

Izokrono njihalo

Pinek, Adam

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:775750>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-09**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Adam Pinek

IZOKRONO NJIHALO

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Adam Pinek

IZOKRONO NJIHALO

Diplomski rad

Voditelj rada:

doc. dr. sc. Nikola Poljak

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član
4. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

*Zahvaljujem se
svima koji se tako osjećaju...*

Sadržaj

1	Uvod.....	1
2	Matematičko njihalo	2
2.1	Izvod jednadžbe gibanja matematičkog njihala.....	3
2.1.1	Izvod analizom dijagrama sila.....	3
2.1.2	Izvod pomoću momenta sile	4
2.1.3	Izvod preko energije.....	4
2.2	Period titranja matematičkog njihala za male otklone.....	5
2.3	Određivanje gravitacijske konstante g pomoću matematičkog njihala	6
2.4	Period titranja matematičkog njihala	8
3	Izokrono njihalo	10
3.1	Modifikacija matematičkog njihala u izokrono njihalo.....	10
3.2	Određivanje izokrone putanje gibanja materijalne točke	11
3.2.1	Cikloida.....	12
3.2.2	Evoluta cikloide.....	13
3.3	Period titranja izokronog njihala	15
3.4	Konstrukcija izokronog njihala	17
3.5	Mjerni postav i izokrono njihalo	18
3.5.1	Izokronost njihala.....	19
3.5.2	Određivanje konstante r_0 izokronog njihala.....	20
3.5.3	Određivanje gravitacijske konstante g pomoću izokronog njihala.....	21
4	Literatura	21
5	Sažetak	22
6	Summary	22
7	Zaključak	22
8	Životopis.....	22

1 Uvod

Temelj vremena je promjena. Svijest ljudi je na početku vrijeme shvaćala kao osnovnu periodičnu promjenu koja je bila sveprisutna; dan i noć. Kako se čovječanstvo razvijalo, rasla je i potreba za sve preciznijim određivanjem vremena pa su tako ljudi raznim instrumentima pokušavali fiktivno dijeliti dan i noć na manje dijelove da se mogu bolje organizirati, odnosno kako bi dvije osobe mogle nešto dogovoriti i biti sigurni da će se određena radnja ili susret dogoditi neovisno o tome jesu li u svakom trenutku u kontaktu. Također, vjerojatno i ranije od ovoga, praćenjem godišnjih doba, dan i noć se proširilo na tjedne, mjesece i godinu. Zapravo je ono što se događalo s poviješću vremena vrlo slično s poviješću fizike. Najprije smo uočavali pravilnosti u dimenzijama najbliže nama, a kako je ljudski mozak postajao sve razvijeniji misli su krenule na obje strane, prema sve većem i prema sve manjem.

Mjerenje vremena postajalo je sve preciznije, preko sunčanog, pješčanog, čak i vodenog sata. U jednom trenutku za mjerenje vremena počela su se koristiti njihala jer je primijećeno da svaki titraj traje jednako dugo i od tog trenutka započinje pravi razvoj mehaničkih satova. Christiaan Huygens je sredinom 17. stoljeća počeo razvijati satove koji rade na principu mehaničkog titranja uz pomoć trenutnih izumitelja i ljudi koji su se bavili mjerenjem vremena. Uz stalan razvoj korišteni su sve do sredine 20. stoljeća kad je izumljen električni sat koji pokreće elektromotor, a njime upravlja njihalo, akustički oscilator ili frekvencija izmjenične struje. Danas postoji i atomski sat koji je najprecizniji uređaj za mjerenje vremena s greškom od jedne sekunde u tri milijuna godina.

U ovom radu proučavat ćemo njihala. Ako pogledamo najjednostavniji oblik njihala, a to je matematičko njihalo, vidimo da za različite početne otklone njihala iz ravnoteže njihalu trebaju različita vremena da prođe kroz jedan ciklus ili ono što danas nazivamo titraj. Naš cilj je pokušati matematičkim i fizikalnim znanjima doći do odgovora postoji li takvo njihalo kojem će za bilo koliki otklon iz ravnoteže trebati jednako vremena za jedan titraj. Uspijemo li teoretski provesti izračun, konstruirat ćemo takvo njihalo i mjerenjem pokazati da je ono izokrono. Riječ izokrono dolazi kao spoj riječi izo (*grč. jednako*) i krono (*grč. vremenski*).

Prvi dio rada bavit će se matematičkim njihalom, za koje ćemo pokazati da nije izokrono. Drugi dio rada proučavat će je li izokrono njihalo izvedivo te ćemo ga na kraju i konstruirati te provesti potrebna mjerenja. Kroz rad dolazimo do toga da se matematičko njihalo može modificirati cikloidalnim preprekama koje efektivno skraćuju duljinu niti u pravim trenutcima tako da njihalo titra jednakim periodima za različite otklone. Nešto slično je pokušao i sam Huygens [3]. U nastavi se matematička njihala koriste za određivanje gravitacijske konstante g uz

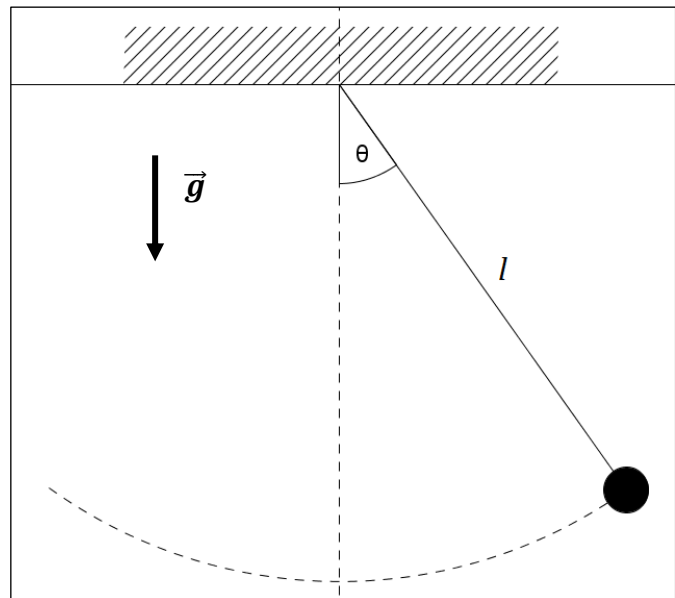
pretpostavku izokronosti, što doprinosi greški pri mjerenju. Izmjerit ćemo relativnu grešku određivanja g pomoću oba tipa njihala i vidjeti ima li smisla u nastavi zamijeniti matematičko njihalo cikloidnim.

2 Matematičko njihalo

Fizikalno njihalo sastoji se od krutog tijela i osi oko koje to tijelo može rotirati s pretpostavkom da se centar mase tijela ne nalazi na osi rotacije. Odmaknemo li tijelo iz ravnotežnog položaja ono će krenuti u gibanje pod utjecajem gravitacijske sile. Opis ovog gibanja može biti vrlo složen budući da u realnim situacijama možemo uzimati u obzir mnoštvo raznih utjecaja kao što su elektromagnetske sile, sila uzgona, gravitacijske sile itd.

Kako bi pojednostavili sustav, koji ćemo nazvati matematičko njihalo (*slika 1.*), moramo uzeti u obzir nekoliko pretpostavki:

- sustav se nalazi u homogenom gravitacijskom polju
- masa tijela sadržana je u materijalnoj točki
- nit povezuje fiksnu os rotacije i materijalnu točku
(nit nema masu, nerastezljiva je i uvijek napeta)
- gibanje se odvija u dvije dimenzije (putanja materijalne točke je dio kružnice)
- nema gubitaka energije



slika 1. Matematičko njihalo

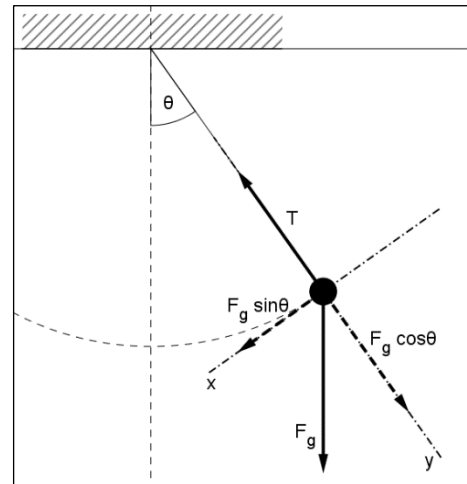
Ako materijalnu točku odmaknemo iz ravnoteže za kut θ te pustimo ona će krenuti u gibanje pod utjecajem gravitacijske sile. Uz navedene pretpostavke lako možemo, na više načina, doći do jednadžbe gibanja ovog sustava (2.1), pri čemu je g gravitacijska konstanta, a l duljina niti.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

2.1 Izvod jednadžbe gibanja matematičkog njihala

2.1.1 Izvod analizom dijagrama sila

Pogledajmo dijagram sila (slika 2.) koje djeluju na materijalnu točku (dalje u tekstu m.t.) kad je ona otklonjena za kut θ od ravnotežnog položaja. Uz ranije navedene uvjete, sila koja djeluje na m.t. je svakako sila teže F_g , no kako znamo da je nit nerastezljiva m.t. se giba po kružnoj putanji što implicira centripetalnu silu u čijoj je ulozi sila napetosti niti T pa se nameće da gravitacijsku silu rastavimo na komponente okomite i paralelne s niti. Kako F_g ovisi samo o g i masi m ona je konstantna u vremenu, a ono što se mijenja, kako se mijenja kut otklona θ , su njene



slika 2. Dijagram sila

komponente, što povlači promjenu T . Napetost niti ovisi o masi m.t., gravitacijskoj konstanti te trenutnom otklonu, a ona je u svakom trenutku nakon puštanja u gibanje veća od y komponente F_g što osigurava kružno gibanje. Ono što tjera m.t. na gibanje je x komponenta sile F_g , a iz drugog Newtonovog zakona slijedi jednadžba (2.2), pri čemu je a_T tangencijalno ubrzanje i F ukupna sila.

$$F = ma_T = mg \sin \theta \quad (2.2)$$

Linearno ubrzanje a_T možemo izraziti preko kutnog ubrzanja tako da dva puta deriviramo formulu za duljinu luka s (2.3) po vremenu. Ako se uzme u obzir da su smjer ubrzanja i otklona suprotni dobivamo jednadžbu (2.4).

$$s = l\theta \quad (2.3)$$

$$a_T = -\frac{d^2s}{dt^2} = -l\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.4)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.4) u jednadžbu (2.2) i kraćenjem mase m s obje strane dobivamo jednadžbu gibanja matematičkog njihala (2.1).

2.1.2 Izvod pomoću momenta sile

Moment sile ili zakretni moment ima sličnu ulogu pri rotaciji tijela kao i sila pri pravocrtном gibanju. Kao što sila masi daje linearno ubrzanje tako moment sile tijelu daje kutno ubrzanje. Kako bi došli do jednadžbe (2.1) krenut ćemo od analogije drugog Newtonovog zakona (2.5), pri čemu je silu zamijenio moment sile \vec{M} , masu moment tromosti ili inercije I , a ubrzanje kutno ubrzanje $\vec{\alpha}$.

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \quad (2.5)$$

Iz definicije momenta sile i momenta tromosti jednadžba (2.5) prelazi u jednadžbu (2.6).

$$\vec{r} \times \vec{F}_g = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.6)$$

Postavimo desni koordinatni sustav kao na slici s ishodištem u osi rotacije (slika 3.) i raspíšemo krak sile \vec{r} po komponentama. Nakon vektorskog množenja dobivamo jednadžbu (2.7).

$$-lmg \sin \theta \hat{z} = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{z} \quad (2.7)$$

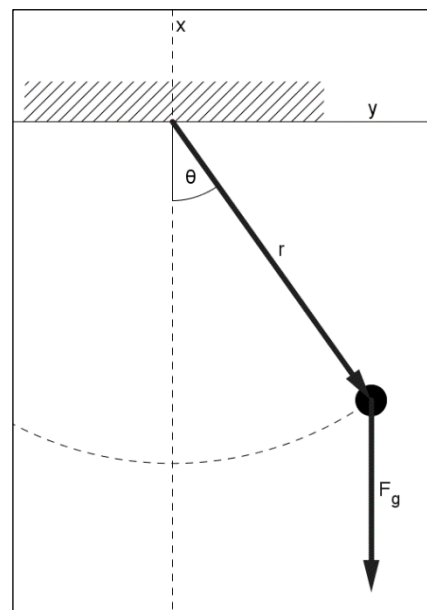
Sređivanjem jednadžbe (2.7) ponovo dolazimo do jednadžbe gibanja matematičkog njihala (2.1).

2.1.3 Izvod preko energije

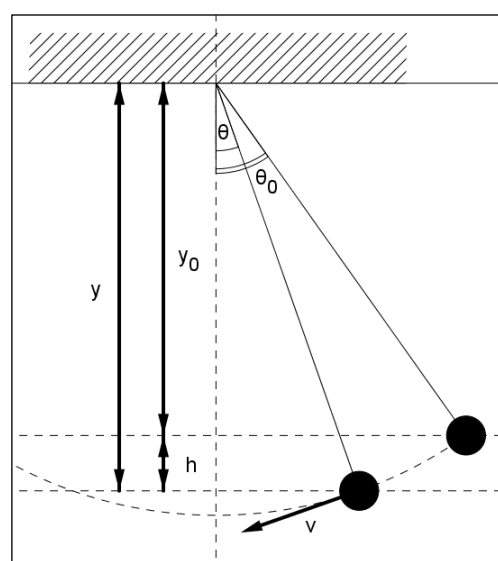
Kako se m.t. nalazi u homogenom gravitacijskom polju ona posjeduje samo potencijalnu gravitacijsku energiju kad ju držimo u maksimalnom odklonu θ_0 . Nakon što ju pustimo u gibanje, obzirom da nema gubitaka energije, potencijalna energija pretvara se u kinetičku pa je promjena potencijalne energije jednaka promjeni kinetičke energije [1] iz čega slijedi jednadžba (2.8), gdje je v obodna brzina, a h promjena visine (slika 4.) s obzirom na proizvoljno odabranu nultu visinu.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.8)$$

Iz jednadžbe (2.8) možemo izraziti obodnu brzinu v , a deriviranjem jednadžbe (2.3) u vremenu dobivamo ovisnost kutne brzine o promjeni visine (2.9).



slika 3. Sila i krak sile



slika 4. promjena visine h

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l} \quad (2.9)$$

Promjenu visine $h = y - y_0$ trigonometrijom pravokutnog trokuta možemo izraziti preko maksimalnog otklona θ_0 i trenutnog otklona θ (2.10) i uvrštavanjem u (2.9) dobivamo (2.11).

$$h = l \cos \theta - l \cos \theta_0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (2.11)$$

Kako bi dobili kutno ubrzanje moramo jednadžbu (2.11) derivirati u vremenu i dobivamo (2.12).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{2g}{l} \sin \theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)}} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.12)$$

Uvrštavanjem (2.11) u (2.12) ponovo dolazimo do jednadžbe gibanja matematičkog njihala (2.1).

2.2 Period titranja matematičkog njihala za male otklone

Za male otklone m.t. iz ravnoteže, odnosno kad je $\theta_0 \ll 1$, možemo aproksimirati funkciju sinus i u tom slučaju vrijedi $\sin \theta \approx \theta$. Primjenom na jednadžbu gibanja (2.1) dobivamo jednadžbu (2.13) čije je rješenje jednadžba (2.14), uz uvjet da su početni otklon θ_0 i početna brzina jednaki 0. Rješenje (2.14) nam pokazuje da se radi o slobodnom harmonijskom titranju.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.13)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \quad (2.14)$$

Rješenje jednadžbe gibanja za male kutove daje nam period oscilacija (2.15) i vidimo da je on određen jedino duljinom niti i gravitacijskom konstantom.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.15)$$

Međutim, kada se njihalo pusti u gibanje s većim početnim otklonom ne možemo aproksimirati funkciju sinus te problem postaje mnogo složeniji, a period titranja T više nije konstantan, no više o tome u idućem poglavlju.

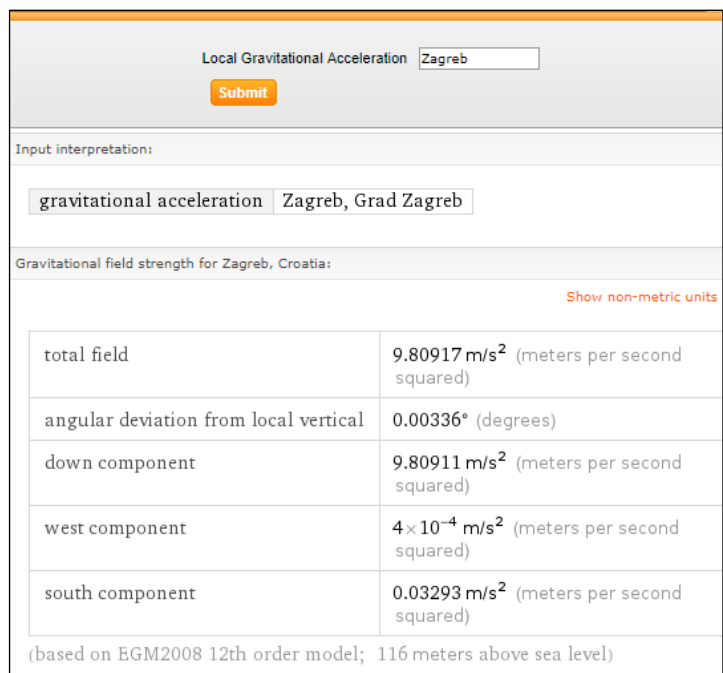
2.3 Određivanje gravitacijske konstante g pomoću matematičkog njihala

Matematičkim njihalom možemo odrediti gravitacijsku konstantu Zemlje. Ovo je tipična vježba koju ćemo, za potrebu usporedbe mjerenja g kod matematičkog i izokronog njihala, ponoviti. Mjerit ćemo period titranja za male otklone, a iz jednadžbe (2.15) uz izmjerenu duljinu niti njihala moći ćemo lako odrediti g s nekom greškom mjerenja te zatim usporediti mjerenu konstantu i tabličnu vrijednost. Kako je mjerenje provedeno u praktikumu fizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu konstantu ćemo uzeti iz programa Wolfram Alpha (slika 5.). Program nam daje razne podatke među kojima su i istočna i zapadna komponenta ubrzanja g što dolazi od toga jer Zemlja nije savršena kugla već je spljoštena na polovima. Za usporedbu s našim mjerenjem uzet ćemo samo „down component“, odnosno komponentu prema središtu Zemlje zaokruženu na tri decimalna mjesta.

Dakle, za tabličnu konstantu uzimamo:

$$g = 9.809 \text{ m/s}^2 \quad (2.16)$$

Mjerenje ćemo provesti tako da ćemo za više različitih duljina niti mjeriti period titranja. Prilikom mjerenja duljine niti moramo uračunati i radijus kuglice budući da se centar mase nalazi u središtu, a kuglicu ćemo aproksimirati kao materijalnu točku jer će duljina niti biti puno veća od radijusa kuglice. Kuglica koju koristimo je iz mjernog postava PHYWE pa radijus znamo i iznosi **1.6 cm**. Digitalni mjerač (slika 6.) je spojen na zaporna vrata (slika 7.). Zaporna vrata rade na principu prekida laserske zrake. Kad se ona prekine, signal dođe do digitalnog mjerača koji zatim mjeri ono što mu zadamo u postavkama. U ovom mjerenju digitalni mjerač je namješten tako da veličine mjeri u milisekundama (**ms**), a mjerenje počinje kada nit prekine lasersku zraku prvi put, a završava kada je prekine po drugi put. Ovakvim postavom, kada pustimo njihalo da titra malim otklonom, dobivamo vrijeme polovice perioda budući da smo lasersku zraku postavili tako da ju nit prekine kad prolazi ravnotežnim položajem. Radi simetrije i preciznosti mjerenja za istu duljinu niti mjerit ćemo polovicu perioda kad je njihalo



The screenshot shows the Wolfram Alpha interface for 'Local Gravitational Acceleration' in Zagreb. It displays a table of gravitational field strength data for Zagreb, Croatia, based on the EGM2008 12th order model at 116 meters above sea level. The table includes values for total field, angular deviation, and components (down, west, south).

Gravitational field strength for Zagreb, Croatia:	
total field	9.80917 m/s ² (meters per second squared)
angular deviation from local vertical	0.00336° (degrees)
down component	9.80911 m/s ² (meters per second squared)
west component	4 × 10 ⁻⁴ m/s ² (meters per second squared)
south component	0.03293 m/s ² (meters per second squared)

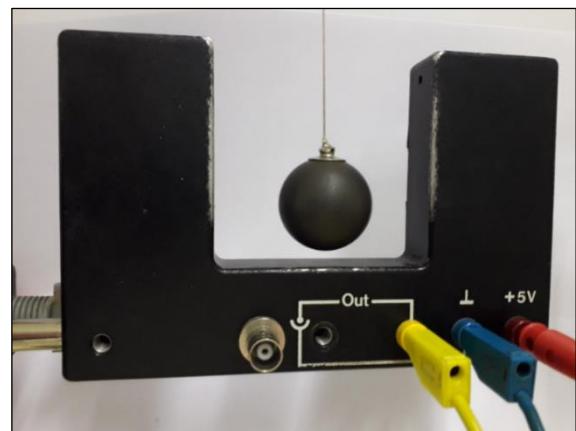
(based on EGM2008 12th order model; 116 meters above sea level)

slika 5. gravitacijska konstanta Zemlje (Zagreb)

s desne $T_D/2$, odnosno lijeve $T_L/2$, strane ravnotežnog položaja. Pritom ćemo paziti da početni otklon su svakom mjerenju bude jednak i dovoljno mali da možemo aproksimirati funkciju sinus sa $\sin \theta \approx \theta$. Mjerenjem dobivamo tablicu (*tablica 1.*).



slika 6. digitalni mjerac

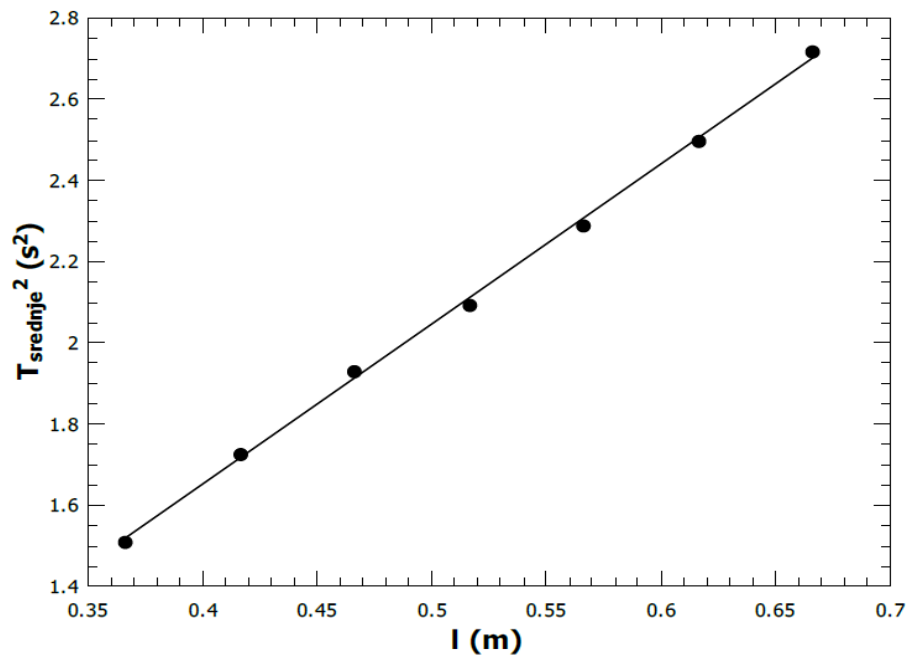


slika 7. zaporna vrata

Tablica 1. mjerenje perioda titranja mat. njihala pri malom otklonu

duljina niti	radijus kuglice	l	$T_L/2$		$T_D/2$		\bar{T}^2
			1	2	1	2	
(cm)	(cm)	(m)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(s ²)
35	1.6	0.366	614.5	614.6	614.2	614.7	1.5104
40	1.6	0.416	656.8	656.6	657.2	657	1.7261
45	1.6	0.466	694.9	694.9	694.7	694.5	1.9307
50	1.6	0.516	723.8	723.4	723.2	723.2	2.0932
55	1.6	0.566	756.6	756.2	756.3	756.5	2.2886
60	1.6	0.616	790.1	790	790.5	790.4	2.4980
65	1.6	0.666	824.1	824.2	824.6	824.5	2.7182

Iz tablice dobivamo graf (*graf 1.*) gdje smo na apscisu postavili l , a na ordinatu \bar{T}^2 . Linearnom regresijom dobije se nagib pravca a (2.17) i odsječak na ordinati b (2.18). Izračunati ćemo i relativnu pogrešku mjerenja R .



graf 1. ovisnost kvadrata srednje vrijednosti perioda i duljine njihala

Sredimo li malo jednadžbu (2.15) dobivamo (2.19) iz koje možemo vidjeti \mathbf{a} i \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} = \frac{(2\pi)^2}{g} = (3.95 \pm 0.06) \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \quad R = 1.52\% \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} = (0.07 \pm 0.03) \quad (2.18)$$

$$\bar{T}^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} l \quad (2.19)$$

Konstanta \mathbf{b} je dovoljno blizu nule, što zadovoljava jednadžbu (2.19). Naposljetku iz mjerenog nagiba pravca \mathbf{a} dobivamo mjerenu gravitacijsku konstantu g_m (2.20) za koju ćemo također izračunati pripadnu pogrešku tako da ćemo izračunati \bar{g}_m preko $\bar{\mathbf{a}}$ te odrediti standardnu devijaciju σ_{g_m} pomoću standardne devijacije σ_a na sljedeći način:

$$\sigma_{g_m} = \left| \left(\frac{\partial g_m}{\partial \mathbf{a}} \right) \sigma_a \right| = \frac{4\pi^2}{a^2} \sigma_a = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_m = (9.9 \pm 0.2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad R = 2\% \quad (2.20)$$

Usporedbom srednje vrijednosti mjerene gravitacijske konstante i tablične gravitacijske konstante (2.16) uočavamo da je relativno odstupanje 0.93% što je vrlo zadovoljavajući rezultat.

2.4 Period titranja matematičkog njihala

Jednadžba (2.11) daje nam brzinu promjene otklona u vremenu. Jednostavnim računom možemo vidjeti obratnu situaciju, tj. kako se za malu promjenu otklona mijenja vrijeme (2.21).

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (2.21)$$

Period titranja možemo dobiti integracijom jednadžbe (2.21) po otklonu θ . Jedini problem su granice integracije. Znamo da je period vrijeme potrebno da se m.t. iz nekog položaja s nekom brzinom vrati u taj isti položaj i ima brzinu jednakog iznosa i smjera. Radi jednostavnosti uzimamo da je m.t. u početnom trenutku otklonjena maksimalno, odnosno za θ_0 , i ima brzinu nula. Integraciju možemo podijeliti na četiri dijela; $\theta_0 \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \rightarrow -\theta_0$, $-\theta_0 \rightarrow \mathbf{0}$ i $\mathbf{0} \rightarrow \theta_0$, pri čemu otklon ima vrijednost nula u ravnotežnom položaju. Budući da svaka od ove četiri promjene otklona traje jednako dugo, četvrtinu perioda, što se može vidjeti iz zakona očuvanja energije i simetrije događaja, možemo integrirati samo po jednom dijelu i množiti sve s četiri (2.22).

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \quad (2.22)$$

Sad napokon vidimo koliko nam je aproksimacija funkcije sinus pojednostavila problem, kao i da se pojavljuju neke nove ovisnosti u jednadžbi za period. Integral u jednadžbi (2.22) je eliptički integral prve vrste [4], a riješit ćemo ga razvojem podintegralne funkcije s varijablom θ u Taylorov red oko nule (2.23).

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots \quad (2.23)$$

Kako bi funkciju razvili u Taylorov red trebamo je nekoliko puta derivirati.

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

$$f'(\theta) = \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(\theta) = \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 \sin \theta}{4(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f'''(\theta) = \frac{15 \sin^3 \theta}{8(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9 \sin \theta \cos \theta}{4(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''''(\theta) = \frac{9 \cos^2 \theta}{4(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\cos \theta}{2(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{105 \sin^4 \theta}{16(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \sin^2 \theta}{(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} + \frac{45 \sin^2 \theta \cos \theta}{4(\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{7}{2}}}, \text{ itd.}$$

Sad trebamo vrijednosti izračunatih derivacija za $\theta = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f''''(0) = \frac{9}{4(1 - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}}, \text{ itd.}$$

Dakle, razvoj funkcije $f(\theta)$ u Taylorov red oko $\theta = 0$ izgleda ovako:

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \theta^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{9}{4(1 - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \right) \theta^4 + \dots$$

Sad će integral iz jednadžbe (2.22) biti puno lakše riješiti:

$$\int_0^{\theta_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \theta + \frac{1}{4!} \left(\frac{9}{4(1 - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \right) \theta^3 + \dots \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} \theta_0 + \frac{1}{12(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \theta_0^3 + \left(\frac{9}{480(1 - \cos \theta_0)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{240(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \right) \theta_0^5 + \dots$$

Rješavanjem ovog integrala dolazimo do izraza za period:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} \theta_0 + \frac{1}{12(1 - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}}} \theta_0^3 + \dots \right)$$

Vidimo da period titranja ovisi i o početnom otklonu.

Pitanje je kako možemo modificirati njihalo da period više nema tu ovisnost. Razlog tome je povećanje preciznosti mjerenja vremena, pogotovo pri prekomorskim putovanjima gdje se zbog valova amplituda titranja nepredvidivo mijenja. Također, ovo ima i utjecaj na preciznost mehaničkih satova jer je nezgodno izračunati period titranja, a i kod nekih satova amplituda titranja nije stalna pa se period promjenom energije mijenja.

3 Izokrono njihalo

3.1 Modifikacija matematičkog njihala u izokrono njihalo

Kao što smo u prethodnom tekstu zaključili, matematičko njihalo je vrlo jednostavan sustav pa tako nema puno čimbenika koji utječu na period titranja. Spekulacije radi, mogli bismo poremetiti jednostavnost sustava na korist toga da se riješimo ovisnosti perioda o početnom otklonu. Npr., mogli bismo dovesti naboj na materijalnu točku i sustav smjestiti u nehomogeno magnetsko polje s promjenama smjera u pravim trenucima te tako pomoću Lorenzove sile korigirati napetost niti što bi rezultiralo izokronošću njihala. Ili kako njihalo u realnosti ima neku dimenziju, što možemo aproksimirati kao materijalnu točku budući da je duljina niti puno veća od dimenzija „kuglice“ koja njiše, mogli bismo ga odozdo bombardirati česticama snopovima različitog intenziteta, tako da postignemo jednak efekt kao i s prethodnim primjerom.

Vjerujem da ima neograničeno mnogo načina kako možemo njihalo učiniti izokronim. Međutim, većina tih modifikacija bi nam oduzela puno više resursa i vremena za konstrukciju nego što je korist od toga da postignemo svoj cilj pa zato ostavimo ovakve primjere za znatiželjne umove i rasonodu. Pravo pitanje je kako učiniti njihalo izokronim što jednostavnijom modifikacijom, a najlogičnije rješenje se nazire u duljini niti budući da nam ona zadaje trajektoriju gibanja m.t.. Raznim preprekama možemo upravljati efektivnom duljinom niti tako da je „u pravim trenucima

skratimo za dobru duljinu“ pa tako kao jedini problem ostaje to, koja putanja m.t. bi iz jednadžbe za period izbacila ovisnost o početnom otklonu.

3.2 Određivanje izokrone putanje gibanja materijalne točke

Naš zadatak je otkriti putanju kojom se treba gibati materijalna točka pod utjecajem konstantne gravitacijske sile (slika 8.) tako da to gibanje bude jednostavno harmonijsko titranje. Gibanje će biti jednostavno harmonijsko titranje i samim time izokrono ako vrijedi (3.1). Odnosno, akceleracija mora biti proporcionalna negativnom pomaku s .

$$\frac{d^2s}{dt^2} \propto -s \quad (3.1)$$

Primjenom 2. Newtonovog zakona na situaciju sa slike gdje je θ kut između horizontalnog pravca i tangente na putanju gibanja i pokratom m s obje strane dobivamo jednadžbu gibanja (3.2).

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \theta \quad (3.2)$$

No kako želimo da naše gibanje bude izokrono mora vrijediti jednadžba (3.1) pa kombinacijom s (3.2) slijedi da pomak s mora biti proporcionalan sinus kuta θ (3.3) do na konstantu C

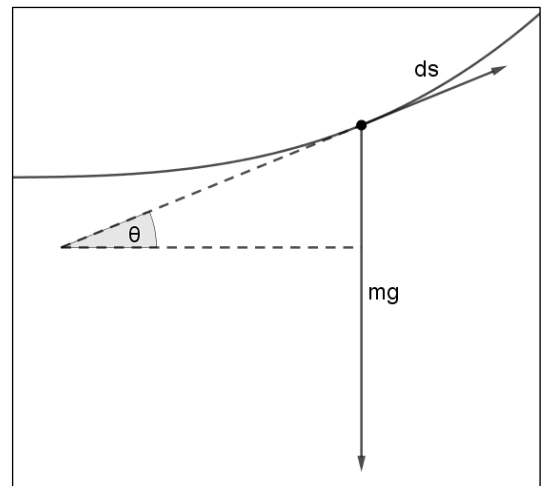
$$s \propto g \sin \theta \Rightarrow s = Cg \sin \theta, \quad (3.3)$$

pri čemu je C konstanta koju ćemo odrediti kad nađemo krivulju koja zadovoljava uvjet (3.3). Kako bi pronašli jednadžbu krivulje moramo uvesti koordinatni sustav i promotriti kako se mijenjaju varijable x i y u odnosu na pomak po krivulji s , odnosno na kut θ . U ovome će nam pomoći infinitezimalni račun. Promotrimo sliku (slika 9.). Malom pomaku ds po krivulji možemo pridružiti pripadajući horizontalni i vertikalni pomak dx i dy .

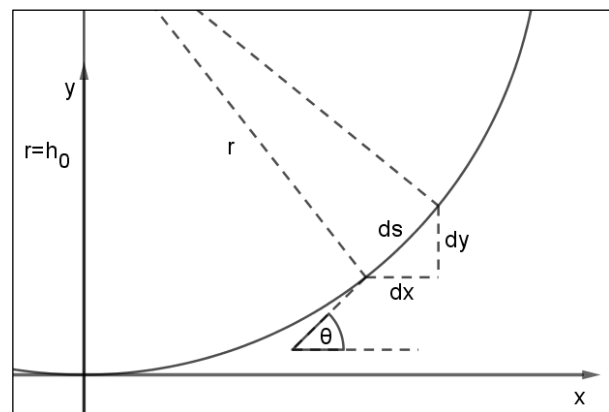
Ovako postavljen koordinatni sustav i malo trigonometrije pravokutnog trokuta daju nam sljedeće ovisnosti.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (3.5)$$



slika 8. gibanje materijalne točke pod utjecajem gravitacijske sile



slika 9. analiza pomaka u ravnini $x - y$

No mi želimo vidjeti kako se mijenjaju x i y u ovisnosti o kutu θ .

To možemo ovako zapisati:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta} \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\theta} \quad (3.6)$$

Deriviranjem jednadžbe (3.3) po θ dobivamo (3.7).

$$\frac{ds}{d\theta} = Cg \cos \theta \quad (3.7)$$

Uvrštavanjem (3.4), (3.5) i (3.7) u jednadžbe (3.6) slijedi:

$$\frac{dx}{d\theta} = Cg \cos^2 \theta = \frac{Cg}{2} (1 + \cos 2\theta) \qquad \frac{dy}{d\theta} = Cg \cos \theta \sin \theta = \frac{Cg}{2} \sin 2\theta \quad (3.8)$$

Integriranje jednadžbi (3.8) s obzirom na kut θ uz početne uvjete $x = y = 0$ kad je $\theta = 0$, daje nam sljedeće:

$$x = \frac{Cg}{4} (2\theta + \sin 2\theta) \qquad y = \frac{Cg}{4} (1 - \cos 2\theta) \quad (3.9)$$

Ovo se može prepoznati kao parametarski zadane koordinate cikloide s parametrom θ .

3.2.1 Cikloida

Cikloida je ravninska krivulja generirana tragom točke kružnice koja se kotrlja po pravcu bez proklizavanja (slika 10.). Ako ishodište koordinatnog sustava postavimo u početak cikloide sa slike, a parametar t pustimo po intervalu $[0, +\infty)$ njena parametrizacija je:

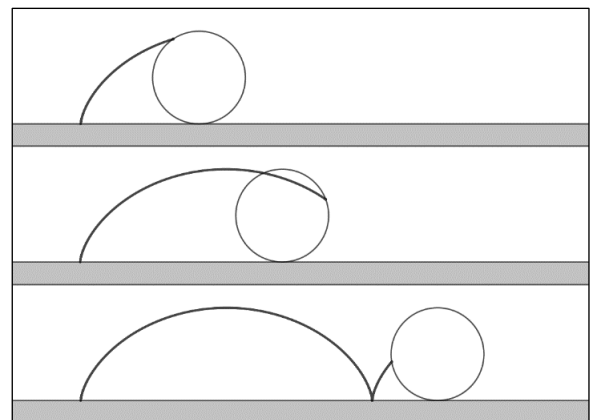
$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

pri čemu je r radijus kotrljajuće kružnice.

Međutim, parametrizacija (3.9) daje nam malo

drugačiju situaciju. Cikloida iz dobivene parametrizacije, kad gravitacijska sila djeluje prema dolje, je postavljena tako da su šiljci krivulje okrenuti prema gore. Usporedbom parametrizacije (3.9) i (3.10) vidimo da je radijus kotrljajuće kružnice $r_0 = \frac{Cg}{4}$. Konačno, zanima nas konstanta C , a nju ćemo saznati iz početnih uvjeta.

Kako je zakrivljenost po definiciji promjena kuta otklona po pomaku po krivulji, odnosno $\frac{d\theta}{ds}$, tad je radijus zakrivljenosti također po definiciji promjena pomaka po krivulji po kutu otklona, odnosno $r = \frac{ds}{d\theta}$. No sada vidimo kako smo radijus zakrivljenosti već izrazili jednadžbom (3.7).



slika 10. generirana cikloida

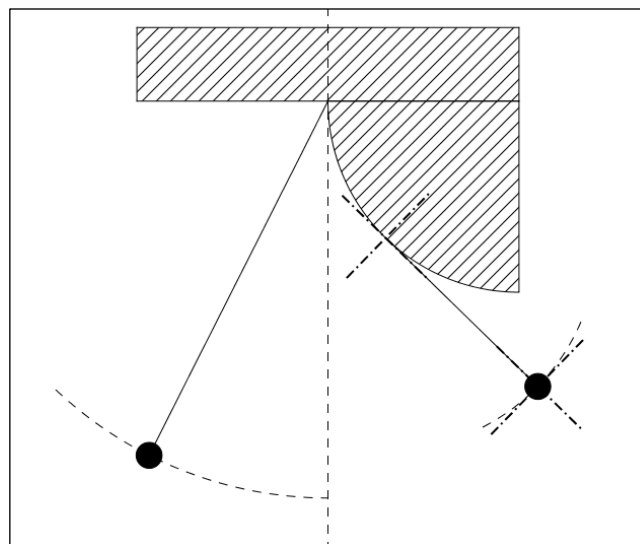
Pogledajmo sliku (slika 9.); kad je odklon $\theta = 0$ tad je $\mathbf{r} = \mathbf{h}_0$ pa uvrštavanjem tog početnog uvjeta u jednadžbu (3.7) dobivamo $\mathbf{h}_0 = C\mathbf{g}$ jer je $\cos 0 = 1$. Sad parametrizacija (3.9) izgleda ovako:

$$x = \frac{h_0}{4}(2\theta + \sin 2\theta) \qquad y = \frac{h_0}{4}(1 - \cos 2\theta) \qquad (3.11)$$

Sljedeće pitanje koje se postavlja je kako natjerati materijalnu točku da se giba ovakvom putanjom.

3.2.2 Evoluta cikloide

Već smo spomenuli kako pomoću prepreka možemo mijenjati efektivnu duljinu niti njihala, a sad kad znamo kojom putanjom se mora gibati materijalna točka preostaje nam samo smisliti kakvom preprekom modificirati duljinu niti tako da ona natjera m.t. na gibanje po cikloidi. Pogledajmo sliku (slika 11.), vidimo da smo na matematičko njihalo nadodali prepreku (četvrtinu kruga). Ono što je potrebno uočiti je da kako se nit pri njihanju desno od ravnotežnog položaja priljubljuje uz rub kruga tako njen produžetak zapravo leži na



slika 11. utjecaj prepreke na nit

tangenti na prepreku jer je nit cijelo vrijeme napeta. Razmislimo li malo bolje uočiti ćemo da će ta tangenta biti upravo normala na krivulju po kojoj će se materijalna točka gibati kad je sustav pod utjecajem prepreke. Dakle, nama kao prepreka treba krivulja čije će tangente biti normale na cikloidi (3.11). Prethodna rečenica navodi upravo svojstvo evolute krivulje. Naime, evoluta neke krivulje je ona krivulja čije su tangente normale na tu krivulju. Kad odredimo evolutu cikloide (3.11), zapravo smo odredili krivulju koja opisuje rubove prepreke kakvu trebamo kako bi njihalo bilo izokrono.

Radi jednostavnosti računa uzimamo parametarski zadanu cikloidu s parametrom t s koordinatama u tri dimenzije (3.12) jer će nam u računu trebati binormala koja je okomita na tangentu i normalu krivulje pa tako odlazi u treću dimenziju. Ova cikloida također ima šiljke okrenute prema gore kao i cikloida (3.11).

$$\mathbf{c}(t) = (-t + \sin t, -1 + \cos t, 0) \qquad (3.12)$$

Evoluta krivulje $\mathbf{c}(t)$ zadana je jednadžbom (3.13), pri čemu su $\boldsymbol{\rho}(t)$ (3.14) i $\hat{\mathbf{N}}(t)$ (3.15) radijus zakrivljenosti i jedinični vektor normale krivulje $\mathbf{c}(t)$. Za sam izračun evolute $\mathbf{e}(t)$ bit će nam

potrebni i zakrivljenost $\kappa(\mathbf{t})$ (3.16), jedinični vektor tangente $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$ (3.17) i binormale $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$ (3.18) krivulje $\mathbf{c}(\mathbf{t})$.

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{c}(\mathbf{t}) + \rho(\mathbf{t})\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \quad (3.13)$$

$$\rho(\mathbf{t}) = \frac{1}{\kappa(\mathbf{t})} \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) \times \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \quad (3.15)$$

$$\kappa(\mathbf{t}) = \frac{\|\mathbf{c}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{c}''(\mathbf{t})\|}{\|\mathbf{c}'(\mathbf{t})\|^3} \quad (3.16)$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{c}'(\mathbf{t})}{\|\mathbf{c}'(\mathbf{t})\|} \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{c}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{c}''(\mathbf{t})}{\|\mathbf{c}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{c}''(\mathbf{t})\|} \quad (3.18)$$

Vidimo da će za izračun evolute biti potrebni sljedeći podatci:

$$\mathbf{c}'(\mathbf{t}) = (\cos t - 1, -\sin t, 0)$$

$$\mathbf{c}''(\mathbf{t}) = (-\sin t, -\cos t, 0)$$

$$\|\mathbf{c}'(\mathbf{t})\| = \sqrt{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2}$$

$$\mathbf{c}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{c}''(\mathbf{t}) = (0, 0, \cos t - 1)$$

$$\|\mathbf{c}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{c}''(\mathbf{t})\| = \sqrt{(\cos t - 1)^2}$$

Uvrštavanjem tih podataka u gornje formule dobivamo parametrizaciju $\mathbf{e}(\mathbf{t})$:

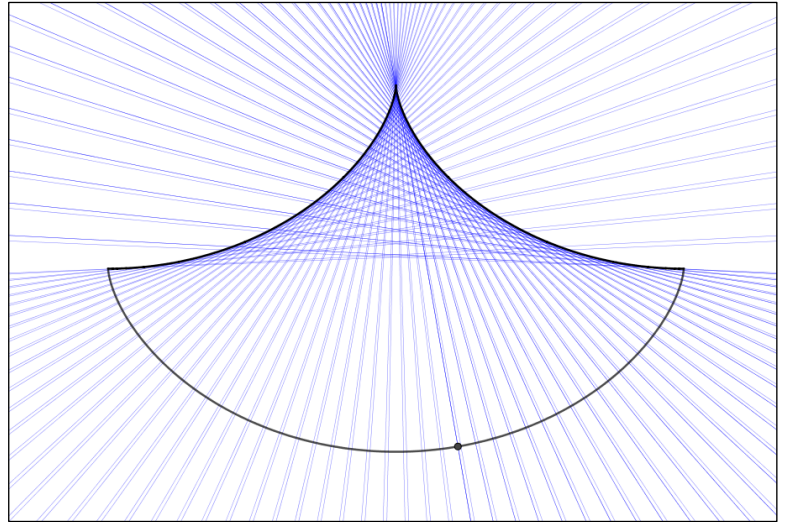
$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{t}) = & (-t + \sin t, -1 + \cos t, 0) + \frac{(\sqrt{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2})^3}{\sqrt{(\cos t - 1)^2}} \\ & \cdot \left(\frac{\cos t - 1}{\sqrt{(\cos t - 1)^2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2}}, \frac{\cos t - 1}{\sqrt{(\cos t - 1)^2}} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\cos t - 1}{\sqrt{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

Kratkim računom ovo se svodi na parametrizaciju:

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = (-t - \sin t, 1 - \cos t, 0) \quad (3.19)$$

Ovo nas dovodi do vrlo lijepog otkrića, a to je da je evoluta cikloide i sama cikloida, odnosno da prepreka koju moramo konstruirati kako bi podesili efektivnu duljinu niti mora imati oblik cikloide. Kako bi sve ovo bilo malo jasnije nacrtat ću dobivene krivulje pomoću programa GeoGebra (*slika 12.*). Promotrimo li sliku vidimo dvije cikloide, donja (3.12) i gornja (3.19) njena evoluta, obje s parametrom na segmentu $[0, 2\pi]$. Kako bi i konstrukcijski potvrdili definiciju

evolute plave linije su trag normale donje cikloide kroz točku na slici. Odavde već dobro vidimo kako naše izokrono njihalo treba izgledati, odnosno kakve prepreke nam trebaju kako bi natjerali materijalnu točku da se giba cikloidom što će njihalo učiniti izokronim iz ranije navedenih razloga. Također, sada prirodno dolazi da je faktor h_0 zapravo duljina niti.



slika 12. evoluta cikloide

3.3 Period titranja izokronog njihala

Sad kad smo odredili kojom krivuljom se mora gibati materijalna točka kako bi period bio neovisan o vremenu, i vrstu prepreke kojom takvo gibanje možemo postići, prije nego krenemo u konstrukciju samog njihala zgodno je računski vidjeti jesmo li izgubili ovisnost o početnom otklonu iz jednadžbe perioda i o kojim konstantama on sada ovisi. Taj ćemo podatak također koristiti u daljnjim računima.

Ako želimo saznati period titranja, koji je vrijeme potrebno za jedan titraj, krenut ćemo od definicije brzine preko koje ćemo integracijom izraziti vrijeme (3.20) [2]. Potrebno je izraziti sve veličine preko iste varijable kako bi mogli riješiti taj integral, a zatim odrediti granice integracije.

$$t = \int \frac{ds}{v} \quad (3.20)$$

Pogledajmo sliku (slika 9.), vidimo kako po Pitagorinom teoremu možemo brojnik zapisati kao (3.21), a nazivnik, brzinu, iz jednadžbe (8) i pomoću analize slike (slika 4.) dobivamo (3.22).

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (3.21)$$

$$v(y) = \sqrt{2g(y_0 - y)} \quad (3.22)$$

Tad jednadžba (3.20) poprima sljedeći oblik:

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \quad (3.23)$$

Izlučivanjem dy iz (3.23) dobivamo:

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy \quad (3.24)$$

Budući da želimo sve svesti na ovisnost o istoj varijabli, koja će biti kut θ , moramo sljedeće izraze pomoću derivacija jednadžbi (3.11), gdje ćemo uzeti $r_0 = h_0/4$, zapisati ovako:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/d\theta}{dy/d\theta} = \frac{2r_0(1 + \cos 2\theta)}{2r_0 \sin 2\theta} = \frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad (3.25)$$

$$y_0 - y = r_0(\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) \quad (3.26)$$

$$dy = 2r_0 \sin 2\theta d\theta \quad (3.27)$$

Nakon uvrštavanja (3.25), (3.26) i (3.27) u jednadžbu (3.24) i malo sređivanja dolazimo do:

$$t = 2 \sqrt{\frac{r_0}{g}} \int \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\theta_0}} d\theta \quad (3.28)$$

Sad nam preostaje odrediti granice integracije i riješiti integral iz jednadžbe (3.28). Kako želimo saznati period titranja, stavit ćemo granice integracije od početnog otklona θ_0 pa do ravnotežnog položaja koji se postiže za $y = 0$ i cijeli integral pomnožiti s četiri jer nam ovako postavljene granice daju jednadžbu četvrtine perioda. Iz parametrizacije cikloide (3.11) vidimo da je za $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$ pa će to biti gornja granica integracije, a konstantu θ_0 ograničit ćemo na interval $(-\pi/2, 0)$ jer nam iz parametrizacije (3.11) slijedi da se maksimalni otklon m.t. postiže za $\theta_0 = -\pi/2$. Dakle, imamo da je period titranja:

$$T = 8 \sqrt{\frac{r_0}{g}} \int_{\theta_0}^0 \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\theta_0}} d\theta \quad (3.29)$$

Integral iz jednadžbe (3.29) riješen je pomoću programa Wolfram Mathematica u vrlo kratkom vremenu (slika 13.) te naposljetku dobivamo period titranja izokronog njihala (3.30).

```
In[5]:= Unprotect[Csc];
Format[Csc[x_]] := HoldForm[1/Sin[x]];
Protect[Csc];
Timing[
  Sqrt[Integrate[Sqrt[(1 + Cos[2 x]) / (Cos[2 x] - Cos[2 a])], {x, a, 0},
    Assumptions -> a < 0 && a > -π/2]^2]]
Out[8]:= {6.625, π/2}
```

slika 13. rješenje integrala

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r_0}{g}} \quad (3.30)$$

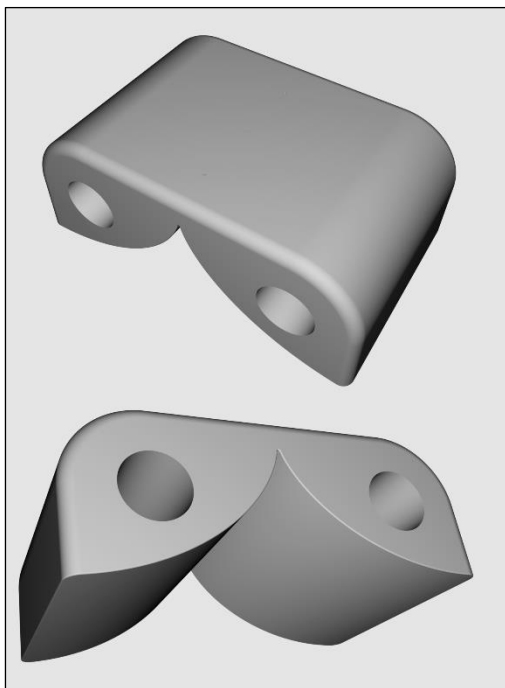
Sad vidimo da period više nema ovisnost o početnom otklonu kao što smo i očekivali. Konstrukcijom takvog njihala i mjerenjima pokazat ćemo da je njihalo čija se m.t. giba po cikloidi zaista izokrono.

3.4 Konstrukcija izokronog njihala

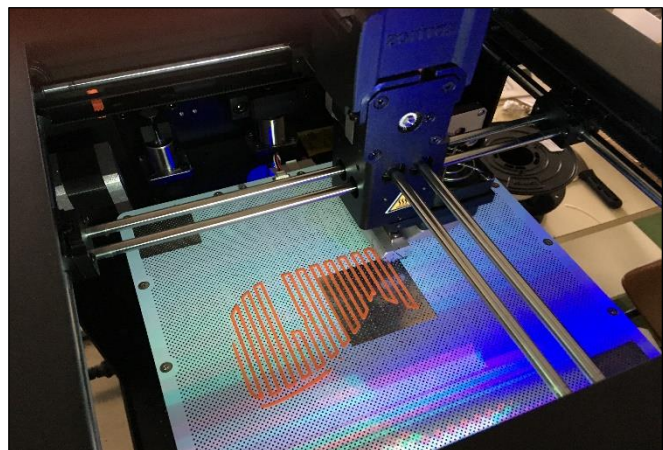
Sad kad znamo kakvu prepreku trebamo, koja će efektivno skratiti nit u pravim trenucima, možemo konstruirati izokrono njihalo. Nakon konstrukcije odradit ćemo neka mjerenja koja bi trebala pokazati da period više ne ovisi o početnom otklonu, a ako to uspijemo pomoću takvog njihala ćemo također odrediti gravitacijsku konstantu g .

Vrlo je nezgodno rukom i alatima konstruirati prepreku koja će biti točno dio cikloide kao sa slike (slika 12.) i da će se uz to protezati kroz tri dimenzije prostora. Koristeći npr. drvo kao materijal morali bi piliti i brusiti puno drvo gdje lako može doći do grešaka koje se vrlo teško mogu primijetiti. Također, uzmemo li komad lima vjerujem da ne bi bilo lako osmisliti način da ga se savine tako da on bude cikloidalan. Najbolja opcija koju pruža trenutna tehnologija je 3D printanje. Srećom fizički odsjek posjeduje jedan 3D printer, a jedini je problem to što smo ograničeni dimenzijama koje on može isprintati. Mogli smo isprintati više manjih dijelova cikloidalne prepreke, odnosno nosača njihala, pa ih spojiti u cjelinu. Ipak, radi uštede materijala odlučeno je da će se sve printati u jednom komadu najvećih mogućih dimenzija.

Printeru trebamo nekako zadati što će isprintati, a to je učinjeno pomoću programa SOLIDWORKS. U programu je u dvije dimenzije konstruiran dio cikloide (3.11) s parametrom zadanim na segmentu $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, a zatim je ta krivulja protegnuta okomito kroz treću dimenziju i malom doradom slika (slika 14.) nam pokazuje kako bi nosač njihala trebao izgledati.



slika 14. prikaz nosača njihala iz programa SOLIDWORKS



slika 15. proces 3D printanja

Rupe u nosaču su ovdje radi uštede materijala, a kasnije ćemo vidjeti kako će nam one dobro poslužiti u postavljanju njihala.

Također vidimo i kako je izgledao početak procesa printanja i dio samog 3D printera (slika 15.).

3.5 Mjerni postav i izokrono njihalo

Za neophodan dio njihala, nit i uteg, posjetio sam dućan s priborom za ribolov. Kao nit koristili smo najlon debljine **0.08 mm** nosivosti **1.4 kg**, a kao materijalnu točku, odnosno uteg uzeli smo olovnu kuglicu mase **2.9 g**. Bitne stavke koje su ostvarene ovim odabirom su da je duljina niti puno veća od radijusa utega, što je očito iz slike (*slika 16.*), i da je nit cijelo vrijeme napeta, nerastezljiva i zanemarive mase. Za mjerenje perioda ponovo smo koristili zaporna vrata spojena na digitalni mjerač kao i pri mjerenju konstante ***g*** pomoću matematičkog njihala. Kako bi mjerenje bilo što preciznije morali smo paziti da je nosač fiksiran te da mu je smjer gornje površine paralelan s gravitacijskim poljem Zemlje. Kako bi to postigli na njihalo smo odozgo stavili libelu (*slika 17.*).

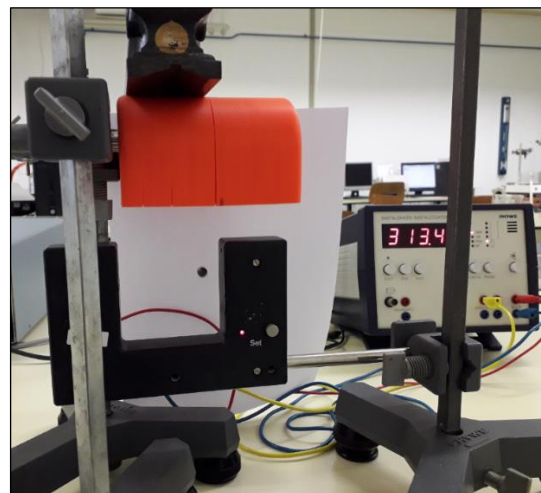


slika 16. izokrono njihalo



slika 17. libela

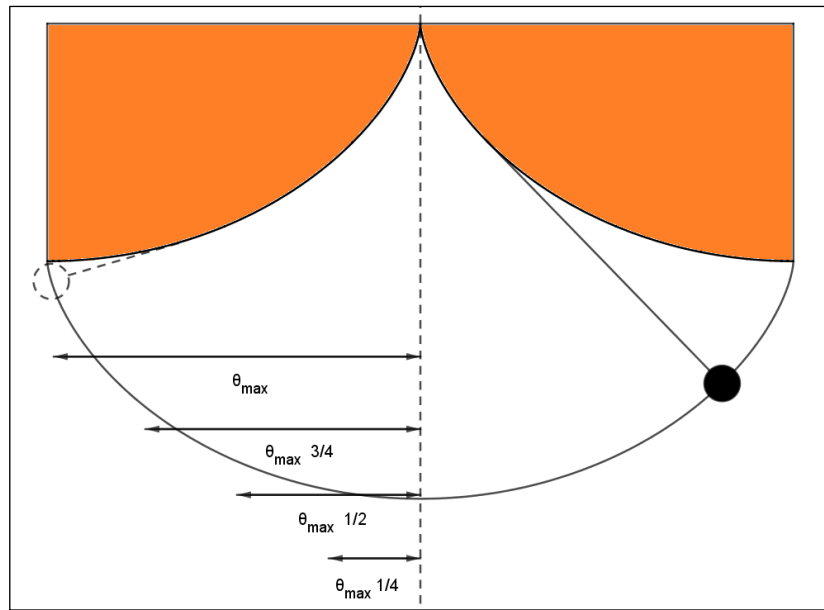
Zaporna vrata ponovo su postavljena tako da njihalo prekine lasersku zraku kad prolazi ravnotežnim položajem (*slika 18.*). Duljina niti je četiri duljine radijusa kružnice koja kotrljanjem po pravcu generira obje cikloide (*slika 12.*), ili duljina polovine luka cikloide.



slika 18. mjerni postav

3.5.1 Izokronost njihala

Kako bi provjerili izokronost njihala mjerit ćemo periode titranja za četiri različita otklona. Otklone odabiremo po pravilu sa slike (slika 19.). Mjerit ćemo poluperiod tri puta nakon što uteg prođe kroz ravnotežni položaj sa smjerom brzine u desno i kad prođe kroz ravnotežni položaj sa smjerom brzine u lijevo. Mjerenjem dobivamo tablicu (tablica 2.).

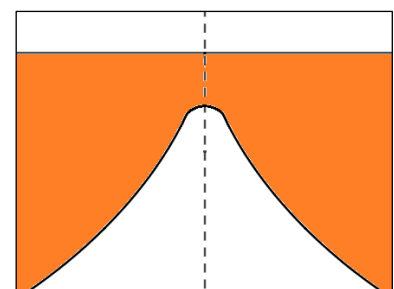


slika 19. početni otkloni

Tablica 2. mjerenje perioda titranja izokronog njihala

otklon	$T_L/2$			$T_D/2$			\bar{T}^2 (s ²)	$\frac{ \bar{T}_{uk} - \bar{T} }{\bar{T}_{uk}}$ %
	1	2	3	1	2	3		
	(ms)			(ms)				
θ_{max}	312.8	312.6	312.1	313.5	313.6	313.6	0.39196	0.096
$\frac{3}{4}\theta_{max}$	312.3	312.1	312.1	313.5	313.7	313.7	0.39163	0.053
$\frac{1}{2}\theta_{max}$	312.5	312.4	312.3	313.6	313.8	313.7	0.39200	0.101
$\frac{1}{4}\theta_{max}$	310.6	310.5	310.4	313.4	313.4	313.4	0.38925	0.250

Zadnji red tablice pokazuje relativno odstupanje perioda za četiri različita otklona u odnosu na period koji se dobiva kao srednja vrijednost svih mjerenja \bar{T}_{uk} . Možemo vidjeti da je najveće odstupanje **0.25 %** iz čega možemo zaključiti kako njihalo stvarno ima isti period za svaki početni otklon koji uzmemo pa se prema tome radi o izokronom njihalu. Pretpostavljam da je greška najveća za najmanji otklon jer se nit nepravilno priljubljuje uz cikloиду u području šiljka (slika 20.).



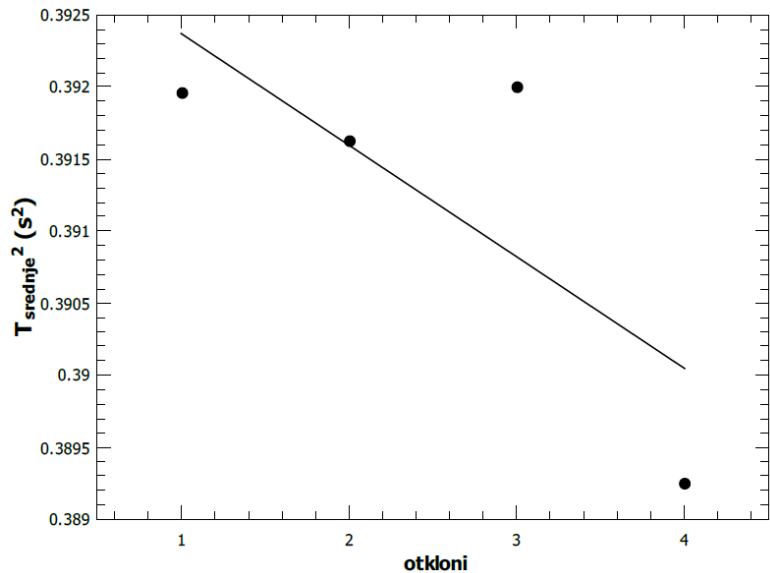
slika 20. realan izgled šiljka cikloide

3.5.2 Određivanje konstante r_0 izokronog njihala

Programom SOLIDWORKS konstanta r_0 ima zadanu vrijednost koja je postavljena na **2.5 cm**. Linearnom regresijom dobivenih podataka dobiti ćemo izmjerenu vrijednost r_{0m} i provjeriti relativno odstupanje od zadane vrijednosti te grešku mjerenja. Graf (*graf 2.*) na osi apscisa imat će četiri različita otklona koja smo zadali, a na osi ordinata stavit ćemo kvadrat srednje vrijednosti perioda za odgovarajući otklon.

Izgled ovog grafa ne smije nas zavarati. Iako se na prvu čini da je nagib velik pogledamo li vrijednosti na ordinati uviđamo da je razlika između najveće i najmanje vrijednosti vrlo mala. Sredimo li malo jednadžbu (3.30) dobivamo (3.31) u kojoj možemo prepoznati a i b :

$$\bar{T}^2 = \frac{(4\pi)^2 r_0}{g} \quad (3.31)$$



graf 2. ovisnost kvadrata srednje vrijednosti perioda o otklonima iz tablice 2.

Linearnom regresijom dobivamo nagib pravca a (3.32) i odsječak na ordinati b (3.33). Izračunati ćemo i relativnu pogrešku mjerenja odsječka b .

$$a = 0 = (0.0005 \pm 0.0008) \quad (3.32)$$

$$b = \frac{(4\pi)^2 r_0}{g} = (0.393 \pm 0.001) \text{ s}^2 \quad R = 0.25\% \quad (3.33)$$

Nagib pravca jednak je nuli unutar statističke greške, što se slaže s jednadžbom (3.31). Naposljetku iz mjerenog odsječka na ordinati b dobivamo mjereni radijus kružnice, koja kotrljanjem po pravcu dalje cikolidu (3.11), r_{0m} (3.34) za koju ćemo također izračunati pripadnu pogrešku. Uzeti ćemo tabličnu vrijednost gravitacijske konstante (2.16). Relativna pogreška je ista kao i kod mjerenja b jer je ovisnost te dvije varijable linearna pa dobivamo:

$$r_{0m} = (0.02441 \pm 0.00006) \text{ m} \quad R = 0.25\% \quad (3.34)$$

Usporedbom srednje vrijednosti mjerenog radijusa r_{0m} i zadane vrijednosti radijusa r_0 uočavamo da zadana vrijednost nije unutar greške mjerenja iz kasnije navedenih razloga.

3.5.3 Određivanje gravitacijske konstante g pomoću izokronog njihala

Kako bi usporedili preciznosti mjerenja gravitacijske konstante pomoću matematičkog njihala i izokronog njihala provesti ćemo sljedeći račun. Za određivanje gravitacijske konstante g možemo koristiti prethodno mjerenje tako što ćemo sada uzeti zadanu konstantu izokronog njihala $r_0 = 2.5 \text{ cm}$. Ponovo ćemo pogledati odsječak na osi ordinata b , a iz mjerenja dobivamo mjerenu gravitacijsku konstantu g_m (3.35) za koju ćemo također izračunati pripadnu pogrešku tako da ćemo izračunati \bar{g}_m preko \bar{b} te odrediti standardnu devijaciju σ_{g_m} pomoću standardne devijacije σ_b na slijedeći način:

$$\sigma_{g_m} = \left| \left(\frac{\partial g_m}{\partial b} \right) \sigma_b \right| = \frac{4\pi^2 r_0}{b^2} \sigma_b = 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$g_m = (10.05 \pm 0.03) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad R = 0.3\% \quad (3.35)$$

Usporedbom srednje vrijednosti mjerene gravitacijske konstante i tablične gravitacijske konstante uočavamo da je relativno odstupanje 2.5%.

Za razliku od mjerenja matematičkim njihalom, s kojim je relativna greška 2%, ovdje se dobije gotovo red veličine manja relativna greška, tj. mjerenje je puno preciznije. Doduše, pogledamo li relativna odstupanja od tablične vrijednosti (2.16) vidjet ćemo da je mjerenje matematičkim njihalom točnije. Razlog većeg odstupanja od tablične vrijednosti izokronog njihala mogao bi se skrivati u dimenzijama njihala, neprecizno postavljenoj duljini niti ili u objašnjenju slike (*slika 20.*). Stoga, možemo zaključiti kako bi ovaj postav mogao biti točniji ako uklonimo navedene nedostatke; povećati sam postav, preciznije postaviti duljinu niti i usavršiti šiljak cikloide. Tada bi izokrono njihalo bio i precizniji i točniji postav za mjerenje gravitacijske konstante od matematičkog njihala.

4 Literatura

[1] Sears and Zemansky's University Physics with modern physics, 13th Edition, Young and Freeman, PEARSON, 2013.

[2] Isochronic Pendulum, Sumit Kumar, 2011. (<https://arxiv.org/pdf/1107.5664.pdf>)

[3] Things are seldom what they seem – Christiaan Huygens, The pendulum and the cycloid, Alan Emmerson, 2004.

[4] Pendulum (mathematics), en.wikipedia.org,

([https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)))

5 Sažetak

U ovom radu proučavali smo matematičko njihalo te ga uspjeli modificirati u izokrono njihalo, ono kojemu je period titranja za svaki otklon iz ravnoteže jednak. Provedbom matematičkih izračuna došli smo do odgovora kako bi izokrono njihalo trebalo izgledati te smo ga i izradili. Smislili smo mjerni postav i proveli potrebna mjerenja te potvrdili izokronost njihala. Također, proveli smo mjerenja gravitacijske konstante Zemlje i dobili vrlo precizne rezultate.

6 Summary

In this work we looked at a simple gravity pendulum and managed to modify it into an isochronous pendulum, i.e., a pendulum for which the period of oscillation is independent of the initial pendulum displacement. We mathematically deduced what shape an isochronous pendulum should be and we built one. We experimentally confirmed that the constructed pendulum is isochronous and measured the surface gravity constant with great precision.

7 Zaključak

Matematičkim proračunima, konstrukcijom izokronog njihala i provedenim mjerenjima zaključujemo da je izokrono njihalo puno preciznije za određivanje gravitacijske konstante, ali ne i točnije od matematičkog njihala. Kad bi se njihalo usavršilo postigli bi i potrebnu točnost, a time bi izokrono njihalo postalo bolji odabir od matematičkog njihala za određivanje gravitacijske konstante Zemlje.

8 Životopis

Adam Pinek rođen je 26. listopada 1992. u Zagrebu. Pohađao je osnovnu školu Ivana Perkovca u Šenkovcu, a 2007. godine upisuje smjer „Tehničar za računalstvo“ u SŠ Bana Josipa Jelačića u Zaprešiću. Nakon završene srednje škole, kreće na integrirani nastavnički studij matematike i fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 2011. godine.