“ bez da razumiju što pojam jednakost znači. U nastavi matematike jedan model se posebno ističe kao alat kojim učenici otkrivaju što je to jednakost, kako se jednakost postiže te kako se jednakost čuva. Model vage je vizualna reprezentacija jednakosti koju učenici viđaju u svakodnevnom životu. Prenošenjem nečeg materijalnog s čime se učenici svakodnevno susreću u nastavu matematike olakšava učenicima razumijevanje matematičkih koncepata i procesa koje vežemo uz jednakost i jednadžbe. Model vage koristimo za dva temeljna koncepta:

1. koncept jednakosti i očuvanja jednakosti
2. koncept nepoznanice

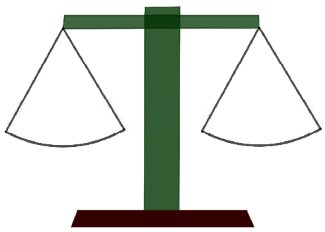
U aktivnostima koje slijede pokazat ćemo kako nastavnik može iskoristiti model vage da bi pridonio razumijevanju pojma jednakosti i postupaka koji tu jednakost čuvaju. Nakon te aktivnosti pred učenike šestog razreda osnovne škole postavit ćemo problem određivanja nepoznanice u jednostavnim linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom. Po završetku ovih aktivnosti od učenika se, prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu, očekuje da će:

- odrediti nepoznati broj u jednostavnim jednakostima i provjeriti točnost rješenja
- riješiti jednostavne linearne jednadžbe i uvrštavanjem provjeriti točnost dobivenog rješenja

- prevesti jednostavan problem u algebarske simbole (brojevna rečenica, linearna jednadžba) isplanirati njegovo rješavanje, riješiti ga i utvrditi smislenost dobivenoga rješenja.

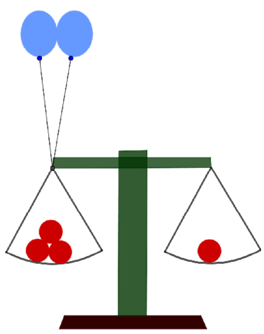
3.1 Koncept jednakost i očuvanja jednakosti

Model vage bez fizičke vage neće dati željene rezultate. Učenicima na nastavu na uvodni sat moramo donijeti vagu i demonstrirati što znači jednakost. Promatranjem vage učenici će zaključiti da jednakost znači da je vaga u ravnoteži, odnosno da je lijeva strana vage pod teretom iste *težine* kao i desna strana. Napomenimo da se radi o vagi s jednakim krakovima kakva je prikazana na *slici 3.1*.



Slika 3.1 Vaga u stanju ravnoteže

Glavni problem s kojim se učenici susreću pri određivanju jednakosti jest postizanje jednakosti dodavanjem, odnosno oduzimanjem *težine* utega. Učenicima je lako shvatiti da je uteg na vagi reprezentacija pozitivnog broja u jednakosti, ali predstavljanje negativnog broja u jednakosti učenike često zbunjuje. Za negativan broj običaj je u nastavi koristiti balone. Na *slici 3.2* prikazana je jednakost $3 - 2 = 1$.



Slika 3.2 Prikaz djelovanja balona na vagu

Dodavanje balona na jednoj strani vage označavalo bi oduzimanje *težine* utega na toj strani vage ili podizanje jedne strane vage čime se *težina* utega umanjuje. Učenicima na taj način vizualiziramo računske operacije u jednakostima. Slijedi aktivnost kojom će učenici otkriti što znači jednakost brojeva i brojevnih izraza korištenjem modela vage kao pomoćnog alata.

3.1.1 Aktivnost: *Razumijevanje pojma jednakosti*

U šestom razredu osnovne škole, prije nego s učenicima započnemo s rješavanjem linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, moramo se uvjeriti da učenici razumiju što znači jednakost brojeva i brojevnih izraza. Ova aktivnost daje učenicima uvid u različite situacije u kojima će:

- uspoređivati brojeve u različitim zapisima
- odrediti nepoznati broj u jednostavnim jednakostima i provjeriti točnost rješenja
- prikazivati jednakosti riječima, matematičkim simbolima i slikom.

Za aktivnost su nam potrebni radni listići za svakog učenika. Radni listići su jednaki za sve učenike i učenici će ih rješavati u parovima. Želimo da učenici komuniciraju međusobno i zaključke donose zajedno. Primjer radnog listića dan je u nastavku.

Radni listić 3.1: Primjer radnog listića za Aktivnost 3.1.1

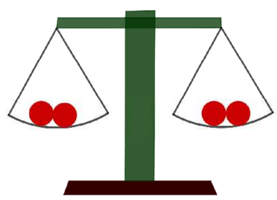
Radni listić – Pojam jednakosti

Zadatak 1:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
A) Opišite što se nalazi na lijevoj, a što na desnoj strani vage.

____

B) Koja strana vage je teža? Obrazložite svoj odgovor.

____



Zadatak 2:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
A) Opišite što se nalazi na lijevoj, a što na desnoj strani vage. Po čemu se ova vaga razlikuje od vage iz Zadatka 1?

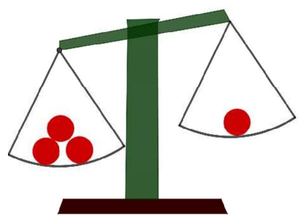
____

B) Koja strana vage je teža? Obrazložite svoj odgovor.

____

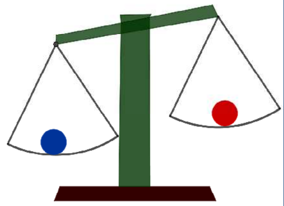
C) Što biste trebali učiniti da vaga bude u ravnoteži?

____



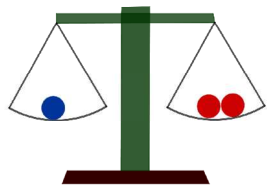
Zadatak 3:
Sljedeća slika prikazuje vagu. Možete li zaključiti koji je uteg teži: plavi ili crveni? Obrazložite svoj odgovor.

____



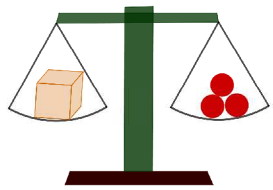
Zadatak 4:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
Kako biste opisali čemu je jednaka težina plavog utega?

____



Zadatak 5:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
Ako znamo da se u kutiji na lijevoj strani vage nalaze crveni utezi, što mislite koliko ih ima u kutiji ? Obrazložite svoj odgovor. Napomena: Težina kutije je zanemariva.

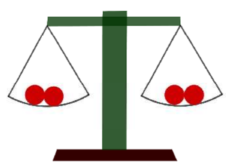
____



Učenicima dajemo 15 minuta da u suradnji sa svojim parom odgovore na dana pitanja. Za to vrijeme kružimo učionicom jer želimo čuti argumente kojima učenici opravdavaju svoja razmišljanja, želimo vidjeti gdje se najviše zadržavaju, a s kojim pitanjima imaju najmanje problema. Nakon što vrijeme istekne, potičemo učenike da izraze svoja razmišljanja pred razredom. Krenimo s analizom od prvog zadatka.

Radni listić 3.2: Rješenje Zadatka 1 iz Aktivnosti 3.1.1

Zadatak 1:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
A) Opišite što se nalazi na lijevoj, a što na desnoj strani vage.
Na lijevoj i desnoj strani nalaze se po dva utega iste težine.
B) Koja strana vage je teža? Obrazložite svoj odgovor.
Obje strane vage su jednako teške jer je vaga u ravnoteži.



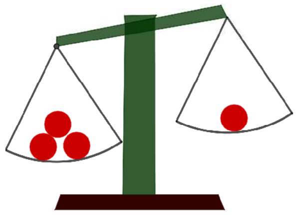
Postavljamo pitanja:

- *Kako biste prikazali tu jednakost matematičkim znakovima?*
- *Što biste trebali napraviti da lijeva strana vage bude teža od desne?*
- *Koliko utega trebate dodati da lijeva strana vage bude teža?*

Od učenika očekujemo da će odmah spomenuti znak jednakosti te da će brzo predložiti dodavanje jednog utega na lijevu stranu kako bi ta strana bila teža. Učenicima predložimo dodavanje više od jednog utega na lijevu stranu kako bismo ih potaknuli na razmišljanje o više mogućih rješenja danog problema. U drugom zadatku očekivane odgovore zapisali smo na *radni listić 3.3*.

Radni listić 3.3: Rješenje Zadatka 2 iz Aktivnosti 3.1.1

Zadatak 2:
Sljedeća slika prikazuje vagu.
A) Opišite što se nalazi na lijevoj, a što na desnoj strani vage.
Po čemu se ova vaga razlikuje od vage iz Zadatka 1?



Na lijevoj strani vage nalaze se tri utega, a na desnoj samo jedan. Ova vaga razlikuje se po tome što joj lijeva i desna strana nisu jednake težine.

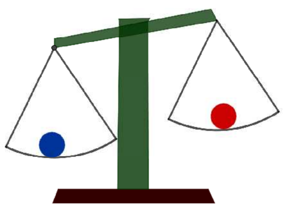
B) Koja strana vage je teža? Obrazložite svoj odgovor.
Lijeva strana vage je teža jer su na njoj tri utega pa je vaga nagnuta na lijevo.

C) Što biste trebali učiniti da vaga bude u ravnoteži?
Da bi vaga bila u ravnoteži možemo dodati dva utega na desnu stranu vage.

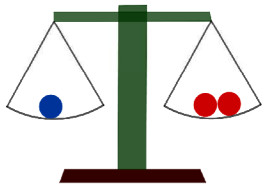
Učenici bi s lakoćom trebali opisati riječima razliku vaga iz prvog i drugog zadatka. Pretpostavljamo da će se učenici u C) dijelu Zadatka 2 dosjetiti dodati uteg na desnu stranu vage, ali ne i da će predložiti oduzimanje dva utega na lijevoj strani. U aktivnosti koja slijedi preciznije ćemo povezati oduzimanje težine s dodavanjem balona. U trećem i četvrtom zadatku očekujemo da učenici zapišu jednostavnu jednakost riječima te da zaključuju o jednakostima i nejednakostima koje uključuju utege različitih težina. Plavi uteg mogli bismo shvatiti kao prijelaz na pojam nepoznanice.

Radni listić 3.4: Rješenja Zadatka 3 i Zadatka 4 iz Aktvnosti 3.1.1

Zadatak 3: Sljedeća slika prikazuje vagu.
Možete li zaključiti koji je uteg teži: plavi ili crveni? Obrazložite svoj odgovor.
Plavi uteg je teži od crvenog jer je lijeva strana vage nagnuta prema dolje.



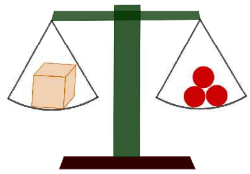
Zadatak 4: Sljedeća slika prikazuje vagu.
Kako biste opisali čemu je jednaka težina plavog utega?
Težina plavog utega jednaka je dvostrukoj težini crvenog utega.



Učenike možemo zamoliti da zapišu zadanu jednakost matematičkim znakovima gdje bismo plavi uteg označili s P, a crveni sa C. Time bismo dobili sljedeću jednakost: $P = C + C$. Posljednji zadatak uvod je u linearne jednadžbe. Kutija na lijevoj strani vage predstavlja nepoznanicu, a utezi na desnoj strani vage vrijednost nepoznanice.

Radni listić 3.5: Rješenje Zadatka 5 iz Aktivnosti 3.1.1

Zadatak 5: Sljedeća slika prikazuje vagu.
Ako znamo da se u kutiji na lijevoj strani vage nalaze crveni utezi, što mislite koliko ih ima u kutiji ? Obrazložite svoj odgovor.
Napomena: Težina kutije je zanemariva.



Budući da je vaga u ravnoteži, na lijevoj i desnoj strani mora biti jednak broj utega pa se u kutiji nalaze tri crvena utega.

Pretpostavljamo da će učenici lako zaključiti o posljednjoj jednakosti, a ukoliko s njom imaju poteškoća, vratimo se na Zadatak 1 i vagu u ravnoteži. Iz Zadatka 1 učenici će povezati kutiju s brojem utega koji se moraju nalaziti u kutiji kako bi vaga bila u ravnoteži. Zamolimo li učenike da zapišu jednakost matematičkim znakovima, kutiju možemo imenovati nepoznanicom x, y, a ili drugom oznakom po izboru učenika. Ovom aktivnosti učenici će sami istražiti što je jednakost te će istu zapisivati matematičkim znakovima. Na ovaj način učenicima će prijelaz na linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom biti olakšan jer će učenici uvijek moći povezati nepoznanicu s kutijom iz Zadatka 5. Nakon što su učenici otkrili pojam jednakosti pomoću modela vage, slijedi aktivnost kojom će učenici istražiti na koji način tu jednakost možemo očuvati.

3.1.2 Aktivnost: *Očuvanje jednakosti*

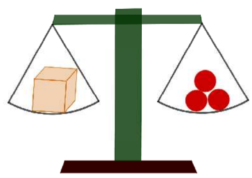
Ova aktivnost nastavak je aktivnosti o pojmu jednakosti. Učenici će unutar aktivnosti otkriti kako sve mogu utjecati na jednakost te koji matematički postupci mijenjaju jednakost, a koji tu jednakost čuvaju. Materijal potreban učenicima za istraživanje očuvanja jednakosti čine radni listići. Svaki učenik dobiva po jedan radni listić koji će rješavati suradnjom u četveročlanim skupinama. Prije rješavanja radnog listića učenicima ćemo dati potrebne alate kojima će se služiti pri rješavanju zadataka. Tako ćemo kao uvod u aktivnost prezentirati značenje utega i balona. Na primjeru, pomoću animacije ili fizičke vage te utega i balona, demonstrirat ćemo što znači dodati uteg, a što znači dodati balon. Uteg ćemo definirati kao pribrajanje, čime se strana vage na koju smo dodali uteg spušta. Balon ćemo definirati kao *oduzimanje*, odnosno podizanje strane vage na koju smo dodali balon. U terminima brojeva: pribrajanje broja 5 objema stranama jednakosti značilo bi dodavanje utega *težine* 5 na obje strane vage. Analogno, oduzimanje broja 5 od obiju strana jednakosti značilo bi postavljanje balona *težine* 5 na obje strane vage u ravnoteži. Naravno, s učenicima započinjemo s jednostavnim primjerima, odnosno u jednadžbe uvrštavamo jednostavne brojeve s kojima učenici lako računaju.

Nakon što učenici pomoću utega i balona otkriju što sve smiju raditi s jednakosti na jednostavnim primjerima, utezi i baloni služit će samo kao podsjetnik i njihova vrijednost više neće biti važna. Oni će biti samo podsjetnik na odabir operacije pribrajanja i oduzimanja. Naglasimo učenicima da ukoliko dodamo zajedno uteg i balon nismo ništa promijenili. Njihove vrijednosti zajedno daju nulu. Jednostavnim računom to bismo pokazali kao zbroj dva suprotna broja. Možemo reći da se uteg i balon jednake *težine* poništavaju. U nastavku dan je primjer radnog listića.

Radni listić 3.6: Radni listić za Aktivnost 3.1.2

Radni listić – Očuvanje jednakosti

<u>Zadatak 1:</u> Sljedeća slika prikazuje vagu. Prisjetite se čemu je jednak sadržaj kutije? Zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima.



____

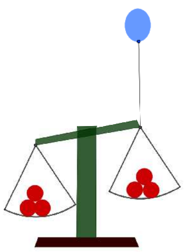
A) Što bi se dogodilo sa stanjem vage da dodamo balon na desnoj strani vage? Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima. ____
B) Što bi se dogodilo sa stanjem vage da dodamo jedan uteg na lijevoj strani? Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima. ____
C) Bi li se stanje vage promijenilo da dodamo po jedan uteg na lijevu i desnu stranu? Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima. ____
D) Bi li se stanje vage promijenilo da dodamo po jedan balon na lijevoj i desnoj strani? Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima. ____

Prvi zadatak služi kako bi se učenici prisjetili kako smo u prethodnoj aktivnosti zapisali jednakost kada je na jednoj strani vage bila kutija. Imenujemo sadržaj nepoznate kutije s x, a kako bismo učenicima olakšali dalje rješavanje zadataka odredimo da je vrijednost svake od crvenih utega jednaka jedan. U kasnijim primjerima utezima možemo dodijeliti i težine različite od jedan. Jednakost za prvi zadatak glasit će $x = 1 + 1 + 1 = 3$, odnosno $x = 3$. Učenicima napomenimo da u rješavanju podzadataka koriste jednakost $3 = 3$ kao pomoć pri računanju. Učenicima odredimo vrijeme od 15 minuta za ovu aktivnost. Za vrijeme aktivnosti obilazimo skupine učenika te slušamo o čemu raspravljaju. Ukoliko primijetimo da su učenici krenuli u krivom smjeru sa svojim zaključivanjem, ispravimo ih postavljanjem potpitanja. Ako time ne postignemo željeni rezultat, onda ih direktno ispravimo na zadatku koji su pogrešno riješili ukazujući na pogrešku. Po isteku vremena zajedno s učenicima raspravimo o rješenjima zadataka danim na *radnom listiću 3.7*.

Radni listić 3.7: Rješenje A) i B) dijela iz Aktivnosti 3.1.2

A) Što bi se dogodilo sa stanjem vage da dodamo balon na desnoj strani vage?

Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima.



$$\mathbf{3} = \mathbf{3}$$
$$\mathbf{3} > 3 - 1$$
$$\mathbf{3} > 2$$

Ako na desnoj strani dodamo balon, vaga više neće biti u ravnoteži. Desna strana vage bit će lakša od lijeve.

B) Što bi se dogodilo sa stanjem vage da dodamo jedan uteg na lijevoj strani?
Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima.

$$\mathbf{3} = \mathbf{3}$$
$$\mathbf{3} + \mathbf{1} > 3$$
$$\mathbf{4} > 3$$

Ako na lijevoj strani dodamo jedan uteg, vaga više neće biti u ravnoteži. Lijeva strana vage bit će teža od desne.

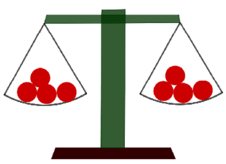
S učenicima raspravimo o sljedećim pitanjima:

- *Narušavamo li jednakost ako dodamo uteg/balon na jednoj od strana vage?*
- *Što smijemo učiniti s jednakosti, a da se ona ne promijeni?*

Od učenika tražimo da svojim riječima objasne značenje balona i utega u svakom od zadataka te da ih povežu s matematičkim operacijama u jednakosti. To je glavni razlog zašto koristimo slikoviti prikaz utega i balona. Naime, učenicima bi bilo teško razumjeti dodavanje i oduzimanje brojeva u jednakosti bez prethodnog slikovnog prikaza.

Radni listić 3.8: Prikaz rješenja C) i D) iz Aktivnosti 3.1.2

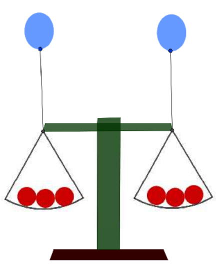
C) Bi li se stanje vage promijenilo da dodamo po jedan uteg na lijevu i desnu stranu?
Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima.

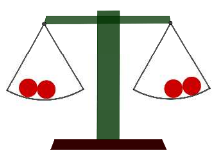


$$3 + 1 = 3 + 1$$
$$4 = 4$$

Jednakost se nije promijenila. Vaga je i dalje u ravnoteži.

D) Bi li se stanje vage promijenilo da dodamo po jedan balon na lijevoj i desnoj strani.
Nacrtajte pripadne slike i zapišite svoje rješenje matematičkim simbolima.





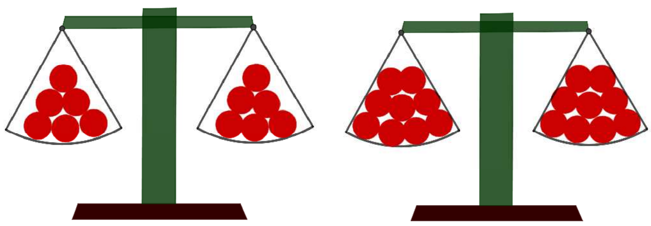
$$3 - 1 = 3 - 1$$
$$2 = 2$$

Jednakost se nije promijenila.
Vaga je i dalje u ravnoteži.

Postavljamo pitanje za razrednu diskusiju:

- *Što zaključujete: na koji način smijemo dodavati i oduzimati brojeve ako želimo očuvati jednakost?*

Učenici će provodeći aktivnost samostalno zaključiti da se dodavanjem utega ili balona na obje strane jednakosti, jednakost ne mijenja. Možemo pretpostaviti da će neki učenici smatrati da jednakost nije očuvana dodavanjem bilo utega ili balona na obje strane jer kao rezultat više nisu dobili $3 = 3$, ali dovoljno je napomenuti da nam nije važan broj ili rezultat već samo odnos dobivenih brojeva. Iz ove aktivnosti možemo proširiti diskusiju uvođenjem operacije množenja u jednakost. Učenicima možemo dati zadatak da udvostručuju, utrostručuju, upeterostručuju težine na obje strane vage. *Slika 3.3* pokazuje rezultat udvostručenja i utrostručenja težina iz zadatka iz *Aktivnosti 3.1.2* na obje strane vage.



Slika 3.3: Udvostručene i utrostručene težine s vage iz Aktivnosti 3.1.2

Nakon ove aktivnosti s učenicima možemo započeti rješavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, a svaki problem s kojim se učenici prilikom rješavanja susretnu *prevedemo* u utege i balone.

Kako je glavna svrha modela vage učenicima približiti pojam jednakosti, prelazimo na model algebarskih pločica pomoću kojih učenici istražuju kako množiti algebarske izraze.

4. ALGEBARSKE PLOČICE

Osim modela duljine, čiji primjer su Cuisenaireovi štapići, izdvojili bismo modele površine. Ovi modeli su vrlo korisni pri poučavanju algebarskih izraza. Algebarske pločice su set drvenih ili plastičnih pločica koje izgledom odgovaraju geometrijskim likovima. Pločice se razlikuju po duljinama stranica te po boji. Pločice istih dimenzija su iste boje. U stranoj literaturi algebarske pločice poznate su pod nazivom *algebra tiles*. Veliki kompleti algebarskih pločica različitih dimenzija široko su dostupni u prodaji i posebno su prilagođeni nastavi matematike u nižim i višim razredima osnovne škole. Vrlo su praktične magnetne algebarske pločice kojima možemo manipulirati na ploči kako bi svim učenicima bile vidljive. Jedan prosječni komplet algebarskih pločica sadržavao bi 54 kvadrata i pravokutnika sljedećih dimenzija:

- 20 kvadrata jedinične površine
- 10 pravokutnika dimenzija $1 \times x$
- 10 pravokutnika dimenzija $1 \times y$
- 5 kvadrata duljine stranice x
- 5 kvadrata duljine stranice y
- 4 pravokutnika dimenzija $x \times y$.

Slika 4.1 prikazuje primjer algebarskih pločica.

Slika 4.1: Primjer seta algebarskih pločica

Algebarske pločice služe za vizualizaciju brojeva i varijabli što je neophodno učenicima osnovne škole koji još nisu razvili apstraktan način razmišljanja. Glavni zadatak algebarskih pločica je omogućiti uvođenje pojma jednadžbe koristeći geometrijske likove i tijela, odnosno povezati algebru s geometrijom. U tu svrhu dajemo primjer kako uvesti računanje algebarskih izraza pomoću algebarskih pločica.

4.1 Algebarski izrazi

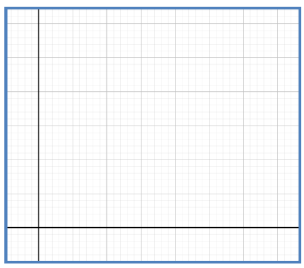
Učenici će računati s algebarskim izrazima na način da će promatrati površine odgovarajućih geometrijskih likova, odnosno volumen pripadnih geometrijskih tijela. U Nacionalnom okvirnom kurikulumu dana su znanja i kompetencije koje očekujemo da će učenici po završetku aktivnosti koje slijede moći pokazati. Tako će učenik moći:

- prepoznati, opisati, usporediti i primijeniti svojstva i odnose ravninskih i prostornih geometrijskih oblika radi crtanja, mjerenja, računanja i zaključivanja
- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem.

Ako promotrimo algebarske pločice uočavamo pravokutne i kvadratne pločice. Pravokutne pločice predstavljat će varijable. Razlikujemo pravokutnike površine x, odnosno y što slijedi iz njihovih dimenzija koje smo već naveli. Različitim bojama pravokutnika ističemo varijablu ovisno o njenom predznaku u algebarskom izrazu. Standardno crvenom bojom označit ćemo varijable s predznakom minus u jednadžbi, a pločice u drugim bojama (najčešće žuta, zelena i plava) označavat će varijable s predznakom plus u jednadžbi. Kvadratne pločice jedinične površine predstavljat će broj 1, a njihovim dodavanjem u skup predstavljat ćemo ostale brojeve. S druge strane, kvadratne pločice površina x^2 i y^2 predstavljat će kvadrirane varijable x i y u danim algebarskim izrazima. U sljedećoj aktivnosti koristit ćemo ove dogovorene predstavnike pojedinih varijabli i brojeva. Podrazumijevat ćemo da su učenici upoznati s varijablama i brojevima kako smo ih opisali.

4.1.1 Aktivnost: *Množenje algebarskih izraza*

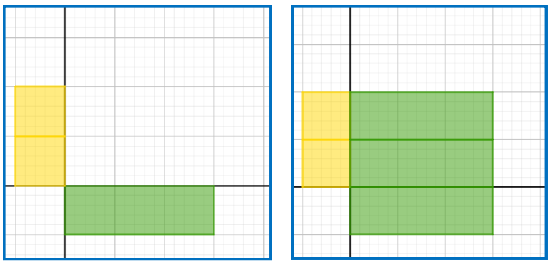
U osmom razredu učenici u sklopu nastavne teme *Kvadriranje i korjenovanje* uče kako množiti algebarske izraze. Množenje složenijih algebarskih izraza učenicima želimo približiti pomoću površina geometrijskih likova čije stranice odgovaraju pojedinim algebarskim izrazima. Cilj ove aktivnost je vizualizirati množenje algebarskih izraza, odnosno učenicima algebarske operacije prikazati geometrijski. Konkretno, množenje algebarskih izraza interpretirat ćemo kao računanje površine ili volumena geometrijskih likova ili tijela kojima su stranice, odnosno bridovi duljina danih algebarskih izraza. Za ovu aktivnost učenici će raditi u parovima kako bi međusobno mogli raspravljati o koracima k rješenju danih zadataka. Učenicima će biti potrebne sljedeće algebarske pločice: četiri pločice pravokutnog oblika površine x, jedna kvadratnog oblika površine x^2 i tri kvadratnog oblika stranice 1 u standardnim bojama: zelenoj i žutoj. Posebno, učenicima će biti potrebni odgovarajući predlošci prikazani na *slici 4.2*.



Slika 4.2: Predložak za slaganje algebarskih pločica

Zadatak učenika je prikazati umnožak algebarskih izraza pomoću algebarskih pločica postavljanjem pločica na dani predložak te pomnožiti algebarske izraze koristeći znanja o računanju površina geometrijskih likova. Učenici će algebarske pločice postavljati tako da algebarske pločice koje predstavljaju jedan od faktora smjeste ispod horizontalne osi prislonjene po duljem rubu, a algebarske pločice koje predstavljaju drugi od faktora u umnošku lijevo od okomite osi također po duljem rubu pločice. Istaknute osi ćemo zvati standardnim imenima: apscisa za horizontalnu i ordinata za okomitu.

Prije nego što učenicima podijelimo *radni listić 4.1* učenici prikazuju jednostavan umnožak $2x$ na predlošku. Na taj način učenici će lakše doći do zaključaka za postavljanje i rješenje složenijih umnožaka koji slijede na *radnom listiću 4.1*. Učenici će postaviti dvije kvadratne pločice žute boje površine jedan uz os ordinata i jednu pravokutnu pločicu zelene boje površine x uz os apscisu. Učenike možemo pitati jesmo li algebarske pločice mogli postaviti obrnuto, odnosno zamijeniti faktore na osima. Zbog komutativnosti množenja učenici će zaključiti da je svejedno uz koju smo os postavili algebarske pločice. *Slika 4.3* prikazuje postavljanje i rješenje umnoška $2x$.



Slika 4.3: Postavljanje i rješenje umnoška $2x$

Učenici vlastitim riječima mogu opisati što su dobili množenjem pomoću algebarskih pločica. Promotre li dobiveni prikaz učenici će moći povezati umnožak $2x$ s površinom pravokutnika sa stranicama duljina 2 i x koji se u prikazu sastoji od dva pravokutnika površine x u zelenoj boji jer su nam sve veličine u primjeru pozitivne. U nastavku aktivnosti učenicima ćemo podijeliti radne listiće sa zadacima. Primjer jednog takvog radnog listića dan je u nastavku.

Radni listić 4.1: Primjer radnog listića za Aktivnost 4.1.1

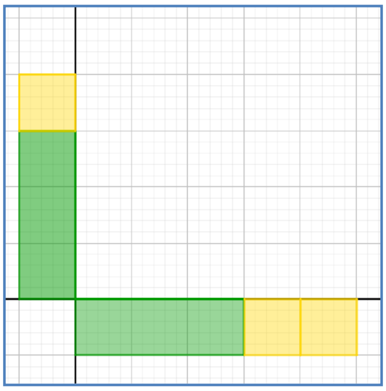
Radni listić – Skupina A

Zadatak 1: Sljedeće umnoške prikažite pomoću algebarskih pločica i izračunajte računajući površine/volumen odgovarajućih geometrijskih likova/tijela:

A) $(x+2)(x+1)$

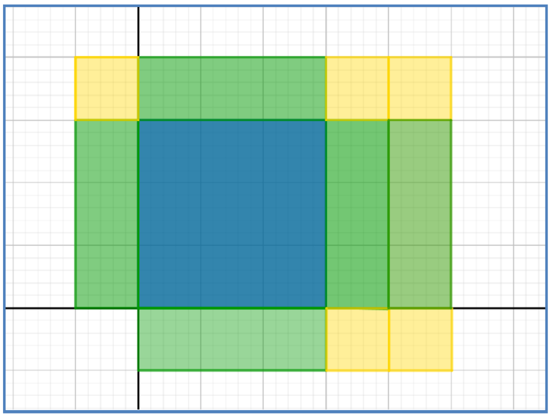
B) $x(x+2)(x+1)$

Općenito algebarski izraz u A) dijelu zadatka je $(x + a)(x + b)$ gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$. Brojevi a i b koje uvrštavamo u početne primjere učenicima moraju biti što jednostavniji jer naglasak nije na množenju brojeva već na množenju algebarskih izraza. Također, zbog ograničenosti broja algebarskih pločica i njihovih veličina, moramo paziti da učenici dane algebarske izraze mogu prikazati dobivenim materijalom. Umnožak u B) dijelu zadatka je zapravo umnožak iz A) dijela Zadatka 1 pomnožen s x. Razlog tome bit će jasan iz rješenja radnog listića danog u nastavku. Učenici će početi s rješavanjem zadatka postavljanjem algebarskih pločica na dani predložak kako je prikazano na *slici 4.4*. Nakon postavljanja zadatka prokomentirat ćemo zašto smo na baš taj način postavili algebarske pločice.



Slika 4.4: Postavljanje umnoška algebarskih izraza iz A) dijela Zadatka 1 na predložak

Učenici će na os apscisu postaviti izraz $x + 2$ postavljanjem jedne pravokutne pločice površine x i dvije kvadratne pločice površine 1, a na os ordinata na isti način prikazati izraz $x + 1$. Kako se radi o pozitivnim izrazima unutar zagrade, pločice su u standarnim bojama žutoj i zelenoj. Preostaje računati na način da računamo površine likova omeđenih jednom pločicom na apscisi i jednom pločicom na ordinati. Učenicima ćemo postavljati pitanja o geometrijskim likovima čije će površine na ovaj način računati. Tako će učenici uočiti da je umnožak dviju zelenih pločica jednak površini kvadrata kojem su zelene pločice susjedne stranice. Slično će zaključiti za određivanje umnoška zelene i žute pločice te dviju žutih pločica. Učenici će zatim na predložak smjestiti kvadrat stranice duljine x (u plavoj boji), pravokutnik dimenzije $x \times 1$ (u zelenoj boji) te dva kvadrata stranice duljine 1 (u žutoj boji) kao rezultate *množenja pločica* s obje osi. Prikaz jednog takvog umetanja algebarskih pločica dan je na *slici 4.5*.



Slika 4.5: Prikaz umnoška algebarskih izraza iz A) dijela Zadatka 1 pomoću algebarskih pločica

Učenici će uočiti da smo na ovaj način površinu pravokutnika zadanog stranicama duljina $x+1$ i $x+2$ popločali kvadratima i pravokutnicima odgovarajućih površina. Uočimo da imamo jedan kvadrat površine x^2, tri pravokutnika površine x i dva kvadrata površine jedan. Rješenje zapisujemo na sljedeći način:

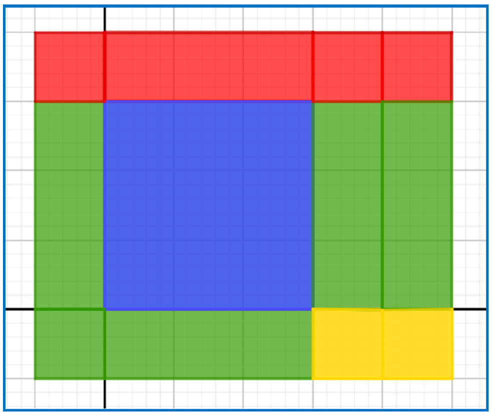
$$(x+2)(x+1) = 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2.$$

Učenici će uočiti da su koeficijenti u umnošku jednaki broju odgovarajućih geometrijskih likova koje smo umetnuli u predložak prilikom određivanja površine velikog pravokutnika. S učenicima možemo ponoviti postupak opisivanjem koraka koje smo poduzimali pri rješavanju. Želimo da učenici riječima opišu kako su računali površine kako bi isto povezali s matematičkim zapisom. Radni listići mogu se razlikovati po zadanim algebarskim izrazima pa je važno da učenici verbaliziraju postupak. Predlažemo izbor brojeva *a* i *b* u ostalim skupinama u *tablici 4.1*.

Tablica 4.1:Predloženi izbor brojeva a i b za A) dio Zadatka 1

Skupina	*a*	*b*	Skupina	*a*	*b*
Skupina A	2	1	Skupina D	3	2
Skupina B	2	-1	Skupina E	-2	0
Skupina C	-2	-1	Skupina F	1	-3

Ako promotrimo izbor brojeva *a* i *b* uočit ćemo da imamo i negativne brojeve što učenike može zbuniti. Ipak naglasimo učenicima da površine računaju kao što su navikli, ali pri odabiru pločice koja predstavlja dobivenu površinu pripaze jesu li množili izraze istih ili različitih predznaka odnosno hoće li svoj pravokutnik popločati crvenim pločicama ili odgovarajućim žutim, zelenim i plavim pločicama. Kao i u A) dijelu zadatka dobivene površine će zbrojiti pazeći da u zbroj uključe odgovarajuće predznake. *Slika 4.6* prikazuje umnožak $(x+2)(x-1)$.

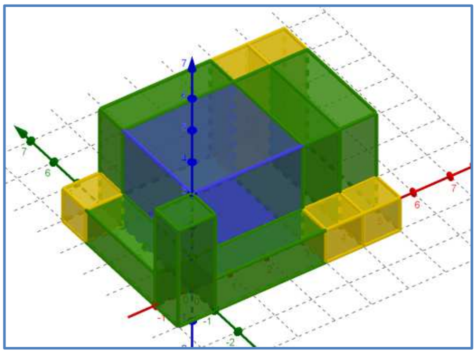


Slika 4.6: Prikaz rješenja umnoška $(x+2)(x-1)$.

Kao što smo ranije naveli, umnožak zapisujemo prebrojavanjem odgovarajućih pločica iste boje: $(x+2)(x-1) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2 \cdot x - 2$. Uočimo da su u prikazu crveno obojani pravokutnici i kvadrati rezultat množenja pozitivnog i negativnog broja, odnosno umnožak crvene i odgovarajuće žute/zelene pločice dat će crvenu pločicu. Na isti bi način umnožak dviju crvenih pločica bila žuta/zelena pločica, ovisno o zadanom primjeru. Iz posljednjeg zapisa danog umnoška učenici će doći do traženog rezultata:

$$(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$$

U B) dijelu Zadatka 1: $x(x+2)(x+1)$ iskoristit ćemo dobiveno rješenje iz A) dijela Zadatka 1, a za početak možemo s učenicima raspraviti o tome hoćemo li opet računati površinu ili je sada riječ o nečem drugom. Učenicima je pojam volumena poznat iz nižih razreda i primijetit će da se u umnošku pojavljuje izraz x^3. Ipak, učenici vjerojatno neće tako lako moći odrediti odgovarajući prikaz umnoška algebarskim pločicama. Kako bi učenici došli na ideju da treću pločicu (onu koja predstavlja x u algebarskom izrazu) treba postaviti okomito na predložak možemo pojednostaviti problem tako da učenici pokušaju odrediti rezultat algebarskog izraza $2(x+2)(x+1)$, odnosno $2(x^2+3x+2)$. Učenici će na dobivenu površinu iz A) dijela Zadatka 1 složiti još jednu. Ako se postupak nastavi, možemo govoriti o x takvih površina. Također, učenicima spomenemo da smo u A) dijelu zadatka gledali površinu geometrijskog lika (pravokutnika), a sada možemo gledati tijelo duljina bridova $x, x + 1$ i $x + 2$. *Slika 4.7* je geometrijski prikaz rješenja B) dijela Zadatka 1.



Slika 4.7: Geometrijski prikaz rješenja B) dijela Zadatka 1

Učenicima sada možemo govoriti o trećoj dimenziji i određivanju volumena tijela s bridovima duljina x, $x + 1$ i $x + 2$. Iz ove aktivnosti s učenicima možemo ponoviti volumene odabranih geometrijskih tijela kako bi učenici povezivali različita područja matematike i lakše razumjeli određene matematičke koncepte. Postavimo li matematičke probleme u više od jednog konteksta, učenicima pokazujemo široku primjenu matematičkih koncepata i povezujemo matematiku s različitim objektima i situacijama iz svakodnevnog života. Naglasimo da je ovakvo povezivanje unutar matematičkih područja posebno važno za učenike s teškoćama u učenju.

U sljedećem poglavlju opisat ćemo mnogokutne pločice, didaktički model površine pomoću kojeg učenici mogu istraživati mjere kutova, otkrivaju kako popločati ravninu različitim mnogokutima i otkrivaju pojam razlomka. Posebno nam je zanimljiva nastavna cjelina *Razlomak* u kojoj ponovno imamo integraciju dva matematička područja: algebre i geometrije.

5. MNOGOKUTNE PLOČICE

Jedan od poznatih didaktičkih modela površine su pločice mnogokuta. U stranoj literaturi poznate su pod nazivom *Pattern blocks* iz razloga što služe za istraživanje pravilnosti u različitim matematičkim problemima. Mnogokutne pločice (*Pattern blocks*) osmišljene su šezdesetih godina dvadesetog stoljeća unutar Education Development Centera (EDC), neprofitne organizacije za istraživanje ranog razvoja djece, osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, STEM područja, razvoja radno osposobljenih mladih, učenja izvan školskog okruženja, prevencije nasilja i samoubojstava, ponašajnog, fizičkog i mentalnog zdravlja i drugo. Prvotno su osmišljene za proučavanje popločavanja ravnine, ali danas ih koristimo za istraživanje i otkrivanje u različitim područjima matematike. Kao model površine, pločice mnogokuta najčešće koristimo za istraživanje geometrijskih pravilnosti, ali one su se pokazale i kao praktičan alat za istraživanje pojmova razlomka i postotka. Opišimo kako izgleda jedan standardni set pločica mnogokuta. Izrađeni od drveta ili plastike, u svojim standardnim bojama, jedan set pločica mnogokuta sadrži:

- jednakostraničan trokut stranice duljine a u zelenoj boji
- kvadrat stranice duljine a u narančastoj boji
- romb s jednim kutom od 60° i stranicom duljine a u plavoj boji
- romb s jednim kutom od 30° i stranicom duljine a u bež boji
- jednakokračni trapez s krakom duljine a u crvenoj boji
- pravilni šesterokut stranice duljine a u žutoj boji

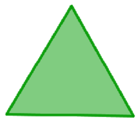
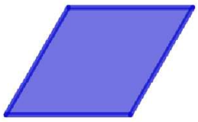
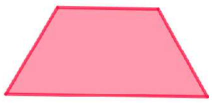
Slika 5.1: Mnogokutne pločice (Pattern blocks)

U petom razredu osnovne škole, unutar dviju nastavnih cjelina: *Skupovi točaka u ravnini* i *Razlomak,* pločice mnogokuta iskoristit ćemo kao alat kojim će učenici istraživanjem, samostalno i u skupinama, otkriti pravilnosti koje vežemo uz pojmove kutova i preslikavanja ravnine te uz koncept određivanja dijela cjeline, odnosno koncept razlomka. Po Nacionalnom okvirnom kurikulumu, učenik će na kraju nastavnog procesa koji uključuje ranije navedene teme unutar aktivnosti koje slijede moći:

- usporediti, procijeniti i izmjeriti veličinu kuta
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema
- prepoznati, imenovati, izgraditi i klasificirati ravninske i prostorne geometrijske oblike te istražiti, uočiti i precizno opisati njihova geometrijska svojstva
- pročitati, zapisati i usporediti razlomke.

Poštujući red kojim se u petom razredu obrađuju skupovi točaka u ravnini i razlomci, započet ćemo s aktivnostima koje vežemo uz skupove točaka u ravnini. Primijetimo da je ovaj poredak nastavnih cjelina nužan kako bi učenici prije istraživanja razlomaka pomoću pločica mnogokuta, upoznali pojmove poput trokut, kvadrat ili romb. Štoviše, pojam kuta unutar cjeline *Skupovi točaka u ravnini* jedan je od najvažnijih pojmova koji vode k otkrivanju pojma razlomka kao dijela cjeline jer u nastavi matematike kao situaciju za istraživanje razlomaka najčešće koristimo problem dijeljenja kruga na jednake dijelove. Krug dijelimo na jednake dijelove dijeljenjem punog kuta pa su pojam kuta i pravilnosti koje uz njega vežemo glavni koncepti koje učenici moraju usvojiti prije istraživanja samog pojma razlomka. Slijedi opis aktivnosti koje možemo provesti za razumijevanje pojma veličine kuta i određivanje istih u različitim mnogokutima. U aktivnostima koje slijede, predstavnik svake od pločica kojeg ćemo koristiti dan je u sljedećoj tablici.

Tablica 5.1: Predstavnici algebarskih pločica u aktivnostima koje slijede

Jednakostranični trokut stranice duljine *a* 	Kvadrat stranice duljine *a* 
Romb s jednim kutom od 60° i stranicom duljine *a* 	Romb s jednim kutom od 30° i stranicom duljine *a*
Jednakokračni trapez s krakom duljine *a* 	Pravilni šesterokut stranice duljine *a*

5.1 Pojam kuta i popločavanje ravnine

Kada učenike prvi puta upoznajemo s pločicama mnogokuta ne otkrivamo im unutarnje kutove tih mnogokuta. Želimo da dane materijale učenici istražuju sami kako kasnije prilikom njihova korištenja ne preispituju njihova svojstva. Primjerice, učenici bi mogli dovesti u pitanje kutove u svakom od mnogokuta dok istražuju pojmove i pravilnosti u različitim područjima matematike. Budući da će učenici samostalno doći do nekih karakteristika mnogokuta bit će im lakše dane mnogokute koristiti u daljim istraživanjima poput popločavanja ravnine, otkrivanja pojma površine, razlomka i slično. U nižim razredima osnovne škole, točnije u četvrtom razredu, učenici će:

- istražiti veličine unutarnjih kutova nekih mnogokuta
- rastavljati kutove na kutove manjih veličina
- postavljati odgovarajuća pitanja o veličinama kutova, njihovom sastavljanju i rastavljanju
- prepoznati i istraživati rotacije i simetrije u ravnini i prostoru.

U sljedećoj aktivnosti učenici će istražiti unutarnje kutove danih pločica mnogokuta preslagivanjem pločica i korištenjem pojmova ispruženi i puni kut.

5.1.1 Aktivnost: *Određivanje veličina unutarnjih kutova mnogokuta*

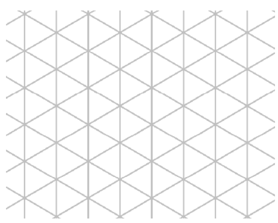
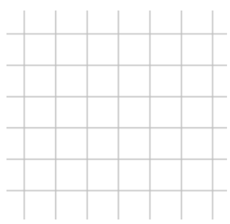
U četvrtom razredu osnovne škole učenike ćemo prije početka aktivnosti rasporediti u parove te im podijeliti potreban materijal. Svaki par učenika dobiva set pločica mnogokuta, radne listiće s iscrtanom izometričnom mrežom sastavljenom od rombova s jednim kutom od 60° te po dvije bojice za svaku od boja mnogokuta kako bi učenici mogli bilježiti svoja rješenja. Naglasimo da će učenici crtati samo rub mnogokuta. Iznimno u polju kvadrata, mreža je kvadratna kako bi učenicima bilo lakše nacrtati svoje rješenje i jasnije uočiti pravilnosti. Prije početka istraživanja s učenicima ponovimo pojmove: pravi, ispruženi i puni kut te im napominjemo da se koriste mjerama tih kutova pri određivanju mjera kutova pločica mnogokuta. U nastavku dan je primjer radnog listića na koji će učenici bilježiti svoja rješenja. Radni listići su isti za sve učenike.

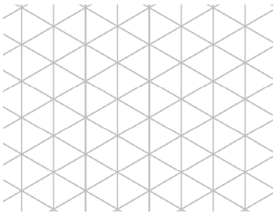
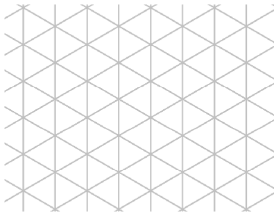
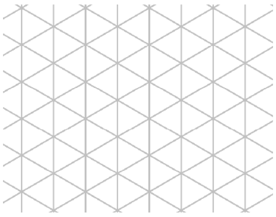
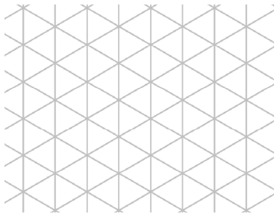
Radni listić 5.1: Primjer radnog listića za Aktivnost 5.1.1

Radni listić – Unutarnji kutovi pločica mnogokuta

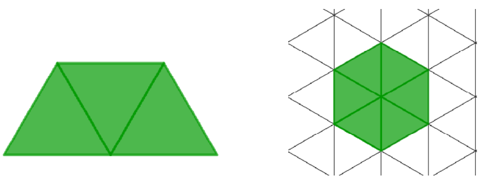
<u>Zadatak 1:</u> Odredite mjere unutarnjih kutova pločica mnogokuta. Svoja rješenja ucrtajte u pripadajuću mrežu i obrazložite svoje zaključke.

Napomena: svi kutovi u istom mnogokutu ne moraju biti iste veličine.

Jednakostranični trokut	Kvadrat
	

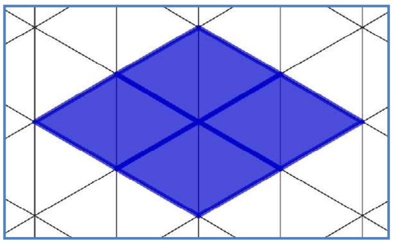
Romb plavi 	Romb bež 
Trapez 	Pravilni šesterokut 

U nedostatku materijala, učenici mogu svoje istraživanje započeti od jednog tipa pločica mnogokuta, primjerice od jednakostraničnog trokuta, a zatim po završetku s određivanjem kutova u njemu, zamijeniti svoje pločice s pločicama (primjerice kvadrata) drugog para učenika i nastaviti sa zadatkom. Druga mogućnost je imati papirnati oblik pločica mnogokuta. Ipak, ako je moguće, svaki par učenika trebao bi imati: 6 zelenih pločica (jednakostranični trokut), 4 narančaste pločice (kvadrat), 6 plavih pločica (romb s jednim kutom od 60°), 12 bež pločica (romb s jednim kutom od 30°), 6 crvenih pločica (trapez) i 3 žute pločice (pravilni šesterokut). Primijetimo da učenici ne trebaju tako puno pločica jer određene kutove mogu izračunati iz kutova preostalih pločica, ali učenicima treba dati priliku da istražuju na što više načina. Primjere kako odrediti unutarnje kutove nekih pločica pomoću kutova nekih od preostalih pločica navest ćemo u nastavku aktivnosti. Počnimo od jednakostraničnih trokuta. Par učenika složit će puni kut prislanjajući jednakostranične trokute jedan uz drugi na način da im se odabrani vrhovi tih trokuta dodiruju u jednoj točki. Učenici se mogu poslužiti i stolom kao pomoćnim sredstvom i umjesto punog kuta, odrediti tražene mjere iz ispruženog kuta kako je prikazano na *slici 5.2*.



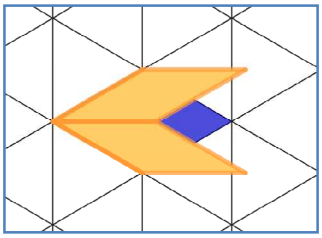
Slika 5.2: Prikaz ispruženog i punog kuta pločicama jednakostraničnih trokuta

Slaganjem mnogokutnih pločica na ovaj način učenici će uočiti da 3 kuta jednakostraničnog trokuta tvore kut od 180°, a 6 kutova jednakostraničnog trokuta kut od 360°. Jednostavnim računom učenici će izračunati da je kut u jednakostraničnom trokutu jednak 60°. Učenici će se lako uvjeriti da je svaki kut u jednakostraničnom trokutu veličine 60° rotacijom jednog od jednakostraničnih trokuta i smještanjem jednog od dva preostala vrha u točku određenu kao zajedničku. Za vrijeme istraživanja, nastavnik će šetati učionicom i učenicima postavljati određena potpitanja kako bi oni sami otkrili tražene zaključke. Tijekom ove aktivnosti učenicima ne treba puno vođenja od strane nastavnika. Učenici bi bez nastavnikove pomoći trebali moći odabrati njima najpraktičniji prikaz i odrediti tražene kutove. Aktivnost provodimo cijeli školski sat jer je pojam kuta u daljem shvaćanju i učenju matematike vrlo važan, ali i iz razloga što je učenicima u četvrtom razredu važno vizualizirati matematičke pojmove kako bi ih lakše razumjeli. Ipak, spomenimo mogući problem koji se može pojaviti tijekom aktivnosti. Učenici bi mogli u jednu točku smjestiti kutove koji nisu iste veličine. Iz tog razloga je važno da nadziremo rad učenika. Primjer takvog slaganja pločica dan je na *slici 5.3*.



Slika 5.3: Prikaz pogrešnog slaganja pločica

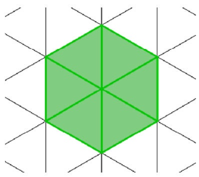
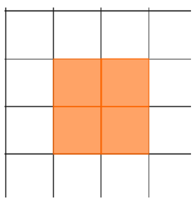
Ovakvim slaganjem pločica učenici bi unutarnji kut plavog romba brzopleto računali na sljedeći način: $360°:4 = 90°$ i zaključiti da su svi kutovi u rombu jednaki 90° što nije slučaj. U ovakvim situacijama učenici će staviti jednu pločicu romba na drugu i usporediti kutove na način opisan u nastavku. Učenici će prvo odabrani vrh gornje pločice staviti u jedan vrh donje pločice, a zatim i u preostala tri vrha. Na taj način učenici će se uvjeriti da su po dva kuta romba sukladna. Posebno, usporedimo li romb s kvadratom vidimo da kutovi u plavom rombu nisu jednaki kutovima kvadrata pa njihova mjera ne može biti 90°. S druge strane, ukoliko su učenici već odredili jedan od kutova u plavom rombu, onda je ova strategija dobra za određivanje mjere drugog kuta. Prolazeći po učionici možemo zaključivati o strategijama koje su učenici koristili kako bi odredili tražene kutove. Tako možemo primijetiti jesu li se učenici poslužili već otkrivenim mjerama kutova u određivanju ostalih. Primjerice, nakon određivanja mjera kutova u plavoj pločici romba, učenici mogu jedan od kutova bež pločice romba odrediti iz plave pločice i obrnuto. *Slika 5.4* prikazuje jedan učenički prikaz jednog od kutova u plavoj pločici pomoću kutova u bež pločici.

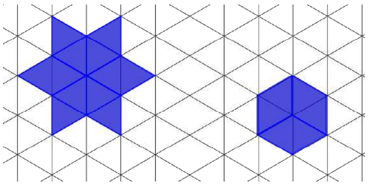
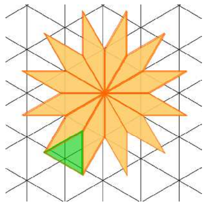
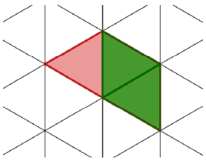
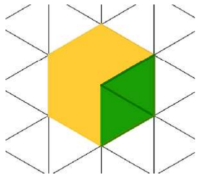


Slika 5.4: Prikaz jednog kuta plave pločice pomoću kuta bež pločice

Slično bi učenici mogli napraviti sa zelenom i plavom pločicom, zelenom i bež pločicom, zelenom i crvenom pločicom, zelenom i žutom pločicom, crvenom i žutom pločicom i tako dalje. Po završetku aktivnost rješenja možemo projicirati na projektor kako bi svi učenici provjerili svoja rješenja u svojim radnim listićima te kako bismo o njima raspravili. Ipak, prije projekcije, bilo bi poželjno da učenici sami iznose svoja rješenja na ploči pomoću magnetnih pločica mnogokuta. Na taj način učenici koriste matematički jezik, uče kako obrazložiti, pokazati i prenijeti svoje misli uz odgovarajuće argumente. Primjer jednog uspješno riješenog radnog listića dan je u nastavku.

Radni listić 5.2: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 5.1.1

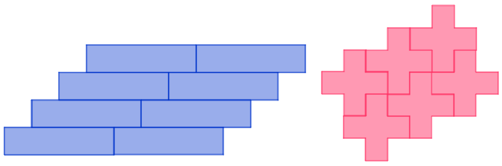
<table>
<tr><td colspan="2">Radni listić – Unutarnji kutovi pločica mnogokuta
<u>Zadatak 1:</u> Odredite mjere unutarnjih kutova pločica mnogokuta. Svoja rješenja ucrtajte u pripadajuću mrežu i obrazložite svoje zaključke.</td></tr>
<tr><td>Jednakostranični trokut

U jednakostraničnom trokutu svi su kutovi iste veličine. Šest kutova jednakostraničnog trokuta čini puni kut. Slijedi da je veličina kuta jednakostraničnog trokuta 60°.</td><td>Kvadrat

U kvadratu svi kutovi su iste veličine. Četiri kuta kvadrata čine puni kut. Slijedi da je veličina kuta u kvadratu 90°.</td></tr>
</table>

Romb plavi  Plavi romb ima po dva kuta iste veličine. Jedan kut smo izračunali postavljanjem 6 istih kutova romba u istu točku, a drugi postavljanjem 3 ista kuta u istu točku. Dobili smo kutove 60° i 120°.	Romb bež  U bež rombu šiljasti kut jednak je 360°:12=30°. Imamo dva takva kuta. Drugi kut romba jednak je zbroju dva tupa kuta u rombu i jednog kuta u jednakostraničnom trokutu. Druga dva kuta romba jednaka su 150°.
Trapez  Slaganjem dviju pločica jednakostraničnog trokuta na pločicu trapeza uočili smo da imamo po dva kuta od 60° i po dva kuta od 120°.	Pravilni šesterokut  Slaganjem pločica jednakostraničnog trokuta na pločicu pravilnog šesterokuta uočavamo da su sve mjere kutova u pravilnom šesterokutu jednake dvostrukoj mjeri kuta u jednakostraničnom trokutu, odnosno 120°.

Nakon ove aktivnosti prirodno je iskoristiti nove činjenice, unutarnje kutove mnogokutnih pločica, do kojih su učenici došli samostalnim istraživanjem za novu aktivnost. Tako će učenici u aktivnosti koja slijedi danim mnogokutnim pločicama proučavati popločavanja ravnine. Učenici će na temelju veličina unutarnjih kutova zaključivati kojim mnogokutima (posebno pravilnim) možemo popločati ravninu.

5.1.2 Aktivnost: *Popločavanje ravnine*

Aktivnosti popločavanja ravnine su odličan primjer kako učenici mogu istovremeno učiti matematiku, razvijati logiku, maštu i snalažljivost te se zabaviti. Za ovu aktivnost učenike ćemo organizirati u parove. Učenicima omogućimo dovoljnu količinu mnogokutnih pločica. Za ovu aktivnost za jedan par dovoljno je 9 pločica svakog od tipova algebarskih pločica. Napomenimo da je dana količina pločica minimalna i ukoliko je moguće učenicima treba omogućiti što više materijala kako bi popločavali što veću površinu. Aktivnost popločavanja ravnine započinjemo s pričom o popločavanjima s kojima se učenici susreću u svakodnevnom životu poput postavljanja pločica u kuhinji ili kupaonici, puzzli i slično. Kao primjer možemo prikazati redove pravokutnika kako je dano *slikom 5.5*.



Slika 5.5: Primjeri popločavanja ravnine

Definiramo popločavanje kao postavljanje mnogokuta (ili nekog drugog uzorka) na način da između svaka dva mnogokuta nema praznog prostora. Prijedlog za zadatke na radnom listiću dani su u nastavku.

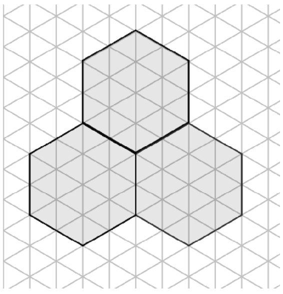
Radni listić 5.3: Primjer radnog listića za Aktivnost 5.1.2 – prva stranica listića

Radni listić – Popločavanje ravnine

Zadatak 1: Za svaku od pločica pravilnih mnogokuta odredite može li se njome popločiti ravnina. Za pločice koje vam nisu dostupne donesite zaključak iz prethodnih popločavanja.

Pravilni mnogokut	Veličina unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta:	Može li se danim pravilnim mnogokutom popločiti ravnina? Nacrtajte pripadnu sliku i obrazložite svoj odgovor.
Jednakostranični trokut		
Kvadrat		
Pravilni šesterokut		
Pravilni peterokut		

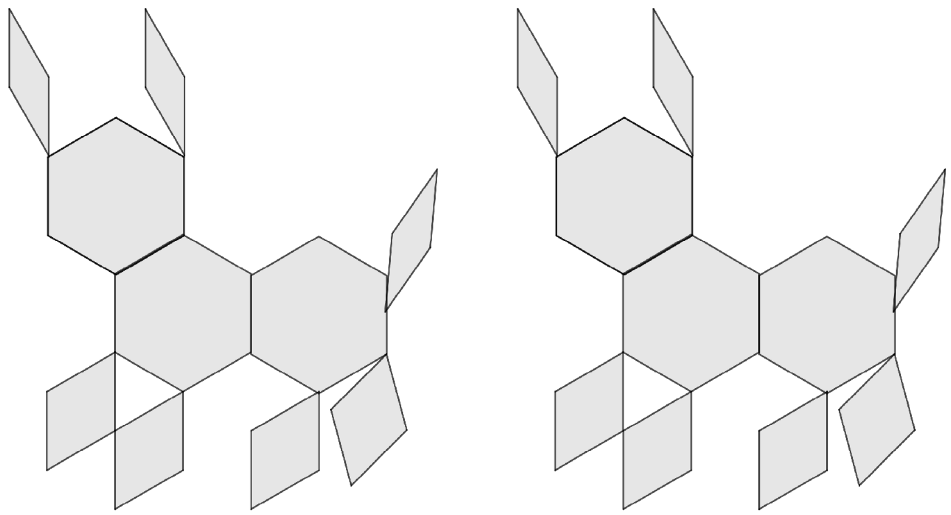
Zadatak 2: Koristeći se pločicama romba i trapeza prikažite popločavanje danog lika.



Radni listić 5.4: Primjer radnog listića za Aktivnost 5.1.2 – druga stranica listića

Radni listić – Popločavanje ravnine

Zadatak 3: Popločite dani dio ravnine na dva različita načina. Koristite ranije donesene zaključke.



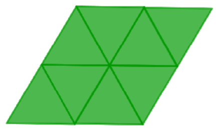
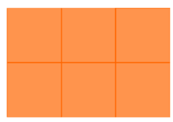
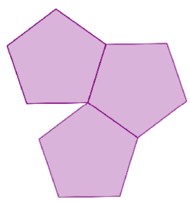
Na radnim listićima učenici će bilježiti (crtati) svoja popločavanja ravnine danim mnogokutnim pločicama kako bi se kasnije pri učenju prisjetili svojih istraživanja. Učenici će u parovima istraživati popločavanja danim mnogokutnim pločicama. Započet ćemo s popločavanjem pločicama jednakostraničnog trokuta. Kako bi došli do traženog zaključka učenicima smo u radni listić izdvojili mjesto u tablici u koje će zapisati veličinu unutarnjeg kuta jednakostraničnog trokuta. Time smo učenicima naznačili koja informacija o mnogokutnoj pločici je važna za zaključivanje može li se ravnina popločiti tom pločicom. Učenici će zato prvo zabilježiti veličinu unutarnjeg kuta jednakostraničnog trokuta, a zatim istražiti može li se ovom pločicom popločiti ravnina. Postupak će zatim ponoviti za kvadrat i pravilni šesterokut. Učenici će suradnjom u parovima doći do zaključka da se pločicom jednakostraničnog trokuta, kvadrata i pravilnog šesterokuta može popločiti ravnina. Međutim, učenici nemaju pločice u obliku pravilnog peterokuta pa će zaključak o popločavanju ravnine pomoću pločice tog oblika donijeti iz prethodno uspješno provedenih popločavanja. Učenici će odrediti unutarnji kut pravilnog peterokuta iz formule $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ ukoliko aktivnost provodimo s učenicima u višim razredima osnovne škole, a ukoliko se radi o učenicima do četvrtog razreda osnovne škole, informaciju o veličini kuta im možemo dati bez računa.

Kako bi učenici donijeli traženi zaključak postavit ćemo neka karakteristična pitanja poput:

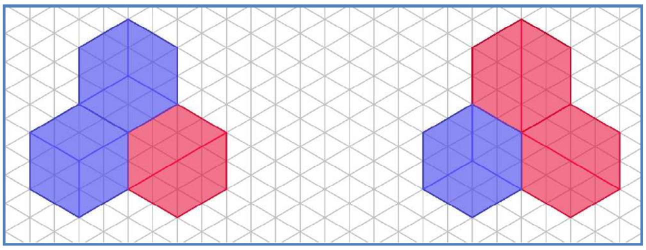
- *Kako smo popločavali ravninu mnogokutnim pločicama?*
- *Kako smo prislanjali stranice mnogokutnih pločica?*
- *Koji kut nam je bio važan pri popločavanju ravnine?*
- *Koji kut smo opisivali slaganjem jednih mnogokutnih pločica uz druge?*

Učenici bi vođeni ovim pitanjima trebali ispuniti tablicu unutar radnog listića kako je dano u *tablici 5.2*.

Tablica 5.2: Primjer ispunjene tablice za Aktivnost 5.2.1

Pravilni mnogokut	Veličina unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta:	Može li se danim pravilnim mnogokutom popločiti ravnina? Nacrtajte pripadnu sliku i obrazložite svoj odgovor.
Jednakostranični trokut	60°	Pločicom jednakostraničnog trokuta možemo popločiti ravninu jer unutarnji kutovi trokuta koji se sastaju u svakom od vrhova trokuta čine puni kut. 
Kvadrat	90°	Pločicom kvadrata možemo popločiti ravninu jer unutarnji kutovi kvadrata koji se sastaju u svakom od vrhova kvadrata čine puni kut. 
Pravilni šesterokut	120°	Pločicom pravilnog šesterokuta možemo popločiti ravninu jer unutarnji kutovi pravilnog šesterokuta koji se sastaju u svakom od njegovih vrhova čine puni kut.
Pravilni peterokut	108°	Pločicom pravilnog peterokuta ne bismo mogli popločiti ravninu jer unutarnji kutovi pravilnog peterokuta koji bi se sastali u jednom vrhu ne čine puni kut. 

Učenici će opisati popločavanje ravnine kao prislanjanje sukladnih stranica jednu uz drugu te sastajanje po jednog od vrhova mnogokutnih pločica u jednoj točki. U svakom od vrhova mnogokutnih pločica sastaju se kutovi jednakih mjera. Zbroj mjera tih kutova mora dati mjeru punog kuta, odnosno 360°. Kada učenici uoče ovu pravilnost lako će zaključiti da je nemoguće popločiti ravninu pravilnim peterokutom jer 360° nije djeljivo sa 108°, veličinom unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta, bez ostatka. U Zadatku 2 cilj je da učenici primijene zaključke iz *tablice 5.2* na nepravilne mnogokute, odnosno da popločе dani lik na način da zbroje unutarnje kutove danih pločica te ih smjeste na odgovarajuća mjesta. Primjeri popločavanja dani su *slikom 5.6.*

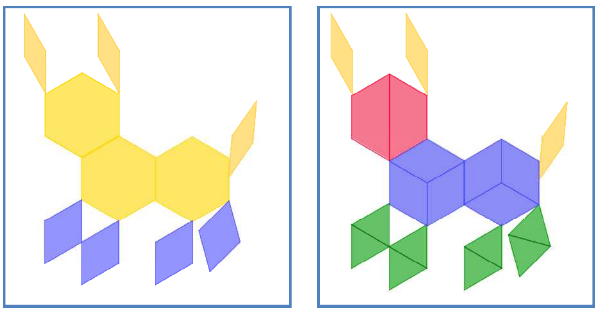


Slika 5.6: Primjeri popločavanja danog lika trapezima i rombovima

Učenicima ćemo postaviti pitanja o popločavanju danog lika trapezima i rombovima:

- *Jeste li prije popločavanja znali može li se dani lik popločiti na ovaj način?*
- *Ako jeste, obrazložite kako ste znali, a ako niste znali odgovorite što vam je stvaralo problem?*

Očekujemo da će učenici zbog zaključka u Zadatku 1 očekivati da je moguće popločiti dani lik trapezima i rombovima i da će dati različita rješenja takvog popločavanja. U Zadatku 3 učenici će iskoristiti zaključke iz prethodna dva zadatka i popločiti lik zanimljivog oblika na dva načina kako bismo potaknuli kreativnost u učeniku i razvili u njemu potrebu za varijacijama. Primjer jednog učeničkog uratka dan je u nastavku.



Slika 5.7: Primjeri popločavanja lika u obliku mačke na dva načina.

Ovom aktivnosti završili smo s upotrebom mnogokutnih pločica u području geometrije i preostaje nam opisati aktivnost kojom mnogokutne pločice koristimo u području aritmetike, primjerice pri upoznavanju učenika s pojmom razlomka.

5.2 Pojam razlomka

U petom razredu osnovne škole učenici se po prvi put susreću s racionalnim brojevima. Problem razlomka od njegove pojave u petom razredu nastavlja se kroz učenje matematike u višim razredima što na konceptualnoj razini tako i na proceduralnoj. Budući da su razlomci sveprisutni u matematičkom obrazovanju, naizled sitan problem razlomaka postaje veliki problem prilikom učenja o pojmu decimalnog broja, postotka i ulaskom u područje algebre. Drugim riječima, ukoliko se problem razlomka ne riješi na samom početku, on postaje problem za sveukupno napredovanje u učenju matematike. Nastavna cjelina *Razlomak* u petom razredu obuhvaća nekoliko manjih nastavnih tema poput uvođenja razlomaka, pretvaranja mjernih jedinica, mješovitog broja, uspoređivanja razlomaka jednakih nazivnika, zbrajanje i oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika te proširivanje i skraćivanje razlomaka. U skladu s tim nastavnim jedinicama učenici će na kraju nastavne cjeline *Razlomak* morati moći:

- riječima i primjerom opisati pojam razlomka
- pretvarati nepravi razlomak u mješoviti broj i obrnuto
- uspoređivati, zbrajati i oduzimati razlomke jednakih nazivnika
- proširivati i skraćivati razlomke.

Da bi učenici mogli ostvariti navedene ishode ključno je da razumiju pojam razlomka. Najčešći alati za kojima nastavnici posežu pri poučavanju razlomaka su modeli površine od kojih se najviše ističu učenicima bliske stvari. Primjer modela površine koji se koriste su torta, pizza i pločica čokolade. Uočimo da se zapravo radi o reprezentantima geometrijskih likova: krugu i pravokutniku. Učenici pojam razlomka upoznaju dijeleći krug na kružne isječke jednake površine, a pravokutnik na kvadratiće jednake površine. Za učenikovo uspješnije razumijevanje pojma razlomka možemo iskoristiti aktivnost otkrivanja razlomka pomoću mnogokutnih pločica. U nastavku opisujemo aktivnost koju možemo provesti u petom razredu osnovne škole prilikom otkrivanja pojma razlomka.

5.2.1 Aktivnost: *Otkrivanje i razumijevanje pojma razlomka*

Na početku aktivnosti učenike podijelimo u parove. Učenici će pojam razlomka lakše razumjeti u suradničkom istraživanju. Potreban materijal za par učenika obuhvaća 2 pravilna šesterokuta, 4 trapeza, 3 romba (s kutom 60°) i 12 trokuta te radne listiće. Svi učenici dobivaju radne listiće istog sadržaja. Svaki par učenika mora imati i bojice u bojama odgovarajućih mnogokutnih pločica, odnosno žutu, crvenu, plavu i zelenu. Primjer jednog radnog listića dan je u nastavku.

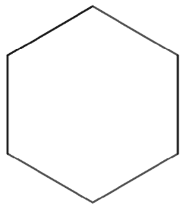
Radni listić 5.5: Primjer radnog listića za Aktivnost 5.2.1

Radni listić – Pojam razlomka

Koristeći se mnogokutnim pločicama odgovorite na sljedeća pitanja.
Napomena: Neka pravilni šesterokut označava cjelinu, odnosno jedno cijelo.

Zadatak 1:

a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo crvenih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove crvenih pločica u pravilnom šesterokutu.



b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću crvenih pločica?

____

c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?

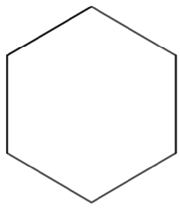
____

d) Ako uklonimo jednu od crvenih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja crvenih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.

____

Zadatak 2:

a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo plavih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove plavih pločica u pravilnom šesterokutu.



b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću plavih pločica?

____

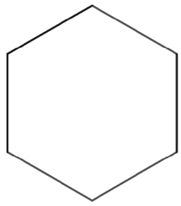
c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?

____

d) Ako uklonimo jednu od plavih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja plavih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.

____

Zadatak 3:
a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo zelenih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove zelenih pločica u pravilnom šesterokutu.



b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću zelenih pločica?

___

c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?

___

d) Ako uklonimo jednu od zelenih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja zelenih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.

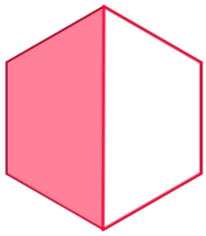
___

Prije ispunjavanja radnog listića učenicima naglasimo da su obavezni istraživati s mnogokutnim pločicama i da na sva pitanja moraju odgovarati potpunim odgovorom. Za vrijeme provođenja istraživanja s mnogokutnim pločicama nastavnik hoda učionicom i promatra kako učenici pristupaju danim zadacima. Učenici su slobodni upitati nastavnika što ih zbunjuje, ali aktivnost istraživanja učenici provode samostalno, odnosno u parovima. Ne očekujemo problem s popločavanjem pravilnog šesterokuta jer su se učenici s popločavanjem trebali susresti u prošloj aktivnosti. Problem bi mogao biti pojam *jedno cijelo* kojem možemo doskočiti primjerima iz svakodnevnog života. Spomenemo li *jedno cijelo* misleći na jednu čokoladu ili jednu tortu uočavamo da se radi o stvarima različitih površina, ali zovemo ih *jednim cijelim* unatoč tome. Učenicima bi takva vizualizacija trebala pomoći da lakše prihvate pojam *jedno cijelo*. U nastavku dan je primjer riješenog radnog listića s pripadnim slikama.

Radni listić 5.6: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 5.2.1

Radni listić – Pojam razlomka

Koristeći se mnogokutnim pločicama odgovorite na sljedeća pitanja.
Napomena: Neka pravilni šesterokut označava cjelinu, odnosno jedno cijelo.
Zadatak 1:
a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo crvenih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove crvenih pločica u pravilnom šesterokutu.

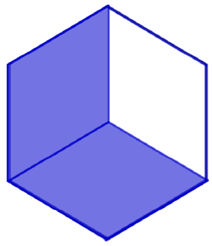


b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću crvenih pločica?
Jedno cijelo podijelili smo na dva dijela.

c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?
Dijelovi na koje smo podijelili jedno cijelo su iste površine.

d) Ako uklonimo jednu od crvenih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja crvenih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.
Uklanjanjem jedne crvene pločice ostala nam je jedna crvena pločica od ukupno dvije pomoću kojih smo popločali jedno cijelo.

<u>Zadatak 2:</u>
a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo plavih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove plavih pločica u pravilnom šesterokutu.

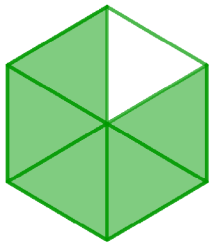


b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću plavih pločica?
Jedno cijelo podijelili smo na tri dijela.

c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?
Dijelovi na koje smo podijelili jedno cijelo su iste površine.

d) Ako uklonimo jednu od plavih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja plavih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.
Uklanjanjem jedne plave pločice ostale su nam dvije plave pločice od ukupno tri pomoću kojih smo popločali jedno cijelo.

<u>Zadatak 3:</u>
a) Prikažite jedno cijelo (pravilni šesterokut) pomoću samo zelenih pločica.
Na slici desno nacrtajte rubove zelenih pločica u pravilnom šesterokutu.



b) Na koliko dijelova ste podijelili jedno cijelo pomoću zelenih pločica?
Jedno cijelo podijelili smo na šest dijelova.

c) Kakvi su ti dijelovi ako promatramo njihove površine?
Dijelovi na koje smo podijelili jedno cijelo su iste površine.

d) Ako uklonimo jednu od zelenih pločica, koliko nam je pločica ostalo od ukupnog broja zelenih pločica kojima smo popločali jedno cijelo? Lagano obojite preostale dijelove na danom pravilnom šesterokutu.
Uklanjanjem jedne zelene pločice ostalo nam je pet zelenih pločica od ukupno šest pomoću kojih smo popločali jedno cijelo.

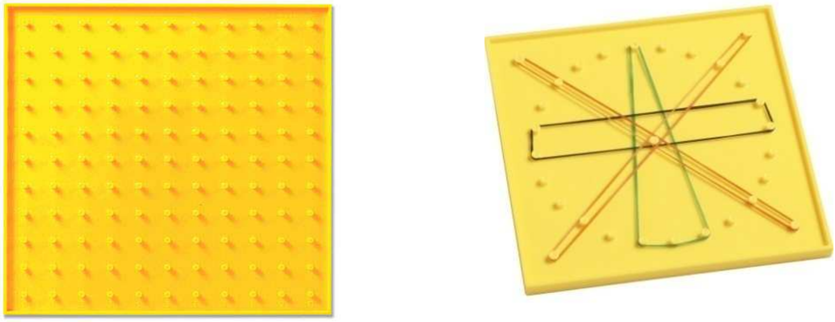
Učenici će svoja rješenja iznijeti pred razredom, a kada učenici završe s iznošenjem rješenja posljednjeg zadatka uvest ćemo razlomak kao dio cjeline. Iskoristit ćemo posljednju rečenicu u svakom od zadataka kao temeljnu misao koja će opisivati dane razlomke. Time ćemo samo prevesti zapis riječima u zapis razlomka.

Tako ćemo učenicima opisati zapis razlomka u Zadatku 1 - c) kao jedan dio cjeline od ukupno dva, odnosno $\frac{1}{2}$. Analogno ćemo napraviti za drugi i treći zadatak gdje su dobiveni razlomci $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$.

U nastavku aktivnosti s učenicima možemo nastaviti na način da učenici u parovima spoje svoje pravilne šesterokute po jednoj stranici i ponove postupak s radnog listića. Time bi učenici dijelili jedno cijelo na dvanaest jednakih dijelova i zapisivali dobivene razlomke ovisno o broju obojanih dijelova jednog cijelog. Ovom aktivnosti završili smo istraživanja pomoću mnogokutnih pločica i nastavljamo sa sljedećim didaktičkim modelom – geopločom.

6. GEOPLOČA

U osnovnim školama, jedan se didaktički model posebno ističe kada je riječ o vizualizaciji matematičkog sadržaja. Riječ je o kružnoj i kvadratnoj geoploči. Geoploču je osmislio egipatski matematičar i metodičar kojeg smo već spominjali prilikom upoznavanja Cuisenaireovih štapića, Caleb Gattegno (1911. - 1988.) Geoploča je nastala kao alat potreban za učenje geometrije u nižim razredima osnovne škole. Ovaj model je model površine kojim učenici proučavaju geometrijske pojmove i pravilnosti poput kružnog isječka i odsječka, tetive, radijusa, promjera, dijagonale, opsega i površine, sukladnosti i sličnosti, translacije, rotacije, simetrije te pojmova poput razlomka, postotka, kuta, omjera i sličnog. Izgledom, geoploča je plastična ili drvena podloga s pravilno raspoređenim čavlićima. Za kružnu geoploču to znači postavljanje čavlića po kružnici, a za kvadratnu geoploču čavlići su postavljeni u obliku kvadratne mreže. Nešto manje poznata je geoploča s izometričkom mrežom. Uz geoploču obavezan alat su gumice koje možemo rastezati oko čavlića. Vrlo praktičnima pokazale su se prozirne geoploče koje nastavnik po potrebi može projicirati na ploču kako bi istovremeno cijelom razredu pokazao odgovarajući sadržaj. Na *slici 6.1* prikazane su kružna i kvadratna geoploča proizvedene tvornički za obrazovne svrhe.



Slika 6.1: Kvadratna geoploča (lijevo) i kružna geoploča (desno)

Ponekad se umjesto plastičnih/drvenih geoploča koriste papirnate verzije, no njima učenici ne mogu istraživati kao što je to moguće pomoću ploče s čavlićima i gumicama. S razvojem informatičkih znanosti, geoploča je postala dostupna kao aplikacija. Geoploča učenicima omogućuje samostalno analiziranje i istraživanje nekog matematičkog pojma ili problema. I to je samo jedan mali dio matematičkih kompetencija koje se mogu ostvariti radom na geoploči. Pomoću geoploče učenici će, po Nacionalnom okvirnom kurikulumu:

- opisati položaj i smjer objekata upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (npr. kvadratna mreža)
- prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove
- prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima
- prikazati osnosimetričnu i centralnosimetričnu sliku jednostavnih ravninskih likova te prepoznati sukladne trokute, centralnosimetrične i osnosimetrične likove
- prepoznati geometrijske oblike, sukladnost i simetriju u svijetu oko sebe te ih primjenjivati
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih oblika rabeći stvarne materijale
- prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnom životu
- usporediti i procijeniti duljinu
- izračunati opseg jednostavnih likova, osobito trokuta, pravokutnika i kvadrata te površinu pravokutnika i kvadrata

- približno ili točno izmjeriti površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata
- odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema.

Osim ovih obrazovnih ishoda, postoji i niz drugih, ali ove ćemo obuhvatiti u sljedećim aktivnostima.

6.1 Površina geometrijskih likova

Pojam površine često se miješa s pojmom opsega u nižim razredima osnovne škole. Aktivnosti koje možemo provesti uz pomoć geoploče u svrhu određivanja površina geometrijskih likova mogu poslužiti učenicima da lakše usvoje sam pojam površine. U nižim razredima, učenici će prebrojavanjem kvadratića na kvadratnoj geoploči određivati površine jednostavnih geometrijskih likova. Ipak, sljedeću aktivnost provodit ćemo u sedmom razredu osnovne škole. Učenike ćemo uvesti u aktivnost ponavljanjem određivanja površina prebrojavanjem kvadratića, a zatim ćemo prijeći na razvijanje viših kognitivnih funkcija otkrivanjem Pickove formule za površinu geometrijskih likova.

6.1.1 Aktivnost: *Pickova formula*

Za ovu aktivnost svakom učeniku potrebna je jedna kvadratna geoploča, jedna gumica u crvenoj boji kojom će biti obrubljen zadani geometrijski lik i x gumica u zelenoj boji kojima će učenici označavati pomoćne kvadratiće. Broj gumica varira ovisno o geometrijskom obliku koji je zadan, a u ovoj aktivnosti bit će dovoljno 8 zelenih gumica po učeniku. Učenicima najavljujemo aktivnost istraživanja pravila ili formule za određivanje površine geometrijskih likova.

Po završetku aktivnosti učenici će:

- približno ili točno izmjeriti površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih oblika rabeći stvarne materijale.

Učenici će aktivnost provoditi u obliku gostionice. Za razred od 24 učenika, aktivnost bismo započinjali podjelom učenika u heterogene četveročlane skupine u kojima bi učenici rješavali svoje radne listiće, a zatim u *gostima* dobivene rezultate primijenili na novom primjeru. Povratkom u matičnu grupu učenici izmjenjuju zadatke i donose zaključak o formuli za površinu geometrijskog lika prebrojavanjem njegovih unutarnjih i rubnih točaka na geoploči. Učenici će za početak u četveročlanim skupinama rješavati prednju stranu radnog listića danog u nastavku.

Radni listić 6.1: Primjer radnog listića za Aktivnost 6.1.1. – prva stranica listića

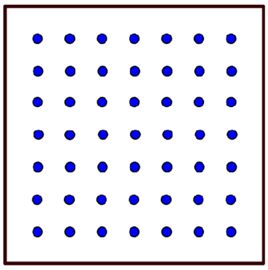
Radni listić – Skupina A

Zadatak 1.

Na geoploči istaknite pravokutnik.

Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića.

Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.

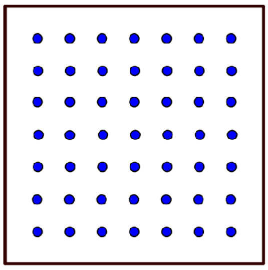


Zadatak 2.

Na geoploči istaknite pravokutni trokut.

Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića.

Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.

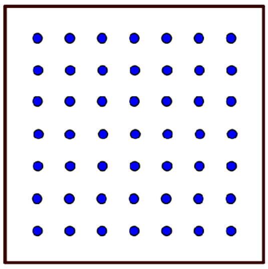


Zadatak 3.

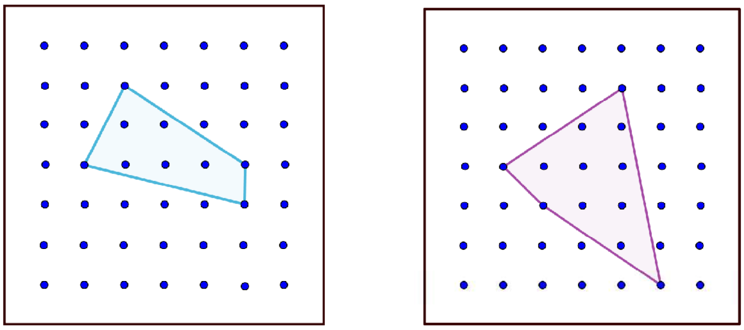
Na geoploči istaknite geometrijski lik.

Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića.

Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.



Za šest četveročlanih skupina nastavnik može projicirati raznovrsne primjere pravokutnika i pravokutnih trokuta ovisno o njihovoj veličini i smještaju na geoploči. U svim zadacima učenicima ćemo projicirati geometrijski lik (ili ga zadati riječima ili slikom) kojem oni mogu odrediti površinu prebrojavanjem kvadratića ili računanjem površina pravokutnih trokuta unutar njega. Taj geometrijski lik učenici će prenijeti na svoje geoploče i odrediti mu površinu. Naime, ako učenicima damo da sami odaberu geometrijski lik može se dogoditi da mu neće moći odrediti površinu što u ovom trenutku aktivnosti ne želimo. Sljedeća slika prikazuje poželjan i nepoželjan primjer geometrijskog lika za Zadatak 3.



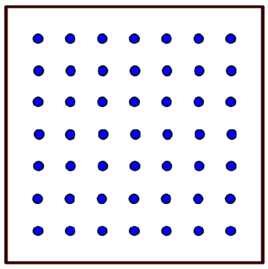
Slika 6.2: Poželjan primjer geometrijskog lika (lijevo) i nepoželjan primjer geometrijskog lika (desno)

Uočimo da se površina geometrijskog lika sa slike desno ne može odrediti prebrojavanjem kvadratića jer taj lik ne možemo podijeliti na odgovarajuće pravokutnike i pravokutne trokute kojima bismo mogli odrediti površinu. U nastavku dana je druga strana radnog listića.

Radni listić 6.2: Primjer radnog listića za Aktivnost 6.1.1. – druga stranica listića

Radni listić – Skupina A

Idemo u goste!



Zadatak 4. Odredite formulu za površinu danog geometrijskog lika prebrojavanjem čavlića geoploče na rubovima likova (oznaka R) i u unutrašnjosti likova (oznaka U). Ucrtajte dobiveni geometrijski lik u kvadratnu mrežu.

Promotrite površine likova iz prethodno riješenih zadataka, a zatim u skupini raspravite o uočenim pravilnostima.

Geometrijski lik	Površina lika	R	$\frac{R}{2}$	U	$\frac{U}{2}$	$R+\frac{U}{2}$	$U+\frac{R}{2}$	
Pravokutnik								
Pravokutni trokut								
Geometrijski lik								

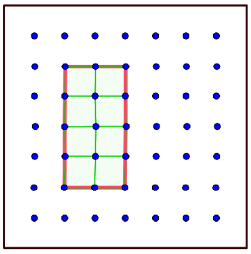
Otkrivanje formule:

Na početku aktivnost, u prva tri zadatka, učenici prenose zadani geometrijski lik na geoploču i određuju površine geometrijskih likova pomoću površina kvadratića. Važno je da učenici precrtaju dobivene geometrijske likove na radni listić kako bi se kasnije mogli prisjetiti aktivnosti s nastavnog sata. Također, učenici moraju koristiti gumice na geoploči i moraju moći objasniti kako su došli do traženih površina. Učenik će u Zadatku 1 zelenom gumicom prebrojiti sve kvadratiće jedinične površine u danom pravokutniku, a zatim u Zadatku 2 zelenom gumicom zatvoriti pravokutni trokut u pravokutnik i odrediti mu površinu kao polovinu površine pravokutnika. Učenici prilikom određivanja površina danih geometrijskih likova surađuju, a krajnje rješenje prve strane radnog listića za jednu skupinu učenika dano je u nastavku.

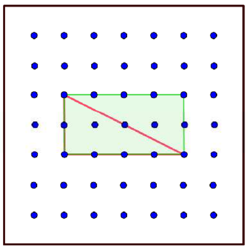
Radni listić 6.3: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 6.1.1. – prva stranica listića

Radni listić – Skupina A

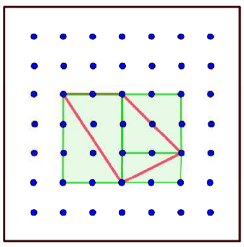
Zadatak 1.
Na geoploči istaknite pravokutnik.
Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića površine jedan.
Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.
Pravokutnik je površine 8 što smo zaključili prebrojavanjem kvadratića površine jedan.



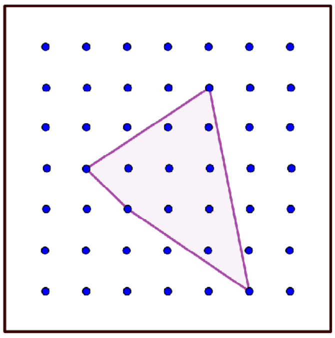
Zadatak 2.
Na geoploči istaknite pravokutni trokut.
Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića površine jedan.
Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.
Pravokutni trokut je površine pola pravokutnika kojim smo ga obrubili, odnosno polovina od 8, odnosno 4 kvadratića površine jedan.



Zadatak 3.
Na geoploči istaknite geometrijski lik.
Odredite mu površinu prebrojavanjem kvadratića površine jedan.
Svoj postupak prikažite na kvadratnoj mreži.
Površina danog geometrijskog lika je zbroj polovina površina pravokutnika kojima smo obrubili pojedine dijelove geometrijskog lika kako je prikazano na slici. Zbrajanjem polovina površina dobivenih pravokutnika dobivamo površinu od 6 kvadratića površine jedan.

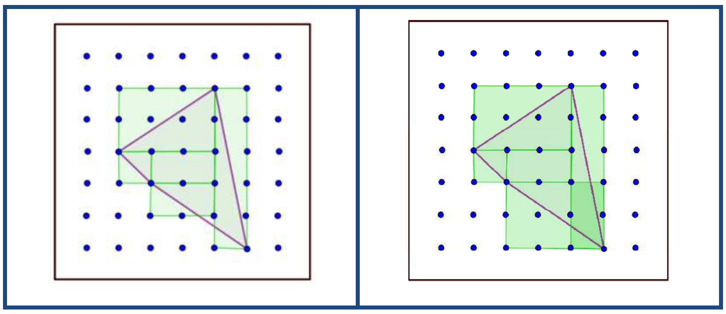


Po završetku rješavanja prve strane radnog listića s učenicima provjerimo rješenja kako u nastavku aktivnosti ne bi koristili pogrešne podatke. Učenici zatim idu u goste gdje dobivaju primjer geometrijskog lika kojem nije moguće odrediti površinu prebrojavanjem kvadratića. Svaka od četiri šesteročlanih skupina imat će na raspolaganju drugačiji geometrijski lik kojemu treba odrediti površinu. *Slika 6.3* primjer je jednog takvog geometrijskog lika.



Slika 6.3: Geometrijski lik za zadatak u gostima

Učenici će prenijeti dani im geometrijski lik na geoploču. Započinjemo diskusijom o mogućnosti da se tražena površina odredi prebrojavanjem kvadratića. U pokušajima da odrede traženu površinu, učenici će surađivati predlaganjem različitog postavljanja zelenih gumica i oblikovanjem pravokutnika i kvadratića. Neki od pokušaja određivanja rastavljanja geometrijskog lika na pravokutnike dani su u nastavku na *slici 6.4*.



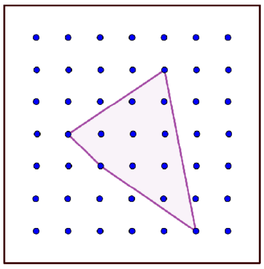
Slika 6.4: Neuspjeli pokušaji učenika rastavljanja geometrijskog lika na pravokutnike i pravokutne trokute

Na *slici 6.4*, desni primjer, dani geometrijski lik na dijelovima je prekriven dvaput (zatamnjeni pravokutnik) jer ga je nemoguće rastaviti na pravokutnike i pravokutne trokuta bez preklapanja. U nastavku aktivnosti učenicima otkrivamo da postoji formula pomoću koje se može odrediti površina danog geometrijskog lika promatranjem broja čavlića unutar i na samom rubu danog geometrijskog lika. Učenici u novonastalim skupinama rješavaju Zadatak 4 s druge strane radnog listića koji učenike vodi k otkrivanju Pickove formule za površinu. Riješeni radni listić za skupinu A dan je u nastavku.

Radni listić 6.4: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 6.1.1 – druga stranica listića

Radni listić – Skupina A

Idemo u goste!



Zadatak 4. Odredite formulu za površinu danog geometrijskog lika prebrojavanjem čavlića geoploče na rubovima likova (oznaka R) i u unutrašnjosti likova (oznaka U). Ucrtajte dani geometrijski lik u kvadratnu mrežu.

Promotrite površine likova iz prethodno riješenih zadataka, a zatim u skupini raspravite o uočenim pravilnostima.

Geometrijski lik	Površina lika	R	$\frac{R}{2}$	U	$\frac{U}{2}$	$R+\frac{U}{2}$	$U+\frac{R}{2}$	$U+\frac{R}{2}-1$
Pravokutnik	8	12	6	3	1.5	13.5	9	$9-1=8$
Pravokutni trokut	4	8	4	1	0.5	8.5	5	$5-1=4$
Geometrijski lik	6	6	3	4	2	8	7	$7-1=6$

Otkrivanje formule:

Uspoređivanjem izračuna $U+\frac{R}{2}$ i površine danog lika, zaključujemo da je površina lika dana formulom: $U+\frac{R}{2}-1$.

Na radnom listiću ponudimo izraze koji se moraju pojaviti u formuli, ali zaključak prepustimo učenicima. Učenici će u skupini analizirati površine svojih geometrijskih likova i sagledati ponuđene izraze. Istražit će koji odnos između danih izraza je najpovoljniji za određivanje formule za površinu geometrijskog lika preko njegovih unutarnjih i rubnih čavlića na geoploči. Iz riješenog radnog listića vidimo da će učenici morati računati polovine broja unutarnjih i rubnih čavlića, zbrajati broj rubnih i polovine unutarnjih te broj unutarnjih i polovine rubnih čavlića. Učenici će usporedbom ranije određenih površina pravokutnika i pravokutnog trokuta s dobivenim izračunima uočiti da je najbliža formula za određivanje točne površine $U+\frac{R}{2}$. Taj broj predstavlja zbroj broja unutarnjih čavlića i polovine rubnih.

Oduzmemo li od tog zbroja broj jedan dobivamo traženu površinu. Budući da učenici u gostima imaju primjere različitih pravokutnika i pravokutnih trokuta koji im služe kao primjeri, lako će uočiti vezu brojeva koje su računali na radnom listiću s određivanjem površine. Nakon što učenici odrede površinu dobivenog geometrijskog lika vraćaju se u svoje matične skupine gdje izmjenjuju dobivene površine različitih geometrijskih likova i još jednom se uvjeravaju u ispravnost dobivene formule koja glasi $U + \frac{R}{2} - 1$. U nastavku rada s geopločom nastavljamo s istraživanjem i otkrivanjem formula koje su učenicima inače dane bez objašnjenja. Opisat ćemo aktivnost u kojoj će učenici vođeni pitanjima otkriti formulu za određivanje broja dijagonala mnogokuta.

6.2 Otkrivanje formule za određivanje broja dijagonala konveksnog mnogokuta

Listajući udžbenike iz matematike uočavamo brojne formule koje učenici često uče napamet. Naravno, u svim stupnjevima obrazovnog sustava i za sve matematičke teme nije praktično izvoditi formule, odnosno dati učenicima priliku da ih samostalno otkriju. Ipak, tamo gdje je to moguće poželjno je učenicima omogućiti da sami uoče pravilnosti te svoje riječi prevedu u matematičke znakove kao što smo to učinili s Pickovom formulom u prethodnoj aktivnosti. U sedmom razredu osnovne škole učenici će unutar nastavne teme *n-terokuti i sličnosti* moći:

- definirati konveksni i konkavni n-terokut unutarnje i vanjske kutove n-terokuta, sličnost n-terokuta
- određivati mjere unutarnjih i vanjskih kutova n-terokuta
- određivati broj dijagonala n-terokuta
- konstruirati n-terokut
- računati opseg i površinu n-terokuta i slično.

Koristeći geoploču učenici mogu samostalno doći do nekih formula za n-terokut poput formule za određivanje broja njegovih dijagonala. To će biti cilj aktivnosti koju opisujemo u nastavku.

6.2.1 Aktivnost: *Otkrivanja formule za određivanje broja dijagonala konveksnog n-terokut*

Na početku aktivnosti učenicima podijelimo kružne geoploče i gumice u dvije boje. Jedna boja gumice (crvena) označavat će stranice n-terokuta, a druga dijagonale n-terokuta (crna). Crvenih gumica neka je 9, a crnih 27. Kako bi učenici lakše bilježili svoje rezultate podijelit ćemo im radne listiće s tablicama. Predlažemo da učenici aktivnost odrade u parovima uz napomenu da ne oblikuju iste n-terokute već da pokušaju oblikovati što različitije primjere n-terokuta. U nastavku dan je primjer radnog listića koji će učenici ispunjavati za vrijeme trajanja aktivnosti.

Radni listić 6.5: Primjer radnog listića za Aktivnost 6.2.1

Radni listić: Otkrivanje formule za određivanje broja dijagonala konveksnog n-terokuta.

Zadatak 1:

Neka n označava broj vrhova n-terokuta, a d ukupan broj dijagonala tog n-terokuta. Popunite tablicu koristeći se kružnom geopločom i gumicama. Oblikujte redom n-terokute za $n = 3, 4, 5$ i odredite im ukupan broj dijagonala. Pokušajte odrediti formulu za određivanje broja dijagonala n-terokuta koja će ovisiti o broju njegovih vrhova n. Odgovori na pitanja ispod tablice pomoći će vam u istraživanju.

n – broj vrhova	d – broj dijagonala	n – broj vrhova	d – broj dijagonala
3		8	
4		9	
5		100	
6			
7		n	

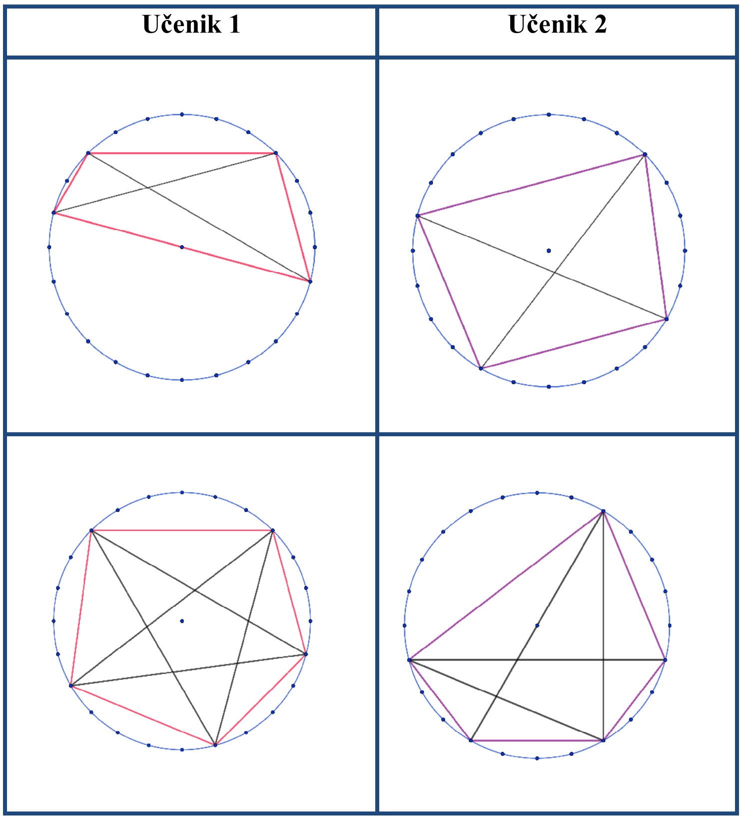
1. Koliko dijagonala možete nacrtati iz jednog vrha n-terokuta?

____

2. Koliko vrhova n-terokuta sadrži jedna dijagonala tog n-terokuta?

____

Za vrijeme aktivnosti nastavnik kruži učionicom i savjetuje učenike da na kružnim geopločama u parovima oblikuju različite n-terokute, primjerice kvadrat i paralelogram ili trapez i romb. Na taj način učenici će zaključiti da je broj dijagonala za svaki četverokut jednak, odnosno da broj dijagonala ovisi samo o broju vrhova n-terokuta, a ne i o duljini njegovih stranica ili mjerama njegovih unutarnjih kutova. Primjer dijagonala četverokuta i peterokuta na kružnim geopločama jednog para učenika dan je u nastavku.



Slika 6.5: Primjeri četverokuta i peterokuta s pripadnim dijagonalama na kružnim geopločama jednog para učenika

Na kraju aktivnosti s geopločom, učenici će imati djelomično popunjenu tablicu:

Tablica 6.1: Djelomično popunjena tablica za Aktivnost 6.2.1

n – broj vrhova	d – broj dijagonala	n – broj vrhova	d – broj dijagonala
3	0	8	20
4	2	9	27
5	5	100	
6	9		
7	14	n	

Učenici neće moći pomoću geoploče odrediti broj dijagonala n-terokuta sa 100 vrhova pa će morati osmisliti strategiju prebrojavanja dijagonala n-terokut. Kako bismo učenicima olakšali otkriće formule za broj dijagonala n-terokuta, u radni listić smo uvrstili dva pitanja:

- *Koliko dijagonala možete nacrtati iz jednog vrha n-terokuta?*
- *Koliko vrhova n-terokuta sadrži jedna dijagonala tog n-terokuta?*

Očekujemo da će učenici zaključiti da iz jednog vrha n-terokuta mogu nacrtati najviše $n-3$ dijagonale. Ukoliko učenicima ipak prva ideja bude da je iz jednog vrha moguće povući $n-2$ dijagonale, predložimo im da pogledaju koliko dijagonala iz jednog vrha mogu povući u četverokutu i peterokutu. Učenicima možemo spomenuti i trokut kao n-terokut koji nema dijagonala. Na primjeru trokuta učenici će uočiti da ono što u n-terokutima s brojem vrhova većim od tri smatramo dijagonalama, u trokutu su stranice i točka (dužina kojoj je početna i krajnja točka ista). Učenici će nakon ovog zaključka najvjerojatnije pretpostaviti da je broj dijagonala n-terokuta jednak umnošku broja dijagonala povučenih iz jednog vrha i broja vrhova n-terokuta: $n(n-3)$. Dopustimo učenicima da provjere hoće li ta formula odgovarati za broj dijagonala n-terokuta koje su ranije oblikovali na geoploči i već im odredili broj dijagonala. Ovime će učenici dobiti broj duplo veći od traženog. Otvorimo razrednu diskusiju o ovom rezultatu. Učenike možemo pitati je li dobiveni rezultat slučajnost ili ga možemo povezati s dijagonalama n-terokuta. Učenici će primijetiti da smo formulom $n(n-3)$ dva puta prebrojali sve dijagonale n-terokuta jer su krajevi svake od dijagonala po dva vrha n-terokuta. Aktivnost zaključujemo s otkrivenom formulom za broj dijagonala n-terokuta: $\frac{n(n-3)}{2}$. Riješeni radni listić dan je u nastavku.

Radni listić 6.6: Primjer riješenog radnog listića za Aktivnost 6.2.1

Radni listić: Otkrivanje formule za određivanje broja dijagonala konveksnog n-terokuta.

Zadatak 1:

Neka n označava broj vrhova n-terokuta, a d ukupan broj dijagonala tog n-terokuta. Popunite tablicu koristeći se kružnom geopločom i gumicama. Oblikujte redom n-terokute za $n = 3, 4, 5$ i odredite im ukupan broj dijagonala. Pokušajte odrediti formulu za određivanje broja dijagonala n-terokuta koja će ovisiti o broju njegovih vrhova n. Odgovori na pitanja ispod tablice pomoći će vam u istraživanju.

n – broj vrhova	d – broj dijagonala	n – broj vrhova	d – broj dijagonala
3	0	8	20
4	2	9	27
5	5	100	4850
6	9		
7	14	n	$\frac{n(n-3)}{2}$

1. Koliko dijagonala možete povući iz jednog vrha n-terokuta?
Iz jednog vrha n-terokuta možemo povući $n-3$ dijagonale.
2. Koliko vrhova n-terokuta sadrži jedna dijagonala tog n-terokuta?
Svaka dijagonala sadrži po dva vrha n-terokuta.

Dodatno, ovu aktivnost možemo proširiti. Nakon ove aktivnosti učenicima je poželjno postaviti pitanje o zbroju unutarnjih kutova n-terokuta. Aktivnost se može provesti slično kao i aktivnost određivanja formule za broj dijagonala n-terokuta. Učenike možemo zamoliti da ponovno odrede dijagonale n-terokuta iz jednog vrha na geoploči. Ovime će uočiti raznostranične trokute unutar n-terokuta, prebrojati ih i pomnožiti sa zbrojem unutarnjih kutova trokuta i podijeliti s brojem vrhova n-terokuta. Učenici će time dobiti formulu:

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Ova aktivnost je posljednja u nizu aktivnosti predviđenih za stranice ovog diplomskog rada. Uz malo mašte i ljubavi prema nastavi matematike, mogućnosti za održavanje nastave uz pomoć didaktičkih modela su neograničene. Svaki od modela može se iskoristiti na brojne načine i kao nastavnici ne bismo od njih trebali *bježati* samo zato jer zahtijevaju više vremena i više strpljenja za učenike dok se s njima upoznaju. Učenicima u osnovnoj školi potrebno je doživjeti matematiku kroz različite stvari, na što više načina, a apstrakciju prepustimo nekom kasnijem vremenu kada učenici za to budu spremni. Uvjerena sam da će u budućnosti, uz ovako aktivnu nastavu matematike, učenici imati šire vidike i kreativniji pristup matematičkim konceptima i procesima.

LITERATURA

1. Butorac, Ž., (2010.) *Hrvatska udruga za disleksiju* [online]. Učenje pokretom – Projekt hrvatske udruge za disleksiju 2010. Dostupno na: http://hud.hr/ucenje-pokretom-2/ [21. srpnja 2017.]
2. Corn, P., (2016.) Cuisenaireovi štapići. *Osječki matematički list.* 16 (1), 67. – 82. Dostupno na: http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=244700 [27. srpnja 2017.]
3. Čižmešija, A., Geoploča – važan model u nastavi matematike [PowerPoint prezentacije] Dostupno na: https://www.dropbox.com/sh/sjq2o7dmkxhfhet/AAD4CEt6b2ZRqKYhpE5JNbOza?dl=0&preview=GEOPLO%C4%8CA.pptx [8. studeni 2017.]
4. Čižmešija A., Stilinović S., (28. siječnja 2015.) *Suradničko učenje i metode aktivne nastave matematike u osnovnoj školi*. [PowerPoint prezentacija] Dostupno na: https://www.dropbox.com/s/qdz0vdnqhbptp0w/Suradnicko_ucenje-pripravnici-sijecanj_2015.pptx?dl=0 [29. kolovoza 2017.]
5. Čižmešija A., Soucie T., Svedrec R. (2012.) Primjena geoploče u nastavi matematike. *Poučak, 13 (50),* 25. – 39. Dostupno na: http://hrcak.srce.hr/103885 [1. listopada 2017.]
6. Hand2mind: https://www.google.hr/search?biw=1280&bih=615&tbm=isch&sa=1&ei=NWoBWp6fJYjMkgW15J-4BA&q=algebra+tiles+set&oq=algebra+tiles+set&gs_l=psy-ab.3...24773.26109.0.26355.9.9.0.0.0.0.139.957.1j7.8.0....0...1.1.64.psy-ab..1.6.745...0j0i67k1j0i8i30k1j0i24k1.0.YwSr6VTvMEM#imgrc=8Lb-YeMeKdTFHM: [10. studeni 2017.]

7. Klisura, T., Lepoglavec, M., Magić, S., Matanović, I., Kresić, M., Piškor, D., Seifert, M., Stepčić K., Turek, D. (2014./2015.) *Algebarski izrazi i razlomci. Kvadrat i kub realnog broja.* [PowerPoint prezentacija] Dostupno na: https://www.dropbox.com/sh/npz17nu6sfw8sh2/AADNiPuL-Td_qBRzqv4z7mbea?dl=0&preview=Algebarski+izrazi.Kvadrat+i+kub+realnog+broja+(Zavr%C5%A1no).pptx [7. studenog 2017.]
8. Košćević, K., Lončar, M., Polić I. M., Pošpaić A. M., Roić L., Žugaj, D. (2015./2016.) *Trokut.* [PowerPoint prezentacija] Dostupno na: https://www.dropbox.com/s/hb09liks5gf62vs/Trokut.pdf?dl=0 [31. kolovoza 2017.]
9. Kovačević, B., (2015.) *Os uma* [online]. Zdravlje: Zašto su djeci potrebni dodiri, pokreti i iskustvo da bi učila. Dostupno na: https://portalosuma.com/2015/04/15/zasto-su-djeci-potrebni-dodiri-pokreti-i-iskustvo-da-bi-ucila/ [21. srpnja 2017.]
10. Lakeshore: https://products.lakeshorelearning.com/learning/Shapes-Manipulatives. [10. studeni 2017.]
11. Picciotto, H. *Geometry labs* (1999.) [PDF document] Dostupno na: https://www.dropbox.com/s/2uzkofixblxj6n4/geometry-labs.pdf?dl=0 [2. listopada 2017.]
12. Poljak, V. *Didaktika* (1984.) Dostupno na: https://www.scribd.com/doc/74180354/DIDAKTIKA-Skripta [21. srpnja 2017.]
13. Soucie, T., Čižmešija A., Kokić I. (2012.) Kružna geoploča. *Poučak 13 (51)*, 47. – 57. Dostupno na: http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=152727 [3. listopada 2017.]
14. Soucie, T., Katalenac, I., Svedrec, R. (2016.) *Geoploča* [PDF document] Dostupno na: http://www.matematika.hr/files/2214/6764/9026/GEOPLOCA_7_kongres_7_i_8.pdf [24. rujna 2017.]
15. Sweeney, T. F. *Cuisenaire Rods.* [PowerPoint prezentacija] Dostupno na: https://www.dropbox.com/s/9rkap16j2w77wjm/Cuisenaire-Rods.pptx?dl=0 [29. kolovoza 2017.]
16. Van de Walle, John A., Karp, Karen S., Bay –Williams, Jennifer M. (2010.) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 7. izdanje, Pearson
17. Wah, A., Picciotto H. *Algebra* (1994.) [PDF document] Dostupno na: https://www.dropbox.com/s/n0xy8xvvdphsw0e/attc-te.pdf?dl=0 [2. listopada 2017.]
18. *Wikipedia*, Educational Development Center. Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Education_Development_Center#Our_Work [4. studeni 2017.]

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu opisujemo odabrane didaktičke modele i uz njih vezane didaktičke situacije u nastavi matematike, s naglaskom na predmetnu nastavu u osnovnoj školi. Uvodni dio rada daje kratko objašnjenje pojmova poput didaktika i aktivna nastava, opisuje ulogu nastavnika u provedbi aktivne nastave te daje opće informacije o didaktičkim modelima i situacijama. U nastavku rada slijede poglavlja, naslovljena prema nazivima odabranih didaktičkih modela, u kojima opisujemo svaki od didaktičkih modela te dajemo nekoliko primjera aktivnosti koje se mogu provesti u razredu njihovim korištenjem. Kao ogledne didaktičke modele odabrali smo Cuisenaireove štapiće, model vage, algebarske pločice, mnogokutne pločice i geoploču, i to ponajviše zbog njihove primjene u nastavnim temama s kojima učenici imaju najviše teškoća, poput pojmova razlomka i jednadžbe. Uz odgovarajuću sliku i opis svakog pojedinog modela, u radu dajemo prijedlog nekoliko nastavnih tema i učeničkih aktivnosti u kojima se mogu primjenjivati. Za svaku od odabranih nastavnih tema navodimo ishode učenja, a za aktivnost i potreban materijal, način rada i tijek aktivnosti u danom vremenskom okviru.

SUMMARY

In this thesis we describe selected didactic models and related didactic situations in mathematics teaching and learning, with an emphasis on lower secondary school level. Introductory part is dedicated to a brief explanation of notion of underlying concepts, such as didactics and active learning, as well as of teacher's role in organizing classroom activities. We also give general information on didactic models and situations as well as examples of activities that can be built around them. In the sequel, we present selected mathematical didactic models in more detail, by describing them and giving examples of related classroom activities. Considering mathematical content where mathematical learning difficulties occur more frequently, we have chosen the following didactic models: Cuisenaire rods, scale model, algebra tiles, pattern blocks and geoboards. Along with a photograph or a picture of a model, we give some suggestions of mathematical topics that can be taught with the help of a chosen didactic model. For each mathematical topic we wrote learning outcomes, while required materials, a plan for suitable timeframe are given for each activity.

ŽIVOTOPIS

Moje ime je Dajana Kezerić. Rođena sam 21. prosinca 1992. godine u Zagrebu. Svoje obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi Sesvete i od 2007. godine nastavila u Općoj gimnaziji Sesvete. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2011. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu, ali već sljedeće godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika – nastavnički smjer. Godine 2015. stječem diplomu prvostupnice edukacije matematike. Na preddiplomskom studiju bila sam demonstrator iz kolegija *Uvod u matematiku* i kolegija *Konstruktivne metode u geometriji*. Tijekom diplomskog nastavničkog studija matematike, od 2015. do 2017. godine, osim na metodičkoj praksi iskustvo poučavanja stekla sam volontirajući kao zamjena u Osnovnoj školi Sesvetska sela. Od rujna 2017. godine radim u Općoj gimnaziji Sesvete koju sam i sama pohađala.